

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Інженерно-енергетичний факультет

Кафедра вищої та прикладної математики

ВИЩА МАТЕМАТИКА:

Диференціальне та інтегральне числення

функції однієї змінної:

методичні рекомендації

для виконання самостійної роботи

здобувачами початкового рівня (короткий цикл)

вищої освіти ОПП «АгроЯнженерія»

спеціальності 208 «АгроЙнженерія»

денної форми здобуття вищої освіти

МИКОЛАЇВ
2022

УДК 51
В55

Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету МНАУ (протокол №5 від 27.01.2022 р.)

Укладачі:

- О.В. Бойчук – к.ф.-м.н., старший викладач кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського національного аграрного університету;
- Є.Ю. Борчик – к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського національного аграрного університету.
- С.І. Богданов – старший викладач кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського національного аграрного університету;
- О.В. Шептилевський – к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського національного аграрного університету;

Рецензент:

- Рецензент:
Дармосюк В.М. – доцент кафедри фізики та математики Миколаївського національного університету ім. В.О. Сухомлинського.

ЗМІСТ

ВСТУП	4
Модуль 05 „Диференціальне числення функції однієї змінної”	5
M.05.П3.01. ПОХІДНІ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ. ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦІОВАННЯ	5
M.05.П3.02. ЗМІСТ ПОХІДНОЇ ФУНКЦІЇ	6
M.05.П3.03. ПОХІДНА СКЛАДЕНОЇ ФУНКЦІЇ. ЛОГАРИФМІЧНЕ ДИФЕРЕНЦІОВАННЯ ...	8
M.05.П3.04. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ, ЩО ЗАДАНА НЕЯВНО АБО ПАРАМЕТРИЧНО	11
M.05.П3.05. ПОХІДНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ	13
M.05.П3.06. ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ	15
M.05.П3.07. РОЗКРИТТЯ НЕВИЗНАЧЕННОСТЕЙ ЗА ПРАВИЛОМ ЛОПІАЛЯ	17
M.05.П3.08. ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ	19
M.05.П3.09. ЗАДАЧІ НА ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ	23
Модуль 07 „Інтегральне числення функції однієї змінної. Невизначений інтеграл”	25
M.07.П3.01. БЕЗПОСЕРЕДНЄ ІНТЕГРУВАННЯ	25
M.07.П3.02. ЗМІНА ЗМІННОЇ ПІД ЗНАКОМ ДИФЕРЕНЦІАЛА	27
M.07.П3.03. ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ	30
M.07.П3.04. ІНТЕГРУВАННЯ НАЙПРОСТИШИХ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ	33
M.07.П3.05. ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ	35
M.07.П3.06. ІНТЕГРУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ВИРАЗІВ	38
M.07.П3.07. ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ВИРАЗІВ	42
Модуль 08 „Інтегральне числення функції однієї змінної. Визначений інтеграл”	47
M.08.П3.01. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ	47
M.08. П3.02. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ. ФОРМУЛА НЬЮТОНА – ЛЕЙБНІЦА	48
M.08. П3.03. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ВІД ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНИХ, ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ТА ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ	52
M.08. П3.04. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ ТА ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ	56
M.08. П3.05. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ ДО ЗАДАЧ ГЕОМЕТРІЙ	59
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	63

ВСТУП

Диференціальнечислення є основним розділом курсу вищої математики в цілому. У методичних рекомендаціях розглядаються завдання для самостійної роботи та роз'яснення прикладів виконання подібних завдань з наступних змістових модулів: «Диференціальне числення функції однієї змінної», «Інтегральне числення функції однієї змінної. Невизначений інтеграл», «Інтегральне числення функції однієї змінної. Визначений інтеграл».

Матеріал викладено таким чином, щоб максимально допомогти студентам оволодіти методами та набути основних навиків по знаходженню похідних та інтегралів функцій та їх застосувань.

Методичні рекомендації створено відповідно до програми курсу «Вища математика» для здобувачів освітнього рівня «Молодший бакалавр» початкового рівня (короткий цикл) спеціальності 208 «Анроінженерія», але їх можуть використовувати студенти інших спеціальностей, для яких програмою передбачено вивчення курсу «Вища математика», зокрема при дистанційній формі навчання.

Модуль 05 „Диференціальне числення функції однієї змінної”
M.05.P3.01. ПОХІДНІ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ. ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ
1. Основні поняття та теореми
Похідні елементарних функцій

1	$(C)' = 0$	7	$(a^x)' = a^x \ln a$	13	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
2	$x' = 1$	8	$(e^x)' = e^x$	14	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
3	$(x^n)' = nx^{n-1}$	9	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	15	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4	$(x^{-n})' = -\frac{n}{x^{n+1}}$	10	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	16	$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
5	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	11	$(\sin x)' = \cos x$	17	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
6	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	12	$(\cos x)' = -\sin x$	18	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Правила диференціювання

Нехай задано диференційовані функції $u = u(x)$ та $v = v(x)$.

1. Похідна суми/різниці диференційованих функцій дорівнює сумі/різниці похідних цих функцій $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

2. Похідна добутку двох диференційованих функцій дорівнює сумі добутку похідної першої функції на другу та добутку похідної другої функції на першу: $(u \cdot v)' = u'v + uv'$.

3. Похідна частки: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Наслідок 1. Постійний множник можна виносити за знак похідної: $(Cu)' = Cu'$; $\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{u'}{C}$.

Наслідок 2. $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$.

Наслідок 3. $\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{C}{v^2}$.

3. Завдання для самостійного виконання

Варіант			
1	$y = \frac{1}{2}x^3 - 3e^x + 6$	$y = \log_3 x \cdot 2^x$	$y = \frac{4e^x}{\sqrt[3]{x^2}}$; $y = \frac{4 + \cos x}{\sin x}$
	$y = \cos x - 2^x - \ln x + \operatorname{tg} x$	$y = x^2 \operatorname{arctg} x$	
2	$y = \frac{1}{5}x^3 - 2\sqrt{x} + 2$	$y = \sqrt{x^3} \log_7 x$	$y = \frac{x+1}{e^x}$; $y = \frac{1-e^x}{\sin x}$
	$y = \sin x - \sqrt{x} + \operatorname{arc cos} x$	$y = 3^x \sin x$	
3	$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{x} - 8x + 5$	$y = (x^2 + 2x)3^x$	$y = \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$; $y = \frac{5+\sin x}{\cos x}$
	$y = 3^x + 6\cos x - 4\ln x + 2$	$y = \sin x \cdot \ln x$	
4	$y = \frac{1}{7}x^7 - 2\log_6 x - 3x$	$y = (\sqrt{x} + 2)\log_3 x$	$y = \frac{4x^2}{3+x^2}$; $y = \frac{5+\sin x}{4-\cos x}$
	$y = e^x + 6\sin x - 5\log_3 x + 2$	$y = \cos x \cdot \log_2 x$	
5	$y = \frac{1}{6}x^4 - \frac{5}{2}\sqrt[5]{x^2} + 3$	$y = \frac{1}{3}x^9 \log_4 x$	$y = \frac{12^x}{9+x^2}$; $y = \frac{1-\sin x}{\cos x}$
	$y = \operatorname{tg} x - 6x + 4^x$	$y = \operatorname{arccos} x \cdot 6^x$	

6	$y = \frac{1}{x} - x^2 + 3 \log_2 x$	$y = \left(x + \frac{1}{x} \right) 5^x$	$y = \frac{x^2 - 3x + 3}{\sqrt{x} - 1}; \quad y = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$
	$y = \cos x - 5x + 7^x$	$y = \arctgx \cdot e^x$	
7	$y = -\frac{1}{5}x^3 + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} - 4$	$y = \left(\sqrt{x} + \frac{2}{x} \right) \log_3 x$	$y = \frac{4 - x^3}{e^x}; \quad y = \frac{\cos x + \sin x}{x}$
	$y = 7 \sin x - 3x^4 + \arccos x$	$y = x^4 \operatorname{arc tg} x$	
8	$y = \frac{3^x}{2} - \frac{7}{2}x^2 - 2$	$y = (4x+1)\sqrt[3]{x^2}$	$y = \frac{\log_4 x}{e^x + 1}; \quad y = \frac{\cos x - \sin x}{2x}$
	$y = 3 \cos x - 2x^3 + \arccos x$	$y = x^3 \operatorname{arc ctg} x$	
9	$y = -\frac{1}{3}x^3 + e^x + 3x - 2$	$y = \left(2^x + \frac{3}{x} \right) \log_{11} x$	$y = \frac{2x^3 + 1}{\sqrt{x}}; \quad y = \frac{\sin x}{6 - 2^x}$
	$y = \sqrt{x} + 5x - 5 \arccos x + 4$	$y = (\cos x + 1) \ln x$	
10	$y = -\frac{1}{x} + 2 \log_3 x - 9$	$y = (x^2 + x)\sqrt[4]{x^3}$	$y = \frac{4^x}{x^2 + 3}; \quad y = \frac{3 + \sin x}{9 - e^x}$
	$y = e^x - \sqrt{x} + 5 - 5 \cos x + 4x$	$y = (\ln x + 1) \cos x$	
11	$y = -\frac{1}{6}\sqrt{x^3} + 2^x - 4$	$y = \left(e^x + \frac{3}{x} \right) \sqrt{x}$	$y = \frac{x^2 + 1}{\log_3 x}; \quad y = \frac{x - e^x}{\cos x}$
	$y = 3\sqrt{x} - \arccos x - 7 \ln x$	$y = (x^3 + \cos x)e^x$	
12	$y = -\log_3 x + 3x - 5$	$y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right) 2^x$	$y = \frac{x^3}{2^x + 1}; \quad y = \frac{\cos x - e^x}{x}$
	$y = 3\sqrt{x} + \arcsin x - 7 \log_2 x$	$y = (x^3 + \operatorname{arc cos} x) \sin x$	
13	$y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{2}\sqrt{x} - 2$	$y = \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) \sqrt[3]{x}$	$y = \frac{3^x}{x^2 + 12}; \quad y = \frac{\sin x}{\sin x - \cos x}$
	$y = 4 \operatorname{tg} x + 4x^2 + \arcsin x - \sqrt{x}$	$y = (\operatorname{tg} x + \ln x) \cos x$	
14	$y = -\frac{1}{3}x^6 + e^x - 1$	$y = (x^3 - 2^x) \sqrt{x}$	$y = \frac{9 - x^2}{\log_4 x}; \quad y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$
	$y = 4 \sin x - x^{12} + \operatorname{arctg} x - \sqrt{x}$	$y = (\operatorname{tg} x + \log_8 x) \arccos x$	
15	$y = \frac{1}{3} \log_2 x - \frac{4}{9}\sqrt[9]{x^4} - 7x$	$y = \sqrt{x} \left(e^x + \frac{1}{x} \right)$	$y = \frac{8x}{x^2 + 4}; \quad y = \frac{x - \cos x}{\sin x}$
	$y = 7 \operatorname{tg} x - x^3 + 5^x$	$y = 3^x \cdot \operatorname{tg} x \cdot \sqrt{x}$	
16	$y = \frac{1}{6} \log_{13} x - \frac{4}{9}(\sqrt[5]{x^3})^2 - 7^x$	$y = \sqrt{x} \left(\log_{17} x + \frac{1}{x} \right)$	$y = \frac{9 \log_3 x - e^x}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}; \quad y = \frac{x \cos x}{1 - \sin x}$
	$y = 6 \operatorname{arctg} x - x^4 + 7e^x$	$y = 2^x \cdot \operatorname{ctg} x \cdot \sqrt{x}$	

М.05.ПЗ.02. ЗМІСТ ПОХІДНОЇ ФУНКІЇ

1. Основні поняття та теореми

Геометрично похідна являє собою кутовий коефіцієнт дотичної лінії до графіка функції $y = f(x)$ у точці x , тобто $y' = \operatorname{tg} \alpha$, де α – кут нахилу дотичної лінії.

Рівняння дотичної у точці $(x_0; y_0)$ до графіка функції $y = f(x)$: $y = y(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Рівняння нормалі до графіка функції $y = f(x)$: $y = y(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Нехай матеріальна точка рухається по траєкторії згідно закону руху $s = s(t)$. Механічно похідна являє собою миттєву швидкість матеріальної точки, тобто швидкість в момент часу t , тобто $s' = v$.

Нехай швидкість матеріальної точки змінюється згідно закону $v = v(t)$. Механічно похідна являє собою миттєве прискорення матеріальної точки, тобто прискорення в момент часу t , тобто $v' = a$.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $f(x) = x^3 - 2x$ у точці $x_0 = 0$?

Розв'язання: $f'(x) = 3x^2 - 2$; $f'(0) = -2$.

Відповідь: -2 .

2. Знайти кутовий коефіцієнт нормалі до графіка функції $f(x) = 2x - x^3$ у точці $x_0 = 0$?

Розв'язання: $f'(x) = 2 - 3x^2$; $f'(0) = 2$; $k_{\perp} = -\frac{1}{2} = -0,5$.

Відповідь: $-0,5$.

3. Скласти рівняння дотичної та нормалі до графіка кривої $y = x^2$ в точці $(1;1)$.

Розв'язання:

$y' = 2x$; $y'(1) = 2$. Рівняння дотичної до графіка функції: $y = 1 + 2(x - 1)$, $y = 2x - 1$. Рівняння

нормалі до графіка функції: $y = 1 - \frac{1}{2}(x - 1)$, $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

Відповідь: $y = 2x - 1$; $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

4. Скласти рівняння дотичної та нормалі до графіка кривої $y = 6\sqrt[3]{x} - \frac{16\sqrt[4]{x}}{3}$ в точці $x_0 = 1$.

Розв'язання:

$y = 6x^{\frac{1}{3}} - \frac{16}{3}x^{\frac{1}{4}}$; $y' = \frac{6}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$; $y(1) = 6 - \frac{16}{3} = \frac{2}{3}$; $y'(1) = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$.

Рівняння дотичної до графіка функції: $y = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}(x - 1)$, $y = \frac{2}{3}x$ або $2x - 3y = 0$. Рівняння

нормалі до графіка функції: $y = \frac{2}{3} - \frac{3}{2}(x - 1)$, $y = -\frac{3}{2}x + \frac{13}{6}$ або $9x + 6y - 13 = 0$.

Відповідь: $2x - 3y = 0$; $9x + 6y - 13 = 0$.

5. Тіло рухається за законом $s(t) = t^3 + 2t$ (час вимірюється в секундах, шлях у метрах).

Визначте швидкість його руху в момент часу $t = 2c$.

Розв'язання: $s'(t) = 3t^2 + 2$; $v(t) = s'(2) = 3 \cdot 2^2 + 2 = 14 \text{ м/с}$.

Відповідь: 14 м/с .

6. Швидкість тіла змінюється за законом $v(t) = 3t^2 + 4t$ (час вимірюється в секундах, швидкість у метрах за секундах). Визначте його прискорення в момент часу $t = 1c$.

Розв'язання: $v'(t) = 6t + 4$; $a(1) = v'(1) = 6 \cdot 1 + 4 = 10 \text{ м/с}^2$.

Відповідь: 10 м/с^2 .

7. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 4t$ (час вимірюється в секундах, шлях у метрах). Визначте прискорення його руху в момент $t = 1c$.

Розв'язання: $s'(t) = \frac{2}{3} \cdot 3t^2 - 2 \cdot 2t + 4 = 2t^2 - 4t + 4$; $v'(t) = 2 \cdot 2t - 4 = 4t - 4$;

$a(1) = v'(1) = 4 \cdot 1 - 4 = 0 \text{ м/с}^2$.

Відповідь: 0 .

3. Завдання для самостійного виконання

Скласти рівняння дотичної та рівняння нормалі до графіка кривої $y = f(x)$ в точці x_0 .

Варіант				
1	$y = \frac{4\beta x - x^2}{4\beta}$	$x_0 = 2$	$y = 2\beta x^2 + 3x - 1$	$x_0 = -2$
2	$y = x - \beta x^3$	$x_0 = -1$	$y = x^2 + 8\beta\sqrt{x} - 32$	$x_0 = 4$

3	$y = \beta x + \sqrt{x^3}$	$x_0 = 1$	$y = \frac{\beta x^2 - 2\beta x + 6}{\beta x^2}$	$x_0 = -8$
4	$y = \frac{\beta + \sqrt{x}}{\beta - \sqrt{x}}$	$x_0 = 4$	$y = 8\beta\sqrt[4]{x} - 70$	$x_0 = 16$
5	$y = 2\beta x^2 - 3\beta x + 1$	$x_0 = 1$	$y = \sqrt[3]{x^2} - 2\beta$	$x_0 = 8$
6	$y = 2\beta\sqrt{x} - 3\beta\sqrt[3]{x}$	$x_0 = 64$	$y = \frac{x^3 + 2\beta}{x^3 - 2\beta}$	$x_0 = 2$
7	$y = 2x^2 + 3\beta$	$x_0 = -1$	$y = \frac{x^{20} + 6\beta}{x^4 + 4\beta}$	$x_0 = 1$
8	$y = \frac{2x + \beta}{x}$	$x_0 = 1$	$y = -\frac{2(x^8 + 2\beta)}{3(x^4 + \beta)}$	$x_0 = 1$
9	$y = \frac{x^5 + \beta}{x^4 + \beta}$	$x_0 = 1$	$y = \frac{x^{16} + 9}{1 - 5\beta x^2}$	$x_0 = 1$
10	$y = 3(\beta\sqrt[3]{x} - 2\beta\sqrt{x})$	$x_0 = 1$	$y = \frac{1}{3x + \beta}$	$x_0 = 2$
11	$y = \frac{x}{x^2 + \beta}$	$x_0 = -2$	$y = \frac{x^2 + 3x + 3}{3\beta}$	$x_0 = 2$
12	$y = \frac{2x}{x^2 + \beta}$	$x_0 = 1$	$y = -2(\sqrt[3]{x} + 3\beta\sqrt{x})$	$x_0 = 1$
13	$y = \frac{1 + \beta x^2}{\beta + x^2}$	$x_0 = 1$	$y = \beta\sqrt{x} - (\beta + 1)\sqrt[3]{x} + 2$	$x_0 = 1$
14	$y = 3\beta\sqrt[4]{x} - \beta\sqrt{x}$	$x_0 = 1$	$y = \frac{3x - 2x^3}{3\beta}$	$x_0 = 1$
15	$y = \frac{\beta x^2}{10} + \beta$	$x_0 = 2$	$y = \frac{x^2 - 2x - 3}{4\beta}$	$x_0 = 4$

М.05.ПЗ.03. ПОХІДНА СКЛАДЕНОЇ ФУНКЦІЇ. ЛОГАРИФМІЧНЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

1. Основні поняття та теореми

Нехай змінна y є функцією від змінної u : $y = f(u)$, а змінна u є функцією від незалежної змінної x : $u = \varphi(x)$. Якщо $y = f(u)$ та $u = \varphi(x)$ – диференційовані функції своїх аргументів, то похідна складеної функції існує та рівна похідній даної функції за проміжним аргументом, помножений на похідну проміжного аргументу за незалежною змінною x : $y' = f'(u)u' = f'(\varphi(x))\varphi'(x)$.

Логарифмічне диференціювання застосовують до функції $y = f(x)^{\varphi(x)}$. Алгоритм:

Крок 1. Прологарифмуємо обидві частини рівності: $\ln y = \ln f(x)^{\varphi(x)}$;

Крок 2. За властивістю логарифма запишемо: $\ln y = \varphi(x) \ln f(x)$;

Крок 3. Диференціюємо: $\frac{1}{y}y' = \varphi'(x) \ln f(x) + \varphi(x)(\ln f(x))' = \varphi'(x) \ln f(x) + \frac{\varphi(x)f'(x)}{f(x)}$;

Крок 4. Помножимо обидві частини на y : $y' = y \left(\varphi'(x) \ln f(x) + \frac{\varphi(x)f'(x)}{f(x)} \right)$;

Крок 5. Замінимо y на $f(x)^{\varphi(x)}$: $y = f(x)^{\varphi(x)} \left(\varphi'(x) \ln f(x) + \frac{\varphi(x)f'(x)}{f(x)} \right)$.

Якщо треба продиференціювати добуток або (i) частку функцій, часто вигідно спочатку прологарифмувати за основою e , а потім уже приступити до диференціювання.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти похідну функції $y = (4^{\arcsin x} + \sin^2 6x)^6$.

Розв'язання:

Функція y – складена. Зовнішня функція – степенева, а внутрішня функція основи – це сума двох складених функцій. Зовнішня функція першої – показникова, а внутрішня – обернено тригонометрична. Зовнішня функція другої – степенева, а внутрішня функція – тригонометрична.

$$\begin{aligned} y' &= 6(4^{\arcsin x} + \sin^2 6x)^5 (4^{\arcsin x} + \sin^2 6x)' = 6(4^{\arcsin x} + \sin^2 6x)^5 \left((4^{\arcsin x})' + (\sin^2 6x)' \right) = \\ &= 6(4^{\arcsin x} + \sin^2 6x)^5 \left(\frac{4^{\arcsin x} \ln 4}{\sqrt{1-x^2}} + 12 \sin 6x \cos 6x \right). \end{aligned}$$

Відповідь: $y' = 6(4^{\arcsin x} + \sin^2 6x)^5 \left(\frac{4^{\arcsin x} \ln 4}{\sqrt{1-x^2}} + 12 \sin 6x \cos 6x \right)$.

2. Знайти похідну функції $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^3+5x^2-2}}$.

Розв'язання:

Похідну функцію y' запишемо за формулою похідної частки:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x+1)'(\sqrt{x^3+5x^2-2}) - (x+1)(\sqrt{x^3+5x^2-2}')}{(\sqrt{x^3+5x^2-2})^2} = \frac{\sqrt{x^3+5x^2-2} - \frac{(x+1)(x^3+5x^2-2)'}{2\sqrt{x^3+5x^2-2}}}{x^3+5x^2-2} = \\ &= \frac{2(x^3+5x^2-2) - 3x^3 - 13x^2 - 10x}{2(x^3+5x^2-2)\sqrt{x^3+5x^2-2}} = \frac{2x^3 + 10x^2 - 4 - 3x^3 - 13x^2 - 10x}{2(x^3+5x^2-2)\sqrt{x^3+5x^2-2}} = \frac{-x^3 - 3x^2 - 10x - 4}{2(\sqrt{x^3+5x^2-2})^3}. \end{aligned}$$

Відповідь: $y' = -\frac{x^3 + 3x^2 + 10x + 4}{2(\sqrt{x^3+5x^2-2})^3}$.

3. Знайти похідну функції $y = (x+5)^{\operatorname{arctgx}}$.

Розв'язання:

$$\ln y = \ln(x+5)^{\operatorname{arctgx}} = \operatorname{arctgx} \cdot \ln(x+5); \frac{y'}{y} = \frac{1}{1+x^2} \cdot \ln(x+5) + \operatorname{arctgx} \cdot \frac{1}{x+5};$$

$$y' = y \left[\frac{1}{1+x^2} \cdot \ln(x+5) + \operatorname{arctgx} \cdot \frac{1}{x+5} \right] = (x+5)^{\operatorname{arctgx}} \left[\frac{1}{1+x^2} \cdot \ln(x+5) + \operatorname{arctgx} \cdot \frac{1}{x+5} \right].$$

Відповідь: $y' = (x+5)^{\operatorname{arctgx}} \left[\frac{1}{1+x^2} \ln(x+5) + \frac{\operatorname{arctgx}}{x+5} \right]$.

4. Знайти похідну функції $y = (1 - \sin 10x)^{x^5}$.

Розв'язання:

$$\ln y = \ln(1 - \sin 10x)^{x^5} = x^5 \ln(1 - \sin 10x); \frac{y'}{y} = 5x^4 \ln(1 - \sin 10x) + x^5 \frac{10 \cos 10x}{1 - \sin 10x};$$

$$y' = y \left[5x^4 \ln(1 - \sin 10x) + \frac{10x^5 \cos 10x}{1 - \sin 10x} \right] = (1 - \sin 10x)^{x^5} \left[5x^4 \ln(1 - \sin 10x) + \frac{10x^5 \cos 10x}{1 - \sin 10x} \right].$$

Відповідь: $y' = (1 - \sin 10x)^{x^5} \left[5x^4 \ln(1 - \sin 10x) + \frac{10x^5 \cos 10x}{1 - \sin 10x} \right]$.

