МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Інженерно-енергетичний факультет

Кафедра вищої та прикладної математики

ВИЩА МАТЕМАТИКА

завдання та методичні рекомендації для самостійної роботи
здобувачів вищої освіти
ступеня «Молодший бакалавр» початкового рівня (короткий цикл)
спеціальностей
208 «Агроінженерія»,
141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»,
073 «Менеджмент»

Модуль 4

«ГРАНИЦІ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ТА ФУНКЦІЙ»

МИКОЛАЇВ
2020

УДК 51
В55

Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету МНАУ (протокол № 3 від 24. 11. 2020р.)

Укладачі:

В.С. Шебанін – д.т.н., професор, ректор Миколаївського національного аграрного університету;
І.П. Атаманюк – д.т.н., професор, завідуючий кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського національного аграрного університету;
О.В. Бойчук – к.ф.-м.н., старший викладач кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського національного аграрного університету;
О.В. Шептилевський – к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського національного аграрного університету;
С.І. Богданов – старший викладач кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського національного аграрного університету;
Є.Ю. Борчик – к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського національного аграрного університету;
О.І. Власов – к.ф.-м.н., ст. викладач кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського національного аграрного університету.

Рецензент:
Будак В.Д. – д.т.н., професор, ректор Миколаївського національного університету ім. В.О. Сухомлинського.

ЗМІСТ

ВСТУП

Диференціальне числення є основним розділом курсу вищої математики в цілому. У методичних рекомендаціях розглядаються завдання для самостійної роботи та роз'яснення прикладів виконання подібних завдань з наступних розділів: границя послідовності, границя функції, неперервність і точки розриву функцій. Дані теми є базовими при вивчені диференціального числення. Крім того, матеріал буде потрібний для освоєння інших розділів вищої математики, зокрема, в ході вивчення числових рядів і функціональних рядів та невласних інтегралів, а також при дослідженні функцій та побудові графіків.

Матеріал викладено таким чином, щоб максимально допомогти студентам оволодіти методами та набути основних навиків по знаходженню границь послідовностей та границь функцій.

Методичні рекомендації створено відповідно до програми курсу «Вища математика» для здобувіачів освітнього рівня «молодший бакалавр» спеціальностей 208 «Анроінженерія», 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка», 073 «Менеджмент», але їх можуть використовувати на всіх інших факультетах, де програмою передбачено вивчення курсу «Вища математика».

Лабораторне заняття 4.01

ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ
Теоретичні відомості

Послідовність – це пронумерований набір об'єктів. Характерні ознаки послідовності: елементи послідовності розташовуються строго в певному порядку; кожному елементу послідовності можна привласнити порядковий номер 1, 2, …, n,…

Нехай кожному натуральному значенню за деяким правилом поставлено у відповідність дійсне число. Тоді кажуть, що задана числова послідовність $x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...,\ x_n,\ ...$ або $\{x_n\}$.

Числова послідовність майже завжди містить нескінченно багато чисел. При цьому: x_1 – перший елемент послідовності; x_2 – другий елемент послідовності; …, x_n – n-ний або загальний елемент послідовності. Змінна n грає роль своєрідного лічильника.

На практиці послідовність задається формулою загального елемента, наприклад: $x_n = 2n$ – послідовність додатних парних чисел: 2, 4, 6, …

Для позначення послідовності можуть використовуватися інші латинські букви, наприклад $y_n = 2n - 1$ – послідовність додатних непарних чисел: 1, 3, 5, …

Ще одна поширена послідовність $x_n = \dfrac{1}{n}$: $1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \dots$

Деякі числові послідовності вивчають у школі: арифметичну прогресію $a_n = a_1 + d\left(n-1\right)$ та геометричну прогресію $b_n = b_1 q^{n-1}$.

Ще один приклад послідовності $x_n = n!$ (n факторіал – це згорнутий запис добутку $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$): 1, 2, 6, 24, 120, 720...

Елементи послідовності можуть повторюватись. Так, послідовність $x_n = \left(-1\right)^n$ складається з двох чисел, що нескінченно чергуються: $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1\dots$ Послідовність $x_n = 1^n$ складається з однакових чисел.

Отже, з послідовностями вияснили. Тепер вияснимо питання про границю.

Розглянемо послідовності

1) $x_n = 2n$, тобто 2, 4, 6, …;

2) $x_n = n!$, тобто 1, 2, 6, 24, 120, 720, ...;

3) $x_n = \frac{1}{n}$, тобто $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots$;

4) $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, тобто $1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \ldots$;

5) $x_n = \frac{n+1}{n}$, тобто $2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \frac{6}{5},\ \ldots$;

6) $x_n = (-1)^n$, тобто $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1\ldots$

Вияснимо, до чого прийдуть елементи послідовності із збільшенням номера n до нескінченності.

Для перших двох послідовностей при збільшенні n елементи послідовності будуть нескінченно збільшуватись, тобто прийдуть до нескінченності. Це записують так $\lim\limits_{n\to\infty}(2n) = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}(n!) = \infty$. Запис $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ означає границя послідовності x_n при n прямує до нуля.

Для третьої і четвертої з розглядуваних послідовностей при збільшенні n елементи послідовності будуть нескінченно близько наближатися до нуля. Це записують так $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$.

Елементи п’ятої послідовності при збільшенні n наближаються до 1, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$.

Шоста послідовність границі не має: непарні елементи утворюють підпослідовність з границею -1, а парні елементи утворюють підпослідовність з границею 1. А якщо у послідовності існує границя, то вона єдина.

Строге математичне формулювання границі послідовності дав відомий математик Коші. Розглянемо деяку точку a і її довільний ε-окіл (рис. 1). Значення ε завжди додатне і, ми маємо право вибрати його самостійно яким завгодно. Припустимо, що в даному ε-околі знаходиться безліч елементів (не обов'язково всі) деякої послідовності $\{x_n\}$. Факт, що n-ний елемент потрапив в ε-окіл, означає, що відстань між точками a і x_n має бути менше ε: $|x_n - a| < \varepsilon$. Визначення: число a називається границею числової послідовності $\{x_n\}$, якщо для будь-якого його ε-околу (заздалегідь обраного) існує натуральний номер N (що залежить від ε) такий, що всі елементи послідовності з більшими номерами ($n > N$) виявляться всередині ε-околу $|x_n - a| < \varepsilon$.

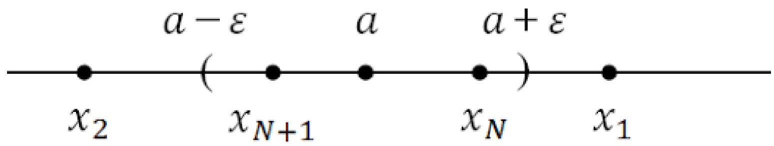

Рис. 1

Символічно це означення записують наступним чином:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Іншими словами, яке б мале значення ε ми не взяли, рано чи пізно «нескінченний хвіст» послідовності повністю виявиться в цьому околі.

Якщо у послідовності існує скінчена границя (рівна числу a), то вона називається збіжною (зокрема, нескінченно малою при $a = 0$).

Наприклад, послідовність $x_n = 2 - \dfrac{3}{n^2}$ є збіжною, бо $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2 - \dfrac{3}{n^2}\right) = 2$ (тут дріб із збільшенням n прямує до нуля, і відповідно, границя дорівнює 2).

Будь-яка нескінченно спадна геометрична прогресія, як зрозуміло вже з назви, нескінченно мала послідовність:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5^{n-1}} = 0 \text{ і } \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{5^n} = 0.$$

Якщо у послідовності нема скінченої границі, то вона називається розбіжною, при цьому можливі два варіанти: або границі зовсім не існує, або вона нескінченна. В останньому випадку послідовність називають нескінченно великою.

Послідовності $x_n = n^2$ і $y_n = 2n - 1$ є нескінченно великими, оскільки їхні елементи впевнено просуваються до нескінченності:

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty \text{ і } \lim_{n\to\infty}(2n+1) = \infty.$$

Арифметична прогресія є розбіжною послідовністю, за винятком випадку з нульовим кроком $d = 0$. Границя такої виняткової послідовності існує і збігається з першим елементом a_1.

Така ж тенденція у послідовностей $x_n = 3$ і $y_n = 1^n$.

Якщо знаменник геометричній прогресії $q > 1$, то послідовність нескінченно велика:

$$\lim_{n\to\infty} 5^{n-1} = \infty.$$

Якщо ж $q < -1$, наприклад $x_n = (-5)^n$, то границі $\lim\limits_{n\to\infty}(-5)^n$ не існує, так як члени стрибають то до «плюс нескінченності», то до «мінус нескінченності».

Послідовність $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$: $0,\ \frac{3}{2},\ -\frac{2}{3},\ \frac{5}{4},\ -\frac{4}{5},\ \frac{7}{6},\ -\frac{6}{7},\ \ldots$ границі не має, але з неї можна виділити дві підпослідовності: підпослідовність парних елементів послідовності, границею якої є 1, і підпослідовність непарних елементів послідовності, границею якої є -1.

При знаходженні границь послідовностей слід пам'ятати арифметичні властивості границь:

- границя суми (різниці)послідовностей рівна сумі (різниці) границь цих послідовностей

$$\lim_{n\to\infty}(u_n \pm v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n \pm \lim_{n\to\infty} v_n;$$

- границя добутку послідовностей рівна добутку границь цих послідовностей

$$\lim_{n\to\infty}(u_n \cdot v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n \cdot \lim_{n\to\infty} v_n;$$

- границя частки послідовностей дорівнює частці границь цих послідовностей

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} u_n}{\lim\limits_{n\to\infty} v_n}.$$

Сума (різниця або добуток) скінченого числа безмежно малих послідовностей є безмежно малою послідовністю.

