

Міністерство освіти і науки України
Миколаївський національний аграрний університет

Інженерно-енергетичний факультет

Теоретична механіка. Кінематика

курс лекцій

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти ОПП
«Агроінженерія» і «Професійна освіта (Аграрне виробництво, переробка
сільськогосподарської продукції та харчові технології)» спеціальностей 208
«Агроінженерія» та 015 (Аграрне виробництво, переробка
сільськогосподарської продукції та харчові технології)»
денної та заочної форми здобуття вищої освіти

Миколаїв
2022

УДК 531.1
Т30

Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету, протокол № 9 від 23.05.2022 р.

Укладачі:

- | | |
|------------------|---|
| Іванов Г. О. | – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри загальнотехнічних дисциплін. |
| Бабенко Д. В. | – канд. техн. наук, професор, Перший проректор Миколаївського національного аграрного університету. |
| Полянський П. М. | – канд. екон. наук, доцент, в.о. зав. кафедри загальнотехнічних дисциплін. |
| Степанов С. В. | – старший викладач кафедри загальнотехнічних дисциплін. |
| Баранова О. В. | – асистент кафедри загальнотехнічних дисциплін. |

Рецензенти:

- | | |
|--------------|---|
| Гавриш В.І. | – д-р екон. наук, професор, зав. кафедри тракторів та сільськогосподарських машин, експлуатації і технічного сервісу. |
| Доценко Н.А. | – д-р пед. наук, доцент, доцент кафедри загальнотехнічних дисциплін. |

© Миколаївський національний
аграрний університет, 2022

ЗМІСТ

ВСТУП. INTRODUCTION	6
ОСНОВНІ ІСТОРИЧНІ ЕТАПИ РОЗВИТКУ МЕХАНІКИ	
THE MAIN HISTORICAL STAGES OF THE DEVELOPMENT OF MECHANICS	9
МОДУЛЬ 2. КІНЕМАТИКА	15
MODULE 2. KINEMATICS	
1. КУРС ЛЕКЦІЙ. LECTURE'S COURSE	15
Лекція 1. Кінематика точки і твердого тіла	15
Lecture 1. Kinematics of point and solid body	
1.1. Основні відомості з кінематики точки	15
Basic information on the point kinematics	
1.2. Знаходження швидкості та прискорення точки при векторному способі визначення її руху	20
Finding the velocity and accelerating the point at the vector method of determining its motion	
1.3. Швидкість та прискорення точки в прямокутній декартовій системі координат	22
Speed and acceleration of a point in a rectangular Cartesian coordinate system	
Лекція 2. Кінематика твердого тіла	23
Lecture 2. The solid body kinematics	
Передмова (Preface)	23
2.1. Поступальний рух твердого тіла	24
Propelled motion of a solid	
2.2. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі	25
The rotational motion of a solid body around a stationary axis	
Лекція 3. Миттєвий центр швидкостей. План швидкостей і його властивості	33
Lecture 3. Instant speed center. Plan of speed and its properties	
3.1. Миттєвий центр швидкостей. Instant speed center	33
3.2. План швидкостей і його властивості	36
Plan of velocities and their properties	
Лекція 4. Визначення прискорення точок плоскої фігури. План прискорень	39
Lecture 4. Determination of the acceleration of points of a plane figure. Plan of acceleration	
4.1. Прискорення точок тіла при його плоскому русі	39
Acceleration of the points of the body with its flat motion	
4.2. Миттєвий центр прискорень. Instant center of acceleration	43