3. Завдання для самостійного виконання

1.	$y = \frac{3x-4}{\sqrt{x^3+3x-2}}; y = (3^{\sin 2x} - \cos^2 2x)^3; y = \ln \arcsin \sqrt{1-x^2}; y = (2x+3)^{\operatorname{tg} x}; y = (\sin \sqrt{x})^{\ln \sin x}$
2.	$y = \frac{x+3}{\sqrt{x^3-6x-9}}; y = (2^{\arcsin x} + \arccos x)^4; y = \ln \operatorname{tg} x^3; y = (1+\cos x)^{x^2}; y = (\arcsin x)^{\sqrt{1-x^2}}$
3.	$y = \frac{2x}{\sqrt{x^3-5x^2+3}}; y = (3^{\cos 3x} + \sin 3x)^3; y = \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{2x-1}; y = (\operatorname{tg} x)^{\sin x}; y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^x$
4.	$y = \frac{3x}{\sqrt{x^3-4x^2+1}}; y = \ln \sqrt[4]{\frac{3x^2+2}{x^3+2x}}; y = \arcsin \sqrt{1-4x^2}; y = (x^3+2x)^{\sin x}; y = x^{e^{\operatorname{arctg} x}}$
5.	$y = \frac{4x}{\sqrt{x^3+5x^2-2}}; y = (5^{\operatorname{tg} 2x} - x^2)^3; y = \ln \operatorname{arctg} \sqrt{x-1}; y = (x+1)^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}; y = (\sin x + \ln x)^{\frac{1}{x}}$
6.	$y = \frac{4x+1}{\sqrt{x^2-4x-2}}; y = (4^{\operatorname{tg} \sqrt{x}} + \sqrt{x})^3; y = e^{\operatorname{arctg} \sqrt{2x-1}}; y = (\cos 2x)^{\operatorname{tg} 2x}; y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{\ln x}$
7.	$y = \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+4x-3}}; y = (3^{\operatorname{arctg} 2x} - \ln(1+4x^2))^4; y = e^{\operatorname{arcsin} \sqrt{1-x}}; y = (\sin \sqrt{x})^{\ln x}; y = x^{e^{\cos x}}$
8.	$y = \frac{3x-8}{\sqrt{x^2+3x-4}}; y = (2^{\cos^2 x} + \sin^2 x)^3; y = \ln \arcsin \frac{2}{\sqrt{x}}; y = (x+\cos x)^{x^2}; y = x^{e^{\sin x}}$
9.	$y = \frac{2x^3+5}{\sqrt{x^4+2x}}; y = (4^{\arccos 2x} - \sqrt{1-4x^2})^3; y = \ln \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{x}}; y = (\operatorname{ctg} x)^{\cos x}; y = (x+\sin x)^{x^3}$
10.	$y = \frac{x^3-10}{\sqrt{x^4-3x}}; y = (6^{\operatorname{arctg} 3x} + \operatorname{arcctg} 3x)^4; y = \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{x}}{1-x}; y = (1-x^2)^{\operatorname{arcsin} x}; y = x^{e^{\operatorname{tg} 2x}}$
11.	$y = \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+3x+1}}; y = (2^{\operatorname{tg} x} - \cos 3x)^5; y = e^{\operatorname{arctg} \sqrt{x-1}}; y = \left(x + \frac{1}{x}\right)^{x^2}; y = (1-x^2)^{\arccos x}$
12.	$y = \frac{2x}{\sqrt{x^3-5x^2+3}}; y = (3^{\cos 2x} + \cos^2 x)^3; y = \ln \cos e^{-x}; y = (x^2+1)^{\operatorname{arctg} x}; y = (x-\sin 2x)^{x^3}$
13.	$y = \frac{2x-7}{\sqrt{x^2+2x-14}}; y = (5^{\operatorname{ctg} 2x} + \cos 2x)^3; y = \ln \arccos \frac{1}{x}; y = (\operatorname{tg} 2x)^{\cos 2x}; y = (x^3+2)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$
14.	$y = \frac{3x-4}{\sqrt{x^2+9x-6}}; y = (5^{\sin x} - \cos 2x)^3; y = e^{\operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1}}; y = (x^4+1)^{\frac{1}{x}}; y = (\arcsin x)^{\operatorname{tg} \sqrt{1-x^2}}$
15.	$y = \frac{5x+4}{\sqrt{x^2-5x-2}}; y = (2^{\operatorname{arcsin} x} - \sqrt{1-x^2})^5; y = \log_2 \cos \frac{1}{\sqrt{x}}; y = (x+\ln x)^{\frac{1}{x}}; y = (\sin \sqrt{x})^{\frac{1}{e^x}}$
16.	$y = \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+9x-1}}; y = (3^{\operatorname{arctg} 2x} + \ln(1+x^2))^4; y = \ln \arccos \frac{1}{\sqrt{2x}}; y = (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}; y = x^{e^{\operatorname{ctg} x}}$
17.	$y = \frac{2x-3}{\sqrt[3]{x^3-8x+4}}; y = (5^{\operatorname{tg} 2x} + \cos^2 x)^3; y = \ln \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}; y = x^{\ln x}; y = (3^{\operatorname{tg} x} + \arcsin x)^{3^x}$
18.	$y = \frac{2x+1}{\sqrt[3]{x^3+6+1}}; y = (4^{\operatorname{tg} 2x} - \operatorname{tg} 2x)^5; y = e^{\operatorname{arccos} \sqrt{1-x^2}}; y = (\sin x)^{\cos x}; y = (\arcsin \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$
19.	$y = \frac{4x+3}{\sqrt[3]{x^3-x-1}}; y = (2^{\arccos \sqrt{x}} - \sqrt{1-x})^4; y = \ln \operatorname{tge}^{\sqrt{x}}; y = (\cos 2x)^{\sin x}; y = (\arcsin \sqrt{x})^{2x}$
20.	$y = \frac{5x-6}{\sqrt[3]{x^3+5x-2}}; y = (3^{\operatorname{ctg} x} + \ln \sin x)^3; y = e^{\operatorname{arctg} \sqrt{4x-1}}; y = (x+1)^{\operatorname{arcsin} \sqrt{x}}; y = (\sin 2x + \ln x)^{\operatorname{tg} 2x}$

М.05.ПЗ.04. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ, ЩО ЗАДАНА НЕЯВНО АБО ПАРАМЕТРИЧНО

1. Основні поняття та теореми

Якщо незалежна змінна x та функція y зв'язані рівнянням, що не розв'язується відносно y , то y називається неявною функцією x . Для знаходження похідної функції, заданої наявно, треба продиференціювати рівняння неявної функції по x , враховуючи, що y є функцією від x , а потім з отриманого рівняння виразити похідну y' .

Якщо функція аргументу x задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ то її похідна буде дорівнюватимі частці від ділення похідних кожної складової: $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти похідну неявної функції $x - y = \arcsin 4x - \arcsin 4y$.

Розв'язання:

Диференціюємо по x обидві частини рівності та враховуємо те, що обидві обернено тригонометричні функції є складеними: $1 - y' = \frac{4}{\sqrt{1-16x^2}} - \frac{4y'}{\sqrt{1-16y^2}}$.

Перенесемо складові, що не містять y' , у праву частину рівності, а складові, що містять y' , у ліву частину рівності $\frac{4y'}{\sqrt{1-16y^2}} - y' = \frac{4}{\sqrt{1-16x^2}} - 1$.

Винесемо y' за дужки $y' \left(\frac{4}{\sqrt{1-16y^2}} - 1 \right) = \frac{4}{\sqrt{1-16x^2}} - 1$, звідки $y' = \frac{\frac{4}{\sqrt{1-16x^2}} - 1}{\frac{4}{\sqrt{1-16y^2}} - 1}$.

Відповідь: $y' = \frac{\frac{4}{\sqrt{1-16x^2}} - 1}{\frac{4}{\sqrt{1-16y^2}} - 1}$.

2. Знайти похідну неявної функції $e^y + y^3 + \sin x = 0$.

Розв'язання: $e^y y' + 3y^2 y' + \cos x = 0$; $y'(e^y + 3y^2) = -\cos x$; $y' = -\frac{\cos x}{e^y + 3y^2}$.

Відповідь: $y' = -\frac{\cos x}{e^y + 3y^2}$.

3. Знайти похідну неявної функції $y = 1 + xe^y$.

Розв'язання: $y' = e^y + xe^y y'$; $y'(1 - xe^y) = e^y$; $y' = \frac{e^y}{1 - xe^y}$.

Відповідь: $y' = \frac{e^y}{1 - xe^y}$.

4. Знайти похідну функції, заданої параметрично, $\begin{cases} x = \frac{18t}{1+t^3}, \\ y = \frac{18t^2}{1+t^3}. \end{cases}$

Розв'язання:

$$y'_t = \frac{36t(1+t^3) - 3t^2 \cdot 18t^2}{(1+t^3)^2} = \frac{36t - 18t^4}{(1+t^3)^2}; x'_t = \frac{18(1+t^3) - 3t^2 \cdot 18t}{(1+t^3)^2} = \frac{18 - 36t^3}{(1+t^3)^2}; y'_x = \frac{36t - 18t^4}{18 - 36t^3} = \frac{2t - t^4}{1 - 2t^2}.$$

Відповідь: $y'_x = \frac{2t - t^4}{1 - 2t^2}$.

5. Знайти похідну функції, заданої параметрично, $\begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t. \end{cases}$

Розв'язання:

$$y'_t = 2 \cdot 3 \sin^2 t \cdot \cos t = 6 \sin^2 t \cos t; \quad x'_t = 2 \cdot 3 \cos^2 t \cdot (-\sin t) = -6 \cos^2 t \sin t; \quad y'_x = -\frac{6 \sin^2 t \cos t}{6 \cos^2 t \sin t} = -\operatorname{tg} t.$$

Відповідь: $y' = -\operatorname{tg} t$.

3. Завдання для самостійного виконання

Знайти похідні функцій: у прикладі 1) – використовуючи метод знаходження похідної функції, заданої неявно; у прикладах 2) і 3) – використовуючи формулу знаходження похідної функції, заданої параметрично.

Варіант			
1.	$x^5 + y^5 - 2y = 0,$	$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = t + 2 \sin t, \end{cases}$	$\begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3. \end{cases}$
2.	$x^2 + y^2 - \cos 2y = 0,$	$\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \end{cases}$	$\begin{cases} x = t^2 - 2t, \\ y = t^2 + 2t. \end{cases}$
3.	$e^{2x} - y^3 - e^{2y} = 0,$	$\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = 3t - t^3, \end{cases}$	$\begin{cases} x = t^3 - 3t, \\ y = t^3 + 3t. \end{cases}$
4.	$e^{2x} - 2y - y^4 = 0,$	$\begin{cases} x = \arccos t, \\ y = t - t^3, \end{cases}$	$\begin{cases} x = t - t^4, \\ y = t^2 - t^3. \end{cases}$
5.	$5x - \sin 5y - y^5 = 0,$	$\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$	$\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2. \end{cases}$
6.	$2 \sin x - \arccos 2y - y = 0,$	$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$	$\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 6t - t^2. \end{cases}$
7.	$x^3 + y^3 - 3xy = 0,$	$\begin{cases} x = 2t - \sin 2t, \\ y = 8 \sin^3 t, \end{cases}$	$\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2 + t + 1. \end{cases}$
8.	$e^{4x} - x^3 y - e^{4y} = 0$	$\begin{cases} x = 2 \cos^2 t, \\ y = 3 \sin^3 t, \end{cases}$	$\begin{cases} x = t - \ln t, \\ y = 3t^2 - 2t^3. \end{cases}$
9.	$x \ln y - e^{2y} + x = 0$	$\begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 3 \sin^3 t, \end{cases}$	$\begin{cases} x = 2e^t, \\ y = e^{-t}. \end{cases}$
10.	$y = \operatorname{ctgx} + \ln \sqrt{4y + 1}$	$\begin{cases} x = \sin t - t \cos t, \\ y = \cos t + t \sin t, \end{cases}$	$\begin{cases} x = t^2 + \ln t, \\ y = 2t^3 + t. \end{cases}$
11.	$y + \operatorname{arctgx} - \ln \sqrt{2y + 3} = 0$	$\begin{cases} x = t(1 - \sin t), \\ y = t \cos t, \end{cases}$	$\begin{cases} x = \frac{t+1}{t}, \\ y = \frac{t-1}{t}. \end{cases}$
12.	$y = \cos(x + y)$	$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} 3t, \\ y = \ln(1 + 9t^2), \end{cases}$	$\begin{cases} x = \operatorname{arctgt}, \\ y = \frac{1}{\cos t}. \end{cases}$
13.	$2x - \sin 2xy - y^2 = 0$	$\begin{cases} x = e^{2t} \sin t, \\ y = e^{2t} \cos t, \end{cases}$	$\begin{cases} x = \ln(1 + t^2), \\ y = t - \operatorname{arctgt}. \end{cases}$

М.05.П3.05. ПОХІДНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

1. Основні поняття та теореми

Похідна другого порядку функції $y = f(x)$ – це похідна від похідної першого порядку $y'' = (y')'$. Похідна третього порядку функції $y = f(x)$ – це похідна від похідної другого порядку $y''' = (y'')$...

Похідна другого порядку параметрично заданої функції $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ визначається як $y_{xx}'' = \frac{(y_x')'}{x_t'}$.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти похідну другого порядку функції $y = (x^3 + 5)^2$.

Розв'язання: $y' = 2(x^3 + 5) \cdot 3x^2 = 6x^5 + 30x^2$; $y'' = 6 \cdot 5x^4 + 30 \cdot 2x = 30x^4 + 60x$.

Відповідь: $y'' = 30x^4 + 60x$.

2. Знайти похідну другого порядку функції $y = (x^2 + 2)e^{2x}$.

Розв'язання: $y' = 2x \cdot e^{2x} + (x^2 + 2) \cdot e^{2x} \cdot 2$; $y'' = 2 \cdot e^{2x} + 2x \cdot e^{2x} \cdot 2 + 2x \cdot e^{2x} \cdot 2 + (x^2 + 2) \cdot e^{2x} \cdot 2 \cdot 2$.

Відповідь: $y'' = 10e^{2x} + 8xe^{2x} + 4x^2e^{2x}$.

3. Знайти похідну другого порядку функції $y = x^2 \cdot 5^{2x}$.

Розв'язання:

$$y' = 2x \cdot 5^{2x} + x^2 \cdot 5^{2x} \cdot \ln 5 \cdot 2; \quad y'' = 2 \cdot 5^{2x} + 2x \cdot 5^{2x} \ln 5 \cdot 2 + 2x \cdot 5^{2x} \cdot \ln 5 \cdot 2 + x^2 \cdot 5^{2x} \cdot \ln^2 5 \cdot 2 \cdot 2;$$

$$y'' = 2 \cdot 5^{2x} + 8x \cdot 5^{2x} \ln 5 + 4x^2 \cdot 5^{2x} \ln^2 5.$$

Відповідь: $y'' = (2 + 8x \ln 5 + 4x^2 \ln^2 5)5^{2x}$.

4. Знайти похідну третього порядку функції $y = \arcsin x$.

Розв'язання: $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $y'' = \frac{2x}{2(\sqrt{1-x^2})^3} = x(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$; $y''' = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} - x \cdot \frac{3}{2}(1-x^2)^{\frac{5}{2}} \cdot (-2x)$.

Відповідь: $y''' = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2(1-x^2)^{\frac{5}{2}}$.

5. Знайти похідну другого порядку функції $y = \operatorname{arctg}(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

Розв'язання:

$$y' = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{1 + \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^2} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{2 + 2x^2 + 2x\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{2(x^2 + 1)(1 + \sqrt{x^2 + 1})} = \frac{1}{2(x^2 + 1)}; \quad y'' = -\frac{2x}{2(x^2 + 1)^2}.$$

Відповідь: $y'' = -\frac{x}{(x^2 + 1)^2}$.

6. Знайти похідну другого порядку функції, заданої параметрично, $\begin{cases} x = 5 \cos 2t, \\ y = 5 \sin 2t. \end{cases}$

Розв'язання:

$$y'_t = 10 \cos 2t; \quad x'_t = -10 \sin 2t; \quad y'_x = -\operatorname{ctg} 2t; \quad (y'_x)'_t = (-\operatorname{ctg} 2t)'_t = \frac{2}{\sin^2 2t}; \quad y''_{xx} = \frac{2}{-10 \sin^3 2t}.$$

Відповідь: $y''_{xx} = -0,2 \sin^{-3} 2t$.

7. Знайти похідну другого порядку функції, заданої параметрично, $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t). \end{cases}$

Розв'язання:

$$y'_t = 2 \sin t; \quad x'_t = 2 - 2 \cos t; \quad y'_x = \frac{\sin t}{1 - \cos t}; \quad (y'_x)'_t = \frac{\cos t(1 - \cos t) - \sin t \cdot \sin t}{(1 - \cos t)^2} = \frac{\cos t - 1}{(1 - \cos t)^2}.$$

Відповідь: $y''_{xx} = -\frac{1}{2(1-\cos t)^2}$.

8. Знайти похідну третього порядку функції, заданої параметрично, $\begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = t^2. \end{cases}$

Розв'язання: $y'_t = 2t; \quad x'_t = 2e^{2t}; \quad y'_x = \frac{t}{e^{2t}}; \quad (y'_x)'_t = \frac{e^{2t} - 2te^{2t}}{e^{4t}} = \frac{1-2t}{e^{2t}}; \quad y''_{xx} = \frac{1-2t}{2e^{4t}};$

$$(y''_{xx})' = \frac{-4e^{4t} - (1-2t)8e^{4t}}{4e^{8t}} = \frac{4t-3}{e^{4t}}; \quad y'''_{xxx} = \frac{4t-3}{2e^{6t}}.$$

Відповідь: $y'''_{xxx} = \frac{4t-3}{2e^{6t}}$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайти похідну вказаного порядку.

Варіант				
1.	$y = (2x^2 - \beta) \cdot \ln(x-1)$	$y'' - ?$	$y = (x^2 + \beta) \cdot \operatorname{arctgx}$	$y'' - ?$
2.	$y = \beta x \cdot \cos x^2$	$y''' - ?$	$y = \frac{\ln(x-\beta)}{\sqrt{x-\beta}}$	$y'' - ?$
3.	$y = \frac{\log_2 x}{\beta x^3}$	$y'' - ?$	$y = (4x^3 + \beta) \cdot e^{2x+1}$	$y'' - ?$
4.	$y = x^2 \cdot \sin(5x - \beta)$	$y''' - ?$	$y = (\beta - x^2) \cdot \ln^2 x$	$y'' - ?$
5.	$y = (2x + \beta) \cdot \ln^2 x$	$y'' - ?$	$y = \frac{\ln^3 x}{\beta x^2}$	$y''' - ?$
6.	$y = \frac{\beta \ln x}{x^3}$	$y'' - ?$	$y = (4x + \beta) \cdot 2^{-x}$	$y'' - ?$
7.	$y = e^{1-2x} \cdot \sin(\beta + 3x)$	$y'' - ?$	$y = \frac{\ln(\beta + x)}{\beta + x}$	$y'' - ?$
8.	$y = (2x^3 + \beta) \cdot \cos x$	$y''' - ?$	$y = (x^2 + \beta) \cdot \ln(x - \beta)$	$y'' - ?$
9.	$y = (\beta - x - x^2) \cdot e^{\frac{\beta-x}{2}}$	$y'' - ?$	$y = \frac{\beta \sin 2x}{x}$	$y'' - ?$
10.	$y = (x + \beta) \cdot \ln(x + \beta)$	$y'' - ?$	$y = (3x - \beta) \cdot 3^{-x}$	$y'' - ?$
11.	$y = \frac{\ln(\beta + 2x)}{\beta + 2x}$	$y'' - ?$	$y = e^{\frac{x}{2}} \cdot \beta \sin 2x$	$y'' - ?$
12.	$y = \frac{\beta \ln x}{x^5}$	$y'' - ?$	$y = x \cdot \ln(\beta - 3x)$	$y'' - ?$
13.	$y = (5x - \beta) \cdot 2^{-x}$	$y'' - ?$	$y = \frac{\ln(x - \beta)}{x - \beta}$	$y'' - ?$
14.	$y = (\beta + 3x + x^2) \cdot e^{3x+2}$	$y'' - ?$	$y = \frac{\beta \log_3 x}{x^2}$	$y'' - ?$
15.	$y = (\cos 2x - \beta \sin 2x) \cdot e^{-x}$	$y'' - ?$	$y = (5x - \beta) \cdot \ln^2 x$	$y'' - ?$

2. Знайти похідну другого порядку від функції, заданої параметрично.

Варіант			Варіант		
1.	$\begin{cases} x = \cos \beta t + t \sin t, \\ y = \sin \beta t - t \cos t. \end{cases}$	$\begin{cases} x = \cos \beta t, \\ y = \ln \sin \beta t. \end{cases}$	2.	$\begin{cases} x = 2\beta(t - \sin t), \\ y = 4\beta(2 + \cos t). \end{cases}$	$\begin{cases} x = e^{\beta t}, \\ y = \arcsin \beta t. \end{cases}$
3.	$\begin{cases} x = t + \sin \beta t, \\ y = 2 - \cos \beta t. \end{cases}$	$\begin{cases} x = \sqrt{t - 3\beta}, \\ y = \ln(t - 2\beta). \end{cases}$	4.	$\begin{cases} x = \sin \beta t, \\ y = \ln \cos \beta t. \end{cases}$	$\begin{cases} x = \cos^{2\beta} t, \\ y = \operatorname{tg}^{2\beta} t. \end{cases}$

5.	$\begin{cases} x = \cos 2\beta t, \\ y = \frac{2}{\cos 2\beta t}. \end{cases}$	$\begin{cases} x = \sqrt{1 - t^{2\beta}}, \\ y = \frac{1}{\beta t}. \end{cases}$	6.	$\begin{cases} x = \sqrt{\beta t}, \\ y = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta t}}. \end{cases}$	$\begin{cases} x = \sin \beta t, \\ y = \frac{1}{\cos \beta t}. \end{cases}$
7.	$\begin{cases} x = \frac{e^t + e^{-t}}{2\beta}, \\ y = \frac{2\beta}{e^t + e^{-t}}. \end{cases}$	$\begin{cases} x = \frac{1}{t}, \\ y = \frac{1}{1 + t^{2\beta}}. \end{cases}$	8.	$\begin{cases} x = \frac{e^t - e^{-t}}{2\beta}, \\ y = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}. \end{cases}$	$\begin{cases} x = \frac{1}{t^{2\beta}}, \\ y = \frac{1}{t^{2\beta} + 1}. \end{cases}$
9.	$\begin{cases} x = e^t \cos \beta t, \\ y = e^t \sin \beta t. \end{cases}$	$\begin{cases} x = \sqrt{\beta t}, \\ y = \sqrt[3]{\beta t - 1}. \end{cases}$	10.	$\begin{cases} x = \sqrt{t^{3\beta} - 1}, \\ y = \ln \beta t. \end{cases}$	$\begin{cases} x = t + \sin \beta t, \\ y = 2 + \cos \beta t. \end{cases}$
11.	$\begin{cases} x = \frac{e^t + e^{-t}}{2\beta}, \\ y = \frac{\sqrt[3]{e^t + e^{-t}}}{2\beta}. \end{cases}$	$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{\beta t - 1}}{\beta}, \\ y = \frac{\beta t}{\sqrt{\beta t - 1}}. \end{cases}$	12.	$\begin{cases} x = \frac{\cos \beta t}{1 + 2 \cos \beta t}, \\ y = \frac{\sin \beta t}{1 + 2 \cos \beta t}. \end{cases}$	$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{\beta t - 1}}{\beta}, \\ y = \frac{1}{\sqrt{\beta t}}. \end{cases}$
13.	$\begin{cases} x = t - \sin \beta t, \\ y = 2 - \cos \beta t. \end{cases}$	$\begin{cases} x = \sin \beta t, \\ y = \ln \cos \beta t. \end{cases}$	14.	$\begin{cases} x = \sin t + \cos t, \\ y = \sin 2\beta t. \end{cases}$	$\begin{cases} x = 2^{\beta t}, \\ y = \arccos \beta t. \end{cases}$
15.	$\begin{cases} x = \operatorname{tg} \beta t, \\ y = \frac{1}{\sin 2\beta t}. \end{cases}$	$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin^4 \frac{t}{2\beta}. \end{cases}$	16.	$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \frac{t^2}{2\beta}. \end{cases}$	$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos^4 \frac{t}{2\beta}. \end{cases}$

М.05.ПЗ.06. ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКІЇ

1. Основні поняття та теореми

Диференціал змінної (аргументу функції) x називається її приріст $\Delta x = x - x_0$. Позначається $dx = \Delta x$.

Диференціалом функції $y = f(x)$ називається добуток похідної функції $f'(x)$ на приріст аргументу Δx . Диференціал функції позначається dy або $df(x)$: $dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$.

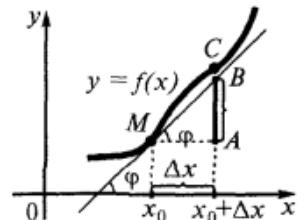
Диференціалом функції $y = f(x)$ в точці x_0 називається добуток похідної функції в цій точці, тобто $f'(x_0)$, на приріст аргументу Δx . Диференціал функції в точці x_0 позначається $dy(x_0)$ або $df(x_0)$: $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)dx$.

Диференціали елементарних функцій: $d(x^n) = nx^{n-1}dx$; $d(e^x) = e^x dx$; $d(a^x) = a^x \ln a dx$; $d(\ln x) = \frac{dx}{x}$; $d(\log_a x) = \frac{dx}{x \ln a}$; $d(\sin x) = \cos x dx$; $d(\cos x) = -\sin x dx$; $d(\operatorname{tg} x) = \frac{dx}{\cos^2 x}$; $d(\operatorname{ctgx} x) = -\frac{dx}{\sin^2 x}$.

Диференціал функції $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$ (відрізок AB на рисунку) є головна лінійна (тобто пропорційна Δx) частина приросту функції (на рисунку відрізок AB – головна частина відрізка AC). Диференціал змінної $dx = \Delta x$ (відрізок AM на рисунку).

Так як $f(x) \approx f(x_0) + df(x_0)$ або $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)dx = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$. Формулу $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ використовують для наближених обчислень. Застосуємо $\Delta x = x - x_0$, тоді $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ перепишемо як $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$.

Для $f(x) = \sin x$ маємо $f'(x) = \cos x$; при $x_0 = 0$ одержуємо $f(0) = \sin 0 = 0$, $f'(0) = \cos 0 = 1$; тоді $\sin(\Delta x) \approx \Delta x$ або $\sin \alpha \approx \alpha$ (для малих α).



Для $f(x) = \operatorname{tg}x$ маємо $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$; при $x_0 = 0$ одержуємо $f(0) = \operatorname{tg}0 = 0$,

$$f'(0) = \frac{1}{\cos^2 0} = 1; \text{ тоді } \operatorname{tg}(\Delta x) \approx \Delta x \text{ або } \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha \text{ (для малих } \alpha).$$

2. Приклади виконання завдань

1. Обчислити приріст функції Δy в точці $x_0 = 1$, якщо $y = f(x) = 3x^3 + 2x - 9$, $\Delta x = 0,1$.

Розв'язання:

Формула $\Delta y(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Так як $f(x_0) = f(1) = 3 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1 - 9 = -4$,

$$f(x_0 + \Delta x) = f(1 + 0,1) = f(1,1) = 3 \cdot 1,1^3 + 2 \cdot 1,1 - 9 = -2,807, \text{ то } \Delta y(x_0) = -2,807 - (-4) = 1,193.$$

Відповідь: 1,193.

2. Знайти диференціал функції dy в точці $x_0 = 1$, якщо $y = f(x) = 3x^3 + 2x - 9$, $\Delta x = 0,1$.

Розв'язання:

Формула $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$.

Маємо $y' = f'(x) = 9x^2 + 2$, $f'(1) = 9 \cdot 1^2 + 2 = 11$, тоді $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x = 11 \cdot 0,1 = 1,1$.

Відповідь: 1,1. Різниця між Δy і $dy(x_0)$ становить 0,093.

3. Обчислити наближено значення $\sqrt[3]{1,012}$.

Розв'язання:

Переформулюємо задачу: обчислити наближено значення функції $y = \sqrt[3]{x}$ в точці $x = 1,012$.

Покладемо $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,012$. Тоді $y(1,012) \approx y(1) + y'(1) \cdot 0,012$, але $y(1) = \sqrt[3]{1} = 1$,

$$y' = \left(x^{\frac{1}{3}} \right)' = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad y'(1) = \frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}} = \frac{1}{3}. \text{ Отже, } y(1,012) \approx 1 + \frac{1}{3} \cdot 0,012 = 1,004.$$

Відповідь: 1,004.

4. Обчислити наближено значення $\ln 1,1$.

Розв'язання:

Переформулюємо задачу: обчислити наближено значення функції $y = \ln x$ в точці $x = 1,1$.

Покладемо $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,1$. Тоді $y(1,1) \approx y(1) + y'(1) \cdot 0,1$, але $y(1) = \ln 1 = 0$, $y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$,

$$y'(1) = \frac{1}{1} = 1. \text{ Отже, } \ln(1,1) \approx 0 + 1 \cdot 0,1 = 0,1.$$

Відповідь: 0,1.

5. Обчислити наближено значення функції $y = \frac{1}{\sqrt{2x^2+1}}$ в точці $x = 1,58$.

Розв'язання:

Формула $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$.

Маємо $y' = f'(x) = 9x^2 + 2$, $f'(1) = 9 \cdot 1^2 + 2 = 11$, тоді $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x = 11 \cdot 0,1 = 1,1$.