Сума (або добуток) безмежно великих послідовностей є безмежно великою послідовністю.

Сума (різниця) безмежно великої послідовності та безмежно малої послідовності є безмежно великою послідовністю.

Приклади знаходження границь послідовностей

Коли потрібно визначити границю послідовності, спочатку просто намагаємося підставити нескінченність у формулу послідовності замість n і застосувати арифметичні властивості границь.

1. Знайти границі а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2\sqrt{n}-3\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n+1}-\frac{100}{n^2}\right)$.

Розв'язування

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2\sqrt{n}-3\right)=2\cdot\infty-3=\infty$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n+1}-\frac{100}{n^2}\right)=0-0=0$.

На практиці зустрічаються границі, що при підстановці нескінченності замість n дають невизначеність. Розглянемо границі у вигляді частки двох многочленів, що є невизначеністю виду $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

2. Знайти границі а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7n^3+5n^2+9n+1}{5n^4+6n^2-3n-4}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n-5}{n+1}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n-5}{1+n+3n^2}$.

Розв'язування

Границі у вигляді частки двох многочленів розв'язують діленням чисельника і знаменника дробу на найбільший степінь n.

а) Так у першому випадку для усунення невизначеності поділимо чисельник і знаменник дробу на n^4 і виконаємо скорочення в межах кожного дробу, отримаємо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{7n^3}{n^4}+\frac{5n^2}{n^4}+\frac{9n}{n^4}+\frac{1}{n^4}}{\frac{5n^4}{n^4}+\frac{6n^2}{n^4}-\frac{3n}{n^4}-\frac{4}{n^4}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{7}{n}+\frac{5}{n^2}+\frac{9}{n^3}+\frac{1}{n^4}}{5+\frac{6}{n^2}-\frac{3}{n^3}-\frac{4}{n^4}}$. Після застосування арифметичних властивостей границь $\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{15}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{9}{n^3}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}}{\lim\limits_{n\to\infty}5+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6}{n^2}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^3}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n^4}}$ обчислимо кожну з отриманих границь $\frac{0+0+0+0}{5+0+0+0}=\frac{0}{5}=0$, бо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{k}{n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{k}{n^2}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{k}{n^3}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{k}{n^4}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}k=k$ (де k – стала).

б) У другому випадку поділимо чисельник і знаменник дробу на n^2 і виконаємо скорочення в межах кожного дробу, маємо $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{2n^2}{n^2}-\dfrac{3n}{n^2}-\dfrac{5}{n^2}}{\dfrac{n}{n^2}+\dfrac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-\dfrac{3}{n}-\dfrac{5}{n^2}}{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}$. Застосуємо арифметичні властивості границь $\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}2-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}$ і обчислимо кожну з отриманих границь $\dfrac{2-0-0}{0+0}=\dfrac{2}{0}=\infty$, бо $\dfrac{k}{0}=\infty$ (запис $\dfrac{k}{0}$ означає ділення на нескінченно мале число).

в) У третьому випадку ділимо і чисельник і знаменник дробу на n^2, маємо після скорочення в межах кожного дробу $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-\dfrac{3}{n}-\dfrac{5}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n}+3}$.

Застосуємо арифметичні властивості границь $\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}2-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}3}$ і обчислимо кожну з отриманих границь $\dfrac{2-0-0}{0+0+3}=\dfrac{2}{3}$.

Границі у вигляді частки двох многочленів можна розв'язувати швидше, так як многочлен більшого степеня (визначається за найбільшим степенем його членів) прямує до нескінченості швидше. Тому, якщо степінь многочлена чисельника менше степеня многочлена знаменника, то границя частки рівна нулю $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n^3+15n^2+9n+1}{5n^4+6n^2-3n-4}=0$. Якщо степінь многочлена чисельника більше степеня многочлена знаменника, то границя частки є нескінченістю $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-3n-5}{n+1}=\infty$. Якщо степені обох многочленів рівні, то границя частки рівна відношенню коефіцієнтів при n у найбільшому степені $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-3n-5}{1+n+3n^2}=\dfrac{2}{3}$.

Наступні приклади будуть зводитись до границь, подібних до розглянутих у прикладі 2.

3. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2-(2+n)^2}{n^2+n+1}$.

Розв'язування

Розкриваємо дужки і зводим подібні доданки в чисельнику $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1-4-4n-n^2}{n^2+n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2n-3}{n^2+n+1}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=0$. Отримали 0, бо степінь многочлена чисельника менше степеня многочлена знаменника.

Розглянемо способи розкриття ще одного виду невизначеності, а саме $\{\infty-\infty\}$.

4. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{n^2+1}-\frac{n^4}{n^3-1}\right)$.

Розв'язування

Спочатку підставимо нескінченність у формулу послідовності замість *n*. Обидва дроби є невизначеностями виду $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ із степенем многочлена чисельника більше степеня многочлена знаменника, тому $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{n^2+1}-\frac{n^4}{n^3-1}\right)$ є невизначеністю виду $\{\infty-\infty\}$.

Для розкриття невизначеності $\{\infty-\infty\}$ зведемо дроби до спільного знаменника $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3\left(n^3-1\right)-n^4\left(n^2+1\right)}{\left(n^2+1\right)\left(n^3-1\right)}$. Розкриємо дужки у чисельнику і знаменнику і зведемо подібні доданки многочленів $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^6-n^3-n^6-n^4}{n^5+n^3-n^2-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n^3-n^4}{n^5+n^3-n^2-1}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=0$. Отримали 0, бо степінь многочлена знаменника більше степеня многочлена чисельника.

Розглянемо границі, що є невизначеністю $\{\infty-\infty\}$ з коренями.

5. Знайти границі послідовностей

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+3}-\sqrt{n^2-3n+1}\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^6+2n^4-8}-\sqrt{n^6+5}}{n}$.

Розв'язування

а) Маємо невизначеність виду $\{\infty - \infty\}$. Для розкриття цієї невизначеності помножимо і поділимо на спряжений вираз $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{n^2+n+3}-\sqrt{n^2-3n+1}\right)\left(\sqrt{n^2+n+3}+\sqrt{n^2-3n+1}\right)}{\sqrt{n^2+n+3}+\sqrt{n^2-3n+1}}$, щоб застосувати формулу різниці квадратів $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, тобто

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n+3}\right)^2-\left(\sqrt{n^2-3n+1}\right)^2}{\sqrt{n^2+n+3}+\sqrt{n^2-3n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+3-\left(n^2-3n+1\right)}{\sqrt{n^2+n+3}+\sqrt{n^2-3n+1}}.$$

Розкриємо дужки в чисельнику $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n+3-n^2+3n-1}{\sqrt{n^2+n+3}+\sqrt{n^2-3n+1}}$ і зведемо подібні доданки, маємо $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n+2}{\sqrt{n^2+n+3}+\sqrt{n^2-3n+1}}$. Після такого перетворення ми не позбавились коренів, але позбавились від різниці коренів, що давала невизначеність $\{\infty-\infty\}$. А сума коренів є визначеністю $\infty+\infty=\infty$.

Тобто границя $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n+2}{\sqrt{n^2+n+3}+\sqrt{n^2-3n+1}}$ є невизначеністю виду $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$. Оцінимо найбільші степені n: в чисельнику найбільший степінь n – перший; в знаменнику найбільший степінь n – перший ($\sqrt{n^2}=n$). Так як найбільші степені n в чисельнику і в знаменнику рівні, то визначимо коефіцієнти при n: в чисельнику коефіцієнт при n рівний 4; в знаменнику коефіцієнт при n рівний $1+1=2$ (кожен корінь дав коефіцієнт). Тоді границя послідовності $\dfrac{4}{2}=2$.

Якщо таку оцінку провести важко, то ділимо чисельник дробу на n^1 (на n^2 підкореневі вирази) і скорочуємо дроби

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{4n}{n}+\dfrac{2}{n}}{\sqrt{\dfrac{n^2}{n^2}+\dfrac{n}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}}+\sqrt{\dfrac{n^2}{n^2}-\dfrac{3n}{n^2}+\dfrac{1}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\dfrac{2}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{n^2}}+\sqrt{1-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}}},$$

застосовуємо арифметичні властивості границь та обчислюємо кожну з отриманих границь $\dfrac{4+0}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{1-0+0}}=\dfrac{4}{2}$.

б) Границя $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^6+2n^4-8}-\sqrt{n^6+5}}{n}$ вміщує невизначеність $\{\infty-\infty\}$ у чисельнику. Для розкриття цієї невизначеності множимо чисельник та знаменник дробу на вираз спряжений до різниці коренів $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{n^6+2n^4-8}-\sqrt{n^6-5}\right)\left(\sqrt{n^6+2n^4-8}+\sqrt{n^6-5}\right)}{n\left(\sqrt{n^6+2n^4-8}+\sqrt{n^6-5}\right)}$ і застосовуємо формулу скороченого множення $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{n^6+2n^4-8}\right)^2-\left(\sqrt{n^6-5}\right)^2}{n\left(\sqrt{n^6+2n^4-8}+\sqrt{n^6-5}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^6+2n^4-8-\left(n^6-5\right)}{n\left(\sqrt{n^6+2n^4-8}+\sqrt{n^6-5}\right)}$.