Лекція 5. Кінематика складного руху точки	48
Lecture 5. Kinematics of complex point motion	
5.1. Кути Ейлера. Рівняння руху твердого тіла навколо нерухомої точки	48
Euler angles. Equation of motion of a rigid body around a fixed point	
5.2. Теорема Ейлера-Даламбера про переміщення твердого тіла. Миттєва вісь обертання	50
Euler-D'Alembert theorem on the displacement of a rigid body. Instantaneous axis of rotation	
5.3. Вектори кутової швидкості та кутового прискорення	52
Vectors of angular velocity and angular acceleration	
5.4. Швидкість точок тіла, яке обертається навколо нерухомої точки	54
Velocity of points of a body rotating around a fixed point	
5.5. Зв'язок вектора миттєвої кутової швидкості з кутами Ейлера	56
Relationship of the instantaneous angular velocity vector with Euler angles	
5.6. Прискорення точок тіла при обертанні навколо нерухомої точки	57
Acceleration of body points when rotating around a fixed point	
Лекція 6. Кінематика складного руху твердого тіла	58
Lecture 6. Kinematics of complex motion of a rigid body	
6.1. Основні поняття. Basic concepts	58
6.2. Рівняння руху точки. Equation of motion of a point	60
6.3. Теорема про додавання швидкостей	61
The theorem on adding speeds	
6.4. Теорема про додавання прискорень (теорема Коріоліса)	63
Acceleration Addition Theorem (Coriolis Theorem)	
Лекція 7. Кінематика складного руху твердого тіла	67
Lecture 7. Kinematics of complex motion of a rigid body	
7.1. Переносний рух середовища, абсолютний і відносний рух твердого тіла	67
Portable medium motion, absolute and relative motion of a solid	
7.2. Додавання двох миттєвих поступальних рухів тіла	67
Adding two instantaneous translational movements of the body	
7.3. Додавання двох миттєвих обертань навколо осей, що перетинаються	68
Adding two instantaneous rotations about intersecting axes	
7.4. Додавання двох миттєвих обертань навколо паралельних осей	69
Adding two instantaneous rotations about parallel axes	

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ	74
QUESTIONS FOR SELF-CONTROL	
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	71
LIST OF USED LITERATURE	

ВСТУП. INTRODUCTION

1. Призначення навчальної дисципліни «Теоретична механіка».

Знання та вміння, набуті при вивченні предмету, можуть бути використані для дослідження найскладніших проблем техніки і технології, що постійно виникають у зв'язку з розвитком нових видів виробництва і технічних засобів, для розуміння нових механічних явищ з якими будуть зустрічатись майбутні фахівці у практичній діяльності, а також для самостійного опанування нових питань технології, які виникають на межі різних галузей наук.

2. Мета навчальної дисципліни.

Метою освоєння дисципліни «Теоретична механіка» є формування у майбутніх фахівців комплексу теоретичних знань і практичних вмінь, навичок щодо найбільш загальних закономірностей механічного руху і рівноваги матеріальних тіл і систем та взаємодії матеріальних об'єктів, що з'являються при дослідженні, експлуатації, випробуванні і ремонтних роботах.

Предмет навчальної дисципліни: формування у майбутніх фахівців комплексу теоретичних знань і практичних вмінь, навичок щодо основ теоретичної механіки, здобуття навичок розв'язання задач статички, кінематики і динаміки.

Навчальна дисципліна «Теоретична механіка» відіграє важливу роль в інженерній освіті, яка пов'язує математику і фізику, механіку матеріалів і конструкцій та будівельну механіку з загальнотехнічними і спеціальними дисциплінами.

3. Компетентності.

Компетентності здобувачів обумовлені освітньою програмою «Агроінженерія» й передбачають отримання відповідних результатів навчання, використання методів й форм оцінювання. Програмні компетентності включають інтегральні компетентності, загальні компетентності, фахові компетентності. Здобувачі вищої освіти повинні отримати здатність розв'язувати складні завдання й проблеми у сфері професійної діяльності – вміння розв'язувати задачі з розділів статички, кінематики та динаміки.

Основні фахові компетенції здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня вищої освіти у контексті навчальної дисципліни «Теоретична механіка»:

-здатність застосування теорії для вирішення конкретних практичних задач складання розрахункових схем і диференціальних рівнянь руху, вміти визначати закони руху тіл під дією прикладених сил, розраховувати статичні і динамічні реакції, зводити складну систему сил до найпростішого виду, раціонально вибирати метод вирішення конкретної задачі механіки;

-комунікативні, вміння зрозуміти завдання, задати питання по складним питанням та розв'язати завдання.