Покладемо $x_0 = 2$, $\Delta x = -0,42$. Тоді $y(1,58) \approx y(2) + y'(2) \cdot (-0,42)$, але $y(2) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 2^2 + 1}} = \frac{1}{3}$,

$$y' = -\frac{1}{2} \frac{2 \cdot 2x}{\sqrt{(2x^2+1)^3}} = -\frac{2x}{\sqrt{(2x^2+1)^3}}, \quad y'(2) = -\frac{2 \cdot 2}{\sqrt{(2 \cdot 2^2+1)^3}} = -\frac{4}{27}. \quad \text{Отже,}$$

$$y(1,58) = \frac{1}{3} + \frac{4}{27} \cdot 0,42 = \frac{1}{3} + \frac{4}{9} \cdot 0,14 = \frac{3+0,56}{9} = \frac{3,56}{9} = 0,39(5).$$

Відповідь: 0,39(5).

6. Обчислити наближено значення функції $y = \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}$ в точці $x = 0,15$.

Розв'язання:

Покладемо $x_0 = 0$, $\Delta x = 0,15$. Тоді $y(0,15) \approx y(0) + y'(0) \cdot (0,15)$, але $y(0) = \sqrt[3]{\frac{2-0}{2+0}} = 1$,

$$y' = \frac{1}{3} \left(\frac{2-x}{2+x} \right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{-2-x-2+x}{(2+x)^2} = -\frac{4}{3} \left(\frac{2-x}{2+x} \right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{(2+x)^2}, \quad y' = -\frac{4}{3} (1)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}.$$

Отже, $y(0,15) \approx 1 - \frac{1}{3} \cdot 0,15 = 0,95$.

Відповідь: 0,95.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайти наближено за допомогою диференціала значення функції:

Варіант				
1.	$y = x^4$	$x = 3,998$	$y = \sqrt[3]{x}$	$x = 1,21$
2.	$y = x^5$	$x = 2,997$	$y = \sqrt[3]{x}$	$x = 7,76$
3.	$y = x^{11}$	$x = 1,021$	$y = \sqrt[3]{x}$	$x = 27,54$
4.	$y = x^6$	$x = 2,01$	$y = \sqrt[3]{x}$	$x = 26,46$
5.	$y = x^7$	$x = 1,996$	$y = \sqrt[3]{x}$	$x = 8,24$
6.	$y = x^7$	$x = 2,002$	$y = \sqrt[3]{x}$	$x = 0,98$
7.	$y = x^{21}$	$x = 0,998$	$y = \sqrt[3]{x}$	$x = 8,36$
8.	$y = \ln x$	$x = 0,8$	$y = \sqrt[3]{x}$	$x = 7,64$
9.	$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x = 4,16$	$y = \sqrt{4x+1}$	$x = 2,16$
10.	$y = \sqrt[3]{x^2}$	$x = 1,03$	$y = \sqrt{4x+1}$	$x = 1,78$
11.	$y = \sqrt[5]{x^2}$	$x = 1,03$	$y = \sqrt{x^2+5}$	$x = 1,97$
12.	$y = \arcsin x$	$x = 0,08$	$y = \sqrt{x^2+x+3}$	$x = 1,97$
13.	$y = \operatorname{arctg} x$	$x = 0,08$	$y = \sqrt[3]{x^3+7x}$	$x = 1,012$
14.	$y = \sqrt{1+x+\sin x}$	$x = 0,01$	$y = \sqrt[3]{x^2+2x+5}$	$x = 0,97$
15.	$y = \sqrt[3]{3x+\cos x}$	$x = 0,01$	$y = \frac{1}{\sqrt{2x^2+x+1}}$	$x = 1,01$
16.	$y = \sqrt[4]{2x-\sin \frac{\pi x}{2}}$	$x = 1,02$	$y = \frac{x+\sqrt{5-x^2}}{2}$	$x = 0,98$

Обчислити наближене значення функції $y = \operatorname{tg} x$ при $x = 46^\circ$.

Обчислити наближене значення функції $y = \cos x$ при $x = 29^\circ$; $x = 61^\circ$; $x = 59^\circ 56'$.

Обчислити наближене значення функції $y = \sin x$ при $x = 31^\circ$; $x = 58^\circ$; $x = 30^\circ 2'$.

M.05.P3.07. РОЗКРИТТЯ НЕВИЗНАЧЕННОСТЕЙ ЗА ПРАВИЛОМ ЛОПІТАЛЯ

1. Основні поняття та теореми

Правило Лопіталя – метод знаходження границь функцій, що розкриває невизначеності виду $\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right\}$ і $\left\{ \begin{array}{l} \infty \\ \infty \end{array} \right\}$. Суть правила: границя відношення функцій дорівнює границі відношення їхніх похідних (похідні окрім тільки від чисельника і тільки від знаменника, а не від дробу!!!)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Невизначеність $\{\infty \cdot 0\}$ теж можна розкрити за правилом Лопіталя, попередньо змінивши добуток функцій на відношення.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти границю функції за допомогою правила Лопіталя $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin 2x}{x^3}$.

Розв'язання:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin 2x}{x^3} = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos 2x}{3x^2} = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin 2x}{6x} = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8 \cos 2x}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

Відповідь: $4/3$.

2. Знайти границю функції за допомогою правила Лопіталя $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 1}{x^3 + x^2 - x - 1}$.

$$\text{Розв'язання: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 1}{x^3 + x^2 - x - 1} = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^5}{3x^2 + 2x - 1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Відповідь: $3/2$.

3. Знайти границю функції за допомогою правила Лопіталя $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

$$\text{Розв'язання: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2.$$

Відповідь: 2.

4. Знайти границю функції за допомогою правила Лопіталя $\lim_{x \rightarrow 50} \left(\ln \left(2 - \frac{x}{50} \right) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{100} \right)$.

Розв'язання:

Маємо невизначеність $\{0 \cdot \infty\}$. Перепишемо добуток у вигляді частки, маємо

$$\lim_{x \rightarrow 50} \frac{\ln \left(2 - \frac{x}{50} \right)}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{100}} = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} = \lim_{x \rightarrow 50} \frac{\left(-\frac{1}{50} \right) \sin^2 \frac{\pi x}{100}}{-\frac{\pi}{100} \left(2 - \frac{x}{50} \right)} = \lim_{x \rightarrow 50} \frac{\sin^2 \frac{\pi x}{100}}{\frac{\pi}{2} \left(2 - \frac{x}{50} \right)} = \frac{1^2}{\frac{\pi}{2} \cdot (2 - 1)} = \frac{2}{\pi}.$$

Відповідь: $2/\pi$.

5. Знайти границю функції за допомогою правила Лопіталя $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$.

Розв'язання:

Маємо невизначеність $\{\infty - \infty\}$. Приведемо дроби до спільного знаменника

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1 - x}{xe^x - x} \right) = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{e^x + xe^x - 1} \right) = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x}{e^x + xe^x + e^x} \right) = \frac{1}{2}.$$

Відповідь: 0,5.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайти границі, застосовуючи правило Лопіталя:

Варіант			Варіант	
1	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$	2	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + 3x - 5}{x^3 - 6x^2 + 5}$
3	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 3x^2 + 7x - 5}{x^4 - 5x + 4}$	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{\pi - 2x}$	4	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{40} - 40x + 39}{x^{78} - 78x + 77}$
5	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2 \cos x + e^{-x}}{x \cdot \sin x}$	6	$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 6x + 8}$
7	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 6x}{e^{3x}}$	$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\varphi - \arcsin \varphi}{\sin^3 \varphi}$	8	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 x}{e^{x^2} - 1 - x^2}$

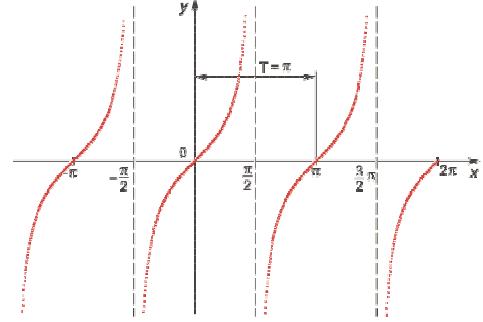
9	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x - 1}{\ln(1+x)}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{\sin^3 x}$	10	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^n - 1}$	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{tg} x}{\cos 2x}$
11	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \cos x)}{\ln \operatorname{tg} x}$	12	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x^3 - x - 2x}}{\sqrt[5]{x^2} - 1}$
13	$\lim_{x \rightarrow b} \frac{\sin x - \sin b}{x - b}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin^2 x}{x \cos x - \sin x}$	14	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x - \sin x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-\sin x}}{x - \sin x}$

М.05.ПЗ.08. ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

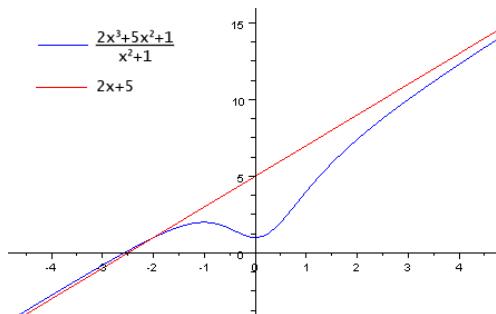
1. Основні поняття та теореми

Пряма називається асимптою кривої, якщо точка кривої необмежено наближається до неї при зростанні абсциси чи ординати. Асимптити поділяють на вертикальні, похилі (горизонтальні).

Графік функції $y = f(x)$ при змінній, що прямує до деякої точки $x \rightarrow a$, має вертикальну асимптуу, якщо границя функції нескінчена $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$. Точка $x = a$ є точкою розриву II роду, а рівняння вертикальної асимптиоти має вигляд $x = a$.

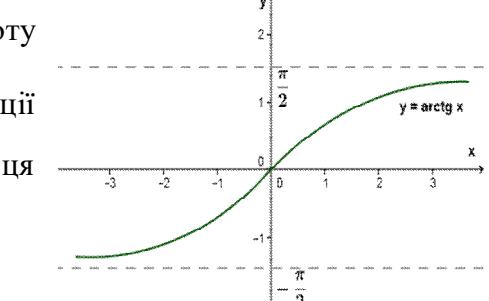


Рівняння похилої асимптиоти задається рівнянням прямої на площині $y = kx + b$, де кутовий коефіцієнт k та вільний коефіцієнт b – границі, що обчислюються як $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$,

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx).$$


Якщо обидві границі існують і скінченні, то функція має похилу асимптуу, інакше – не має.

Іноді слід окремо розглядати випадки, коли змінна прямує до плюс безмежності $x \rightarrow +\infty$ та мінус $x \rightarrow -\infty$.



Графік функції $y = f(x)$ має горизонтальну асимптуу

$y = b$, коли $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, та існує скінченна границя функції при змінній прямуючій до безмежності $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$, і ця границя рівна сталій $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$.

Графіки можуть мати кілька видів асимптоот.

Проміжки зростання-спадання, екстремуми функції:

- функція зростає на проміжку, де $y' > 0$; функція спадає на проміжку, де $y' < 0$;
- в точках, де $y' = 0$ або не існує, може бути екстремум (максимум або мінімум).

Проміжки опукlosti-vгнутостi графіка, перегини функції:

- функція вгнута на проміжку, де $y'' > 0$; функція опукла на проміжку, де $y'' < 0$;
- в точках, де $y'' = 0$ або не існує, може бути перегин.

Схема повного дослідження функції та побудова її графіку.

1. Знайти область визначення та область значень функції.
2. Дослідити функцію на парність – непарність.
3. Знайти інтервали монотонності (зростання та спадання) функції, точки локальних екстремумів та значення функції в цих точках.
4. Знайти точки перегину графіка функції та інтервали опукlosti i вгнутостi.
5. Дослідити графік функції на наявність асимптоот.
6. Скласти таблицю значень функції для деяких значень її аргументу.
7. Використовуючи всі отримані результати, побудувати графік функції.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти асимптоти графіка функції $y = \frac{x^3 + 9x}{x^2 - 4}$.

Розв'язання:

Область визначення функції $(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$, тобто $x \neq \pm 2$.

В точках $x = -2$ та $x = 2$ функція невизначена, в цих точках можуть існувати вертикальні асимптоти.

Графік функції має вертикальні асимптоти $x \rightarrow a$, якщо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$. Оскільки $\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x^3 + 9x}{x^2 - 4} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x^3 + 9x}{x^2 - 4} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +2-0} \frac{x^3 + 9x}{x^2 - 4} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +2+0} \frac{x^3 + 9x}{x^2 - 4} = +\infty$ та $\lim_{x \rightarrow +2} \frac{x^3 + 9x}{x^2 - 4} = \infty$, то $x = -2$ та $x = 2$ – вертикальні асимптоти.

Перевіримо наявність похилих асимптот. Рівняння похилої асимптоти записується наступним чином: $y = kx + b$. Знайдемо k та b .

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 9x}{x^3 - 4x} = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 9x}{x^2 - 4} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{13x}{x^2 - 4} = 0.$$

Отже, рівняння похилої асимптоти буде мати наступний вигляд: $y = x$.

Відповідь: $x = -2$ та $x = 2$ – вертикальні асимптоти; похила асимптота $y = x$.

2. Провести повне дослідження функції $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2$ та побудувати її графік.

Розв'язання:

1. Область визначення функції $x \in (-\infty; +\infty)$. Область значень функції: $y \in (-\infty; +\infty)$.

2. Для дослідження функції на парність-непарність аргумент x замінимо на $(-x)$, тоді $y(-x) = \frac{1}{3}(-x)^3 - (-x)^2 - 3(-x) + 2 = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + 2$, тобто $y(-x) \neq y(x)$ і $y(-x) \neq -y(x)$. Отже задана функція не є парною і не є непарною, тобто є функцією загального вигляду.

3. Дослідимо задану функцію на екстремум за допомогою необхідної і достатньої ознак. Визначимо критичні точки. Для цього знаходимо першу похідну даної функції і прирівнюємо її до нуля: $y' = x^2 - 2x - 3 = 0$.

Розв'язкам рівняння $x^2 - 2x - 3 = 0$ є $x_1 = -1$ та $x_2 = 3$. Таким чином, $x_1 = -1$ та $x_2 = 3$ – критичні точки. Оскільки похідна існує при будь-якому x , то інших критичних точок немає.

За допомогою методу інтервалів визначимо знаки похідної зліва та справа від критичних точок. При $x \in (-\infty; -1)$ похідна функції додатна $y'(x) > 0$; якщо $x \in (-1; 3)$ похідна функції від'ємна $y'(x) < 0$; якщо $x \in (3; +\infty)$, то похідна знов додатна $y'(x) > 0$. Функція зростає на проміжках $x \in (-\infty; -1)$ та $x \in (3; +\infty)$. Функція спадає на проміжку $x \in (-1; 3)$.

Згідно достатній умові існування екстремуму функції $x_{\max} = -1$, а $x_{\min} = 3$. Визначимо значення функції в точках мінімуму та максимуму. $y_{\max} = y(-1) = -\frac{1}{3} - 1 + 3 + 2 = 3\frac{2}{3}$;

$y_{\min} = y(3) = 9 - 9 - 9 + 2 = -7$. Таким чином, точка максимуму $A(-1; 3\frac{2}{3})$, точка мінімуму $B(3; -7)$.

4. Знайдемо точки перегину графіка функції та інтервали опукlosti та вгнутості.

Для цього знаходимо другу похідну, прирівняємо її до нуля та знайдемо корені рівняння: $y''(x) = 2x - 2 = 0$. Тоді $x = 1$ – критична точка другого роду.

Запишемо другу похідну у вигляді $y''(x) = 2(x - 1)$. З правої частини цієї рівності випливає, що при $x < 1$ друга похідна від'ємна $y''(x) < 0$, а при $x > 1$ друга похідна додатна $y''(x) > 0$.

На інтервалі $x \in (-\infty; 1)$ графік функції є опуклим, на інтервалі $x \in (1; +\infty)$ – вгнутим.

Друга похідна при переході через точку $x=1$ змінює свій знак. Отже, $x=1$ є абсцисою точки перегину. Обчислимо ординату цієї точки: $y(1) = \frac{1}{3} - 1 - 3 + 2 = -\frac{5}{3}$. Таким чином, точка $P\left(1; -\frac{5}{3}\right)$ є точкою перегину графіка функції.

5. З'ясуємо наявність асимптот графіка функції.

Вертикальних асимптот немає, бо функція визначена при всіх дійсних значеннях аргумента.

$$\text{Похилих асимптот також нема, бо } k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2}{x} \right) = \infty.$$

6. Складемо таблицю значень функції для деяких значень її аргументу:

x	$x \in (-\infty; -1)$	-1	$x \in (-1; 1)$	1	$x \in (1; 3)$	3	$x \in (3; +\infty)$
y	зростає опуклий	$-\frac{2}{3}$	спадає опуклий	$-1\frac{2}{3}$	спадає вгнутий	-7	зростає вгнутий

7. Скориставшись отриманими результатами, побудуємо графік функції.

3. Провести повне дослідження функції $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$, побудувати її графік.

Розв'язання:

1) Знаходимо область визначення функції. Так як $x^2 - 1 \neq 0$, $x \neq \pm\sqrt{1}$, $x \neq -1$, $x \neq 1$, то область визначення є об'єднання інтервалів: $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

2) Досліжуємо функцію на парність-непарність: $f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = -\frac{x^3}{x^2 - 1} = f(x)$. Отже, функція непарна, графік функції симетричний відносно початку координат.

3) Знаходимо точки перетину графіка функції з осями координат. Для цього прирівнюємо функцію до нуля: $y = \frac{x^3}{x^2 - 1} = 0$, $x^3 = 0$, $x = 0$. Графік перетинає вісь Ox тільки в одній точці $x = 0$.

Знаходимо інтервали знакосталості функції з урахуванням області визначення. Щоб знайти знак функції на інтервалі $x \in (-\infty; -1)$, знайдемо, наприклад, $y(-2) = \frac{(-2)^3}{(-2)^2 - 1} = \frac{-8}{4 - 1} < 0$, таким чином на інтервалі $(-\infty; -1)$ функція від'ємна. Аналогічні дослідження проведемо для інтервалу $x \in (-1; 0)$: $y(-0,5) = \frac{-0,125}{0,25 - 1} > 0$ (на інтервалі $(-1; 0)$ функція додатна); для інтервалу $x \in (0; 1)$:

$y(0,5) = \frac{0,125}{0,25 - 1} < 0$ (на інтервалі $(0; 1)$ функція від'ємна); для інтервалу $x \in (1; +\infty)$: $y(2) = \frac{8}{4 - 1} > 0$ (на інтервалі $(1; +\infty)$ функція додатна).

4) Знаходимо точки розриву і перевіряємо наявність вертикальних асимптот. Точки розриву: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Якщо x прямує до -1 зліва, то $x^2 - 1 > 0$, $x^3 < 0$ і $\frac{x^3}{x^2 - 1} < 0$. Тому $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty$.

Якщо x прямує до -1 справа, то $x^2 - 1 < 0$, $x^3 < 0$ і $\frac{x^3}{x^2 - 1} > 0$. Отже, $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty$. Аналогічні дослідження проведемо для точки $x_2 = 1$. Маємо $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty$. Звідси випливає, що прямі $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ є вертикальними асимптотами.

Перевіримо функцію на наявність похилої асимптоти: $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 1$

$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0$. Отже, існує похила асимптота $y = 1 \cdot x + 0 = x$, тобто $y = x$.

5) Шукаємо інтервали зростання та спадання функції і її екстремуми.

Перевіряємо необхідну умову: якщо функція $y = f(x)$ має в точці $x = x_0$ локальний екстремум, то її похідна в цій точці дорівнює 0 або не існує. В нашому випадку

$$y' = \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} \right)' = \frac{3x^2(x^2 - 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{(x^2 - 3)x^2}{(x^2 - 1)^2}.$$

Прирівнюючи першу похідну до нуля, знаходимо стаціонарні точки (точки підозрілі на екстремум):

$$y' = \frac{(x^2 - 3)x^2}{(x^2 - 1)^2} = 0, \quad x^2(x^2 - 3) = 0, \quad x_{1,2} = 0, \quad x_3 = -\sqrt{3}, \quad x_4 = \sqrt{3}. \quad \text{Критичними є також точки, де похідна не існує.}$$

В нашому випадку це точки $x_1 = -1, x_2 = 1$. Критичні точки розбивають область визначення на інтервали зростання і спадання функції: $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$.

Враховуючи знаки першої похідної в інтервалах і обчислюючи значення функції в критичних точках, складаємо зведену таблицю:

x	$(-\infty; -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}; -1)$	$-1 - 0$	$-1 + 0$	$(-1; 0)$
$f'(x)$	> 0	0	< 0	\exists	\exists	< 0
$f(x)$	\uparrow	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	\downarrow	$-\infty$	$+\infty$	\downarrow
0	$(0; 1)$	$1 - 0$	$1 + 0$	$(1; \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}; +\infty)$
0	< 0	\exists	\exists	< 0	0	> 0
0	\downarrow	$-\infty$	$+\infty$	\downarrow	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	\uparrow

6) Шукаємо точки перегину й інтервали опукlosti та угнутості.

$$y'' = \left(\frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} \right)' = \left(\frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} \right)' = \frac{(4x^3 - 6x) \cdot (x^2 - 1)^2 - 2(x^2 - 1) \cdot 2x \cdot (x^4 - 3x^2)}{(x^2 - 1)^4} =$$

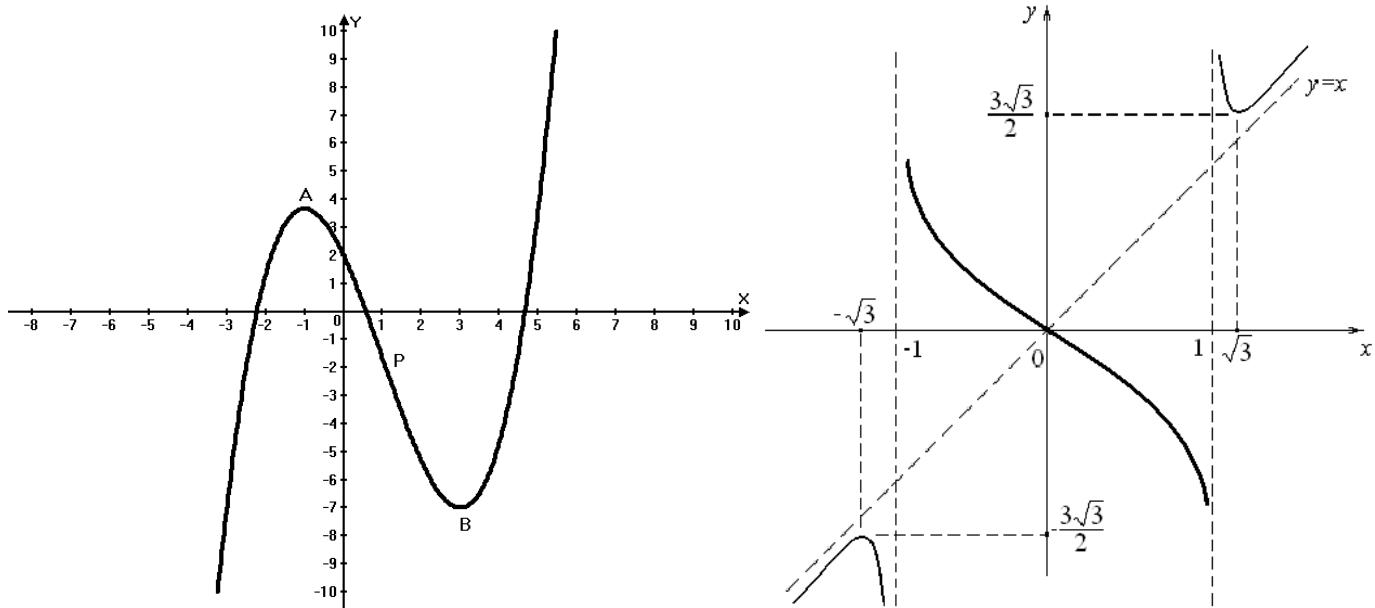
$$= \frac{(4x^3 - 6x) \cdot (x^2 - 1) - 4x \cdot (x^4 - 3x^2)}{(x^2 - 1)^3} = \frac{4x^5 - 6x^3 - 4x^3 + 6x - 4x^5 + 12x^3}{(x^2 - 1)^3} = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3} = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3},$$

$y'' = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} = 0$, звідки $x_1 = 0$. Крім того, друга похідна не існує в точках $x_1 = -1, x_2 = 1$. Отже, область визначення розбивається на інтервали: $(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Враховуючи знаки другої похідної в інтервалах і обчислюючи значення функції в точках перегину, складаємо зведену таблицю:

x	$(-\infty; -1)$	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	< 0	> 0	0	< 0	> 0
$f(x)$	\cap	\cup	0	\cap	\cup

7) Будуємо графік функції. Починаємо із проведення асимптоот. Провівши асимптоот, наносимо координати точок мінімуму, максимуму та перегину. Після цього, користуючись даними таблиць, будуємо графік функції.



3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайти асимптооти графіка функції.

$$1. \ y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$$

$$2. \ y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$$

$$3. \ y = \frac{2}{x^2 + 2x}$$

$$4. \ y = \frac{4x^2}{3 - x^2}$$

$$5. \ y = \frac{12x}{9 - x^2}$$

$$6. \ y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$$

$$7. \ y = \frac{4 - x^3}{x^2}$$

$$8. \ y = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}$$

$$9. \ y = \frac{2x^3 + 1}{x^2}$$

$$10. \ y = \frac{(x-1)^2}{x^2}$$

$$11. \ y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$$

$$12. \ y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2$$

$$13. \ y = \frac{12 - 3x^2}{x^2 + x}$$

$$14. \ y = \frac{9 + 6x - 3x^2}{x^2 - 2x - 3}$$

$$15. \ y = -\frac{8x}{x^2 - 4}$$

$$16. \ y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$$

$$17. \ y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$$

$$18. \ y = \frac{4x}{(x+1)^2}$$

$$19. \ y = \frac{8(x-1)}{(x+1)^2}$$

$$20. \ y = \frac{1 - 2x^3}{x^2}$$

2. Провести повне дослідження функції та побудувати графік.

$$1. \ y = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 6$$

$$2. \ y = \frac{1}{5}x^3 - 2x^2 + 2$$

$$3. \ y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + 5$$

$$4. \ y = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{8}x^2 - 3x$$

$$5. \ y = \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3$$

$$6. \ y = -\frac{1}{5}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4$$

$$7. \ y = \frac{1}{9}x^3 - 3x^2 + 3$$

$$8. \ y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{2}x^2 - 2$$

$$9. \ y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x - 2$$

$$10. \ y = -\frac{1}{8}x^3 + 2x - 3$$

$$11. \ y = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4$$

$$12. \ y = -\frac{1}{9}x^3 + 3x - 5$$

$$13. \ y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 2$$

$$14. \ y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{9}x^2 - 4$$

$$15. \ y = -\frac{1}{3}x^3 + 6x^2 - 1$$

$$16. \ y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}x^2 + 2$$

$$17. \ y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}x^2 + 2$$

$$18. \ y = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - 3$$

$$19. \ y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - 4x$$

$$20. \ y = \frac{1}{6}x^3 - \frac{7}{2}x^2 - 5$$

M.05.P3.09. ЗАДАЧІ НА ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ

Приклади виконання завдань

1. Яке співвідношення має бути між розмірами прямокутних вікон, щоб при заданій освітленості (площа вікна дорівнює S) периметр вікна був найменшим?