Після розкриття дужок і зведення подібних доданків маємо $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^6+2n^4-8-n^6+5}{n\left(\sqrt{n^6+2n^4-8}+\sqrt{n^6-5}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^4-3}{n\left(\sqrt{n^6+2n^4-8}+\sqrt{n^6-5}\right)}$.

Одержали границю, яка має невизначеність типу $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$. В чисельнику найбільший степінь n – четвертий; в знаменнику найбільший степінь n – четвертий ($n\sqrt{n^6}=n^4$).Так як найбільші степені n в чисельнику і в знаменнику рівні, то визначимо коефіцієнти при n^4: в чисельнику коефіцієнт при n^4 рівний 2; в знаменнику коефіцієнт при n^4 рівний $1+1=2$ (кожний корінь дає коефіцієнт). Тоді границя послідовності $\dfrac{2}{2}=1$.

Розглянемо границі послідовностей, що містять факторіали.

6. Знайти границі послідовностей а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!+(n+2)!}$.

Розв'язування

а) Запишемо початковий дріб як суму дробів

$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{(2n+1)!}{(2n+3)!}+\dfrac{(2n+2)!}{(2n+3)!}\right]$. Розпишемо факторіали у вигляді добутків $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2n\cdot(2n+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2n\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)\cdot(2n+3)}+\dfrac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot(2n+2)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot(2n+2)\cdot(2n+3)}\right]$ і скоротимо дроби, тоді $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{(2n+2)\cdot(2n+3)}+\dfrac{1}{2n+3}\right]=0+0=0$.

б) Спочатку позбавимось від факторіалів. Для цього застосуємо $(n+3)!=(n+2)!\cdot(n+3)$, $(n+4)!=(n+2)!\cdot(n+3)\cdot(n+4)$. Отримаємо $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!\cdot(n+3)\cdot(n+4)-(n+2)!}{(n+2)!\cdot(n+3)+1\cdot 2\cdot \ldots \cdot(n+2)!}$, винесемо за дужки спільні множники $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!\cdot\left[(n+3)\cdot(n+4)-1\right]}{(n+2)!\cdot\left[(n+3)+1\right]}$ і виконаємо скорочення $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)\cdot(n+4)-1}{(n+3)+1}$, розкриємо дужки і зведемо подібні доданки, отримаємо $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+7n-11}{n+4}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\infty$. Отримали ∞, бо степінь многочлена у чисельнику більше степеня многочлена у знаменнику.

В границях у вигляді частки показникових послідовностей застосовується метод ділення чисельника і знаменника на степінь з найбільшою основою.

7. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}+2\cdot 4^n}{4^{n+1}-5}$.

Розв’язування

Використовуючи властивості степенів, винесемо з показників все зайве, залишивши там тільки n. Маємо $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\cdot 3^n+2\cdot 4^n}{4\cdot 4^n-5}$.

Вибираємо степінь з найбільшою основою – 4^n. Для розкриття невизначеності $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$ ділимо почленно чисельник і знаменник на 4^n і застосовуємо арифметичні властивості границь, тобто

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n+2}{4-\frac{5}{4^n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\lim\limits_{n\to\infty}2}{\lim\limits_{n\to\infty}4-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{4^n}}=\frac{3\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n+2}{4-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{4^n}}.$$ Оскільки $\left(\frac{3}{4}\right)^n$ є нескінченно спадною геометричною прогресією, то вона прямує до нуля. До нуля прямує і константа, поділена на нескінченно велику прогресію $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{4^n}=0$. Тоді маємо $\frac{3\cdot 0+2}{4-0}=\frac{1}{2}$.

Щоб знайти границю знакозмінної послідовності, спочатку слід знайти границю послідовності, яка складена з модулів елементів. Знак модуля знищує множник, що забезпечує знакозмінність.

8. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2-n)}{n^2+3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2+n^3)}{n^2+3}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}2n^2}{3n^2+4}$.

Розв'язування

а) Так як $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-n}{n^2+3}=0$, то і $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2-n)}{n^2+3}=0$, бо зміна знаку для 0 нічого не змінить.

б) Так як $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+n^3}{n^2+3}=\infty$, то і $\frac{(-1)^{n+1}(2+n^3)}{n^2+3}$, прямує то до $-\infty$, то до $+\infty$.

в) Так як $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2}{3n^2+4}=\frac{2}{3}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}2n^2}{3n^2+4}$ не існує, бо послідовність прямує то до $\frac{2}{3}$, то до $-\frac{2}{3}$.

Завдання для самостійного розв'язування

Обчислити границі послідовностей.

1. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1-n)^2+(1+n)^2}{(1-n)^2-(1+n)^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{3n^2-2}-\frac{n^2}{3n+2}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!-(n+1)!}{(n+2)!+(n+1)!}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sqrt{n^2+1}-n\sqrt{n^2-1}\right)$.

2. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^2}{(n-3)^3-(n+3)^3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^3}{n^2-3}-\dfrac{2n^2+1}{n+2}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}+7^{n+1}}{7^n-3^{n+2}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n+2)}-\sqrt{n^2-2n+3}\right)$.

3. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+2n)^3-8n^3}{(1+2n)^2+4n^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{2n+1}-\dfrac{4n^2+1}{8n+1}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)!-(n+1)!}{(n+2)!}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n+1)}-\sqrt{n^2-n+2}\right)$.

4. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-2)^3}{n^2+2n-3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^3+1}{n^2-4}-\dfrac{2n^2+1}{n-2}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{n+1}+3^n}{2\cdot 3^{n-1}+5^n}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+2)(n+1)}-\sqrt{(n-1)(n+3)}\right)$.

5. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2-(n-1)^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3-1}{2n^2-1}-\dfrac{2n^2+1}{n+3}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)!+(2n+1)!}{(2n+2)!-(2n+1)!}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n-2}-\sqrt{n^2-6}\right)$.

6. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-3)^2-(n-2)^2}{(n-1)^2-(n+1)^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^3+1}{2n^2-1}-\dfrac{3n^2+1}{3n-1}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7^n+10\cdot 9^{n+1}}{5\cdot 10^{n-1}+7^{n+2}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-3}\right)$.

7. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-3)^2+(n+3)^2}{(n-3)^2-(n+3)^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3-1}{5n^2-2}-\dfrac{n^2}{5n+2}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)!-(n+1)!}{(n+2)!+(n+1)!}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n+5)}-n\right)$.

8. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^3}{n^2-1}-\dfrac{4n^2}{2n+1}\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^2-(n+1)^2}{n^2+n+1}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6^n+2^{n+2}}{5\cdot 3^{n-1}+6^{n+2}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^4+3}-\sqrt{n^4+2}\right)$.

9. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^2-(n-2)^2}{(n+3)^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n+2}-\dfrac{n^3+2}{n^2+1}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-2}\right)$.

10. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n+2}-\dfrac{n^3+2}{n^2+1}\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2-(2n-1)^2}{n^2-n-1}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{2n+3}+3^{n+2}}{4^{n+2}+7}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sqrt{n}-\sqrt{n(n+1)(n+2)}\right)$.

11. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-(n-2)^3}{(n+2)^2-n^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3}{2n^2-3}-\dfrac{n^2}{2n+3}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!-(n+2)!}{(n+3)!+(n+1)!}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n-2}-\sqrt{n+4}\right)$.

12. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-(n-2)^2}{(n+2)^3-n^3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3}{2n^2-4}-\dfrac{n^2}{2n+1}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{n+1}+4^n}{10\cdot 2^{n-1}+5^n}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{n+1}\right)$.

13. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{2n-1}-\dfrac{4n^2}{8n+1}\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)^3-n^3}{(2n+1)^2-2n^2-1}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)!-(2n+1)!}{(2n+2)!+(2n+1)!}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n-1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)$.

14. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n^4}{2n^2-3}-n^2\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)^2-n^2}{(2n+1)^3-2n^3-1}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7^n+2^{n+2}}{5\cdot 2^{n+1}+7^{n+2}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n+2)}-n\right)$.

15. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^3}{n^2-3}-2n\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2-n)^3}{(n+1)^2-(n-1)^2}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)!-(n+1)!}{(n+2)!}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n+1)}-\sqrt{n^2+1}\right)$.

16. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3}{n^2-1}-\dfrac{n^2}{n+1}\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2+n)^2}{(n+1)^3-(n-1)^3}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}-8^n}{8^{n+2}+3^n}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-2n-5}\right)$.

Лабораторне заняття 4.02

ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

Теоретичні відомості

Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі $(a;+\infty)$. Число A називають границею функції в «плюс нескінченно віддаленій» точці, тобто $A=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, якщо для довільного числа $\varepsilon>0$, існує число $\delta(\varepsilon)\geq a$ таке, що для всіх x, які задовольняють умові $\delta<x<+\infty$, виконується нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Геометрично, це означає, що графік функції $f(x)$ для точок $x\in(\delta;+\infty)$ міститься в півсмузі, обмеженій прямими $y=A-\varepsilon$, $y=A+\varepsilon$, $x=\delta$ (рис. 2), які лежать справа від прямої $x=\delta$.

Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі $(-\infty;-b)$. Число A називають границею функції в «мінус нескінченно віддаленій» точці, тобто $A=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, якщо для довільного числа $\varepsilon>0$ існує число $\delta(\varepsilon)\leq -b$ таке, що для всіх x, які задовольняють умові $-\infty<x<-\delta$, виконується нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Геометрично це означає, що графік функції $f(x)$ для точок $x\in(-\infty;\delta)$ міститься в півсмузі, обмеженій прямими $y=A-\varepsilon$, $y=A+\varepsilon$, $x=\delta$ (рис. 3), які лежать зліва від прямої $x=\delta$.