Розв'язання:

Нехай маємо прямокутне вікно розміром $a \times b$, його площа за умовою задачі дорівнює $a \cdot b = S$, звідки $a = \frac{S}{b}$. Периметр вікна дорівнює $2a + 2b = P$, або що те саме: $P = P(b) = \frac{S}{b} + b$.

Оскільки функція $P(b)$ залежить від невідомої b , відшукаємо за якого значення b_{\min} функція $P(b)$ набуде найменшого значення. Для цього знайдемо похідну та прирівняємо її до нуля:

$$P'_b = -\frac{S}{b^2} + 1 = \frac{-S + b^2}{b^2} = 0, \text{ тобто } -S + b^2 = 0, \text{ звідки } b_{\min} = \sqrt{S}, a_{\min} = \frac{S}{b} = \frac{S}{\sqrt{S}} = \sqrt{S}, \text{ тобто } a_{\min} = b_{\min}.$$

Відповідь: вікно має бути квадратним.

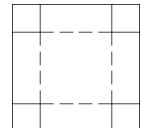
Завдання для самостійного виконання

1. Яке співвідношення має бути між розмірами прямокутних вікон заданого периметра, щоб освітленість приміщення була найбільшою?

2. Сіткою завдовжки 120 м треба обгородити прилеглу до будинку земельну ділянку найбільшої площині. Знайти розміри цієї ділянки.

3. Визначити розміри відкритого басейну з квадратним дном і об'ємом 32 м³, щоб на облицювання його стін і dna витратити якнайменше матеріалу.

4. Із квадратного листа картону розміром 18×18 см² виготовляють відкриту коробку. Для цього із кутів листа вирізають 4 одинакових квадрати і лист згибають по пунктирних лініях. Якою має бути сторона вирізуваного квадрата, щоб коробка мала найбільший об'єм?



5. Є прямокутний лист жерсті розміром 50×80 см². У чотирьох його кутах вирізають однакові квадрати та роблять відкриту коробку, загинаючи краї під прямим кутом. Яка максимальна можлива місткість такої коробки?

6. Потрібно виготовити коробку, об'єм якої дорівнював би 72 см³, при співвідношенні сторін 1:2. Якими мають бути розміри всіх сторін, щоб повна поверхня коробки була найменшою?

7. На сторінці книги друкований текст має займати 432 см². Поля зверху і знизу мають бути по 2 см, а справа і зліва – по 1,5 см. Визначити найекономніші розміри паперу.

8. Знайти співвідношення між радіусом та висотою циліндра, що при даному об'ємі має найменшу поверхню.

9. Треба виготовити бочку циліндричної форми при даному об'ємі 3 м³. Якими мають бути радіус і висота бочки, щоб на її виготовлення пішло якнайменше матеріалу?

10. Якими мають бути радіус і висота консервної банки циліндричної форми, щоб при даному об'ємі 100 см³ на її виготовлення пішло якнайменше матеріалу?

11. Довести, що конічне шатро (вігвам) заданої місткості потребує найменшої кількості матерії, коли його висота в $\sqrt{2}$ разів більше радіуса основи.

12. На якій висоті над центром круглої платформи радіуса R слід повісити ліхтар, щоб він найкраще освітлював доріжку довкола платформи. (Ступінь освітлення прямо пропорційний косинусу кута падіння променя і обернено пропорційний квадрату відстані до джерела світла.)

13. Витрати на пальне для двигуна яхти пропорційні кубу її швидкості. При швидкості 10 км/год витрати на пальне складають 300 грн/год, інші ж витрати (що не залежать від швидкості) становлять 4800 грн/год. При якій швидкості яхти загальна сума витрат на 1 км шляху буде найменшою?

14. З пунктів A та B , розташованих на вулицях, які перетинаються під кутом 60° , одночасно виїжджають два велосипедисти в напрямку перехрестя C . Через який час відстань між ними буде найменшою, якщо швидкість першого велосипедиста – 15 км/год, швидкість другого – 12 км/год, $AC = 9$ км і $BC = 6$ км?

15. Рибалка поспішає додому. Йому треба перейти поле (з пункту C), щоб потрапити на шосе, де розташовано його селище (пункт A). Найближча відстань до шосе 3 км (пункт B). Відстань між A і B дорівнює 5 км. Проте рибалка пішов полем у напрямку пункту D , розташованого на шосе на відстані 1 км від його селища. Чому рибалка прийняв таке рішення, хоча полем він рухається зі швидкістю 4 км/год, а по шосе – 5 км/год?

16. Риболовецький катер стоїть на якорі в 9 км від найближчої точки берега. З катера слід відіслати гінця в офіс, розташований в 15 км , рахуючи по узбережжю від найближчої до катера точки берега (офіс розташований на узбережжі). Якщо гонець може рухатися пішки зі швидкістю 5 км/год , а на веслах 4 км/год , то в якому пункті берега йому слід пристати, щоб потрапити в офіс якнайшвидше?

Модуль 07 „Інтегральне числення функції однієї змінної. Невизначений інтеграл”

М.07.ПЗ.01. БЕЗПОСЕРЕДНЕ ІНТЕГРУВАННЯ

1. Основні поняття та теореми

Інтеграли основних функцій

1.	$\int 0dx = C$	5.	$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$	10.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
2.	$\int 1dx = x + C$	6.	$\int e^x dx = e^x + C$	11.	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
3.	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	7.	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	12.	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
3`.	$\int \frac{dx}{x^n} = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$	8.	$\int \cos x dx = \sin x + C$	13.	$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a-x}{a+x} \right + C$
4.	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	9.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctgx} x + C$	14.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + C$

Інтеграл від суми (різниці) функцій дорівнює сумі (різниці) інтегралів від цих функцій
 $\int (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx$.

Сталий множник можна винести за знак інтеграла $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти інтеграл $\int \sqrt[3]{x} dx$.

Розв'язання: $\int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} + C$.

Відповідь: $\frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} + C$.

2. Знайти інтеграл $\int (5 - x^3)^2 dx$.

Розв'язання:

$$\int (25 - 10x^3 + x^6) dx = \int 25dx - \int 10x^3 dx + \int x^6 dx = 25 \int dx - 10 \int x^3 dx + \int x^6 dx = 25x - 10 \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} + C.$$

Відповідь: $25x - \frac{5}{2}x^4 + \frac{x^7}{7} + C$.

3. Знайти інтеграл $\int \left(\frac{17}{\sqrt{x^3}} + \frac{1}{x^{12}} - x^{20} \right) dx$.

Розв'язання: $\int \left(\frac{17}{\sqrt{x^3}} + \frac{1}{x^{12}} - x^{20} \right) dx = \int \left(\frac{17}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{x^{12}} - x^{20} \right) dx = -\frac{34}{\sqrt{x}} - \frac{1}{11x^{11}} - \frac{x^{21}}{21} + C$.

Відповідь: $-\frac{34}{\sqrt{x}} - \frac{1}{11x^{11}} - \frac{x^{21}}{21} + C$.

4. Знайти інтеграл $\int \frac{7\sqrt{x} - x^{20}}{x^{12}} dx$.

Розв'язання:

$$\int \frac{7\sqrt{x} - x^{20}}{x^{12}} dx = \int \left(7x^{\frac{1}{2}-12} - x^{20-12} \right) dx = \int \left(7x^{-\frac{23}{2}} - x^8 \right) dx = 7 \int x^{-\frac{23}{2}} dx - \int x^8 dx = -\frac{2}{3\sqrt{x^{21}}} - \frac{x^9}{9} + C.$$

Відповідь: $-\frac{2}{3\sqrt{x^{21}}} - \frac{x^9}{9} + C$.

5. Знайти інтеграл $\int \left(7x + \frac{2}{x} - \sin x + 5^x \right) dx$.

Розв'язання:

$$\int \left(7x + \frac{2}{x} - \sin x + 5^x \right) dx = 7 \int x dx + 2 \int \frac{dx}{x} - \int \sin x dx + \int 5^x dx = 7 \frac{x^2}{2} + 2 \ln|x| + \cos x + \frac{5^x}{\ln 5} + C.$$

Відповідь: $7 \frac{x^2}{2} + 2 \ln|x| + \cos x + \frac{5^x}{\ln 5} + C$.

6. Знайти інтеграл $\int \left(2 + \frac{4}{x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$.

Розв'язання: $\int \left(2 + \frac{4}{x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = 2 \int dx + 4 \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{\sin^2 x} = 2x + 4 \ln|x| + \operatorname{ctgx} x + C$.

Відповідь: $2x + 4 \ln|x| + \operatorname{ctgx} x + C$.

7. Знайти інтеграл $\int (2 \cos x - 4e^x + 3) dx$.

Розв'язання: $\int (2 \cos x - 4e^x + 3) dx = 2 \int \cos x dx - 4 \int e^x dx + 3 \int dx = -2 \sin x - 4e^x + 3x + C$.

Відповідь: $-2 \sin x - 4e^x + 3x + C$.

8. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x^2 + 3}$.

Розв'язання:

Застосуємо формулу 12 ($a = \sqrt{3}$), маємо $\int \frac{dx}{x^2 + 3} = \int \frac{dx}{x^2 + (\sqrt{3})^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C$.

Відповідь: $\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C$.

9. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x^2 - 3}$.

Розв'язання:

Застосуємо різновид формул 13 ($a = \sqrt{3}$): $\int \frac{dx}{x^2 - 3} = \int \frac{dx}{x^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{3}}{x + \sqrt{3}} \right| + C$.

Відповідь: $\frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{3}}{x + \sqrt{3}} \right| + C$.

10. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{25 - x^2}}$.

Розв'язання:

Застосуємо формулу 11 ($a = 5$), маємо $\int \frac{dx}{\sqrt{25 - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{5} + C$.

Відповідь: $\arcsin \frac{x}{5} + C$.

$$11. \text{ Знайти інтеграл } \int \frac{dx}{\sqrt{12+x^2}}.$$

Розв'язання:

$$\text{Застосуємо формулу 14, маємо } \int \frac{dx}{\sqrt{12+x^2}} = \ln|x + \sqrt{12+x^2}| + C.$$

$$\text{Відповідь: } \ln|x + \sqrt{12+x^2}| + C.$$

3. Завдання для самостійного виконання

1. $\int \left(x^9 - \frac{1}{x^3} + 2\sqrt[3]{x^4} \right) dx, \quad \int \left(x^3 + \frac{2}{x^3} - \sqrt[4]{x^5} \right) dx, \quad \int \left(2x^4 + \frac{1}{x^3} - \frac{2}{\sqrt[5]{x}} \right) dx, \quad \int \left(3x^4 - \frac{10}{x^2} + 9\sqrt[3]{x^2} \right) dx,$
 $\int \left(3x - \frac{4}{x^4} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \right) dx, \quad \int \left(2x^3 - \sqrt[4]{x} + \frac{2}{x^4} \right) dx, \quad \int \left(x^8 + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{10} - 3\sqrt[3]{x^3} \right) dx, \quad \int \left(9x^8 - \frac{10}{x^{19}} + 11\sqrt[3]{x^8} \right) dx,$
 $\int \left(\frac{x^7}{2} + \frac{x}{3} + \frac{1}{4x^7} - \frac{1}{5}\sqrt[5]{x^6} \right) dx, \quad \int \left(x^4 + \frac{1}{x^4} - 3\sqrt[3]{x^5} \right) dx, \quad \int \frac{\sqrt{x} + x - x^2}{x^4} dx, \quad \int \frac{2\sqrt{x} + 3x - 4x^{12}}{x^7} dx.$
2. $\int \left(9 - \frac{4}{x} - \frac{2}{\cos^2 x} + 10^x \right) dx, \quad \int \left(6e^x - 7 \sin x + 8 \cos x - \frac{9}{\sin^2 x} \right) dx, \quad \int \left(9x + \frac{3}{x} - \cos x + 7^x \right) dx,$
 $\int \left(4 - \frac{2}{x} - \frac{3}{\cos^2 x} \right) dx, \quad \int (6 \sin x - 8e^x + 1) dx.$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}, \quad \int \frac{dx}{x^2-25}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-10}}, \quad \int \frac{dx}{x^2+16}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-16}}, \quad \int \frac{dx}{x^2+36}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}, \quad \int \frac{dx}{x^2-49}.$

M.07.П3.02. ЗМІНА ЗМІННОЇ ПІД ЗНАКОМ ДИФЕРЕНЦІАЛА

1. Основні поняття та теореми

Якщо аргумент функції і змінна під знаком диференціала однакові, можна застосувати формулу з таблиці інтегралів: $\int \cos \square d \square = \sin \square + C; \quad \int \sin \square d \square = -\cos \square + C; \quad \int e^\square d \square = e^\square + C;$
 $\int \square^n d \square = \frac{\square^{n+1}}{n+1} + C; \quad \int \frac{d \square}{\square} = \ln |\square| + C; \quad \int \frac{d \square}{\sin^2 \square} = -\operatorname{ctg} \square + C; \quad \int \frac{d \square}{\cos^2 \square} = \operatorname{tg} \square + C; \quad \int \frac{d \square}{\square^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{\square}{a} + C.$

Під знаком диференціала можна додати (відняти) будь-яку сталу, бо $d(x \pm C) = dx \pm dC$, а так як $dC = 0$, то $dx = d(x \pm C)$. Під знаком диференціала можна домножити (поділити) змінну на будь-яку сталу, при цьому сам інтеграл треба поділити (помножити) на цю сталу. Так як $d(Cx) = Cdx \pm x dC$, $dC = 0$, то $d(Cx) = Cdx$, початкову умову змінили (збільшили) в C разів і потрібна компенсація (зменшення в C разів).

Так як $d(x^2) = (x^2)' dx = 2x dx$, то $2x dx = d(x^2)$ ($2x$ внесли під знак диференціала). Аналогічно: $3x^2 dx = d(x^3)$ ($3x^2$ внесли під знак диференціала), $\cos x dx = d(\sin x)$ ($\cos x$ внесли під знак диференціала), $\sin x dx = -d(\cos x)$ ($\sin x$ внесли під знак диференціала), $e^x dx = d(e^x)$ (e^x внесли під знак диференціала), $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$ ($\frac{1}{x}$ внесли під знак диференціала), $\frac{dx}{2\sqrt{x}} = d(\sqrt{x})$ (\sqrt{x} внесли під знак диференціала), $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x)$ ($\frac{1}{\cos^2 x}$ внесли під знак диференціала).

2. Приклади виконання завдань

$$1. \text{ Знайти інтеграл } \int \cos(x-3) dx.$$

$$\text{Розв'язання: } \int \cos(x-3) dx = \int \cos(x-3) d(x-3) = \sin(x-3) + C.$$

$$\text{Відповідь: } \sin(x-3) + C.$$

2. Знайти інтеграл $\int e^{x+7} dx$.

$$\text{Розв'язання: } \int e^{x+7} dx = \int e^{x+7} d(x+7) = e^{x+7} + C.$$

Відповідь: $e^{x+7} + C$.

3. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{(x+2)^2}$.

$$\text{Розв'язання: } \int \frac{dx}{(x+2)^2} = \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2} = \int (x+2)^{-2} d(x+2) = \frac{(x+2)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x+2} + C.$$

Відповідь: $-\frac{1}{x+2} + C$.

4. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x-5}$.

$$\text{Розв'язання: } \int \frac{dx}{x-5} = \int \frac{d(x-5)}{x-5} = \ln|x-5| + C.$$

Відповідь: $\ln|x-5| + C$.

5. Знайти інтеграл $\int e^{3x} dx$.

$$\text{Розв'язання: } \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} \int e^{3x} d(3x) = \frac{1}{3} e^{3x} + C.$$

Відповідь: $\frac{1}{3} e^{3x} + C$.

6. Знайти інтеграл $\int \cos 2x dx$.

$$\text{Розв'язання: } \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int \cos 2x d(2x) = \frac{1}{2} \sin 2x + C.$$

Відповідь: $\frac{1}{2} \sin 2x + C$.

7. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{3}}$.

$$\text{Розв'язання: } \int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{3}} = 3 \int \frac{d\left(\frac{x}{3}\right)}{\cos^2 \frac{x}{3}} = 3 \operatorname{tg} \frac{x}{3} + C.$$

Відповідь: $3 \operatorname{tg} \frac{x}{3} + C$.

8. Знайти інтеграл $\int \cos(2x+3) dx$.

Розв'язання:

$$\int \cos(2x+3) dx = \frac{1}{2} \int \cos(2x+3) d(2x) = \frac{1}{2} \int \cos(2x+3) d(2x+3) = \frac{1}{2} \sin(2x+3) + C.$$

Відповідь: $\frac{1}{2} \sin(2x+3) + C$.

9. Знайти інтеграл $\int \sin(4x-5) dx$.

Розв'язання:

$$\int \sin(4x-5) dx = \frac{1}{4} \int \sin(4x-5) d(4x) = \frac{1}{4} \int \sin(4x-5) d(4x-5) = -\frac{1}{4} \cos(4x-5) + C.$$

Відповідь: $-\frac{1}{4} \cos(4x-5) + C$.

10. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 \left(\frac{x}{3} - 1 \right)}$.

$$\text{Розв'язання: } \int \frac{dx}{\sin^2 \left(\frac{x}{3} - 1 \right)} = 3 \int \frac{d\left(\frac{x}{3}\right)}{\sin^2 \left(\frac{x}{3} - 1 \right)} = 3 \int \frac{d\left(\frac{x}{3} - 1\right)}{\sin^2 \left(\frac{x}{3} - 1 \right)} = -3 \operatorname{ctg} \left(\frac{x}{3} - 1 \right) + C.$$

Відповідь: $-3\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3}-1\right)+C$.

11. Знайти інтеграл $\int e^{x^2} 2xdx$.

Розв'язання: $\int e^{x^2} 2xdx = \int e^{x^2} d(x^2) = e^{x^2} + C$.

Відповідь: $e^{x^2} + C$.

12. Знайти інтеграл $\int \frac{xdx}{1+x^2}$.

Розв'язання: $\int \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{2xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C$.

Відповідь: $\frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C$.

13. Знайти інтеграл $\int \frac{\cos xdx}{\sin^7 x}$.

Розв'язання: $\int \frac{\cos xdx}{\sin^7 x} = \int \frac{d(\sin x)}{\sin^7 x} = \int \sin^{-7} x d(\sin x) = \frac{\sin^{-6} x}{-6} + C$. Відповідь: $\frac{\sin^{-6} x}{-6} + C$.

14. Знайти інтеграл $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^3}}$.

Розв'язання: $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{1}{3} \int (1+x^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3x^2 dx = \frac{1}{3} \int (1+x^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot d(1+x^3) = \frac{2}{3} \sqrt{x^3+1} + C$.

Відповідь: $\frac{2}{3} \sqrt{x^3+1} + C$.

15. Знайти інтеграл $\int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 4}$.

Розв'язання: $\int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 4} = \int \frac{d(e^x)}{e^{2x} + 4} = \int \frac{d(e^x)}{2^2 + (e^x)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{e^x}{2} + C$. Відповідь: $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{e^x}{2} + C$.

16. Знайти інтеграл $\int \left(2 \ln x - \frac{3}{\ln x}\right) \frac{dx}{x}$.

Розв'язання:

$$\int \left(2 \ln x - \frac{3}{\ln x}\right) \frac{dx}{x} = \int \left(2 \ln x - \frac{3}{\ln x}\right) d(\ln x) = 2 \int \ln x d(\ln x) - 3 \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = 2 \frac{(\ln x)^2}{2} - 3 \ln |\ln x| + C.$$

Відповідь: $(\ln x)^2 - 3 \ln |\ln x| + C$.

17. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{2\sqrt{x} \sin^2 \sqrt{x}}$.

Розв'язання: $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \sin^2 \sqrt{x}} = 2 \int \frac{dx}{2\sqrt{x} \sin^2 \sqrt{x}} = 2 \int \frac{d(\sqrt{x})}{\sin^2 \sqrt{x}} = -2 \operatorname{ctg} \sqrt{x} + C$.

Відповідь: $-2 \operatorname{ctg} \sqrt{x} + C$.

18. Знайти інтеграл $\int \frac{\sqrt[3]{3+\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$.

Розв'язання: $\int \frac{\sqrt[3]{3+\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx = \int \sqrt[3]{3+\operatorname{tg} x} d(\operatorname{tg} x) = \int (3+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{3}} d(\operatorname{tg} x + 3) = \frac{(3+\operatorname{tg} x)^{\frac{4}{3}}}{4/3} + C$.

Відповідь: $\frac{3}{4} (3+\operatorname{tg} x)^{\frac{4}{3}} + C$.

19. Знайти інтеграл $\int \operatorname{tg} x \ln(\cos x) dx$.

Розв'язання:

$$\int \operatorname{tg}x \ln(\cos x) dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \ln(\cos x) dx = \int \frac{1}{\cos x} \ln(\cos x) d(\cos x) = \int \ln(\cos x) d(\ln(\cos x)) = \ln^2(\cos x) + C.$$

Відповідь: $\ln^2(\cos x) + C$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайти інтеграли методом зміни змінної під знаком диференціала (по два з рядка):

a) $\int \sin(8+x) dx$; б) $\int \frac{1}{\cos^2(8+x)} dx$; в) $\int \frac{dx}{x+1}$; г) $\int (x-3)^3 dx$; і) $\int \sqrt{x-5} dx$; д) $\int 7^{x-8} dx$;

е) $\int \cos 8x dx$; е) $\int \sin 9x dx$; ж) $\int \frac{1}{\sin^2 8x} dx$; з) $\int \frac{1}{\cos^2(x/10)} dx$; и) $\int e^{\frac{x}{8}} dx$.

2. Знайти інтеграли методом зміни змінної під знаком диференціала (по два з рядка):

а) $\int \frac{dx}{5x-1}$; б) $\int e^{\frac{x}{2}+3} dx$; в) $\int \sin\left(\frac{x}{5}-3\right) dx$; г) $\int \frac{1}{\cos^2(8-x)} dx$; і) $\int \frac{1}{(2x+3)^8} dx$; д) $\int \frac{dx}{(2-x/3)^2}$.

3. Знайти інтеграли методом внесенням під знак диференціала (по одному з рядка):

1) $\int \cos^3 x \sin x dx$, 2) $\int \frac{\cos x dx}{(1+\sin x)^2}$, 3) $\int \frac{\sin x dx}{1+2\cos x}$, 4) $\int \sqrt{1+2\cos x} \sin x dx$, 5) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+2\sin x}}$;

6) $\int \frac{2x dx}{\sqrt[3]{x^2+1}}$, 7) $\int \frac{3x^2 dx}{\sqrt{x^3-2}}$, 8) $\int x^3 \sqrt{2+x^4} dx$, 9) $\int \frac{2x dx}{\sqrt[5]{x^2-1}}$, 10) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}$, 11) $\int x e^{-x^2} dx$;

12) $\int \operatorname{tg} x dx$, 13) $\int \operatorname{ctg} x dx$, 14) $\int \frac{\operatorname{tg}^3 x dx}{\cos^2 x}$, 15) $\int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \operatorname{tg}^3 x}$, 16) $\int \frac{\operatorname{ctg} x dx}{\ln \sin x}$;

17) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$, 18) $\int \frac{e^x dx}{e^x+3}$, 19) $\int \frac{\ln x}{x} dx$, 20) $\int \frac{dx}{x\sqrt{3-\ln x}}$, 21) $\int \frac{\sqrt{\ln x} dx}{x}$, 22) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$;

23) $\int \frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx$, 24) $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx$, 25) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}}$, 26) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(2-\sqrt{x})}$, 27) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$.

М.07.ПЗ.03. ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ

1. Основні поняття та теореми

Формулу інтегрування частинами $\int u dv = uv - \int v du$ застосовують:

1) в інтегралах вигляду $\int P(x)e^x dx$; $\int P(x)a^x dx$; $\int P(x)\sin x dx$; $\int P(x)\cos x dx$ (де $P(x)$ – многочлен) позначають $u = P(x)$, dv – залишок;

2) в інтегралах вигляду $\int P(x)\ln x dx$; $\int P(x)\log_a x dx$; $\int P(x)\arcsin x dx$; $\int P(x)\arccos x dx$; $\int P(x)\operatorname{arcctg} x dx$; $\int P(x)\operatorname{arctg} x dx$ (добуток многочлена і оберненої функції) позначають u – обернена функція, $dv = P(x)dx$.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти інтеграл $\int (1-4x)\sin 2x dx$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{l} u = 1-4x \\ du = -4dx \\ dv = \sin 2x dx \\ v = \frac{1}{2} \int \sin 2x d(2x) = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array} \right] = -(1-4x) \frac{1}{2} \cos 2x - \int \frac{1}{2} \cos 2x \cdot 4dx = \\ & = -(1-4x) \frac{1}{2} \cos 2x - \int \cos 2x \cdot 2dx = -(1-4x) \frac{1}{2} \cos 2x - \sin 2x + C. \end{aligned}$$

Відповідь: $\left(2x - \frac{1}{2}\right) \cos 2x - \sin 2x + C$.

2. Знайти інтеграл $\int (2x-1)e^{-3x} dx$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{l} u = 2x - 1 \\ dv = e^{-3x} dx \end{array} \quad \begin{array}{l} du = 2dx \\ v = -\frac{1}{3} \int e^{-3x} d(-3x) = -\frac{1}{3} e^{-3x} \end{array} \right] &= -(2x-1) \frac{1}{3} e^{-3x} + \frac{2}{3} \int e^{-3x} dx = \\ &= -(2x-1) \frac{1}{3} e^{-3x} - \frac{2}{9} \int e^{-3x} d(-3x) = -(2x-1) \frac{1}{3} e^{-3x} - \frac{2}{9} e^{-3x} + C. \end{aligned}$$

Відповідь: $\left(\frac{1}{3} - \frac{2x}{3}\right) e^{-3x} - \frac{2}{9} e^{-3x} + C.$

3. Знайти інтеграл $\int x^2 \sin x dx.$

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = \sin x dx \end{array} \quad \begin{array}{l} du = 2x dx \\ v = -\cos x \end{array} \right] &= -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx \left[\begin{array}{l} u = 2x \\ dv = \cos x dx \end{array} \quad \begin{array}{l} du = 2dx \\ v = \sin x \end{array} \right] = \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x - \int 2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C. \end{aligned}$$

Відповідь: $-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$

4. Знайти інтеграл $\int x^2 \cdot 2^x dx.$

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = 2^x dx \end{array} \quad \begin{array}{l} du = 2x dx \\ v = \frac{2^x}{\ln 2} \end{array} \right] &= \frac{x^2 2^x}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2} \int x \cdot 2^x dx \left[\begin{array}{l} u = x \\ dv = 2^x dx \end{array} \quad \begin{array}{l} du = dx \\ v = \frac{2^x}{\ln 2} \end{array} \right] = \frac{x^2 2^x}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2} \left[\frac{x 2^x}{\ln 2} - \int \frac{2^x}{\ln 2} dx \right] \\ &= \frac{x^2 2^x}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2} \left[\frac{x 2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{\ln^2 2} \right] + C = \frac{x^2 2^x}{\ln 2} - \frac{x 2^{x+1}}{\ln^2 2} + \frac{2^{x+1}}{\ln^3 2} + C. \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{x^2 2^x}{\ln 2} - \frac{x 2^{x+1}}{\ln^2 2} + \frac{2^{x+1}}{\ln^3 2} + C.$

5. Знайти інтеграл $\int e^x \cos x dx.$

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{l} u = e^x \\ dv = \cos x dx \end{array} \quad \begin{array}{l} du = e^x dx \\ v = \sin x \end{array} \right] &= e^x \sin x - \int e^x \sin x dx \left[\begin{array}{l} u = e^x \\ dv = \sin x dx \end{array} \quad \begin{array}{l} du = e^x dx \\ v = -\cos x \end{array} \right] = \\ &= e^x \sin x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx \right) = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx. \end{aligned}$$

Маємо рівняння відносно $\int e^x \cos x dx,$ тобто $\int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$ або

$$2 \int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x. \text{ Звідси } \int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + C.$$

Відповідь: $\frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + C.$

6. Знайти інтеграл $\int \ln(x-8) dx.$

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{l} u = \ln(x-8) \\ dv = dx \end{array} \quad \begin{array}{l} du = \frac{dx}{x-8} \\ v = x \end{array} \right] &= x \ln(x-8) - \int \frac{x}{x-8} dx = x \ln(x-8) - \int \frac{x-8+8}{x-8} dx = \\ &= x \ln(x-8) - \int \left(1 + \frac{8}{x-8} \right) dx = x \ln(x-8) - x - 8 \int \frac{d(x-8)}{x-8} = x \ln(x-8) - x - 8 \ln|x-8| + C. \end{aligned}$$

Відповідь: $x \ln(x-8) - x - 8 \ln|x-8| + C.$

7. Знайти інтеграл $\int (2x-4) \ln(1-x) dx.$

Розв'язання:

$$\left[\begin{array}{l} u = \ln(1-x) \\ dv = (2x-4)dx \end{array} \quad \begin{array}{l} du = \frac{-dx}{1-x} \\ v = x^2 - 4x \end{array} \right] = (x^2 - 4x)\ln(1-x) + \int (x^2 - 4x) \frac{dx}{1-x} = (x^2 - 4x)\ln(1-x) + \int \frac{x^2 - 4x}{1-x} dx.$$

В підінтегральному виразі виділимо цілу частину. Для цього ділимо чисельник на знаменник:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} x^2 - 4x \\ x^2 - x \\ \hline -3x \\ -3x + 3 \\ \hline -3 \end{array} & \begin{array}{c} -x+1 \\ \hline -x+3 \end{array} \end{array} \quad \begin{aligned} & (x^2 - 4x)\ln(1-x) + \int \left(-x+3 - \frac{3}{1-x} \right) dx = \\ & = (x^2 - 4x)\ln(1-x) - \int xdx + \int 3dx - \int \frac{3dx}{1-x} = \\ & = (x^2 - 4x)\ln(1-x) - \frac{x^2}{2} + 3x + 3\ln|1-x| + C. \end{aligned}$$

Відповідь: $(x^2 - 4x)\ln(1-x) - \frac{x^2}{2} + 3x + 3\ln|1-x| + C$.

8. Знайти інтеграл $\int \ln(4x^2 + 6)dx$.

Розв'язання:

$$\left[\begin{array}{l} u = \ln(4x^2 + 6) \\ dv = dx \end{array} \quad \begin{array}{l} du = \frac{8xdx}{4x^2 + 6} \\ v = x \end{array} \right] = x\ln(4x^2 + 6) - \int \frac{4x^2 dx}{2x^2 + 3} = x\ln(4x^2 + 6) - \int \frac{4x^2 + 6 - 6}{2x^2 + 3} dx = x\ln(4x^2 + 6) - \int \left(2 - \frac{6}{2x^2 + 3} \right) dx = x\ln(4x^2 + 6) - 2x + 3 \int \frac{1}{x^2 + \frac{3}{2}} dx = x\ln(4x^2 + 6) - 2x + \sqrt{6}\arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x\right) + C.$$

Відповідь: $x\ln(4x^2 + 6) - 2x + \sqrt{6}\arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x\right) + C$.

9. Знайти інтеграл $\int \arccos x dx$.

Розв'язання:

$$\left[\begin{array}{l} u = \arccos x \\ dv = dx \end{array} \quad \begin{array}{l} du = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ v = x \end{array} \right] = x\arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x\arccos x + \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = x\arccos x - \frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) = x\arccos x - (1-x^2)^{\frac{1}{2}} + C.$$

Відповідь: $x\ln(x-8) - x - 8\ln|x-8| + C$.

10. Знайти інтеграл $\int (3x^2 + 1) \cdot \operatorname{arctg} x dx$.

Розв'язання:

$$\left[\begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x \\ dv = (3x^2 + 1)dx \end{array} \quad \begin{array}{l} du = \frac{dx}{1+x^2} \\ v = x^3 + x \end{array} \right] = (x^3 + x) \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^3 + x}{1+x^2} dx = (x^3 + x) \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{x(x^2 + 1)}{1+x^2} dx = (x^3 + x) \cdot \operatorname{arctg} x - \int x dx = (x^3 + x) \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{x^2}{2} + C.$$

Відповідь: $(x^3 + x) \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{x^2}{2} + C$.

11. Знайти інтеграл $\int \operatorname{arctg} 2x dx$.

Розв'язання:

$$\left[\begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} 2x \\ dv = dx \end{array} \quad \begin{array}{l} du = \frac{2dx}{1+4x^2} \\ v = x \end{array} \right] = x \cdot \operatorname{arctg} 2x - \int \frac{2x}{1+4x^2} dx = x \cdot \operatorname{arctg} 2x - \int \frac{d(x^2)}{1+4x^2} = x \cdot \operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{4} \int \frac{d(4x^2 + 1)}{1+4x^2} =$$

$$= x \cdot \arctg x - \frac{1}{4} \ln |1 + 4x^2| + C.$$

Відповідь: $x \cdot \arctg x - \frac{1}{4} \ln |1 + 4x^2| + C.$

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайти інтеграли методом інтегрування частинами (по одному з комірок таблиці)

$\int (x-1) \cos 3x dx ; \int (x-1) \sin 4x dx ;$	$\int xe^{x+5} dx ; \int (x+7) e^x dx ;$
$\int (x+2) \sin 3x dx ; \int (x-3) \sin 2x dx ;$	$\int (2x+3) e^x dx ; \int (x+5) e^{3x} dx ;$
$\int (7x-10) \sin 5x dx ; \int (3x-1) \cos 5x dx ;$	$\int (x+2) e^{3x} dx ; \int (1-2x) e^{3x} dx ;$
$\int (2x-3) \cos 5x dx ; \int (1-5x) \sin 3x dx ;$	$\int (x+3) e^{2x} dx ; \int (5-2x) e^{-x} dx ;$
$\int x \cos(x-2) dx ; \int x \sin(3x-1) dx ;$	$\int (x+5) e^{-4x} dx ; \int xe^{-x} dx ;$
$\int x \cos(5-3x) dx ; \int 3x \sin(5x+2) dx .$	$\int (3-2x) 4^x dx ; \int (2x+1) \cdot 2^{-x} dx .$
$\int x^2 \cos x dx ; \int x^2 \cdot 5^x dx ; \int e^x \sin x dx .$	$\int x \ln x dx ; \int x \ln(x+13) dx ; \int (x^2+1) \ln x dx ;$
$\int \arctg x dx ; \int \arcsin x dx ; \int \arctg 3x dx .$	$\int \ln x dx ; \int \ln(2x+3) dx ; \int (x-2) \ln(1-x) dx .$

M.07.ПЗ.04. ІНТЕГРУВАННЯ НАЙПРОСТИШІХ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ

1. Основні поняття та теореми

Перший тип $\int \frac{A}{Bx \pm \beta} dx$ і другий тип $\int \frac{A}{(Bx \pm \beta)^n} dx$ розв'язують зведенням диференціала до вигляду $d(Bx \pm \beta)$ і застосуванням табличних інтегралів $\int \frac{d\Box}{\Box} = \ln |\Box| + C$ і $\int \frac{d\Box}{\Box^n} = -\frac{1}{(n-1)\Box^{n-1}} + C$ (наслідок $\int \Box^n d\Box = \frac{\Box^{n+1}}{n+1} + C$).

Третій тип $\int \frac{Ax+B}{x^2 \pm px+q} dx$ розв'язують виділенням у чисельнику похідної знаменника і застосовують табличний інтеграл $\int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C$ і формули $\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{t}{a} + C$ або $\int \frac{dt}{t^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{t-a}{t+a} \right| + C$.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти інтеграл $\int \frac{2}{3x-34} dx$.

Розв'язання: $\int \frac{2}{3x-34} dx = 2 \int \frac{dx}{3x-34} = \frac{2}{3} \int \frac{d(3x-34)}{3x-34} = \frac{2}{3} \ln |3x-34| + C$.

Відповідь: $\frac{2}{3} \ln |3x-34| + C$.

2. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{1-2x}$.

Розв'язання: $\int \frac{dx}{1-2x} = -\frac{1}{2} \int \frac{d(1-2x)}{1-2x} = -\frac{1}{2} \ln |1-2x| + C$. Відповідь: $-\frac{1}{2} \ln |1-2x| + C$.

3. Знайти інтеграл $\int \frac{7}{(2x-5)^3} dx$.

Розв'язання: $\int \frac{7}{(2x-5)^3} dx = 7 \int \frac{dx}{(2x-5)^3} = \frac{7}{2} \int \frac{d(2x-5)}{(2x-5)^3} = -\frac{7}{2} \frac{1}{2(2x-5)^2} + C = -\frac{7}{4(2x-5)^2} + C$,

$$\int \frac{7}{(2x-5)^3} dx = 7 \int (2x-5)^{-3} dx = \frac{7}{2} \int (2x-5)^{-3} d(2x-5) = \frac{7}{2} \frac{(2x-5)^{-2}}{-2} + C = -\frac{7}{4} \frac{1}{(2x-5)^2} + C.$$

Відповідь: $-\frac{7}{4(2x-5)^2} + C$.

4. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x^2 - 8x + 25}$.

Розв'язання: $\int \frac{dx}{x^2 - 8x + 25} = \int \frac{dx}{x^2 - 2x \cdot 4 + 4^2 - 4^2 + 25} = \int \frac{d(x-4)}{(x-4)^2 + 3^2} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x-4}{3} + C$.

Відповідь: $\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x-4}{3} + C$.

5. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x^2 + 6x - 7}$.

Розв'язання: $\int \frac{dx}{x^2 + 6x - 7} = \int \frac{dx}{x^2 + 2x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 - 7} = \int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2 - 4^2} = \frac{1}{2 \cdot 4} \ln \left| \frac{x+3-4}{x+3+4} \right| + C$.

Відповідь: $\frac{1}{8} \ln \left| \frac{x-1}{x+7} \right| + C$.

6. Знайти інтеграл $\int \frac{2x+35}{x^2 + 35x + 1} dx$.

Розв'язання: $\int \frac{2x+35}{x^2 + 35x + 1} dx = \int \frac{d(x^2 + 35x + 1)}{x^2 + 35x + 1} = \ln |x^2 + 35x + 1| + C$.

Відповідь: $\ln |x^2 + 35x + 1| + C$.

7. Знайти інтеграл $\int \frac{2x+3}{x^2 - 6x + 13} dx$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+3}{x^2 - 6x + 13} dx &= \int \frac{2x-6+6+3}{x^2 - 6x + 13} dx = \int \frac{2x-6}{x^2 - 6x + 13} dx + \int \frac{9}{x^2 - 6x + 13} dx = \\ &= \int \frac{d(x^2 - 6x + 13)}{x^2 - 6x + 13} + 9 \int \frac{dx}{x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 13} = \ln |x^2 - 6x + 13| + 9 \int \frac{dx}{(x-3)^2 + 4} = \\ &= \ln |x^2 - 6x + 13| + 9 \int \frac{d(x-3)}{(x-3)^2 + 2^2} = \ln |x^2 - 6x + 13| + \frac{9}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-3}{2} + C. \end{aligned}$$

Відповідь: $\ln |x^2 - 6x + 13| + \frac{9}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-3}{2} + C$.

8. Знайти інтеграл $\int \frac{3x-6}{x^2 + 8x + 7} dx$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} 3 \int \frac{x-2}{x^2 + 8x + 7} dx &= \frac{3}{2} \int \frac{2x-4}{x^2 + 8x + 7} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x+8-8-4}{x^2 + 8x + 7} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x+8}{x^2 + 8x + 7} dx - \frac{3}{2} \int \frac{12}{x^2 + 8x + 7} dx = \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{d(x^2 + 8x + 7)}{x^2 + 8x + 7} - 18 \int \frac{dx}{x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 - 4^2 + 7} = \frac{3}{2} \ln |x^2 + 8x + 7| - 18 \int \frac{d(x+4)}{(x+4)^2 - 3^2} = \\ &= \frac{3}{2} \ln |x^2 + 8x + 7| - 18 \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} \ln \left| \frac{x+4-3}{x+4+3} \right| + C = \frac{3}{2} \ln |x^2 + 8x + 7| - 3 \ln \left| \frac{x+1}{x+7} \right| + C. \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{3}{2} \ln |x^2 + 8x + 7| - 3 \ln \left| \frac{x+1}{x+7} \right| + C$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайти інтеграли $\int \frac{5-2x}{x^2-5x} dx$; $\int \frac{2x-1}{x^2-x+7} dx$, $\int \frac{x-1}{x^2-2x+5} dx$; $\int \frac{4-3x}{x^2-x} dx$.
2. Знайти інтеграли $\int \frac{\gamma}{\alpha x+\beta} dx$, $\int \frac{\gamma}{(\alpha x+\beta)^2} dx$, $\int \frac{\gamma}{x^2+4x+5} dx$, $\int \frac{\alpha x+\beta}{x^2+8x-20} dx$.

М.07.ПЗ.05. ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ

Приклади виконання завдань

1. Знайти невизначений інтеграл від раціонального дробу $\int \frac{x^5+3x^2+1}{x^3+1} dx$.

Розв'язання:

Виділимо цілу частину неправильного підінтегрального раціонального дробу. Для цього поділимо на знаменник:

$$\text{В результаті одержимо } \frac{x^5+3x^2+1}{x^3+1} = x^2 + \frac{2x^2+1}{x^3+1}.$$

Розкладемо правильний дріб на найпростіші дроби (за множниками знаменника).

$$\frac{2x^2+1}{x^3+1} = \frac{2x^2+1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} = \frac{A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}. \quad \text{Дроби рівні,}$$

знаменники рівні, отже рівні чисельники $A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1) = 2x^2+1$.

Перший метод визначення коефіцієнтів: прирівнювання коефіцієнтів при одинакових степенях

$$\begin{aligned} \text{невідомої } Ax^2 - Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx + C &= 2x^2 + 1 \quad \text{дає} \quad x^2 : \begin{cases} A + B = 2, \\ -A + B + C = 0, \\ A + C = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 2 - A, \\ -3A + 3 = 0, \\ C = 1 - A; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 1, \\ A = 1, \\ C = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Тобто маємо } \frac{2x^2+1}{x^3+1} = \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x^2-x+1}.$$

Другий метод: метод варіації невідомої, що полягає в присвоєнні певних значень змінній, дає

$$\begin{aligned} x = -1 : \begin{cases} 3A = 3, \\ A + C = 1, \\ A + 2(B + C) = 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1, \\ C = 0, \\ B = 1. \end{cases} \quad \text{Звідки } \frac{2x^2+1}{x^3+1} = \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x^2-x+1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Маємо } \int x^2 dx + \int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{x}{x^2-x+1} dx. \quad \text{Перший інтеграл – табличний } \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C, \quad \text{другий –} \\ \text{дріб I типу } \int \frac{d(x+1)}{x+1} = \ln|x+1| + C, \quad \text{третій – дріб III типу } \int \frac{x}{x^2-x+1} dx = \\ = \frac{1}{2} \int \frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2-x+1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C. \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь: } \frac{x^3}{3} + \ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

2. Знайти невизначений інтеграл від раціонального дробу $\int \frac{x}{x^3+1} dx$.

Розв'язання:

Степінь знаменника 3, чисельника 1, дріб правильний, виділяти цілу частину не треба.

Розкладемо правильний дріб на найпростіші дроби (за множниками знаменника).

$$\frac{x}{x^3+1} = \frac{x}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} = \frac{A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}.$$

Дроби рівні, знаменники рівні, отже рівні чисельники $A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1) = x$.

Для визначення невідомих коефіцієнтів A , B , C прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях невідомої $Ax^2 - Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx + C = x$. Це дає систему рівнянь

$$\begin{aligned} x^2 : & \begin{cases} A + B = 0, \\ -A + B + C = 1, \\ A + C = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -A, \\ -3A = 1, \\ C = -A; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 1/3, \\ A = -1/3, \\ C = 1/3. \end{cases} \\ x^1 : & \text{Тобто маємо } \frac{x}{x^3 + 1} = \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{x+1}{x^2 - x + 1} \right). \\ x^0 : & \end{aligned}$$

В результаті одержали $\frac{1}{3} \int \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{x+1}{x^2 - x + 1} \right) dx$. Перший інтеграл – дріб I типу

$$\begin{aligned} \int \frac{d(x+1)}{x+1} &= \ln|x+1| + C, \quad \text{другий інтеграл – дріб III типу} \quad \int \frac{x+1}{x^2 - x + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x-1+3}{x^2 - x + 1} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x-1}{x^2 - x + 1} dx + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 - x + 1)}{x^2 - x + 1} dx + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \ln|x^2 - x + 1| + \frac{3}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C. \quad \text{Тоді} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{3} \int \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{x+1}{x^2 - x + 1} \right) dx = -\frac{1}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{6} \ln|x^2 - x + 1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$\text{Відповідь: } -\frac{1}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{6} \ln|x^2 - x + 1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

3. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{3x^2 + 14x + 37}{(x-1)(x^2 + 4x + 13)} dx$.

Розв'язання:

Розкладемо підінтегральний правильний дріб на найпростіші дроби за множниками знаменника: $\frac{3x^2 + 14x + 37}{(x-1)(x^2 + 4x + 13)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2 + 4x + 13} = \frac{A(x^2 + 4x + 13) + (Bx + C)(x-1)}{(x-1)(x^2 + 4x + 13)}$.

Прирівнюючи чисельники, одержимо $A(x^2 + 4x + 13) + (Bx + C)(x-1) = 3x^2 + 14x + 37$.

Для визначення невідомих коефіцієнтів A , B , C прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях невідомої $Ax^2 + 4Ax + 13A + Bx^2 - Bx + Cx - C = 3x^2 + 14x + 37$. Звідси маємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} x^2 : & \begin{cases} A + B = 3, \\ 4A - B + C = 14, \\ 13A - C = 37; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 3 - A, \\ 18A - 40 = 14, \\ C = 13A - 37; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 0, \\ A = 3, \\ C = 2. \end{cases} \quad \text{Маємо } \frac{3x^2 + 14x + 37}{(x-1)(x^2 + 4x + 13)} = \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x^2 + 4x + 13}. \\ x^1 : & \\ x^0 : & \end{aligned}$$

В результаті одержали інтеграл $\int \left(\frac{3}{x-1} + \frac{2}{x^2 + 4x + 13} \right) dx$. Проінтегруємо отримані дроби I і III типу, маємо $3 \int \frac{d(x-1)}{x-1} = 3 \ln|x-1| + C$ і $2 \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 13} = 2 \int \frac{dx}{(x+2)^2 + (3)^2} = \frac{2}{3} \arctg \frac{x+2}{3} + C$.

$$\text{Відповідь: } 3 \ln|x-1| + \frac{2}{3} \arctg \frac{x+2}{3} + C.$$

4. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 6}{(x-2)(x+2)^3} dx$.

Розв'язання:

Розкладемо дріб на найпростіші дроби за множниками знаменника: $\frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 6}{(x-2)(x+2)^3} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{(x+2)^3} = \frac{A(x+2)^3 + B(x+2)^2(x-2) + C(x+2)(x-2) + D(x-2)}{(x-2)(x+2)^3}$.

$$\text{Звідки } A(x+2)^3 + B(x+2)^2(x-2) + C(x+2)(x-2) + D(x-2) = x^3 + 6x^2 + 13x + 6.$$

Коефіцієнти A, B, C знайдемо способом варіації значень x , що дає систему

$$\begin{array}{l} x = -2 \quad -4D = -8 + 24 - 26 + 6, \\ x = 2 \quad 64A = 8 + 24 + 26 + 6, \\ x = 0 \quad 8A - 8B - 4C - 2D = 6, \\ x = -1 \quad A - 3B - 3C - 3D = -1 + 6 - 13 + 6; \end{array} \Rightarrow \begin{cases} D = 1, \\ A = 1, \\ -8B - 4C = 0, \\ -3B - 3C = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = 1, \\ A = 1, \\ 4C = 0, \\ B = -C; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = 1, \\ A = 1, \\ C = 0, \\ B = 0. \end{cases}$$

Тобто маємо

$$\frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 6}{(x-2)(x+2)^3} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{(x+2)^3} + \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{(x+2)^3} = \ln|x-2| - \frac{1}{2(x+2)^2} + C.$$

Відповідь: $\ln|x-2| - \frac{1}{2(x+2)^2} + C$.

5. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{2x^3 - 40x - 8}{x(x+4)(x-2)} dx$.

Розв'язання:

$$\text{Виділимо цілу частину неправильного дрібу } \frac{2x^3 - 40x - 8}{x(x+4)(x-2)} = \frac{2x^3 - 40x - 8}{x^3 + 2x^2 - 8x} = 2 - \frac{4x^2 + 24x + 8}{x^3 + 2x^2 - 8x}.$$

Розкладемо правильний дріб на найпростіші дроби: $\frac{4x^2 + 24x + 8}{x(x+4)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+4} + \frac{C}{x-2} = \frac{A(x+4)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+4)}{x(x+4)(x-2)}$. Прирівнюючи чисельники, одержимо рівняння $A(x+4)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+4) = 4x^2 + 24x + 8$.

Коефіцієнти A, B, C знайдемо способом варіації значень x , що дає систему рівнянь

$$\begin{array}{l} x = -4: 24B = -24, \quad B = -1, \\ x = 2: 12C = 72, \quad C = 6, \quad \text{Тобто маємо} \\ x = 0: -8A = 8; \quad A = -1. \end{array} \frac{4x^2 + 24x + 8}{x(x+4)(x-2)} = \frac{-1}{x} + \frac{-1}{x+4} + \frac{6}{x-2}.$$

В результаті маємо $\int 2dx + \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x+4} - \int \frac{6dx}{x-2}$. Перший інтеграл – табличний, інші – дроби I типу, тоді отримаємо: $2\int dx + \int \frac{dx}{x} + \int \frac{d(x+4)}{x+4} - 6\int \frac{d(x-2)}{x-2} = 2x + \ln|x| + \ln|x+4| - 6\ln|x-2| + C$.

Відповідь: $2x + \ln \frac{|x(x+4)|}{(x-2)^6} + C$.

Дроби третього типу із знаменником з додатнім дискримінантом, можна розв'язати інакше.

6. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{x^2 + 5x + 4}$.

Розв'язання:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 5x + 4} = \int \frac{dx}{(x+4)(x+1)} = \int \left(\frac{-\frac{1}{3}}{x+4} + \frac{\frac{1}{3}}{x+1} \right) dx = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+4} = \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{3} \ln|x+4| + C.$$

Попередній метод

$$\int \frac{dx}{x^2 + 5x + 4} = \int \frac{dx}{x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2}x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} + 4} = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}} = \frac{1}{2 \cdot \frac{3}{2}} \ln \left| \frac{x + \frac{5}{2} - \frac{3}{2}}{x + \frac{5}{2} + \frac{3}{2}} \right| + C = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x+1}{x+4} \right| + C.$$

Відповідь: $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x+1}{x+4} \right| + C$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайти невизначені інтеграли $\int \frac{x}{x^3+27} dx$; $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$; $\int \frac{4x}{(x-1)(x+1)^2} dx$; $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx$.

М.07.ПЗ.06. ІНТЕГРУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ВИРАЗІВ

1. Основні поняття та теореми

Для інтегралів від ірраціональних функцій застосовують підстановки, які приводить до обчислення інтегралів від раціональних функцій.

I. $\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \dots, x^{\frac{r}{s}}\right) dx$: раціоналізуюча заміна $x = t^k$, де k – найменший спільне кратне n, \dots, s .

Інтеграл $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}\right) dx$: раціоналізуюча заміна $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) = t^n$.

II. $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$: раціоналізуючі заміни – підстановки Ейлера: $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \sqrt{ax}$ (якщо $a > 0$); $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$ (якщо $c > 0$); $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm(x_1 - x_2)t$ (якщо тричлен ax^2+bx+c має дійсні корені x_1 і x_2 ($x_1 \neq x_2$)).

III. $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$ – можна застосувати той самий метод, що і для $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx$.

IV. $\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, де $P_n(x)$ – многочлен n -го степеня, можна знайти таким способом

$(A_1x^{n-1} + \dots + A_n)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, де A_1, \dots, A_n, λ – невизначені коефіцієнти, які знаходимо шляхом одержання похідної від обох частин цієї рівності.

V. $\int \frac{P_n(x)dx}{(x-\alpha)^m \sqrt{ax^2+bx+c}}$, де m – ціле число і $P_n(x)$ – многочлен степеня $n < m$, зводяться до інтегралів попереднього пункту за допомогою підстановки $x - \alpha = 1/t$.

VI. $\int x^m(a+bx^n)^p dx$ (m, p, n – раціональні числа): раціоналізуючі заміни – підстановки Чебишева: $x = t^N$, де N – спільний знаменник m і n (якщо p – ціле); $ax^n + b = t^M$, де M – знаменник p (якщо $\frac{m+1}{n}$ – ціле); $a + bx^{-n} = t^M$, де M – знаменник p (якщо $\frac{m+1}{n} + p$ – ціле).

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{31+\sqrt{x}}$.

Розв'язання:

$$\int \frac{dx}{31+\sqrt{x}} \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ dx = 2tdt \end{array} \right] = \int \frac{2tdt}{31+t} = 2 \int \frac{t+31-31}{31+t} dt = 2 \int \left(1 - \frac{31}{31+t}\right) dt = 2t - 62 \ln|31+t| + C.$$

Відповідь: $2\sqrt{x} - 62 \ln|31+\sqrt{x}| + C$.

2. Знайти інтеграл $\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ dx = 2tdt \end{array} \right] &= \int \frac{1-t}{t(t^2+1)} 2tdt = 2 \int \frac{2-2t}{t^2+1} dt = 2 \int \frac{dt}{t^2+1} - \int \frac{2t}{t^2+1} dt = \\ &= 2 \arctg t - \int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} = 2 \arctg t - \ln|t^2+1| + C. \end{aligned}$$

Відповідь: $2 \arctg \sqrt{x} - \ln|x+1| + C$.

3. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(10 + \sqrt[4]{x})^3}$.

Розв'язання:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(10 + \sqrt[4]{x})^3} \left[\begin{array}{l} x = t^4 \\ dx = 4t^3 dt \end{array} \right] = \int \frac{4t^3 dt}{t^2(10 + t)^3} = 4 \int \frac{tdt}{(10 + t)^3}. \quad \text{Це правильний раціональний дріб.}$$

Розкладемо на простіші дроби: $\frac{t}{(10+t)^3} = \frac{A}{10+t} + \frac{B}{(10+t)^2} + \frac{C}{(10+t)^3} = \frac{A(10+t)^2 + B(10+t) + C}{(10+t)^3}$,

прирівнюючи чисельники, маємо $t = A(10+t)^2 + B(10+t) + C$ або $t = 100A + 20At + At^2 + 10B + Bt + C$,

звідки $\begin{cases} A = 0, \\ 20A + B = 1, \\ 100A + 10B + C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0, \\ B = 1, \\ C = -10. \end{cases}$ Отимуємо $4 \int \frac{dt}{(10+t)^2} - 40 \int \frac{dt}{(10+t)^3} = -\frac{4}{10+t} + \frac{40}{2(10+t)^2} + C$.

Відповідь: $-\frac{4}{10 + \sqrt[4]{x}} + \frac{20}{(10 + \sqrt[4]{x})^2} + C$.

4. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{50 + \sqrt{x+50}}$.

Розв'язання:

$$\int \frac{dx}{50 + \sqrt{x+50}} \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+50} = t \\ dx = 2tdt \end{array} \right] = \int \frac{2tdt}{50+t} = 2 \int \frac{50+t-50}{50+t} dt = 2 \int \left(1 - \frac{50}{50+t}\right) dt = 2t - 50 \ln|50+t| + C.$$

Відповідь: $2\sqrt{x+50} - 100 \ln|50 + \sqrt{x+50}| + C$.

5. Знайти інтеграл $\int \frac{x+33}{x\sqrt{x-66}} dx$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+33}{x\sqrt{x-66}} dx \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-66} = t \\ dx = 2tdt \end{array} \right] &= \int \frac{t^2 + 99}{(t^2 + 66)t} 2tdt = 2 \int \frac{t^2 + 66 + 33}{t^2 + 66} dt = 2 \int \left(1 - \frac{33}{t^2 + 66}\right) dt = \\ &= 2t - \frac{66}{\sqrt{66}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{66}} + C = 2t - \sqrt{66} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{66}} + C. \end{aligned}$$

Відповідь: $2\sqrt{x-66} - \sqrt{66} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x-66}}{\sqrt{66}} + C$.

6. Знайти інтеграл $\int x^3 \sqrt{2x+3} dx$.

Розв'язання: $\int x^3 \sqrt{2x+3} dx \left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{2x+3} = t \\ dx = \frac{3}{2}t^2 dt \end{array} \right] = \frac{3}{2} \int \frac{t^3 - 3}{2} t^3 dt = \frac{3}{4} \int (t^6 - 3t^3) dt = \frac{3}{28} t^7 - \frac{9}{16} t^4 + C$.

Відповідь: $\frac{3}{28} (\sqrt[3]{2x+3})^7 - \frac{9}{16} (\sqrt[3]{2x+3})^4 + C$.

7. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{2x+1}}$.

Розв'язання:

$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{2x+1}} \left[\begin{array}{l} 2x+1 = t^3 \\ dx = \frac{3}{2}t^2 dt \end{array} \right] = \frac{3}{2} \int \frac{t^2}{1+t} dt = \frac{3}{2} \int \frac{t^2 - 1 + 1}{1+t} dt = \frac{3}{2} \int \left(t - 1 + \frac{1}{1+t}\right) dt = \frac{3}{2} \left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|1+t|\right) + C.$$

Відповідь: $\frac{3(\sqrt[3]{2x+1})^2}{4} - \frac{3\sqrt[3]{2x+1}}{2} + \frac{3}{2} \ln|1 + \sqrt[3]{2x+1}| + C$.

8. Знайти інтеграл $\int \frac{x^4 dx}{2 + \sqrt[4]{x^5 + 5}}.$

Розв'язання:

$$\int \frac{x^4 dx}{2 + \sqrt[4]{x^5 + 5}} \left[\begin{array}{l} x^5 + 5 = t^4 \\ x^4 dx = \frac{4}{5} t^3 dt \end{array} \right] = \frac{4}{5} \int \frac{t^3 dt}{2 + t} = \frac{4}{5} \int \frac{t^3 + 8 - 8}{2 + t} dt = \frac{4}{5} \int \left(\frac{t^3 + 8}{2 + t} - \frac{8}{2 + t} \right) dt =$$

$$= \frac{4}{5} \int \left(t^2 - 2t + 4 - \frac{8}{2 + t} \right) dt = \frac{4}{15} t^3 - \frac{4}{5} t^2 + \frac{16}{5} t - \frac{32}{5} \ln|2 + t| + C.$$

Відповідь: $\frac{4}{15} \left(\sqrt[4]{x^5 + 5} \right)^3 - \frac{4}{5} \left(\sqrt[4]{x^5 + 5} \right)^2 + \frac{16}{5} \sqrt[4]{x^5 + 5} - \frac{32}{5} \ln|2 + \sqrt[4]{x^5 + 5}| + C.$

9. Знайти інтеграл $\int \frac{x^2 + \sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}} dx.$

Розв'язання:

$$\int \frac{x^2 + \sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}} dx \left[\begin{array}{l} x+1 = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right] = \int \frac{(t^6 - 1)^2 + t^3}{t^2} 6t^5 dt = 6 \int (t^{15} - 2t^9 + t^6 + t^3) dt = \frac{6t^{16}}{16} - \frac{12t^{10}}{10} + \frac{6t^7}{7} + \frac{6t^4}{4} + C.$$

Відповідь: $\frac{3(\sqrt[3]{x+1})^8}{8} - \frac{6(\sqrt[3]{x+1})^5}{5} + \frac{6(\sqrt[3]{x+1})^7}{7} + \frac{3(\sqrt[3]{x+1})^2}{2} + C.$

11. Знайти інтеграл $\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \frac{dx}{x-1}.$

Розв'язання:

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \frac{dx}{x-1} \left[\begin{array}{l} \frac{x+1}{x-1} = t^2 \\ x-1 = \frac{2}{t^2-1} \end{array} \right] = \int \frac{2t^2 dt}{t^2-1} = -2 \int \frac{t^2-1+1}{t^2-1} dt = -2 \int \left(1 + \frac{1}{t^2-1} \right) dt = -2t - \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C.$$

Відповідь: $-2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \ln \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})^2}{2} + C.$

12. Знайти інтеграл $\int \frac{2}{(2-x)^2} \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} dx.$

Розв'язання:

$$\int \frac{2}{(2-x)^2} \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} dx \left[\begin{array}{l} \frac{2-x}{2+x} = t^3 \\ 2-x = \frac{4t^3}{t^3+1} \end{array} \right] = - \int \frac{2(t^3+1)^2}{16t^6} t \frac{12t^2 dt}{(t^3+1)^2} = -\frac{3}{2} \int \frac{dt}{t^3} = \frac{3}{4} t^{-2} + C.$$

Відповідь: $\frac{3}{4} \left(\sqrt[3]{\frac{2+x}{2-x}} \right)^2 + C.$

13. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x+1 - \sqrt{x^2 + 2x - 1}}.$

Розв'язання:

Підінтегральна функція має вигляд $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$, $a > 0$, застосуємо підстановку Ейлера

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t + x, \text{ тоді } \int \frac{dx}{x+1 - \sqrt{x^2 + 2x - 1}} \left[\begin{array}{l} x^2 + 2x - 1 = (t+x)^2 \\ dx = \frac{2t \cdot 2(1-t) + 2(t^2+1)}{4(1-t)^2} dt \end{array} \right] =$$

$$x = \frac{t^2 + 1}{2 - 2t}$$

$$dx = \frac{2t - t^2 + 1}{2(1-t)^2} dt$$

$$= \int \frac{2t-t^2+1}{2(1-t)^3} dt = \int \frac{2t-t^2-1+2}{2(1-t)^3} dt = \int \frac{2dt}{2(1-t)^3} - \int \frac{dt}{2(1-t)} = \frac{1}{2(1-t)^2} + \frac{1}{2} \ln|1-t| + C.$$

Відповідь: $\frac{1}{2(x+1-\sqrt{x^2+2x-1})^2} + \frac{1}{2} \ln|x+1-\sqrt{x^2+2x-1}| + C.$

14. Знайти інтеграл $\int \frac{(2x+1)dx}{\sqrt{3x^2+9x+1}}.$

Розв'язання:

Виділимо в чисельнику похідну квадратного тричлена $3x^2+9x+1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \int \frac{(6x+9)dx}{\sqrt{3x^2+9x+1}} - 2 \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+9x+1}} &= \frac{1}{3} \int \frac{d(3x^2+9x+1)}{\sqrt{3x^2+9x+1}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} - \frac{9}{4}}} = \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{3x^2+9x+1} - \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \left| x + \frac{3}{2} + \sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{23}{12}} \right| + C = \frac{2}{3} \sqrt{3x^2+9x+1} - \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \left| x + \frac{3}{2} + \sqrt{x^2+3x+\frac{1}{3}} \right| + C. \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{2}{3} \sqrt{3x^2+9x+1} - \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \left| x + \frac{3}{2} + \sqrt{x^2+3x+\frac{1}{3}} \right| + C.$

15. Знайти інтеграл $\int \frac{5x+7}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx.$

Розв'язання:

Виділимо в чисельнику похідну квадратного тричлена $5-4x-x^2$:

$$\begin{aligned} \int \frac{5x+7}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx &= -\frac{5}{2} \int \frac{(-2x-4)dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} - 3 \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} = -\frac{5}{2} \int \frac{d(5-4x-x^2)}{\sqrt{5-4x-x^2}} - 3 \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}} = \\ &= -5\sqrt{5-4x-x^2} - 3 \arcsin \frac{x+2}{3} + C. \end{aligned}$$

Відповідь: $-5\sqrt{5-4x-x^2} - 3 \arcsin \frac{x+2}{3} + C.$

16. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}}.$

Розв'язання:

Підінтегральна функція має вигляд $\frac{P_n(x)}{(x-\alpha)^m \sqrt{ax^2+bx+c}}$, тому застосуємо заміну $x-\alpha=\frac{1}{t}$.

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}} \left[\begin{array}{l} x+1=\frac{1}{t} \\ dx=-\frac{dt}{t^2} \end{array} \right] = -\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t} \sqrt{\frac{1}{t^2}+1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = -\ln|t+\sqrt{1+t^2}| + \ln C = \ln \left| \frac{C}{t+\sqrt{1+t^2}} \right|.$$

Відповідь: $\ln \left| \frac{C(x+1)}{1+\sqrt{x^2+2x+2}} \right|.$

17. Знайти інтеграл $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6-1}}.$

Розв'язання:

Підінтегральна функція має вигляд $x^m(a+bx^n)^p$, $m=2$, $n=6$, $p=-\frac{1}{2}$, $\frac{m+1}{n}+p=0$ – ціле

число, тому застосуємо заміну $1-x^{-6}=t^2$. Отримаємо $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6-1}} = \int \frac{x^2 dx}{x^3 \sqrt{1-x^{-6}}} = \int \frac{x^6 dx}{x^7 \sqrt{1-x^{-6}}}$

$$\left[\begin{array}{l} 1-x^{-6}=t^2 \quad x^6=\frac{1}{1-t^2} \\ \frac{6dx}{x^7}=2tdt \quad t=\sqrt[6]{1-x^{-6}} \end{array} \right] = \int \frac{tdt}{3(1-t^2)t} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{1}{6} \ln \left| \frac{1+\sqrt{1-x^{-6}}}{1-\sqrt{1-x^{-6}}} \right| + C = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x^3 + \sqrt{x^6 - 1}}{x^3 - \sqrt{x^6 - 1}} \right| + C.$$

3. Завдання для самостійного виконання

Знайти невизначені інтеграли від ірраціональних функцій (по одному з комірки)

$\int \frac{xdx}{1+\sqrt{x}}$	$\int \frac{xdx}{1+2\sqrt{x}}$	$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} dx$	$\int \frac{x^3 dx}{1+\sqrt{x}}$	$\int \frac{dx}{2-\sqrt[3]{x}}$
$\int \frac{\sqrt{x}+2}{x+1} dx$	$\int \frac{\sqrt{x}+1}{x+1} dx$	$\int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx$	$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$	$\int \frac{xdx}{\sqrt{x}-3x}$
$\int x^3 \sqrt{2-5x} dx$	$\int (x-2)\sqrt{x+1} dx$	$\int x^3 \sqrt{1-2x} dx$		
$\int \frac{\sqrt{x-1}+x}{\sqrt{x-1}} dx$	$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-2}}$	$\int \frac{x+\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{x-2}} dx$	$\int \frac{x+\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt{x-2}} dx$	$\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$
$\int \frac{(x+1)dx}{x\sqrt{x-2}}$	$\int \frac{(x+1)dx}{x\sqrt{x-2}}$	$\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$		
$\int \frac{2x-5}{1+\sqrt{2x+1}} dx$	$\int \frac{(x+9)dx}{\sqrt{x+9}+3}$	$\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}$	$\int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+x} dx$	
$\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[5]{x^2-1}} dx$	$\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2-1}-\sqrt[5]{x^2-1}} dx$	$\int \frac{\sqrt[3]{x^2-1}+x}{\sqrt[5]{x^2-1}+1} dx$	$\int \frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[5]{x^2-1}+x} dx$	$\int \frac{\sqrt[3]{x^2-1}+1}{x-\sqrt[5]{x^2-1}} dx$
$\int \frac{dx}{(x-7)\sqrt{x^2+2x+2}}$	$\int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x^2+x+2}}$	$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}$		

М.07.П3.07. ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ВИРАЗІВ

1. Основні поняття та теореми

Для інтегралів з непарним степенем синуса чи косинуса застосовують метод внесення під знак диференціала $\cos x dx = d(\sin x)$, $\sin x dx = -d(\cos x)$ і за необхідністю тригонометричні формули, як $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Для інтегралів з парним степенем застосовують тригонометричні формули пониження степеня: $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$.

Інтеграли у вигляді добутку синусів чи косинусів з різними аргументами обчислюються із застосуванням наступних тригонометричних формул: $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$,

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)], \quad \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)].$$

Метод універсальної тригонометричної підстановки $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, $x = 2 \arctg t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$,

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Універсальна підстановка може бути застосована при знаходженні інтеграла від будь-яких співвідношень тригонометричних функцій $\sin x$ і $\cos x$. Однак, найбільш ефективною вона є в тих випадках, коли функції $\sin x$ і $\cos x$ мають перші степені і подані у вигляді суми чи різниці. Застосування цієї підстановки до випадків, коли $\sin x$ і $\cos x$ мають парні степені, приводить до раціональних дробів з високими степенями.

Якщо $\sin x$ і $\cos x$ мають парні степені, то краще застосовувати підстановку $\operatorname{tg} x = t$ або якось іншу. Підстановка $\operatorname{tg} x = t$ дає можливість звести до раціонального алгебраїчного вигляду інтеграл $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$ у тому випадку, коли хоча б один (або обидва) показники m та n від'ємні.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти інтеграл $\int (1 - \operatorname{tg}x)^2 dx$.

$$\text{Розв'язання: } \int (1 - \operatorname{tg}x)^2 dx = \int (1 - 2\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}^2 x) dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 2 \frac{\sin x}{\cos x} \right) dx = \operatorname{tg}x + 2 \ln |\cos x| + C.$$

Відповідь: $\operatorname{tg}x + 2 \ln |\cos x| + C$.

2. Знайти інтеграл $\int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x} dx$.

$$\text{Розв'язання: } \int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x} dx = 2 \int \frac{\cos 2x}{\sin 2x} dx = \int \frac{d(\sin 2x)}{\sin 2x} = \ln |\sin 2x| + C. \text{ Відповідь: } \ln |\sin 2x| + C.$$

3. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \cos 2x}$.

$$\text{Розв'язання: } \int \frac{dx}{\sin^2 x + \cos 2x} = \int \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}x + C.$$

Відповідь: $\operatorname{tg}x + C$.

4. Знайти інтеграл $\int \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} dx$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \int \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} dx &= \int \frac{(1 - \cos x)^2}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} dx = \int \frac{(1 - 2\cos x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} dx = \int \frac{(2 - 2\cos x - \sin^2 x)}{\sin^2 x} dx = \\ &= -2\operatorname{ctgx} x - \frac{2}{\sin x} - x + C. \end{aligned}$$

Відповідь: $-2\operatorname{ctgx} x - \frac{2}{\sin x} - x + C$.

5. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{1 - \sin x}$.

$$\text{Розв'язання: } \int \frac{dx}{1 - \sin x} = \int \frac{(1 + \sin x)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} dx = \int \frac{(1 + \sin x)}{(1 - \sin^2 x)} dx = \int \frac{(1 + \sin x)}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg}x + \frac{1}{\cos x} + C.$$

Відповідь: $\operatorname{tg}x + \frac{1}{\cos x} + C$.

6. Знайти інтеграл $\int \cos^3 x dx$.

$$\text{Розв'язання: } \int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) d(\sin x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Відповідь: $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$.

7. Знайти інтеграл $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx$.

Розв'язання:

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} \sin x dx = - \int \frac{(1 - \cos^2 x)}{\cos x} d(\cos x) = \int \left(\cos x - \frac{1}{\cos x} \right) d(\cos x) = \frac{\cos^2 x}{2} - \ln |\cos x| + C.$$

Відповідь: $\frac{\cos^2 x}{2} - \ln |\cos x| + C$.

8. Знайти інтеграл $\int \cos^3 x \cdot \sqrt{\sin x} dx$.

Розв'язання:

$$\int \cos^3 x \cdot \sqrt{\sin x} dx = \int \cos^2 x \sqrt{\sin x} \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) \sqrt{\sin x} d(\sin x) = \int \left(\sin^{\frac{1}{2}} x - \sin^{\frac{5}{2}} x \right) d(\sin x) =$$

$$= \frac{\sin^{\frac{3}{2}} x}{3/2} - \frac{\sin^{\frac{7}{2}} x}{7/2} + C.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{2\sin^{\frac{3}{2}} x}{3} - \frac{2\sin^{\frac{7}{2}} x}{7} + C.$$

9. Знайти інтеграл $\int \sin^5 x \cos^4 x dx$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \int \sin^5 x \cos^4 x dx &= - \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^4 x d(\cos x) = - \int (\cos^4 x - 2\cos^6 x + \cos^8 x) d(\cos x) = \\ &= -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{2\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^9 x}{9} + C. \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь: } -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{2\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^9 x}{9} + C.$$

10. Знайти інтеграл $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^4 x dx &= \int (\sin x \cdot \cos x)^2 \cos^2 x dx = \int \left(\frac{\sin 2x}{2} \right)^2 \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 2x (1 + \cos 2x) dx = \\ &= \frac{1}{8} \int \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} + \sin^2 2x \cos 2x \right) dx = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C. \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь: } \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C.$$

11. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} &= \int \frac{4dx}{(2\sin x \cos x)^2} = \int \frac{4dx}{\sin^2 2x} = \int \frac{8dx}{1 - \cos 4x} = 8 \int \frac{1 + \cos 4x}{1 - \cos^2 4x} dx = 2 \int \frac{1 + \cos 4x}{\sin^2 4x} d(4x) = \\ &= -2\operatorname{ctg} 4x - \frac{2}{\sin 4x} + C. \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь: } -2\operatorname{ctg} 4x - \frac{2}{\sin 4x} + C.$$

12. Знайти інтеграл $\int \cos^6 x dx$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \int \cos^6 x dx &= \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^3 dx = \frac{1}{8} \int (1 + 3\cos 2x + 3\cos^2 2x + \cos^3 2x) dx = \frac{x}{8} + \frac{3}{16} \sin 2x + \\ &+ \frac{3}{8} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx + \frac{1}{16} \int (1 - \sin^2 2x) d(\sin 2x) = \frac{x}{8} + \frac{3}{16} \sin 2x + \frac{3x}{16} + \frac{3}{64} \sin 4x + \frac{1}{16} \sin 2x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C. \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь: } \frac{5x}{16} + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C.$$

13. Знайти інтеграл $\int \sin 5x \cos 9x dx$.

Розв'язання:

$$\int \sin 5x \cos 9x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 14x + \sin(-4x)) dx = \frac{1}{2} \int (\sin 14x - \sin 4x) dx = \frac{\cos 4x}{8} - \frac{\cos 14x}{28} + C.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{\cos 4x}{8} - \frac{\cos 14x}{28} + C.$$

14. Знайти інтеграл $\int \sin 5x \sin 9x dx$.

Розв'язання:

$$\int \sin 5x \sin 9x dx = \frac{1}{2} \int (\cos(-4x) - \cos 14x) dx = \frac{1}{2} \int (\cos 4x - \cos 14x) dx = \frac{\sin 4x}{8} - \frac{\sin 14x}{28} + C.$$

Відповідь: $\frac{\sin 4x}{8} - \frac{\sin 14x}{28} + C$.

15. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{1 - \sin x}$.

Розв'язання:

$$\int \frac{dx}{1 - \sin x} \left[\begin{array}{l} dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right] = \int \frac{2}{\left(1 - \frac{2t}{1+t^2}\right)(1+t^2)} dt = \int \frac{2}{(1-t)^2} dt = -2 \int \frac{d(1-t)}{(1-t)^2} = \frac{2}{1-t} + C = \frac{2}{1 - \tg \frac{x}{2}} + C.$$

Відповідь: $\frac{2}{1 - \tg \frac{x}{2}} + C$.

Цей інтеграл вже розв'язували іншим методом, покажемо, що отримані відповіді тотожні

$$\tg x + \frac{1}{\cos x} = \frac{\sin x + 1}{\cos x} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2}{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}} = \frac{\tg \frac{x}{2} + 1}{1 - \tg \frac{x}{2}}.$$

Різниця становить стала величину $\frac{\tg \frac{x}{2} + 1}{1 - \tg \frac{x}{2}} - \frac{2}{1 - \tg \frac{x}{2}} = -1$.

16. Знайти інтеграл $\int \frac{1}{2 \sin x + 3 \cos x} dx$.

Розв'язання:

$$\int \frac{dx}{2 \sin x + 3 \cos x} = \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{2 \cdot \frac{2u}{1+u^2} + 3 \cdot \frac{1-u^2}{1+u^2}} = \int \frac{2du}{4u+3-3u^2} = -\frac{2}{3} \int \frac{du}{u^2-2u \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{13}{9}} = -\frac{2}{3} \int \frac{du}{\left(u-\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{13}}{3}\right)^2} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2\sqrt{13}} \ln \left| \frac{u-\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{13}}{3}}{u-\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{13}}{3}} \right| + C = -\frac{1}{\sqrt{13}} \ln \left| \frac{3u-2-\sqrt{13}}{3u-2+\sqrt{13}} \right| + C.$$

Відповідь: $\frac{1}{\sqrt{13}} \ln \left| \frac{3\tg \frac{x}{2} - 2 + \sqrt{13}}{3\tg \frac{x}{2} - 2 - \sqrt{13}} \right| + C$.

17. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

Розв'язання:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} \left[\begin{array}{l} x = \arctg t \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{t^2}{t^2+1} \quad \cos x = \frac{1}{t^2+1} \end{array} \right] = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2}{t^2+1} \cdot \frac{1}{t^2+1}} = \int \frac{t^2+1}{t^2} dt = t - \frac{1}{t} + C = \tg x - \ctg x + C.$$

Відповідь: $\tg x - \ctg x + C$.

Іноді для інтегрування ірраціональних виразів застосовується тригонометрія

18. Знайти інтеграл $\int \sqrt{9-x^2} dx$.

Розв'язання:

$$\int \sqrt{9-x^2} dx = \left[\begin{array}{l} x=3\sin t \\ dx=3\cos t dt \end{array} \right] = \int \sqrt{9-9\sin^2 t} 3\cos t dt = 9 \int \cos^2 t dt = \frac{9}{2} \int (1+\cos 2t) dt = \frac{9}{2} t + \frac{9}{4} \sin 2t + C =$$

$$= \frac{9}{2} \arcsin \frac{x}{3} + \frac{9}{4} \sin 2 \arcsin \frac{x}{3} + C = \frac{9}{2} \arcsin \frac{x}{3} + \frac{9}{4} 2 \frac{x}{3} \sqrt{1-\frac{x^2}{9}} + C = \frac{9}{2} \arcsin \frac{x}{3} + \frac{x}{2} \sqrt{9-x^2} + C.$$

Відповідь: $\frac{9}{2} \arcsin \frac{x}{3} + \frac{x}{2} \sqrt{9-x^2} + C$.

19. Знайти інтеграл $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} dx$.

Розв'язання:

Застосуємо до інтеграла підстановку: $x = \frac{1}{\cos t}$.

$$\text{Todí } dx = \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt; t = \arccos \frac{1}{x}; \sqrt{x^2-1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}-1} = \sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}} = \sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} = \frac{\sin t}{\cos t}.$$

$$\text{Отже, } \int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} dx = \int \frac{\sin t \cdot \cos^4 t \cdot \sin t}{\cos t \cdot \cos^2 t} dt = \int \sin^2 t \cdot \cos t dt = \int \sin^2 t d(\sin t) = \frac{\sin^3 t}{3} + C.$$

$$\text{Повернемось до попередньої змінної: } \frac{1}{3} \sin^3 \left(\arccos \frac{1}{x} \right) + C = \frac{1}{3} \left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} \right)^3 + C.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{1}{3} \sin^3 \left(\arccos \frac{1}{x} \right) + C = \frac{1}{3} \left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} \right)^3 + C.$$

20. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x-16}}$.