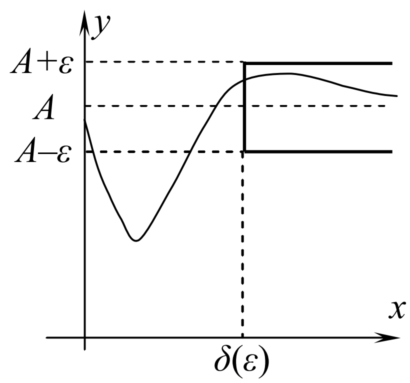

Рис. 2

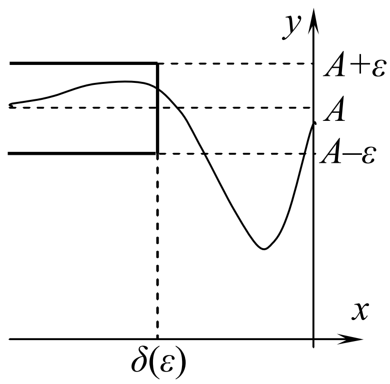

Рис. 3

Число A називають границею функції в «нескінченно віддаленій» точці, тобто $A=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, якщо для довільного числа $\varepsilon>0$ існує таке число $\delta(\varepsilon)\geq 0$, що при $|x|>\delta$ виконується нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0. Число A називають границею функції в точці x_0, тобто $A=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, якщо для довільного числа $\varepsilon>0$ існує число $\delta(\varepsilon)>0$ таке, що для всіх x, які задовольняють умові $0<|x-x_0|<\delta$, виконується нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Геометрично, це означає, що графік функції $f(x)$ для точок $x\in(x_0-\delta;x_0+\delta)$ $(x\neq x_0)$ потрапляє всередину прямокутника, обмеженого прямими $y=A-\varepsilon$, $y=A+\varepsilon$, $x=x_0-\delta$; $x=x_0+\delta$ (рис. 4).

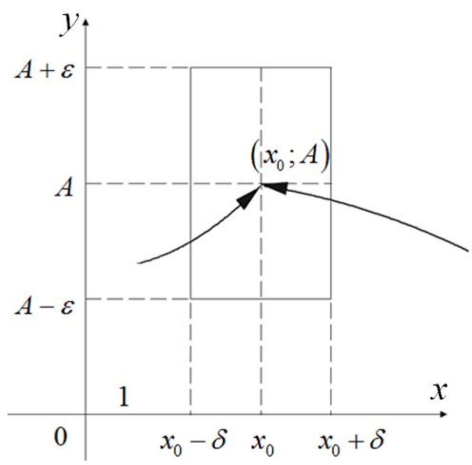

Рис. 4

Що ж до точки $(x_0;f(x_0))$ (якщо в точці x_0 функція $f(x)$ визначена), то вона може належати або не належати цьому прямокутнику.

Проаналізуємо принципові відмінності границі послідовності від границі функції.

У границі послідовності $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ «динамічна» змінна n може прямувати тільки до плюс нескінченності – в бік збільшення натуральних номерів. У границі функції $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\to+\infty\\ x\to-\infty\\ x\to\infty}} f(x)$ аргумент x може прямувати до плюс або мінус нескінченності або до довільного дійсного числа.

Послідовність дискретна (перервна), тобто складається з окремих ізольованих елементів. Унаслідок дискретності в границях послідовностей зустрічаються свої фірмові речі, такі як факторіали, «мигалки» (чергування плюс-мінус), прогресії і т.п.

Для аргументу ж функції характерна безперервність, тобто x плавно прямує до того чи іншого значення. І, відповідно, значення функції будуть так само неперервно наближатися до своєї границі.

Функції в точці чи на нескінченності (як і послідовності) теж можуть бути

- обмеженими (границя функції рівна скінченному числу (не нулю)),
- безмежно малими (границя функції рівна нулю),
- безмежно великими (границя функції прямує до нескінченності),
- границя функції може і не існувати.

При знаходженні границь функцій на нескінченності застосовують такі ж методи, як і при знаходженні границь послідовностей. Тому спочатку просто намагаємося підставити нескінченність у функцію і застосовуємо арифметичні властивості границь. При цьому ви повинні розуміти і відразу розв'язувати найпростіші границі, наприклад такі як: $\lim_{x\to\infty}\left(x^2-2x-3\right)=\infty$,

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, $\lim_{x\to\infty}\frac{1000000}{x}=0$, $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-99}=0$, $\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^3}=0$, $\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^4+9}=0$,

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+7}}=0$, $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^x=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^x=0$, $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x=0$,

$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x=\infty$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{4^x}=0$, $\lim_{x\to+\infty}\ln x=\infty$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}=0$.

Самостійно проаналізуйте ці найпростіші границі. Якщо десь є сумніви, то переконайтесь за допомогою калькулятора. Так, у випадку, якщо $x\to+\infty$, побудуйте послідовність $x=10$, $x=100$, $x=1000$ і прослідкуйте, куди прямує послідовність із відповідних значень функції. Строго кажучи, такий підхід з побудовою послідовностей з декількох чисел не є коректним, але для розуміння найпростіших прикладів цілком підходе.

Знайти границю функції у точці $\lim_{x\to1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$ означає встановити до чого прямує функція $f\left(x\right)=\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$ при x прямує до одиниці. Що означає вираз «x прямує до одиниці»? Побудуємо послідовність: спочатку $x=1{,}1$, потім $x=1{,}01$, $x=1{,}001$, $x=1{,}0001\ldots$ Тобто вираз «x прямує до одиниці» слід розуміти так – x послідовно приймає значення, які нескінченно близько наближаються до одиниці і практично з нею збігаються.

Як розв'язати розглянутий приклад? Виходячи з сказаного, потрібно просто підставити одиницю в функцію, що стоїть під знаком границі: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x-5}{x+1}=\dfrac{2-3-5}{1+1}=-3$.

Тобто спочатку просто намагаємося підставити число, до якого прямує аргумент функції під знаком границі, у функцію. Іноді це вже дасть відповідь.

Ви також повинні розуміти і відразу розв'язувати найпростіші границі функції в точці, наприклад такі як: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$, $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\ln x}=0$.

Самостійно проаналізуйте ці найпростіші границі. Якщо десь є сумніви, то побудуйте послідовність $x=0{,}1$, $x=0{,}01$, $x=0{,}001$ і проаналізуйте поведінку послідовності відповідних значень функції.

На практиці зустрічаються границі комбінацій (сума, частка, тощо) простіших функцій, тому на основі застосування арифметичних властивостей границь отримуємо відповідні комбінації границь функцій. Більшість з них є визначеністю (має певний результат). В позначеннях A – скінчена границя, 0 – границя безмежно малої функції, ∞ – границя безмежно великої функції наведемо приклади визначеностей: $\left\{\dfrac{A}{0}\right\}=\infty$; $\left\{\dfrac{A}{\infty}\right\}=0$, $\left\{\dfrac{0}{A}\right\}=0$, $\left\{\dfrac{\infty}{A}\right\}=\infty$, $\left\{\dfrac{\infty}{0}\right\}=\infty$, $\left\{\dfrac{0}{\infty}\right\}=0$, $\{0\cdot A\}=0$, $\{\infty\cdot A\}=\infty$, $\{\infty\cdot\infty\}=\infty$, $\{0\cdot 0\}=0$, $\{\infty+\infty\}=\infty$, $\{0+0\}=0$, $\{0-0\}=0$.

Для їх осмислення досить замість 0 взяти число близьке до нуля ($0{,}01$ чи інше), в ролі ∞ взяти велике число (1000 чи інше), як A підійде будь-яке стале число (2, 3 чи інше) відповідного порядку відносно 0 і ∞, і поекспериментувати.

Зустрічаються і невизначеності, які потребують розкриття. Дві невизначеності видів $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$ і $\{\infty-\infty\}$ вже були розглянуті при розгляді границь на нескінченності. Границі функції в точці можуть бути невизниченостями видів $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$ і $\{\infty-\infty\}$. Розглянемо приклади.

Приклади знаходження границь функцій

Приклади знаходження границь функцій на нескінченності

Методи знаходження границь послідовностей застосовні і для знаходження границь функцій на нескінченності.

1. Знайти границі функцій а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+x-1}{4+3x-8x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3-x^2+1}{5x^2+6-x^4}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-x^2+6}{5x^2-3x+2}$.

Розв'язування

Границі у вигляді частки двох многочленів розв'язують діленням чисельника і знаменника дробу на найбільший степінь x.

а) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x^2}+\frac{3x}{x^2}-\frac{8x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{7+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x}-8}=\frac{7+0-0}{0+0-8}=-\frac{7}{8}.$$

б) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{6x^3}{x^4}-\frac{x^2}{x^4}+\frac{1}{x^4}}{\frac{5x^2}{x^4}+\frac{6}{x^4}-\frac{x^4}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{6}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{\frac{5}{x^2}+\frac{6}{x^4}-1}=\frac{0-0+0}{0+0-1}=0.$$

в) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^3}{x^3}-\frac{x^2}{x^3}+\frac{6}{x^3}}{\frac{5x^2}{x^3}-\frac{3x}{x^3}+\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{1}{x}+\frac{6}{x^3}}{\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}=\frac{4-0+0}{0-0+0}=\frac{4}{0}=\infty.$$

Границі у вигляді частки двох многочленів можна розв'язувати швидше, так як многочлен більшого степеня (визначається за найбільшим степенем його членів) прямує до нескінченості швидше. Тому, якщо степені многочленів чисельника і знаменника рівні, то границя частки рівна відношенню коефіцієнтів при x у найбільшому степені чисельника і знаменника $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+x-1}{4+3x-8x^2}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=-\dfrac{7}{8}$. Якщо степінь многочлена чисельника менше степеня многочлена знаменника, то границя частки рівна нулю $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3-x^2+1}{5x^2+6-x^4}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=0$. Якщо степінь многочлена чисельника більше степеня многочлена знаменника, то границя частки є нескінченністю $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-x^2+6}{5x^2-3x+2}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\infty$.

2. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x-1}\right)$.

Розв'язування

Обидва дроби є невизначеностями виду $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ із степенем многочлена чисельника більше степеня многочлена знаменника, тому $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x-1}\right)$ є невизначеністю виду $\{\infty-\infty\}$.

Зведемо дроби до спільного знаменника і і зведемо подібні доданки $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3\left(2x-1\right)-x^2\left(2x^2-1\right)}{\left(2x^2-1\right)\left(2x-1\right)}==\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-x^3}{4x^3-2x^2-2x+1}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

Ця невизначенність рівна $-\frac{1}{4}$, бо степені многочленів у чисельнику і знаменнику рівні.

3. Знайти границі а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x-\sqrt{x^3+4x^2}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2-x}\right)$.

Розв'язування

Маємо невизначеності з коренями виду $\{\infty-\infty\}$. Для розкриття цих невизначеностей помножимо і поділимо на відповідні спряжені вирази.

а) $\{\infty-\infty\}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\left\{\frac{1}{\infty}\right\}=0$;

б) $\{\infty-\infty\}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(2x-\sqrt{x^3+4x^2}\right)\left(2x+\sqrt{x^3+4x^2}\right)}{2x+\sqrt{x^3+4x^2}}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2-x^3-4x^2}{2x+\sqrt{x^3+4x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^3}{2x+\sqrt{x^3+4x^2}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\infty$, бо степінь многочлена чисельника більше степеня многочлена знаменника;

в) $\{\infty-\infty\}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(2x-\sqrt{4x^2-x}\right)\left(2x+\sqrt{4x^2-x}\right)}{2x+\sqrt{4x^2-x}}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-4x^2+x}{2x+\sqrt{4x^2-x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{2x+\sqrt{4x^2-x}}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\dfrac{1}{4}$, бо найбільші степені x в чисельнику і в знаменнику рівні, а коефіцієнти при x^1 в чисельнику – це 1, в знаменнику – це $2+\sqrt{4}=2+2=4$.

Якщо таку оцінку провести важко, то ділимо чисельник і знаменник дробу на x^1 (підкореневий вираз ділимо на x^2), скорочуємо дроби і обчислюємо кожну з отриманих границь $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2+\sqrt{4-\dfrac{1}{x}}}=\dfrac{1}{4}$.

В границях з a^x слід розрізняти $+\infty$ і $-\infty$ та враховувати поведінку показникової функції (для $a>1$ $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$ і $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0$, для $0<a<1$ $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=0$ і $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=+\infty$).

4. Знайти границі а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{3^{-x}}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(7-5\cdot 2^x\right)$; в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x+2}{5\cdot 3^x}$.

Розв'язування

а) $\dfrac{+\infty}{0}=+\infty$ або $\lim\limits_{x\to+\infty}x3^x=+\infty\cdot(+\infty)=+\infty$;

б) $7-5\cdot 0=7$;

в) при підстановці нескінченості замість x маємо $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x+2}{5\cdot 3^x}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$, для розкриття невизначеності $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$ ділимо почленно чисельник і знаменник на 3^x і застосовуємо арифметичні властивості границь $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{3^x}{3^x}+\dfrac{2}{3^x}}{\dfrac{5\cdot 3^x}{3^x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{3^x}}{5}=\dfrac{1}{5}$.

Приклади знаходження границь функцій у точках

Наступні приклади є границями функцій в точках, де функція є відношенням двох многочленів.

5. Знайти границі функції у відповідних точках а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{6x^2+x-1}{x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{6x^2+x-1}{x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{6x^2+x-1}{x+1}$.

Розв'язування

а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{6x^2+x-1}{x+1}=\dfrac{6(-2)^2+(-2)-1}{-2+1}=-21$;

б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{6x^2+x-1}{x+1}=\dfrac{6(-1)^2+(-1)-1}{-1+1}=\dfrac{4}{0}=\infty$;

в) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{6x^2+x-1}{x+1}=\dfrac{6\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)-1}{-\frac{1}{2}+1}=\dfrac{0}{\frac{1}{2}}=0$.

Границя функції в точці, де функція є відношенням двох многочленів, може бути невизначеністю виду $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Розглянемо приклади розкриття такої невизначенності.

6. Знайти границі функцій у відповідних точках а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-3x-5}{x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{8-2x^2}{x^2+4x-12}$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x-2}$.

Розв'язування

а) При підстановці -1 в дріб маємо $\dfrac{2\cdot(-1)^2-3\cdot(-1)-5}{(-1)+1}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$.

Для розкриття такої невизначеності потрібно розкласти чисельник на множники. Для цього знайдемо корені квадратного рівняння $2x^2-3x-5=0$: $D=9-4\cdot 2\cdot(-5)=49$, $x_1=\dfrac{3+7}{2\cdot 2}=\dfrac{10}{4}=\dfrac{5}{2}$, $x_2=\dfrac{3-7}{2\cdot 2}=\dfrac{-4}{4}=-1$. Отже чисельник можна записати у вигляді $2x^2-3x-5=2\left(x-\dfrac{5}{2}\right)(x-(-1))$ або $2x^2-3x-5=(2x-5)(x+1)$.

Тоді маємо $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{(2x-5)(x+1)}{x+1}$. Далі скорочуємо дріб на $(x+1)$ і маємо $\lim\limits_{x\to -1}(2x-5)=2\cdot(-1)-5=-7$.

б) При підстановці 2 в дріб маємо $\frac{8-2\cdot 2^2}{2^2+4\cdot 2-12}=\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Для розкриття невизначеності розкладемо многочлени на множники. В чисельнику маємо $8-2x^2=2\left(4-x^2\right)=2(2-x)(2+x)$. Так як коренями квадратного рівняння $x^2+4x-12=0$ є $x_1=2$, $x_2=-6$, то маємо $x^2+4x-12=(x-2)(x+6)$. Тоді записуємо $\lim\limits_{x\to 2}\frac{8-2x^2}{x^2+4x-12}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{2(2-x)(2+x)}{(x-2)(x+6)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{-2(x-2)(2+x)}{(x-2)(x+6)}$. Далі скорочуємо дріб на $(x-2)$ і маємо $\lim\limits_{x\to 2}\frac{-2(2+x)}{x+6}=\frac{-2\cdot 4}{8}=-1$.

в) При підстановці -1 в дріб маємо $\lim\limits_{x\to -1}\frac{(-1)^2+2\cdot(-1)+1}{(-1)^2-(-1)-2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Для розкриття невизначеності розкладемо многочлени на множники. В чисельнику маємо $x^2+2x+1=(x+1)^2$. Так як коренями квадратного рівняння $x^2-x-2=0$ є $x_1=-1$, $x_2=2$, то в знаменнику маємо $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$. Тоді отримуємо $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+2x+1}{x^2-x-2}= =\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-2)}$. Далі скорочуємо дріб на $(x+1)$ і маємо $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+1}{x-2}=\frac{0}{-3}=0$.

7. Знайти границі функцій у відповідних точках а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+4x-4}{x^3-x^2-x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^3+x^2-9x-9}$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-3x-2}{x^2-2x-3}$.

Розв'язування

а) При підстановці 1 в дріб маємо невизначеність $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Для розкриття невизначеності потрібно розкласти многочлени на множники. Згрупуємо доданки в чисельнику і знаменнику і винесемо спільні множники у вигляді $(x-1)$ за дужки

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2(x-1)+4(x-1)}{x^2(x-1)-(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+4)}{(x-1)(x^2-1)}$. Після скорочення на $(x-1)$ позбудемося невизначеності $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4}{x^2-1}$, і при підстановці граничного значення остаточно маємо $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1^2+4}{1^2-1}=\dfrac{5}{0}=\infty$.

б) При підстановці -3 в дріб маємо невизначеність $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Так як чисельник і знаменник дробу перетворюються на нуль при $x\to -3$, то і чисельник і знаменник мають множник $(x+3)$. Виділимо у чисельнику і знаменнику множник $(x+3)$ і знайдемо інші множники. В чисельнику згрупуємо доданки і винесемо спільний множник $(x+3)$ за дужки $x^2(x+3)-(x+3)=(x+3)(x^2-1)$, а знаменник поділимо кутником на $(x+3)$

$$\begin{array}{r|l}
-\,x^3+x^2-9x-9 & x+3 \\ \cline{2-2}
x^3+3x^2 & x^2-2x-3 \\ \cline{1-1}
-\,-2x^2-9x-9 & \\
-2x^2-6x & \\ \cline{1-1}
-\,-3x-9 & \\
-3x-9 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Отримуємо $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x+3)(x^2-1)}{(x+3)(x^2-2x-3)}$. Після скорочення на $(x+3)$ позбудемося невизначеності і підставимо граничне значення $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-1}{x^2-2x-3}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(-3)^2-1}{(-3)^2-2\cdot(-3)-3}=\dfrac{8}{12}=\dfrac{2}{3}$.