Розв'язання:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x-16}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2-25}} = \left[\begin{array}{l} x-3=u \\ dx=du \end{array} \right] = \int \frac{du}{\sqrt{u^2+5^2}} = \left[\begin{array}{l} u=\frac{5}{\sin t} \\ du=-\frac{5\cos t}{\sin^2 t} dt \end{array} \right] = \int \frac{-\frac{5\cos t}{\sin^2 t} dt}{\sqrt{\frac{25}{\sin^2 t}-25}} =$$

$$= \int \frac{-\frac{5\cos t}{\sin^2 t} dt}{\frac{5}{\sin t} \cdot \cos t} = - \int \frac{dt}{\sin t} = - \int \frac{\sin t dt}{1-\cos^2 t} = \left[\begin{array}{l} \cos t=v \\ -\sin t dt=dv \end{array} \right] = \int \frac{dv}{1-v^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{v+1}{v-1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos t+1}{\cos t-1} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1-\frac{25}{u^2}}+1}{\sqrt{1-\frac{25}{u^2}}-1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{u^2-25}+u}{\sqrt{u^2-25}-u} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2-6x-16}+x-3}{\sqrt{x^2-6x-16}-(x-3)} \right| + C.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2-6x-16}+x-3}{\sqrt{x^2-6x-16}-x+3} \right| + C.$$

3. Завдання для самостійного виконання

Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних функцій (по одному з комірок)

$\int \sin^6 x dx$; $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$
$\int \operatorname{ctg}^2 x dx$; $\int \operatorname{tg}^2 x dx$; $\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} dx$; $\int \frac{\cos^2 x}{1+\sin x} dx$
$\int \sin \frac{x}{3} \cos \frac{2x}{3} dx$; $\int \sin \frac{x}{3} \sin \frac{2x}{3} dx$; $\int \cos \frac{x}{3} \cos \frac{2x}{3} dx$

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx; \int \sin^3 x \cos^4 x dx; \int \sin^5 x dx; \int \cos^5 x dx; \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$$

$$\int \frac{dx}{1-\sin 2x}; \int \frac{dx}{1-\cos 2x}; \int \frac{\cos^2 x dx}{1+2\sin x}$$

Модуль 08 „Інтегральне числення функції однієї змінної. Визначений інтеграл”

М.08.ПЗ.01. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ

1. Основні поняття та теореми

Розглянемо функцію $y = f(x)$, неперервну на відрізку $[a;b]$. Нехай треба обчислити площину криволінійної трапеції, яка обмежена кривою $y = f(x)$, прямими $x = a$, $x = b$ та віссю Ox . Площа криволінійної трапеції наближено рівна площі вписаної ступінчастої фігури, тобто як суму площ прямокутників $\underline{S}_n = \Delta x_1 f(x_0) + \Delta x_2 f(x_1) + \dots + \Delta x_n f(x_{n-1})$ або площі описаної ступінчастої функції $\bar{S}_n = \Delta x_1 f(x_1) + \Delta x_2 f(x_2) + \dots + \Delta x_n f(x_n)$. Точно площа криволінійної трапеції рівна визначеному інтегралу $\int_a^b f(x) dx$ функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$, а функцію $f(x)$ називають інтегровною на відрізку $[a;b]$. Число a називають нижньою межею, а b – верхньою межею інтегрування.

Для випадку відшукання пройденого шляху з моменту t_1 до моменту t_2 , якщо відомий закон

зміни швидкості $v(t)$, визначається як $s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$. Якщо верхню межу взяти змінною, то отримаємо закон руху $s(t)$.

2. Приклади виконання завдань

1. Виразити за допомогою інтеграла площину фігури, що обмежена наступними лініями: 1) осями координат, прямую $x=3$ і параболою $y=x^2+1$; 2) віссю абсцис, прямими $x=a$, $x=b$ і лінією $y=e^x+2$ ($b > a$); 4) параболами $y=x^2$ і $y=8-x^2$; 6) лініями $y=\ln x$ і $y=\ln^2 x$.

Розв'язання:

$$1) [0;3], f(x)=x^2+1, \int_0^3 (x^2+1) dx; 2) [a;b], f(x)=e^x+2, \int_a^b (e^x+2) dx; 4) x^2=8-x^2, 2x^2=8,$$

$$x^2=4, x=\pm 2, [-2;2], f_1(x)=x^2 \text{ i } f_2(x)=8-x^2, \int_{-2}^2 (8-2x^2) dx; 6) \ln x=\ln^2 x, \ln^2 x-\ln x=0,$$

$$\ln x(\ln x-1)=0, \ln x=0 \text{ або } \ln x=1, x_1=1 \text{ або } x_2=e, f_1(x)=\ln^2 x \text{ i } f_2(x)=\ln x, \int_1^e (\ln x-\ln^2 x) dx.$$

$$\text{Відповідь: } 1) \int_0^3 (x^2+1) dx; 2) \int_a^b (e^x+2) dx; 4) \int_{-2}^2 (8-2x^2) dx; 6) \int_1^e (\ln x-\ln^2 x) dx.$$

2. Фігура обмежена віссю абсцис і прямими $y=2x$, $x=4$, $x=6$. Знайти площину вписаної та описаної ступінчастих фігур, розбиваючи відрізок $[4;6]$ на рівні частини. Переконатись, що обидва отримані вирази прямують при необмеженому зростанні n до однієї ж границі S – площини фігури. Знайти абсолютну і відносну похибки при заміні даної площині площами вписаної і описаної n -ступінчастих фігур.

Розв'язання:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2}{n} \cdot 2 \left(4 + \frac{2}{n} i \right) = \frac{4}{n} \cdot \frac{4+4+2\frac{n-1}{n}}{2} \cdot n = \frac{2}{n} \cdot (8n+2n-2) = 20 - \frac{4}{n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(20 - \frac{4}{n} \right) = 20;$$

$$\bar{S}_n = \sum_{i=1}^n \frac{2}{n} \cdot 2 \left(4 + \frac{2}{n} i \right) = \frac{4}{n} \cdot \frac{4+\frac{2}{n}+4+2\frac{n}{n}}{2} \cdot n = \frac{2}{n} \cdot (8n+2+2n) = 20 + \frac{4}{n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(20 + \frac{4}{n} \right) = 20;$$

$$|\Delta S| = \frac{4}{n}, |\varepsilon| = \frac{1}{5n}.$$

$$\text{Відповідь: } \underline{S}_n = 20 - \frac{4}{n}; \bar{S}_n = 20 + \frac{4}{n}; |\Delta S| = \frac{4}{n}, |\varepsilon| = \frac{1}{5n}.$$

3. Криволінійна трапеція з основою $[2;3]$ обмежена параболою $y = x^2$. Знайти абсолютно і відносну похибки при заміні даної площині площею вписаної 10-ступінчастої фігури.

Розв'язання:

$$\underline{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \left(2 + \frac{i}{n} \right)^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left(4 + 4 \frac{i}{n} + \frac{i^2}{n^2} \right) = \frac{1}{n} \cdot \left(4 + 4 + 4 \frac{n-1}{n} \right) \cdot \frac{n}{2} + \frac{1}{6} \frac{(n-1)n(2n-1)}{n^3} = \frac{19}{3} - \frac{5}{2n} + \frac{1}{6n^2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{19}{3} - \frac{5}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) = \frac{19}{3}; |\Delta S| = \frac{5}{20} - \frac{1}{600} = \frac{149}{600}, |\varepsilon| = 0,039.$$

$$\text{Відповідь: } |\Delta S| = \frac{149}{600}, |\varepsilon| = 0,039.$$

4. Безпосереднім додаванням і наступним переходом до границі обчислити інтеграл $\int_0^1 e^x dx$.

Інтервал інтегрування поділити на n рівних частин.

Розв'язання:

$$\bar{S}_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot e^{\frac{i}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sqrt[n]{e}(e-1)}{\sqrt[n]{e}-1}, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{\sqrt[n]{e}(e-1)}{\sqrt[n]{e}-1} \right) = (e-1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{1}{n}}{1 - e^{-\frac{1}{n}}} \right) = (e-1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-\frac{1}{n^2}}{-\frac{1}{n^2} e^{-\frac{1}{n}}} \right) = e-1.$$

Відповідь: $e-1$.

5. Матеріальна точка рухається зі швидкістю $v = (2t+4) \text{ см/с}$. Знайти шлях, пройдений за перші 10 с .

$$\text{Розв'язання: } s = \int_0^{10} (2t+4) dt = 10 \cdot \frac{4+24}{2} = 140 \text{ см.}$$

Відповідь: 140 см .

6. Щоб розтягнути пружину на 2 см , треба виконати роботу 20 Дж . На скільки можна розтягнути пружину, затративши роботу 80 Дж ?

Розв'язання:

$$A = \int_0^{0,02} kx dx = 0,02 \cdot \frac{0,02k}{2}, 0,0002k = 20, k = 100000 \frac{H}{m}, A = \int_0^x kx dx = x \cdot \frac{xk}{2}, 50000x^2 = 80, x = 4 \text{ см.}$$

Відповідь: 4 см .

3. Завдання для самостійного виконання

1. Виразити за допомогою інтеграла площину фігури, що обмежена лініями: 3) віссю абсцис і дугою синусоїди $y = \sin x$, що відповідає першому півперіоду; 5) параболами $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$.

2. Відомо, що сила, яка протидіє розтягу пружини, пропорційна її видовженню. Розтягуючи пружину на 4 см , виконали роботу 10 Дж . Яка робота буде виконана при розтязі пружини на 10 см ?

3. Швидкість v при вільному падінні рівна gt . Знайти шлях, пройдений за перші 5 с падіння.

M.08. ПЗ.02. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ. ФОРМУЛА НЬЮТОНА – ЛЕЙБНІЦА

1. Основні поняття та теореми

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ та $F(x)$ – будь-яка первісна для $f(x)$ на $[a;b]$. Тоді визначений інтеграл від функції $f(x)$ на $[a;b]$ дорівнює приросту первісної $F(x)$ на цьому відрізку, тобто $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Знаходження визначених інтегралів з використанням формули Ньютона – Лейбніца здійснюється за два кроки:

1) спочатку, використовуючи техніку знаходження невизначеного інтеграла, знаходять деяку первісну $F(x)$ для підінтегрального виразу $f(x)$. Можна використовувати будь-яку первісну $F(x)$ для підінтегральної функції $f(x)$, наприклад ту, що має найпростіший вигляд при $C = 0$.

2) Потім використовують власне формулу Ньютона – Лейбніца, тобто знаходять приrost первісної, що дорівнює шуканому інтегралу. Тому введемо позначення приросту первісної, яке зручно використовувати: $F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$.

Формула інтегрування частинами має вигляд $\int_a^b u(x) \cdot dv(x) = (u(x) \cdot v(x))|_a^b - \int_a^b v(x) \cdot du(x)$

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти визначений інтеграл $\int_1^2 x^{-5} dx$.

$$\text{Розв'язання: } \int_1^2 x^{-5} dx = \frac{x^{-4}}{-4} \Big|_1^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{64} = \frac{15}{64}.$$

Відповідь: $\frac{15}{64}$.

2. Знайти визначений інтеграл $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

$$\text{Розв'язання: } \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin \frac{x}{2} \Big|_1^2 = \arcsin 1 - \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{3}$.

3. Знайти визначений інтеграл $\int_0^\pi \sin \frac{x}{4} dx$.

$$\text{Розв'язання: } \int_0^\pi \sin \frac{x}{4} dx = 4 \int_0^\pi \sin \frac{x}{4} d\left(\frac{x}{4}\right) = -4 \cos \frac{x}{4} \Big|_0^\pi = 4 \left(\cos \frac{0}{4} - \cos \frac{\pi}{4} \right) = 4 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 4 - 2\sqrt{2}.$$

Відповідь: $4 - 2\sqrt{2}$.

4. Знайти визначений інтеграл $\int_1^9 \frac{dx}{\sqrt{2x+7}}$.

$$\text{Розв'язання: } \int_1^9 \frac{dx}{\sqrt{2x+7}} = \frac{1}{2} \int_1^9 \frac{d(2x+7)}{\sqrt{2x+7}} = \frac{1}{2} \int_1^9 (2x+7)^{-\frac{1}{2}} d(2x+7) = \frac{1}{2} \left. \frac{(2x+7)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right|_1^9 = \sqrt{25} - \sqrt{9} = 2.$$

Відповідь: 2.

5. Знайти визначений інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$.

Розв'язання:

Застосуємо внесення під знак диференціала $\sin x dx = -d(\cos x)$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3}} - \frac{1}{\cos 0} = 2 - 1 = 1.$$

Відповідь: 1.

6. Знайти визначений інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$.

$$\text{Розв'язання: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) d(\sin x) = \left(\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Відповідь: $\frac{2}{3}$.

7. Знайти визначений інтеграл $\int_0^1 2x \cdot 7^{x^2} dx$.

Розв'язання: $\int_0^1 2x \cdot 7^{x^2} dx = \int_0^1 7^{x^2} d(x^2) = \frac{7^{x^2}}{\ln 7} \Big|_0^1 = \frac{7^1 - 7^0}{\ln 7} = \frac{6}{\ln 7}$.

Відповідь: $\frac{6}{\ln 7}$.

8. Знайти визначений інтеграл $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$.

Розв'язання: $\int_1^e \ln^2 x d(\ln x) = \frac{\ln^3 x}{3} \Big|_1^e = \frac{\ln^3 e}{3} - \frac{\ln^3 1}{3} = \frac{1}{3}$.

Відповідь: $\frac{1}{3}$.

9. Знайти визначений інтеграл $\int_0^\pi x \sin x dx$.

Розв'язання:

$$\int_0^\pi x \sin x dx \left[\begin{array}{l} u = x \quad du = dx \\ dv = \sin x dx \quad v = -\cos x \end{array} \right] = -x \cos x \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx = -x \cos x \Big|_0^\pi + \sin x \Big|_0^\pi = -\pi \cos \pi = \pi.$$

Відповідь: π .

10. Знайти визначений інтеграл $\int_0^\pi x^2 \sin x dx$.

Розв'язання:

$$\int_0^\pi x \sin x dx \left[\begin{array}{l} u = x^2 \quad du = 2x dx \\ dv = \sin x dx \quad v = -\cos x \end{array} \right] = -x^2 \cos x \Big|_0^\pi + \int_0^\pi 2x \cos x dx \left[\begin{array}{l} u = 2x \quad du = 2dx \\ dv = \cos x dx \quad v = \sin x \end{array} \right] = -x^2 \cos x \Big|_0^\pi +$$

$$-x^2 \cos x \Big|_0^\pi + 2x \sin x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi 2 \sin x dx = \pi^2 + 2 \cos x \Big|_0^\pi = \pi^2 - 4.$$

Відповідь: $\pi^2 - 4$.

11. Знайти визначений інтеграл $\int_{-2}^0 (x^2 + 2)e^{\frac{x}{2}} dx$.

Розв'язання:

$$\int_{-2}^0 (x^2 + 2)e^{\frac{x}{2}} dx \left[\begin{array}{l} u = x^2 + 2 \quad du = 2x dx \\ dv = e^{\frac{x}{2}} dx \quad v = 2e^{\frac{x}{2}} \end{array} \right] = (2x^2 + 4)e^{\frac{x}{2}} \Big|_{-2}^0 - \int_{-2}^0 4xe^{\frac{x}{2}} dx \left[\begin{array}{l} u = 4x \quad du = 4dx \\ dv = e^{\frac{x}{2}} dx \quad v = 2e^{\frac{x}{2}} \end{array} \right] =$$

$$= (2x^2 + 4)e^{\frac{x}{2}} \Big|_{-2}^0 - 8xe^{\frac{x}{2}} \Big|_{-2}^0 + \int_{-2}^0 8e^{\frac{x}{2}} dx = (2x^2 + 4)e^{\frac{x}{2}} \Big|_{-2}^0 - 8xe^{\frac{x}{2}} \Big|_{-2}^0 + 16e^{\frac{x}{2}} \Big|_{-2}^0 = 4 - 12e^{-1} - 16e^{-1} + 16 - 16e^{-1} = 20 - \frac{44}{e}.$$

Відповідь: $20 - \frac{44}{e}$.

12. Знайти визначений інтеграл $\int_0^\pi e^x \cos x dx$.

Розв'язання:

$$\int_0^\pi e^x \cos x dx \left[\begin{array}{l} u = \cos x \quad du = -\sin x dx \\ dv = e^x dx \quad v = e^x \end{array} \right] = e^x \cos x \Big|_0^\pi + \int_0^\pi e^x \sin x dx \left[\begin{array}{l} u = \sin x \quad du = \cos x dx \\ dv = e^x dx \quad v = e^x \end{array} \right] = e^x \cos x \Big|_0^\pi +$$

$$+ e^x \sin x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cos x dx. Тоді 2 \int_0^\pi e^x \cos x dx = e^x \cos x \Big|_0^\pi + e^x \sin x \Big|_0^\pi = -e^\pi - 1; \int_0^\pi e^x \cos x dx = \frac{-e^\pi - 1}{2}.$$

Відповідь: $-(e^\pi + 1)/2$.

13. Знайти визначений інтеграл $\int_0^1 \arcsin x dx$.

Розв'язання:

$$\int_0^1 \arcsin x dx \left[\begin{array}{l} u = \arcsin x \quad du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx \quad v = x \end{array} \right] = x \arcsin x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{d(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x \arcsin x \Big|_0^1 + \sqrt{1-x^2} \Big|_0^1 = 1 \cdot \arcsin 1 - \sqrt{1-0^2} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{2} - 1$.

14. Знайти визначений інтеграл $\int_1^{120} \ln(2x) dx$.

Розв'язання:

$$\int_1^e \ln(2x) dx \left[\begin{array}{l} u = \ln(2x) \quad du = \frac{2dx}{2x} \\ dv = dx \quad v = x \end{array} \right] = x \ln(2x) \Big|_1^e - \int_1^e dx = e \ln(2e) - \ln 2 - e + 1 = e \ln 2 + e - \ln 2 - e + 1 =$$

$$= (e-1) \ln 2 + 1.$$

Відповідь: $(e-1) \ln 2 + 1$.

15. Знайти визначений інтеграл $\int_0^1 \ln(4x^2 + 6) dx$.

Розв'язання:

$$\int_0^1 \ln(4x^2 + 6) dx \left[\begin{array}{l} u = \ln(4x^2 + 6) \quad du = \frac{8xdx}{4x^2 + 6} \\ dv = dx \quad v = x \end{array} \right] = x \ln(4x^2 + 6) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{8x^2 dx}{4x^2 + 6} = 1 \cdot \ln 10 - \int_0^1 \frac{(4x^2 + 6 - 6) dx}{2x^2 + 3} =$$

$$= \ln 10 - \int_0^1 \left(2 - \frac{6}{2x^2 + 3} \right) dx = \ln 10 - 2x \Big|_0^1 + 3 \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + \frac{3}{2}} = \ln 10 - 2 + \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Big|_0^1 = \ln 10 - 2 + \sqrt{6} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Відповідь: $\ln 10 - 2 + \sqrt{6} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

3. Завдання для самостійного виконання

Обчислити визначені інтеграли (по одному-два з кожної комірки)

безпосереднє інтегрування	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; $\int_0^1 x^3 dx$; $\int_0^3 \frac{dx}{9+x^2}$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$
зміна змінної під знаком диференціала	$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$; $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{4x+5}}$; $\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+7x}}$; $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{7x-6}}$; $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2 2x}$; $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\sin^2 2x}$; $\int_1^2 2^{3x-4} dx$
внесення під знак диференціала	$\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$; $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}}$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx$; $\int_0^1 x^2 \sqrt{1+8x^3} dx$; $\int_0^2 x \sqrt{1+2x^2} dx$; $\int_0^e \frac{\ln x dx}{x}$
інтегрування частинами	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin x dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$; $\int_0^1 x e^{2x} dx$; $\int_0^{\pi} e^x \sin x dx$; $\int_1^e x \ln x dx$; $\int_0^1 \ln(x^2+2) dx$; $\int_0^2 \ln(x^2+1) dx$; $\int_0^2 \ln(x^2+2) dx$; $\int_0^2 (x+2) \ln(x+1) dx$; $\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx$

**М.08. ПЗ.03. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ВІД ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНИХ,
ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ТА ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКІЙ**

Приклади виконання завдань

1. Знайти визначений інтеграл $\int_2^5 \frac{dx}{(x-1)(x+2)}.$

Розв'язання:

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x-1)}{(x-1)(x+2)}, \text{ звідки } 1 = A(x+2) + B(x-1).$$

При $x := -2$ знаходимо $B = -\frac{1}{3}$, при $x := 1$ знаходимо $A = \frac{1}{3}.$

$$\text{Отже маємо } \frac{1}{3} \int_2^5 \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3} \int_2^5 \frac{dx}{x+2} = \left(\frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \ln|x+2| \right) \Big|_2^5 = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| \Big|_2^5 = \frac{1}{3} \left(\ln \frac{4}{7} - \ln \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{3} \ln \frac{16}{7}.$$

Відповідь: $\frac{1}{3} \ln \frac{16}{7}.$

2. Знайти визначений інтеграл $\int_2^3 \frac{dx}{2x^2 + 3x - 2}.$

Розв'язання:

$$\int_2^3 \frac{dx}{2x^2 + 3x - 2} = \int_2^3 \frac{dx}{(x+2)(2x-1)}.$$

$$\frac{1}{(x+2)(2x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{2x-1} = \frac{A(2x-1) + B(x+2)}{(x+2)(2x-1)}, \text{ звідки } 1 = A(2x-1) + B(x+2).$$

При $x := -2$ знаходимо $B = \frac{2}{5}$, при $x := -2$ знаходимо $A = -\frac{1}{5}.$

$$\text{Отже } \frac{2}{5} \int_2^3 \frac{dx}{2x-1} - \frac{1}{5} \int_2^3 \frac{dx}{x+2} = \left(\frac{1}{5} \ln|2x-1| - \frac{1}{5} \ln|x+2| \right) \Big|_2^3 = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{2x-1}{x+2} \right| \Big|_2^3 = \frac{1}{5} \left(\ln \frac{5}{3} - \ln \frac{3}{4} \right) = \frac{1}{5} \ln \frac{4}{3}.$$

Відповідь: $\frac{1}{5} \ln \frac{4}{3}.$

3. Знайти визначений інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}.$

Розв'язання:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 4 + 1} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+2)^2 + 1} = \arctg(x+2) \Big|_0^1 = \arctg 3 - \arctg 2 = \arctg \frac{3-2}{1+3 \cdot 2} = \arctg \frac{1}{7}.$$

Відповідь: $\arctg \frac{1}{7}.$

4. Знайти визначений інтеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}.$

Розв'язання:

$$\frac{1}{x+x^3} = \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(1+x^2) + x(Bx+C)}{x(1+x^2)}, \quad 1 = A + Ax^2 + Bx^2 + Cx, \text{ тоді } \begin{cases} x^2 : & A+B=0, \\ x^1 : & C=0, \\ x^0 : & A=1. \end{cases}$$

$$\text{Отже } \int_1^2 \frac{dx}{x} - \int_1^2 \frac{x dx}{x^2+1} = \int_1^2 \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \ln x \Big|_1^2 - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{x^2+1} \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{4}{5} - \ln \frac{1}{2} \right).$$

Відповідь: $\frac{1}{2} \ln \frac{8}{5}.$

5. Знайти визначений інтеграл $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3 dx}{x^2 - 3x + 2}$.

Розв'язання:

$$\frac{x^3}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x + 3x^2 - 2x}{x^2 - 3x + 2} = x + \frac{3x^2 - 9x + 6 - 2x + 9x - 6}{x^2 - 3x + 2} = x + 3 + \frac{7x - 6}{(x-2)(x-1)},$$

$$\frac{7x - 6}{(x-2)(x-1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1) + B(x-2)}{(x-2)(x-1)}, \quad 7x - 6 = A(x-1) + B(x-2), \quad \text{при } x:=1 \text{ знаходимо}$$

$B = -1$, при $x:=2$ знаходимо $A = 8$.

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{1}{2}} (x+3)dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{8dx}{x-2} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x-1} = \left(\frac{x^2}{2} + 3x + 8\ln|x-2| - \ln|x-1| \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} + \frac{3}{2} + 8\ln\frac{3}{2} - 8\ln 2 - \ln\frac{1}{2} + \ln 1 = \\ & = \frac{13}{8} + 8\ln 3 - 15\ln 2. \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{13}{8} + 8\ln 3 - 15\ln 2$.

6. Знайти визначений інтеграл $\int_9^{36} \frac{dx}{100 + \sqrt{x}}$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} & \int_9^{36} \frac{dx}{100 + \sqrt{x}} \begin{bmatrix} \sqrt{x} = t & dx = 2tdt \\ x = 9 & t = 3 \\ x = 36 & t = 6 \end{bmatrix} = \int_3^6 \frac{2tdt}{100+t} = 2 \int_3^6 \frac{(t+100-100)dt}{100+t} = 2 \int_3^6 \left(1 - \frac{100}{100+t}\right) dt = \\ & = 2 \left(t - 100 \ln|100+t|\right) \Big|_3^6 = 2 \left(6 - 3 - 100 \ln 106 + 100 \ln 103\right) = 2 \left(3 - 100 \ln \frac{106}{103}\right). \end{aligned}$$

Відповідь: $2 \left(3 - 100 \ln \frac{106}{103}\right)$.

7. Знайти визначений інтеграл $\int_0^4 \frac{dx}{2 + \sqrt{2x+1}}$.

Розв'язання:

$$\int_0^4 \frac{dx}{2 + \sqrt{2x+1}} \begin{bmatrix} \sqrt{2x+1} = t & dx = tdt \\ x = 4 & t = 3 \\ x = 0 & t = 1 \end{bmatrix} = \int_1^3 \frac{tdt}{2+t} = \int_1^3 \left(1 - \frac{2}{2+t}\right) dt = \left(t - 2 \ln|2+t|\right) \Big|_1^3 = 2 - \ln \frac{5}{3}.$$

Відповідь: $2 - \ln \frac{5}{3}$.

8. Знайти визначений інтеграл $\int_2^9 \frac{x dx}{\sqrt[3]{x-1}}$.

Розв'язання:

$$\int_2^9 \frac{x dx}{\sqrt[3]{x-1}} \begin{bmatrix} x-1 = t^3 & dx = 3t^2 dt \\ x = 9 & t = 2 \\ x = 2 & t = 1 \end{bmatrix} = \int_1^2 \frac{(t^3+1)\beta t^2 dt}{t} = 3 \int_1^2 (t^4 + t) dt = 3 \left(\frac{t^5}{5} + \frac{t^2}{2} \right) \Big|_1^2 = 3 \left(\frac{32}{5} + \frac{4}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \right) = \frac{231}{10}.$$

Відповідь: 23,1.

9. Знайти визначений інтеграл $\int_1^4 \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^2}$.

Розв'язання:

$$\int_1^4 \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^2} \begin{cases} \sqrt{x} = t & dx = 2tdt \\ x = 4 & t = 2 \\ x = 1 & t = 1 \end{cases} = \int_1^2 \frac{2tdt}{(1+t)^2}.$$

$$\frac{2t}{(1+t)^2} = \frac{A}{(1+t)^2} + \frac{B}{1+t} = \frac{A+B(1+t)}{(1+t)^2}, \quad 2t = A + B + Bt, \quad \frac{2t}{(1+t)^2} = \frac{-2}{(1+t)^2} + \frac{2}{1+t}.$$

$$\int_1^2 \frac{2dt}{1+t} - \int_1^2 \frac{2dt}{(1+t)^2} = \left[2\ln|1+t| + \frac{2}{1+t} \right]_1^2 = 2\ln 3 - 2\ln 2 + \frac{2}{3} - 1 = 2\ln \frac{3}{2} - \frac{1}{3}.$$

Відповідь: $2\ln \frac{3}{2} - \frac{1}{3}$.

10. Знайти визначений інтеграл $\int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$.

Розв'язання:

$$\int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} \begin{cases} \sqrt{e^x - 1} = t & dx = \frac{2tdt}{t^2 + 1} \\ x = \ln 4 & t = \sqrt{3} \\ x = \ln 2 & t = 1 \end{cases} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2tdt}{(t^2 + 1)t} = 2 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2 + 1} = 2 \arctgt|_1^{\sqrt{3}} = 2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{6}.$$

Відповідь: $\pi/6$.