в) При підстановці -1 в дріб маємо невизначеність $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Для розкриття невизначеності $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ виділимо у чисельнику і знаменнику множник $(x+1)$. Виконаємо діленням кутником чисельника на $(x+1)$

$$\begin{array}{r|l} x^3-3x-2 & x+1 \\ \cline{2-2} -\underline{x^3+x^2\quad} & x^2-x-2 \\ -x^2-3x-2 & \\ -\underline{-x^2-x\quad} & \\ -2x-2 & \\ -\underline{-2x-2} & \\ 0 & \end{array}$$

Так як один з коренів квадратного рівняння $x^2-2x-3=0$ відомий ($x_1=-1$), то інший корінь знаходиться легко, так як добуток коренів зведеного квадратного рівняння за теоремою Вієта дорівнює вільному члену цього рівняння $x_1\cdot x_2=-3$, тоді $x_2=3$ і в знаменнику маємо $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$. Отримуємо $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)(x^2-x-2)}{(x+1)(x-3)}$. Після скорочення на $(x+1)$ позбудемося невизначеності $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x-2}{x-3}$, і при підстановці граничного значення остаточно маємо $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(-1)^2-(-1)-2}{-1-3}=\dfrac{0}{-4}=0$.

8. Знайти границі функцій у відповідних точках

а) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+x-2}{\sqrt{x+6}-2}$.

Розв'язування

а) Підставимо 3 у функцію, маємо $\dfrac{\sqrt{3+6}-\sqrt{10\cdot3-21}}{5\cdot3-15}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$.

Спочатку позбудемось різниці коренів, що дає 0 у чисельнику. Для цього чисельник і знаменник помножимо на спряжений вираз до різниці коренів $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\left(\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}\right)\cdot\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21}\right)}{(5x-15)\cdot\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21}\right)}$, застосуємо формулу скороченого множення $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$$\lim_{x\to3}\frac{\left(\sqrt{x+6}\right)^2-\left(\sqrt{10x-21}\right)^2}{(5x-15)\cdot\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21}\right)}=\lim_{x\to3}\frac{x+6-(10x-21)}{(5x-15)\cdot\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21}\right)}.$$

Ми не позбавились коренів, проте суму коренів можна перетворити в число, підставивши 3, $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+6-10x+21}{(5x-15)\cdot\left(\sqrt{9}+\sqrt{9}\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot 6}$.

Невизначеність $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ не зникла (це видно при підстановці 3 у функцію), для усунення невизначеності розкладемо чисельник і знаменник на множники $\lim\limits_{x\to 3}\frac{-9(x-3)}{5(x-3)\cdot 6}$ і скоротимо на причину невизначеності – дужку $(x-3)$, маємо $\lim\limits_{x\to 3}\frac{-9}{30}=-\frac{3}{10}$.

б) Підставимо -2 у функцію, маємо $\frac{(-2)^2+(-2)-2}{\sqrt{-2+6}-2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Спочатку позбудемось різниці у знаменнику, що дає 0. Для цього чисельник і знаменник помножимо на вираз $\left(\sqrt{x+6}+2\right)$, маємо $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{\sqrt{x+6}-2}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{\left(x^2+x-2\right)\cdot\left(\sqrt{x+6}+2\right)}{\left(\sqrt{x+6}-2\right)\cdot\left(\sqrt{x+6}+2\right)}$, застосуємо до знаменника формулу різниці квадратів і зведемо подібні доданки $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\left(x^2+x-2\right)\cdot\left(\sqrt{x+6}+2\right)}{\left(\sqrt{x+6}\right)^2-2^2}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{\left(x^2+x-2\right)\cdot\left(\sqrt{x+6}+2\right)}{x+2}$. Ми не позбавились коренів, проте дужку з коренем можна перетворити в число, підставивши -2, $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\left(x^2+x-2\right)\cdot(2+2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{4\left(x^2+x-2\right)}{x+2}$.

Невизначеність $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ не зникла (це видно при підстановці -2 у функцію), для усунення невизначеності розкладемо дужку в чисельнику на множники. Так як коренями квадратного рівняння $x^2+x-2=0$ є $x_1=1$, $x_2=-2$, то в маємо $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$.

Тоді отримуємо $\lim\limits_{x\to -2}\frac{4(x-1)(x+2)}{x+2}$, скорочуємо на причину невизначеності – дужку $(x+2)$, маємо $\lim\limits_{x\to -2}4(x-1)=-12$.

Границя функції в точці може бути також невизначеністю

$\{\infty - \infty\}$.

9. Знайти границю функції в точці $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{1}{x^2-16}\right)$.

Розв'язування

Для розкриття невизначеності $\{\infty - \infty\}$ зведемо дроби до спільного знаменника $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x+4-1}{x^2-16}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x+3}{x^2-16}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\dfrac{7}{0}=\infty$.

Завдання для самостійного розв'язування

Обчислити границі функцій у відповідних точках.

1. 1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2+2x-5}{x^2-3x+2}$ а) $x_0=-1$, б) $x_0=1$; 2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-6x+8}$.
2. 1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2+x-3}{x^2-2x+1}$ а) $x_0=-1$, б) $x_0=1$; 2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x}}{x-4}$.
3. 1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2-5x+2}{x^2+x-2}$ а) $x_0=3$, б) $x_0=1$; 2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.
4. 1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2+5x-6}$ а) $x_0=3$, б) $x_0=1$; 2. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{1-x}-2}{4-\sqrt{1-5x}}$.
5. 1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{5x-x^2-4}{x^2-2x-8}$ а) $x_0=3$, б) $x_0=4$; 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1}$.
6. 1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6}$ а) $x_0=1$, б) $x_0=3$; 2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{5+2x}-3}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$.
7. 1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2-5x-2}{2x^2-x-6}$ а) $x_0=3$, б) $x_0=2$; 2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$.
8. 1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2-x-10}{x^2+5x+6}$ а) $x_0=1$, б) $x_0=-2$; 2. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.
9. 1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2-4x+3}$ а) $x_0=-1$, б) $x_0=1$; 2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x-3}-1}$.
10. 1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2+5x-3}{3x^2+11x+6}$ а) $x_0=1$, б) $x_0=-3$; 2. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{1-4x}-3}$.
11. 1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2+15x+25}{5-4x-x^2}$ а) $x_0=-3$, б) $x_0=-5$; 2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{x^2-9}$.

12. 1. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2-2x-8}{2x^2+5x+2}$ а) $x_0=1$, б) $x_0=-2$; 2. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+1}{\sqrt{3x+7}-2}$.

13. 1. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{6-x-x^2}{3x^2+8x-3}$ при а) $x_0=1$, б) $x_0=-3$; 2. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x-3}-1}$.

14. 1. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2-x-2}{6x^2+x-5}$ при а) $x_0=2$, б) $x_0=-1$; 2. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-25}{\sqrt{2x-1}-3}$.

15. 1. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2+x-2}{4x^2-x-3}$ при а) $x_0=-2$, б) $x_0=1$; 2. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$.

16. 1. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2-7x+10}{x^2-10x+25}$ при а) $x_0=3$, б) $x_0=5$; 2. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{3-\sqrt{12-x}}$.

17. 1. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2-x-6}{x^2-6x+9}$ при а) $x_0=2$, б) $x_0=3$; 2. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$.

18. 1. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$ при а) $x_0=1$, б) $x_0=2$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$.

19. 1. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{2x^2-7x+5}{x^2-2x+1}$ при а) $x_0=-1$, б) $x_0=1$; 2. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{\sqrt{x-3}-1}$.

20. 1. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2+2x-8}{x^2-3x+2}$ при а) $x_0=-1$, б) $x_0=2$; 2. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{1+3x}-16}{x^2-5x}$.

21. 1. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{7-6x-x^2}{x^2-5x+4}$ при а) $x_0=2$, б) $x_0=1$; 2. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$.

22. 1. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^3+8}{x^2+x-2}$ при а) $x_0=2$, б) $x_0=-2$; 2. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{7-x}-3}{4-\sqrt{2-7x}}$.

Лабораторне заняття 4.03

ВАЖЛИВІ ГРАНИЦІ

Теоретичні відомості

Розглянемо границю $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}$. Спробуємо підставити нуль в функцію, отримаємо невизначеність $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Підставимо число близьке до нуля, наприклад $\alpha=0,01$, отримаємо

$\frac{\sin 0,01}{0,01}=0,999983...$, якщо взяти $\alpha=0,001$, то отримаємо $\frac{\sin 0,001}{0,001}=0,99999983...$. В теорії доводиться, що

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1.$$

Цей математичний факт має назву «перша важлива границя». В якості параметра α може бути і змінна, і вираз, але важливо, щоб вони прямували до нуля. Наприклад, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=1$, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2-x\right)}{x^2-x}=1$, $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{\sin\left(x^2-x\right)}=1$.