11. Знайти визначений інтеграл $\int_0^\pi \sin^4 x dx$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^4 x dx &= \int_0^\pi \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \int_0^\pi \frac{1}{4} dx - \int_0^\pi \frac{\cos 2x}{4} d(2x) + \int_0^\pi \frac{\cos^2 2x}{4} dx = \left(\frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} \right) \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{1 + \cos 4x}{8} dx = \\ &= \frac{\pi}{4} + \int_0^\pi \frac{1}{8} dx + \int_0^\pi \frac{\cos 4x}{32} d(4x) = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{8} \Big|_0^\pi + \frac{\sin(4x)}{32} \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}. \end{aligned}$$

Відповідь: $3\pi/8$.

12. Знайти визначений інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x dx$.

Розв'язання: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = (\operatorname{tg} x - x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$.

Відповідь: $1 - \pi/4$.

13. Знайти визначений інтеграл $\int_0^{2\pi} \sin^4 3x \cos^4 3x dx$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin^4 3x \cos^4 3x dx &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin^4 6x}{16} dx = \int_0^{2\pi} \frac{(1 - \cos 12x)^2}{16 \cdot 4} dx = \int_0^{2\pi} \frac{1 - 2\cos 12x + \cos^2 12x}{64} dx = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1 - 2\cos 12x}{64} dx + \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 24x}{128} dx = \frac{3}{128} x \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{32} \frac{\sin 12x}{12} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{128} \cdot \frac{\sin 24x}{24} \Big|_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{64}. \end{aligned}$$

Відповідь: $3\pi/64$.

14. Знайти визначений інтеграл $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{(25+x^2)^3}}.$

Розв'язання:

$$\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{(25+x^2)^3}} \begin{cases} x = 5\tgt & dx = \frac{5dt}{\cos^2 t} \\ x = 0 & t = 0 \\ x = 5 & t = \frac{\pi}{4} \end{cases} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{5dt}{\cos^2 t \sqrt{(25+25\tg^2 x)^3}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{5\cos^3 t dt}{5^3 \cos^2 t} = \frac{1}{25} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t dt = \frac{\sin t}{25} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{50}.$$

Відповідь: $\frac{\sqrt{2}}{50}.$

15. Знайти визначений інтеграл $\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}.$

Розв'язання:

$$\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}} \begin{cases} x = 3\sin t & dx = 3\cos t dt \\ x = 0 & t = 0 \\ x = \frac{3}{2} & t = \frac{\pi}{6} \end{cases} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{(3\sin t)^2 3\cos t dt}{\sqrt{9-(3\sin t)^2}} = 9 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 t dt = 9 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\cos 2t}{2} dt = \frac{9t}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} - \frac{9\sin 2t}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{9\pi}{12} - \frac{9\sqrt{3}}{8}.$$

Відповідь: $= \frac{3\pi}{4} - \frac{9\sqrt{3}}{8}.$

16. Знайти визначений інтеграл $\int_4^9 \arctg \sqrt{\sqrt{x}-2} dx.$

Розв'язання:

$$\int_4^9 \arctg \sqrt{\sqrt{x}-2} dx \begin{cases} \sqrt{x}-2 = t^2 & dx = 4t(t^2+2)dt \\ x = 9 & t = 1 \\ x = 4 & t = 0 \end{cases} = 4 \int_0^1 (t^3 + 2t) \arctg t dt \begin{cases} u = \arctg t & du = \frac{dt}{1+t^2} \\ dv = (t^3 + 2t) dt & v = \frac{t^4}{4} + t^2 \end{cases} = (t^4 + 4t^2) \arctg t \Big|_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{t^4 + 4t^2}{t^2 + 1} \right) dt = 5 \cdot \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \left(t^2 + 3 - \frac{3}{t^2 + 1} \right) dt = \frac{5\pi}{4} - \left(\frac{t^3}{3} + 3t - 3\arctg t \right) \Big|_0^1 = \frac{5\pi}{4} - \frac{1}{3} - 3 + \frac{3\pi}{4} = 2\pi - \frac{10}{3}.$$

Завдання для самостійного виконання

Обчислити визначені інтеграли (по одному-два з кожної комірки)

$\int_0^3 \frac{\alpha dx}{(x+\alpha)(x+2\alpha)} ; \int_1^2 \frac{dx}{x+x^2}$
$\int_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{1+x} ; \int_4^9 \frac{x dx}{\sqrt{x}-1} ; \int_9^{16} \frac{dx}{\alpha+\sqrt{x}} ; \int_4^9 \frac{3\sqrt{x} dx}{1+3x} ; \int_{-3}^0 \frac{x dx}{\sqrt{1-x}} ; \int_1^5 \frac{x dx}{\sqrt{4x+5}} ; \int_1^9 \frac{x dx}{\sqrt{2x+7}} ; \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt[3]{7x-6}} ; \int_0^4 \frac{dx}{3+\sqrt{2x+1}}$
$\int_0^2 \frac{x dx}{1+\sqrt{4x+1}} ; \int_4^{11} \frac{dx}{\sqrt{x+5}-1} ; \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} ; \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx ; \int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3} dx$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin 2x dx ; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx ; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx ; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx ; \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg}^2 x dx ; \int_0^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{(\alpha^2+x^2)^3}} ; \int_1^{\alpha} \arctg \sqrt{\sqrt{x}-1} dx$

М.08. ПЗ.04. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ ТА**ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ****1. Основні поняття та теореми**

Інтеграли $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ та $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ називають невласними інтегралами першого роду.

Справедлива рівність $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$, де c – довільне дійсне число.

Невласними інтегралами другого роду є інтеграли, підінтегральна функція яких є необмеженою, тобто в деяких точках прямує до нуля. Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на

півінтервалі $[a; c]$, то $\int_a^c f(x)dx$ визначається як $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx$. Якщо функція $f(x)$ визначена і

неперервна на півінтервалі $(c; b]$, то $\int_c^b f(x)dx$ визначається як $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx$. Якщо функція має розрив

у точці c , що належить відрізку $[a; b]$, то визначений інтеграл знаходиться як сума двох невласних інтегралів другого роду $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти невласний інтеграл або встановити розбіжність $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$.

Розв'язання: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln|x| \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln b - \ln 1 = \ln \lim_{b \rightarrow +\infty} b = +\infty$.

Відповідь: інтеграл розбігається.

2. Знайти невласний інтеграл або встановити розбіжність $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctgx \Big|_a^0 + \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctgx \Big|_0^b = \\ &= \arctg 0 - \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctg a + \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg b - \arctg 0 = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi. \end{aligned}$$

Відповідь: π .

3. Знайти невласний інтеграл або встановити розбіжність $\int_0^{+\infty} e^{-13x} dx$.

Розв'язання:

$$\int_0^{+\infty} e^{-13x} dx = -\frac{1}{13} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-13x} d(-13x) = -\frac{1}{13} \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-13x} \Big|_0^b = -\frac{1}{13} \left(\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{13b}} - \frac{1}{e^0} \right) = -\frac{1}{13} \left(0 - \frac{1}{e} \right) = \frac{1}{13}.$$

Відповідь: 13^{-1} .

4. Знайти невласний інтеграл або встановити розбіжність $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{102}}$.

Розв'язання: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{102}} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x^{-102} dx = -\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{x^{-101}}{101} \Big|_1^b = -\frac{1}{101} \left(\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{b^{101}} - 1 \right) = \frac{1}{101}.$

Відповідь: 101^{-1} .

5. Знайти невласний інтеграл або встановити розбіжність $\int_1^{+\infty} 103^{-x} dx$.

Розв'язання:

$$\int_1^{+\infty} 103^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b 103^{-x} dx = -\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{103^{-x}}{\ln 103} \Big|_1^b = -\frac{1}{\ln 103} \left(\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{103^b} - \frac{1}{103} \right) = \frac{1}{103 \cdot \ln 103}.$$

Відповідь: $\frac{1}{103 \cdot \ln 103}$.

6. Знайти невласний інтеграл або встановити розбіжність $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$.

Розв'язання: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2(x+1)}$.

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+1} = \frac{A(x+1) + Bx(x+1) + Cx^2}{x^2(x+1)}, \text{ звідки } 1 = A(x+1) + Bx(x+1) + Cx^2. \text{ При}$$

$x := 0$ маємо $A = 1$, при $x := -1$ маємо $C = 1$, при $x := 1$ маємо $B = -1$, тоді маємо $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2(x+1)} =$

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \right) dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} - \ln|x| + \ln|x+1| \right) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\ln \left| \frac{x+1}{x} \right| - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\ln \left| \frac{b+1}{b} \right| - \frac{1}{b} \right) - \ln 2 + 1 = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{b+1}{b} \right| - \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{b} - \ln 2 + 1 = \ln \lim_{b \rightarrow +\infty} \left| \frac{b+1}{b} \right| - \ln 2 + 1 = 1 - \ln 2. \end{aligned}$$

Відповідь: $1 - \ln 2$.

7. Знайти невласний інтеграл або встановити розбіжність $\int_0^1 \frac{dx}{x}$.

Розв'язання: $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln|x| \Big|_{0+\varepsilon}^1 = \ln 1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln|\varepsilon| = -\ln \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\varepsilon| = -\ln 0 = +\infty$.

Відповідь: інтеграл розбігається.

8. Знайти невласний інтеграл або встановити розбіжність $\int_0^{13} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

Розв'язання: $\int_0^{13} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{0+\varepsilon}^{13} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x^{\frac{2}{3}} \Big|_{0+\varepsilon}^{13} = \frac{3}{2} \left(13^{\frac{2}{3}} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{\frac{2}{3}} \right) = \frac{3}{2} \cdot 13^{\frac{2}{3}}.$

Відповідь: $\frac{3}{2} \cdot 13^{\frac{2}{3}}$.

9. Знайти невласний інтеграл або встановити розбіжність $\int_2^{\sqrt{5}} \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - 4}}$.

Розв'язання:

$$\int_2^{\sqrt{5}} \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - 4}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{2+\varepsilon}^{\sqrt{5}} \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - 4}} = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{2+\varepsilon}^{\sqrt{5}} (x^2 - 4)^{-\frac{1}{2}} d(x^2 - 4) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - 4} \Big|_{2+\varepsilon}^{\sqrt{5}} = 1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{(2+\varepsilon)^2 - 4} = 1.$$

Відповідь: 1.

10. Знайти невласний інтеграл або встановити розбіжність $\int_{-8}^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

Розв'язання:

Всередині відрізка інтегрування при $x \rightarrow 0$ підінтегральна функція необмежено зростає ($x = 0$ – особлива точка). Згідно означення запишемо:

$$\int_{-8}^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int_{-8}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \int_0^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\varepsilon}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \int_{0+\varepsilon}^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \right) = \frac{3}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(x^{\frac{2}{3}} \Big|_{-\varepsilon}^{0-\varepsilon} + x^{\frac{2}{3}} \Big|_{0+\varepsilon}^{27} \right) = \frac{3}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left((-\varepsilon)^{\frac{2}{3}} - 4 + 9 - \varepsilon^{\frac{2}{3}} \right) = \frac{15}{2}.$$

Відповідь: $\frac{15}{2}$.

11. Знайти невласний інтеграл або встановити розбіжність $\int_0^1 \ln(31x)dx$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln(31x)dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{0+\varepsilon}^1 \ln(31x)dx \left[\begin{array}{l} u = \ln(31x) \quad du = \frac{31dx}{31x} \\ dv = dx \quad v = x \end{array} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(x \cdot \ln(31x) \Big|_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 dx \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (x \cdot \ln(31x) - x) \Big|_{\varepsilon}^1 = \\ &= \ln 31 - 1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon \cdot \ln(31\varepsilon) - \varepsilon) = \ln 31 - 1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(31\varepsilon)}{\frac{1}{\varepsilon}} = \ln 31 - 1 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{31\varepsilon^2}{31\varepsilon} = \ln 31 - 1. \end{aligned}$$

Відповідь: $\ln 31 - 1$.

12. Знайти невласний інтеграл або встановити розбіжність $\int_0^1 x \ln(31x)dx$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \ln(31x)dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{0+\varepsilon}^1 x \ln(31x)dx \left[\begin{array}{l} u = \ln(31x) \quad du = \frac{31dx}{31x} \\ dv = xdx \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{2} \ln(31x) \Big|_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 \frac{x}{2} dx \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{2} \cdot \ln(31x) - \frac{x^2}{4} \right) \Big|_{\varepsilon}^1 = \frac{1}{2} \ln 31 - \frac{1}{4} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\varepsilon^2}{2} \cdot \ln(31\varepsilon) - \frac{\varepsilon^2}{4} \right) = \frac{1}{2} \ln 31 - \frac{1}{4} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(31\varepsilon)}{2\varepsilon^{-2}} = \frac{1}{2} \ln 31 - \frac{1}{4} - \\ &- \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{31}{31\varepsilon \cdot 2 \cdot (-2)\varepsilon^{-3}} = \frac{1}{2} \ln 31 - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{1}{2} \ln 31 - \frac{1}{4}$.

13. Знайти невласний інтеграл або встановити розбіжність $\int_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}}dx$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}}dx + \int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}}dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-1}^{0-\varepsilon} \left(x^{\frac{2}{5}} + x^{-\frac{3}{5}} \right) dx + \int_{0+\varepsilon}^1 \left(x^{\frac{2}{5}} + x^{-\frac{3}{5}} \right) dx \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\left(\frac{5x^{\frac{7}{5}}}{7} + \frac{5x^{\frac{2}{5}}}{2} \right) \Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \left(\frac{5x^{\frac{7}{5}}}{7} + \frac{5x^{\frac{2}{5}}}{2} \right) \Big|_{\varepsilon}^1 \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{5\varepsilon^{\frac{7}{5}}}{7} + \frac{5\varepsilon^{\frac{2}{5}}}{2} \right) + \frac{5}{7} - \frac{5}{2} + \frac{5}{7} + \frac{5}{2} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{5\varepsilon^{\frac{7}{5}}}{7} + \frac{5\varepsilon^{\frac{2}{5}}}{2} \right) = \frac{10}{7}. \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{10}{7}$.

3. Завдання для самостійного виконання

Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність (по два з кожної комірки)

$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2 + 5}}$	$\int_2^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x}$	$\int_0^{+\infty} e^{\frac{-x}{\alpha}} dx$	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha+1}}$	$\int_1^{+\infty} (\alpha+1)^{-x} dx$	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+\alpha)}$
$\int_{-3}^0 \frac{dx}{(x+3)^2}$	$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x+2}$	$\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+2}}$	$\int_0^4 \frac{x}{(x-2)^4} dx$	$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}}$	$\int_0^{\alpha+3} \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 4}}$

М.08. ПЗ.05. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ ДО ЗАДАЧ ГЕОМЕТРІЇ

1. Основні поняття та теореми

Площу криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y=f(x)$, віссю Ox і прямими $x=a$ та $x=b$ обчислюють за формулою $S = \int_a^b |f(x)| dx$. Площа фігури, обмеженої двома неперервними лініями $y_1 = f_1(x)$ і $y_2 = f_2(x)$, де $y_2 \geq y_1 \geq 0$, та прямими $x=a$ і $x=b$, рівна $S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$.

Площа плоскої фігури в полярних координатах обчислюється за формулою $S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [\rho_2^2(\varphi) - \rho_1^2(\varphi)] d\varphi$, $\rho_1 \leq \rho_2$. Площу криволінійної трапеції, обмеженої лінією, що задана у параметричній формі $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ де $\alpha \leq t \leq \beta$, $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$, знаходиться як $S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t) dt$.

Довжину дуги l графіка функції в декартових координатах $y=f(x)$ на відрізку $[a, b]$ обчислюють за формулою $l = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2} dx$, де $y' = f'(x)$. Довжину кривої в полярних координатах знаходять як $l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\rho'(\varphi)]^2 + \rho^2(\varphi)} d\varphi$, а кривої, заданої параметрично, як $l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\phi'(t))^2 + (\phi'(t))^2} dt$.

Об'єм V тіла за відомим законом зміни площини його поперечного перерізу S рівний $V = \int_a^b S(x) dx$. Об'єм тіла обертання визначають формулами $V_x = \int_a^b S(x) dx = \pi \int_a^b y^2 dx$, $V_y = \pi \int_c^d x^2 dy$.

Площа поверхні обертання утвореної обертанням кривої заданої параметрично $x=x(t)$, $y=y(t)$ визначається за формулою $P = 2\pi \int_{t_0}^t y \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt$. Зокрема, якщо крива задана явним рівнянням $y=f(x)$ ($a \leq x \leq b$), то $P = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1+(y'_x)^2} dx$.

2. Приклади виконання завдань

1. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $y = x^2 - 6x + 5$, прямими $x=0$ і $x=6$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (x^2 - 6x + 5) dx - \int_1^5 (x^2 - 6x + 5) dx + \int_5^6 (x^2 - 6x + 5) dx = \left(\frac{x^3}{3} + 3x^2 + 5x \right) \Big|_0^1 - \left(\frac{x^3}{3} + 3x^2 + 5x \right) \Big|_1^5 + \left(\frac{x^3}{3} + 3x^2 + 5x \right) \Big|_5^6 = \\ &= \left(\frac{1}{3} - 3 + 5 \right) - 0 - \left[\left(\frac{125}{3} - 75 + 25 \right) - \left(\frac{1}{3} - 3 + 5 \right) \right] + \left(\frac{216}{3} - 108 + 30 \right) - \left(\frac{125}{3} - 75 + 25 \right) = \frac{46}{3} = 15,3 \text{ кв.од.} \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{46}{3}$ кв.од.

2. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{x}$ та прямими $x=2$, $x=4$.

$$\text{Розв'язання: } S = \int_2^4 \left(x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x} \right) dx = \left. \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \ln|x| \right|_2^4 = \frac{4}{3} (4 - \sqrt{2}) - \ln 2.$$

Відповідь: $\frac{16}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} - \ln 2$.

3. Знайти площину S криволінійної фігури, обмеженої кривою $y = x^2 + 2$ та прямою $2x + y = 5$.

Розв'язання:

Межі інтегрування знайдемо із рівняння $x^2 + 2 = 5 - 2x$. Тоді $x^2 + 2x - 3 = 0$ і $x_1 = -3$, $x_2 = 1$. Тому

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^1 [(5 - 2x) - (x^2 + 2)] dx = \int_{-3}^1 (-x^2 - 2x + 3) dx = \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right]_{-3}^1 = \\ &= -\frac{1}{3} - 1 + 3 - (9 - 9 - 9) = \frac{5}{3} + 9 = \frac{32}{3} = 10, \text{ кв.од.} \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{32}{3}$.

4. Обчислити площину фігури, обмежену лініями, що задані рівняннями в полярних координатах $\rho = 6\sin\varphi$, $\rho = 4\sin\varphi$.

Розв'язання:

Підставляючи $\alpha = 0$, $\beta = \pi$, $\rho_1 = 4\sin\varphi$, $\rho_2 = 6\sin\varphi$ в $S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [\rho_2^2(\varphi) - \rho_1^2(\varphi)] d\varphi$, одержуємо:

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [(6\sin\varphi)^2 - (4\sin\varphi)^2] d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} 20\sin^2\varphi d\varphi = 10 \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi = 5 \left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = 5\pi \text{ кв.од.}$$

Відповідь: 5π кв.од.

5. Обчислити площину фігури, обмежену еліпсом $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 3\sin t. \end{cases}$

Розв'язання:

Площу обчислюємо за формулою $S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t) dt$, маємо

$$S = 6 \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = 3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t) dt = 3 \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 6\pi.$$

Відповідь: 6π кв.од.

6. Обчислити довжину кривої $y = \frac{(1 - e^x - e^{-x})}{2}$, $0 \leq x \leq 3$.

Розв'язання:

Підставляючи $\alpha = 0$, $\beta = 3$, $y' = \frac{1}{2}(-e^x + e^{-x})$ в $l = \int_a^{\beta} \sqrt{1 + (y')^2} dx$ одержуємо

$$l = \int_0^3 \sqrt{1 + \left(\frac{-e^x + e^{-x}}{2} \right)^2} dx = \int_0^3 \sqrt{\frac{4 + e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}} dx = \int_0^3 \frac{\sqrt{(e^x + e^{-x})^2}}{2} dx = \int_0^3 \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Big|_0^3 = \frac{e^3 - e^{-3}}{2}.$$

Відповідь: $\frac{e^3 - e^{-3}}{2}$ од.довж.

7. Обчислити довжину дуги кривої, що задана в полярних координатах $\rho = 6\sin\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$.

Розв'язання:

Підставляючи дані в $l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\rho'(\varphi)]^2 + \rho^2(\varphi)} d\varphi$, маємо $l = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{(6\cos\varphi)^2 + (6\cos\varphi)^2} d\varphi = 6 \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi = 2\pi$.

Відповідь: 2π од.довж.

8. Обчислити довжину витка циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Розв'язання:

Підставляючи в $l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$ $\phi'(t) = a(1 - \cos t)$, $\psi'(t) = a \sin t$, $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$, маємо

$$l = a \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + (\sin t)^2} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt = 2a \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}} dt = 4a \int_0^{2\pi} \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt = 4a \left| \cos \frac{t}{2} \right|_0^{2\pi} = 8a.$$

Відповідь: $8a$ од.довж.

9. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням кривої $y = (x-1)^2$ навколо осі Oy та обмеженої лініями $x=0$, $x=2$, $y=0$.

Розв'язання:

Так як $|x-1| = \sqrt{y}$, то $x = 1 + \sqrt{y}$, $x = 1 - \sqrt{y}$. Користуючись формулою $V = \pi \int_c^d \phi^2(y) dy$,

знаходимо

$$V_y = \pi \int_0^1 2^2 dy - \pi \int_0^1 (1 + \sqrt{y})^2 dy + \pi \int_0^1 (1 - \sqrt{y})^2 dy = 4\pi - 4\pi \int_0^1 \sqrt{y} dy = 4\pi - 4\pi \cdot \frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_0^1 = 4\pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi.$$

Відповідь: $\frac{4}{3}\pi$ куб.од.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Обчислити площину фігури, обмеженої параболою $y = 4 - x^2$ і прямую $x - y + 4 = 0$.
2. Обчислити площину фігури, обмеженої параболою $y = 3 - 2x - x^2$ і віссю абсцис.
3. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, яка обмежена гіперболою $xy = 4$, прямими $x = 3$, $x = 12$ та віссю абсцис.
4. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, яка обмежена гіперболою $xy = 6$, прямими $y = 1$, $y = 4$ та віссю ординат.
5. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, яка обмежена параболою $x = 6y^2$, прямую $y = 3$ та віссю ординат.
6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, яка обмежена параболою $y = x^2/4$, прямую $x = 4$ та віссю абсцис.
7. Обчислити площину фігури, обмеженої параболою $y = -1 + 4x - x^2$ і прямую $y = -x - 1$.
8. Обчислити площину фігури, обмеженої параболою $y = x^2 - 6x + 7$ і прямую $y = x + 1$.
9. Обчислити площину фігури, обмеженої параболою $y = -x^2 + 6x - 5$ і прямую $y = x - 5$.
10. Обчислити площину фігури, обмеженої гіперболою $xy = 7$, віссю Ox і прямими $x = 2$, $x = 6$.
11. Обчислити площину фігури, обмеженої кривими $y = -x^2 + 5$ і $y = x^2 + 1$.
12. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, яка обмежена лініями $xy = 8$, $x = 0$, $y = 1$ і $y = 6$.
13. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, яка обмежена параболою $y = 2x^2 + 1$, віссю Oy і прямую $y = 7$.
14. Обчислити площину фігури, обмеженої параболою $y = (x-2)^2/3$ і прямую $y = x + 4$.
15. Обчислити площину фігури, обмеженої лініями $y = -x^2 + 5$ і $y = x - 1$.
16. Обчислити площину фігури, обмеженої кривими $y = -x^2 + 5$ і $y = 2x^2$.
17. Обчислити площину фігури, обмеженої лініями $xy = 2$ і $x + y = 3$.
18. Обчислити площину фігури, обмеженої кривими $y = -x^2 + 7$ і $y = x^2 - 1$.

19. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, яка обмежена лініями $y = \sqrt{2x - 3}$, $y = 0$ і $x = 6$.
20. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, яка обмежена кривою $y = x^3/4 + 1$, віссю Oy і прямою $y = 5$.
21. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, яка обмежена кривою $xy = 10$, віссю Ox , і прямими $x = 2$, $x = 6$.
22. Обчислити площину фігури, обмеженої лініями $y = -x^2 + 4$ і $y = x^2 - 2$.
23. Обчислити площину фігури, обмеженої лініями $y = -x^2 + 8$ і $y = x - 4$.
24. Обчислити площину фігури, обмеженої лініями $y = -x^2 + 4$ і $y = x - 2$.
25. Обчислити довжину дуги кривої $y = \ln \sin x$ від $x = \pi/3$ до $\pi/2$.
26. Обчислити площину фігури, обмеженої параболою $y = 16 - x^2$ і прямою $x - y + 8 = 0$.
27. Обчислити площину фігури, обмеженої лініями $y = -x^2 + 5$ і $y = x^2 - 3$.
28. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, яка обмежена лініями $y = \sqrt{x - 1}$, $y = 0$, $x = 4$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Вища математика : метод. реком. до виконання практичних робіт для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «молодший бакалавр» початкового рівня (короткий цикл) спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» денної форми навчання / уклад. В. С. Шебанін, О. В. Шебаніна, І. П. Атаманюк, О. В. Шептилевський, О. В. Бойчук, Є. Ю. Борчик, С. І. Богданов. Миколаїв : МНАУ, 2021. 154 с.
2. Вища математика : типові завдання до модулів 04 «Диференціальне числення функцій однієї змінної», 05 «Диференціальне числення функцій багатьох змінних», 06 «Інтегральне числення функцій однієї змінної», 07 «Диференціальні рівняння», 08 «Числові та функціональні ряди» для виконання контрольних та самостійних робіт студентами напрямів підготовки: 6.030509 «Облік та аудит», 6.030601 «Менеджмент організацій», 6.030601 «Менеджмент ЗЕД» / В.С. Шебанін, О.В. Шебаніна, В.Г. Богзат ін. Миколаїв : МНАУ, 2011. 140 с.
3. Практикум з вищої математики : комп'ютерна система для дистанційного навчання / В.С. Шебанін, О.В. Шебаніна, І.П. Атаманюк та ін. Миколаїв : МНАУ, 2016. Ч. I. 232 с.
4. Практикум з вищої математики : комп'ютерна система для дистанційного навчання / В.С. Шебанін, О.В. Шебаніна, І.П. Атаманюк та ін. Миколаїв : МНАУ, 2018. Ч. II. 380 с.

Навчальне видання

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ
ФУНКІЇ ОДНІСІЇ ЗМІННОЇ**

Методичні рекомендації

Укладачі: Бойчук Олена Володимирівна
Борчик Євген Юрійович
Богданов Сергій Іванович
Шептилевський Олексій Вікторович

Формат 60x84/16 Ум. друк. арк.
Тираж __ прим. Зам. №

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Г. Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.