Наслідками першої важливої границі є

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\alpha}=1,\ \lim_{\alpha\to 0}\frac{\arcsin\alpha}{\alpha}=1,\ \lim_{\alpha\to 0}\frac{\mathrm{arctg}\alpha}{\alpha}=1.$$

Дійсно, $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha\cdot\cos\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\cos\alpha}=1\cdot\frac{1}{1}=1$. У випадку з аркфункціями застосуємо перехід до іншої змінної. Так, у випадку арксинуса $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\arcsin\alpha}{\alpha}\begin{bmatrix}\arcsin\alpha=\beta\\ \alpha=\sin\beta\\ \alpha\to 0\Rightarrow\beta\to 0\end{bmatrix}=\lim_{\beta\to 0}\frac{\beta}{\sin\beta}=1$, у випадку арктангенса $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\mathrm{arctg}\alpha}{\alpha}\begin{bmatrix}\mathrm{arctg}\alpha=\beta\\ \alpha=\mathrm{tg}\beta\\ \alpha\to 0\Rightarrow\beta\to 0\end{bmatrix}=\lim_{\beta\to 0}\frac{\beta}{\mathrm{tg}\beta}=1$.

На практиці зручно застосовувати першу важливу границю та її наслідки у вигляді

$$\sin\alpha\sim\alpha \text{ при } \alpha\to 0$$

(~ означає еквівалентні, тобто можна замінити). Аналогічно

$$\arcsin\alpha\sim\alpha \text{ при } \alpha\to 0,$$

$$\mathrm{tg}\alpha\sim\alpha \text{ при } \alpha\to 0,$$

$$\mathrm{arctg}\alpha\sim\alpha \text{ при } \alpha\to 0.$$

Розглянемо границю $\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}$. Підстановка нескінченості замість α дає невизначеність ще одного виду $\left\{1^{\infty}\right\}$. Спробуємо підставити 1000 замість α, отримаємо $\left(1+\dfrac{1}{1000}\right)^{1000}=2,7169...$, при $\alpha=100000$ отримаємо $\left(1+\dfrac{1}{100000}\right)^{100000}=2,718268....$ В теорії доводиться, що

$$\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}=e,$$

де $e=2,718281828$ – ірраціональне число.

Цей математичний факт має назву «друга важлива границя». В якості параметра α може бути і змінна, і вираз, але важливо, щоб вони прямували до нескінченності $\lim\limits_{\square\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\square}\right)^{\square}=e$. Наприклад, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{3x}=e$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x+2}\right)^{3x+2}=e$.

Друга чудова границя має модифікацію

$$\lim_{\alpha\to 0}\left(1+\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}=e.$$

В якості параметра α може бути і змінна, і вираз, але важливо, щоб він прямував до нуля. Наприклад, $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+2x\right)^{\frac{1}{2x}}=e$, $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{2x}{3}\right)^{\frac{3}{2x}}=e$.

Друга важлива границя розкриває невизначеність $\left\{1^{\infty}\right\}$.

При обчисленні границі функції, що містить змінну в показнику степеня, переходять до границі в показнику степеня:

- якщо існує $\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)$, то при сталому значенні b має місце рівність

$$\lim_{x\to a}b^{f(x)}=b^{\lim\limits_{x\to a}f(x)};$$

- якщо існує $\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)$ і $\lim\limits_{x\to a}\varphi\left(x\right)$, причому $\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)>0$, то має місце рівність

$$\lim_{x\to a}f\left(x\right)^{\varphi(x)}=\left[\lim_{x\to a}f\left(x\right)\right]^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)};$$

при чому у цих рівностях a може позначати і число, і один із символів ∞, $+\infty$, $-\infty$.

Приклади застосувань важливих границь

Розглянемо приклади з першою важливою границею.

1. Знайти границі функцій а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2}{\sin^2\dfrac{x}{2}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg} 2x}{2x^2}$.

Розв'язування

Якщо маємо невизначеність $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ (аналог цієї невизначенності є невизначеність $\{0\cdot\infty\}$) і синус (тангенс, арксинус, арктангенс) під знаком $\lim$, то це має наштовхнути на думку застосування першої важливої границі.

а) Маємо $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{3x}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$, організуємо штучно першу важливу границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{3\cdot 7x\cdot\dfrac{1}{7}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7\sin 7x}{3\cdot 7x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7}{3}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{7x}=\dfrac{7}{3}\cdot 1=\dfrac{7}{3}$.

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$, організуємо штучно дві перші важливі границі $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cdot 2x\cdot 5x}{\sin 5x\cdot 2x\cdot 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sin 5x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{5x}=1\cdot 1\cdot\dfrac{2}{5}=\dfrac{2}{5}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2}{\sin^2\dfrac{x}{2}}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$, представимо степені у вигляді добутків $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x\cdot x}{\sin\dfrac{x}{2}\cdot\sin\dfrac{x}{2}}$, організуємо штучно перші важливі границі

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{x}{2}\cdot 2\cdot 2}{\sin\dfrac{x}{2}\cdot\sin\dfrac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot 2\cdot 2}{1}=1\cdot 1\cdot 20=20.$$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{tg}2x}{2x^2}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$, організуємо штучно наслідок першої важливої границі $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{tg}2x}{2x\cdot x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{tg}2x}{2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=1\cdot\infty=\infty$.

Розглянуті приклади розв'язуються швидше, якщо замінювати функції $\sin\alpha$, $\text{tg}\alpha$, $\arcsin\alpha$, $\text{arctg}\alpha$ на їхні аргументи при $\alpha\to 0$. Так, розв'язування розглянутих прикладів запишуться наступним чином: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{3x}=\dfrac{7}{3}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{5x}=\dfrac{2}{5}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2}{\sin^2\dfrac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2}{\dfrac{x^2}{4}}=20$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{tg}2x}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$.

Розглянемо складніші приклади з першою важливою границею.

2. Знайти границі а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\text{tg}5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{ctg}x\left(1-\cos^2 3x\right)}{x^2+5x}$.

Розв'язування

а) При підстановці нуля замість x отримаємо невизначеність $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\text{tg}5x}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Застосуємо тригонометричну формулу $1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$. Отримаємо $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 2x}{\text{tg}5x}$. Замінимо функції $\sin 2x$, $\text{tg}5x$ на їхні аргументи, так як останні прямують до нуля $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 2x\cdot\sin 2x}{\text{tg}5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cdot 2x\cdot 2x}{5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x^2}{5x}=0$.

б) При підстановці нуля замість x отримаємо невизначеність $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{ctg}x\left(1-\cos^2 3x\right)}{x^2+5x}=\left\{\dfrac{\infty\cdot 0}{0}\right\}$. Застосуємо тригонометричні формули $\text{ctg}\alpha=\dfrac{1}{\text{tg}\alpha}$ і $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$. Отримаємо $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1\cdot\sin^2 3x}{\text{tg}x\cdot\left(x^2+5x\right)}$. Замінимо функції $\sin 3x$, $\text{tg}x$ на їхні аргументи, так як останні прямують до нуля, отримаємо

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x\cdot\sin 3x}{\mathrm{tg}x\cdot\left(x^2+5x\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x\cdot 3x}{x\cdot\left(x^2+5x\right)}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Для розкриття невизначеності $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ виділимо у знаменнику ще один множник x, отримаємо $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x\cdot 3x}{x\cdot x\cdot\left(x+5\right)}$, після скорочення маємо $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9}{x+5}=\dfrac{9}{5}$.

Розглянемо приклади з другою важливою границею.

3. Знайти границі функцій а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{4x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3x}\right)^{2x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+2x^2\right)^{\frac{1}{5x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-7x\right)^{\frac{1}{2x^3}}$.

Розв'язування

а) При підстановці нескінченності замість x отримаємо невизначеність $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{4x}=\left\{1^{\infty}\right\}$. Дана невизначеність як раз і розкривається за допомогою другої важливої границі. Штучно приведемо границю до вигляду $\lim\limits_{\square\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\square}\right)^{\square}$. Для цього в показнику треба організувати вираз рівний виразу у знаменнику, маємо $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{3x\cdot\frac{1}{3x}\cdot 4x}$. Перейдемо до границі в показнику степеня $\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{3x}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{3x}}$ і застосуємо другу важливу границю $e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{3x}}=e^{\frac{3}{4}}$.

б) При підстановці нескінченності замість x отримаємо невизначеність $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3x}\right)^{2x}=\left\{1^{\infty}\right\}$. Штучно приведемо границю до вигляду $\lim\limits_{\square\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\square}\right)^{\square}$. Для цього в основі степеня перетворимо різницю на суму $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-3x}\right)^{2x}$, а в показнику організуємо вираз рівний виразу у знаменнику, маємо $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-3x}\right)^{-3x\cdot\frac{1}{-3x}\cdot 2x}$. Перейдемо до границі в показнику степеня $\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-3x}\right)^{-3x}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{2x}{3x}\right)}$ і застосуємо другу важливу границю $e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{2x}{3x}\right)}=e^{-\frac{2}{3}}$.

в) При підстановці нуля замість x отримаємо невизначеність $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+2x^2\right)^{\frac{1}{5x}}=\left\{1^{\infty}\right\}$. Дана невизначеність розкривається за допомогою модифікованого виразу другої важливої границі. Для цього штучно приведемо границю до вигляду $\lim\limits_{\square\to 0}\left(1+\square\right)^{\frac{1}{\square}}$. Спочатку виконаємо перетворення в показнику степеня, маємо $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+2x^2\right)^{\frac{1}{2x^2}\cdot 2x^2\cdot\frac{1}{5x}}$. Перейдемо до границі в показнику степеня $\left[\lim\limits_{x\to 0}\left(1+2x^2\right)^{\frac{1}{2x^2}}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2}{5x}}$ і застосуємо модифіковану другу важливу границю $e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{5}}=e^0=1$.

г) При підстановці нуля замість x отримаємо невизначеність $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-7x\right)^{\frac{1}{2x^3}}=\left\{1^{\infty}\right\}$. Штучно приведемо границю до модифікованого виразу другої важливої границі $\lim\limits_{\square\to 0}\left(1+\square\right)^{\frac{1}{\square}}$. Для цього виконаємо перетворення різниці в основі степеня в суму $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\left(-7x\right)\right)^{\frac{1}{2x^3}}$ і організуємо відповідний показник степеня, маємо $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\left(-7x\right)\right)^{\frac{1}{-7x}\cdot\left(-7x\right)\cdot\frac{1}{2x^3}}$. Перейдемо до границі в показнику степеня $\left[\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\left(-7x\right)\right)^{\frac{1}{-7x}}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{7x}{2x^3}\right)}$ і застосуємо модифіковану другу важливу границю $e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{7x}{2x^3}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{7}{2x^2}\right)}=e^{-\infty}=0$.

Розглянемо складніші приклади застосування другої важливої границі.

4. Знайти границі функцій а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-3}\right)^{x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg}x\right)^{\frac{1}{2x}}$.

Розв'язування

а) При підстановці нескінченності замість x отримаємо невизначеність $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-3}\right)^{x+5}=\left\{1^{\infty}\right\}$. Виділимо 1 в основі степеня $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3+3+3}{2x-3}\right)^{x+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x-3}+\dfrac{3+3}{2x-3}\right)^{x+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{6}{2x-3}\right)^{x+5}$ і приведемо границю до вигляду $\lim\limits_{\square\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\square}\right)^{\square}$. Для цього поділимо чисельник і знаменник дробу $\dfrac{6}{2x-3}$ на 6, тобто $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{2x-3}{6}}\right)^{x+5}$, в показнику організуємо вираз рівний виразу у знаменнику і перейдемо до границі в показнику степеня, отримаємо $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{2x-3}{6}}\right)^{\frac{2x-3}{6}\cdot\frac{6}{2x-3}\cdot(x+5)}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{2x-3}{6}}\right)^{\frac{2x-3}{6}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6(x+5)}{2x-3}}$, застосуємо другу важливу границю $e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6(x+5)}{2x-3}}=e^{3}$.

б) При підстановці нескінченності замість x отримаємо невизначеність $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\left\{1^{\infty}\right\}$. Виділимо в основі степені 1 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1-1-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+1}-\dfrac{1+2}{x+1}\right)^{2x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x+1}\right)^{2x+3}$. Далі в основі степеня перетворимо різницю на суму і приведемо чисельник дробу до одиниці $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-\dfrac{x+1}{3}}\right)^{2x+3}$. Штучно приведемо границю до вигляду $\lim\limits_{\square\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\square}\right)^{\square}$. Для цього в показнику степеня організуємо вираз рівний виразу у знаменнику $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-\dfrac{x+1}{3}}\right)^{-\frac{x+1}{3}\cdot\left(-\frac{3}{x+1}\right)\cdot(2x+3)}$ і перейдемо до границі в показнику степеня і застосуємо другу важливу границю $e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{3(2x+3)}{x+1}\right)}=e^{-6}$.

в) При підстановці нуля замість x отримаємо невизначеність $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\mathrm{tg}x\right)^{\frac{1}{2x}}=\left\{1^{\infty}\right\}$. Штучно приведемо границю до вигляду $\lim\limits_{\square\to 0}\left(1+\square\right)^{\frac{1}{\square}}$. Для цього виконаємо перетворення в показнику степеня, маємо $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\mathrm{tg}x\right)^{\frac{1}{\mathrm{tg}x}\cdot\mathrm{tg}x\cdot\frac{1}{2x}}$. Перейдемо до границі в показнику степеня $\left[\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\mathrm{tg}x\right)^{\frac{1}{\mathrm{tg}x}}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x}{2x}}$ та застосуємо модифіковану другу важливу границю $e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{tg}x}{x}}$ і наслідок першої важливої границі $e^{\frac{1}{2}\cdot 1}=e^{\frac{1}{2}}$

Завдання для самостійного розв'язування

Обчислити границі функцій.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x\cdot\sin 7x}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2\arcsin^2 2x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{10}{x}\right)^{\frac{x}{3}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-1}\right)^{7-x}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{\sin^2 3x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\arcsin^2 x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{8}{x}\right)^{\frac{x}{10}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-4}\right)^{3-x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2 x}{x\sin 2x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\mathrm{tg}x}{1-\cos 4x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{8}{x}\right)^{\frac{x}{3}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+3}{4x-1}\right)^{3x-4}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{\mathrm{tg}5x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 4x}{x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{9}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x+1}{6x-3}\right)^{2x+1}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\sin 3x}{\mathrm{tg}x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{7}{x}\right)^{\frac{x}{4}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-7}{2x-3}\right)^{4x+3}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 2x}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos 5x}{x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{7}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x-4}\right)^{7x}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\mathrm{arctg}2x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\mathrm{tg}3x}{1-\cos 12x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x-3}\right)^{1-3x}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 x}{\mathrm{tg}^2 x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\mathrm{tg}^2 4x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{x}\right)^{\frac{x}{6}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-5}{3x+5}\right)^{2x+1}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x+\sin x}{x^3}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 2x}{\arcsin^2 x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{7}{x}\right)^{\frac{x}{5}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x+5}{7x-2}\right)^{2x+1}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\mathrm{arctg}2x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\sin^2 6x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{8}{x}\right)^{\frac{x}{10}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+5}\right)^{3x-4}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\mathrm{tg}5x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{\mathrm{tg}3x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{8}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+7}\right)^{2x+1}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\mathrm{arctg}6x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 3x}{\arcsin^2 2x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{9}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x+2}{7x-1}\right)^{1-2x}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin 3x\cdot\mathrm{ctg}5x)$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{7}{x}\right)^{\frac{x}{4}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+7}{2x-1}\right)^{3x+5}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{\mathrm{tg}^2 2x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin 3x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{\frac{x}{3}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x+2}{6x-1}\right)^{2x-3}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 5x}{x\sin x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{11}{x}\right)^{\frac{x}{13}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+1}{5x-1}\right)^{1-4x}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{\cos 6x\cdot \mathrm{tg}x^2}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{x\arcsin 2x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{\frac{x}{17}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x+2}{7x-2}\right)^{x+1}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{ctg}3x}{\mathrm{ctg}4x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 8x}{\arcsin x^2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{7}{x}\right)^{\frac{x}{5}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+7}{5x+3}\right)^{x+5}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}3x+\mathrm{tg}2x}{4x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\mathrm{arctg}x^2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{10}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x+7}{6x+3}\right)^{x+5}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}2x}{4x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 7x-\cos 3x}{x\cdot\arcsin x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{20}{x}\right)^{\frac{x}{21}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x-5}\right)^{7x}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x+\sin 7x}{\mathrm{arctg}5x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\mathrm{tg}x^2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{21}{x}\right)^{\frac{x}{20}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+1}\right)^{x}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{\mathrm{tg}x^2}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 5x}{x\sin x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{20}{x}\right)^{\frac{x}{21}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{14x+2}{14x-2}\right)^{3-8x}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2 6x}{x\cdot\arcsin 3x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{x\sin 3x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{21}{x}\right)^{\frac{x}{20}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x-1}\right)^{x}$.

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}3x}{\sin 5x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{\sin^2 x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{21}{x}\right)^{\frac{x^2}{20}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x+5}\right)^{7x}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}3x^2}{\sin^2 2x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos x}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{20}{x}\right)^{\frac{x^2}{21}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{14x+2}{14x-2}\right)^{3+8x}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{ctg}8x}{\cos 7x\cdot\mathrm{ctg}3x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{\sin^2 5x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{21}{x}\right)^{\frac{x^2}{7}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{14x-2}{14x+8}\right)^{3-7x}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{ctg}8x}{\mathrm{ctg}4x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{1-\cos^2 2x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{22}{x}\right)^{\frac{x^2}{11}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{14x-8}{14x+2}\right)^{3+7x}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x\cos 6x}{\mathrm{tg}5x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{1-\cos^2 2x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{22}{x^2}\right)^{\frac{x}{11}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{14x-2}{14x+2}\right)^{3-8x}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\mathrm{tg}^2 5x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 7x-\cos^2 2x}{\mathrm{tg}^2 2x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{21}{x^2}\right)^{\frac{x}{7}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{14x-2}{14x+2}\right)^{3+8x}$.

Додаткові завдання: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2+2}{4x^2-1}\right)^{5x^2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x^3-2}{5x^3+1}\right)^{-6x^3}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3+7}{2x^3+2}\right)^{6x^4}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2+3x-1}{5x^2+3x+3}\right)^{x^2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+2x-1}{2x^2+x+3}\right)^{2x+1}$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Практикум з вищої математики. Комп'ютерна система для дистанційного навчання. – в 2-х ч. – ч. 1 / [В.С. Шебанін, О.В. Шебаніна, І.П. Атаманюк та ін.] – Миколаїв: МНАУ, 2016. – 229с.
2. Высшая математика для заочников и не только [Электронный ресурс] // Высшая математика – просто и доступно! : веб-сайт. – Режим доступа : http://mathprofi.net/index.html (дата обращения 14.10.2020) – Название с экрана.

Навчальне видання

Вища математика
завдання та методичні рекомендації для самостійної роботи
здобувачів вищої освіти ступеня «Бакалавр»
спеціальностей
281 «Публічне управління та адміністрування»,
073 «Менеджмент»,
241 «Готельно-ресторанна справа»
Модуль 4
«Границі послідовностей та функцій»

Формат Ум. друк. арк.
Тираж __ прим. Зам. №

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Г. Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.