4. Заплановані результати. У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен:

знати: -умови та рівняння рівноваги тіл;

-класифікацію рухів тіла і залежності для визначення його кінематичних характеристик;

-методи визначення загальних законів руху тіла під дією сил;

-як перетворювати системи сил в еквівалентні, визначати і складати умови рівноваги системи сил, які діють на тіло;

вміти:-визначати траєкторії, швидкість і прискорення точок твердого тіла незалежно від діючих на нього сил;

-застосовувати загальні закони руху механічної системи під дією сил, складати диференціальні рівняння її руху і з них визначити кінематичні характеристики руху.

Перелік практичних умінь, необхідних для розробки й прийняття рішень у пізнавальній й професійній діяльності здобувачів:

- фундаментальні цілі – уміння, які реалізуються у сфері інженерії, в тому числі сільськогосподарського виробництва;

- предметні цілі – уміння, які реалізуються у сфері техніки агропромислового комплексу; призначення точності деталей і з'єднань машин і механізмів;

- функціональні цілі – уміння, характерні для галузей й сфер діяльності: участь у I-му і II-му етапах Всеукраїнських студентських олімпіадах з дисципліни «Теоретична механіка»; підготовка наукових робіт;

- виховні цілі – прийняття управлінських рішень, самоорганізація здобувача, уміння поставити інженерну задачу та обґрунтовано її розв'язати.

5. Опис. Здатність застосування теорії для вирішення конкретних практичних задач складання розрахункових схем і диференціальних рівнянь руху, вміти визначати закони руху тіл під дією прикладених сил, розраховувати статичні і динамічні реакції, зводити складну систему сил до найпростішого виду, раціонально вибирати метод вирішення конкретної задачі механіки.

Вивчаючи дану дисципліну здобувач має розвиток світосприймання в розумінні законів механічного руху, взаємодії та рівноваги матеріальних об'єктів, загально інженерний розвиток та отримання навичок розв'язку задач, а також підготовка здобувачів вищої освіти до вивчення загально технічних і спеціальних дисциплін.

Для опанування навчальним матеріалом, передбаченого програмою з теоретичної механіки, необхідні знання з фізики, математики, в межах загальноосвітньої середньої школи, а також знання з вищої математики.

Згідно з розподілом навчального часу «Теоретична механіка» у робочому навчальному плані галузі знань 20 «Аграрні науки та продовольство»

спеціальності 208 «Агроінженерія» предмет вивчається на протязі другого та третього семестрів в обсязі 210 годин.

У другому семестрі вивчається модуль 1 «Статика» (20 годин лекцій, 54 годин практичних занять, самостійна робота 31 година);

У третьому семестрі вивчаються: модуль 2 «Кінематика» (14 годин лекцій та 14 годин практичних занять, самостійна робота 21 година) і модуль 3 «Динаміка» (16 годин лекцій, 16 годин практичних занять, самостійна робота 24 години).

Семестр	Денна форма навчання					
	Всього	у тому числі:				
		лекції	сп	прак.	лаб., інд	с.р.
2	105	20	-	54	-	31
Форма контролю		Залік				
3	105	30	-	30	-	45
Форма контролю		Розрахунково-графічна робота, екзамен				
Разом	210	50	-	84	-	76

Галузь знань 01 «Освіта» спеціальність 015 «Професійна освіта (Аграрне виробництво, переробка сільськогосподарської продукції та харчові технології)»: 1 курс 2 семестр модуль 1 «Статика» (лекцій 20 годин, практичних занять 18 годин, самостійна робота 52 години; 2 курс 3 семестр модуль 2 «Кінематика» (лекцій 8 годин, практичних занять 14 годин, самостійна робота 22 години) і модуль 3 «Динаміка» (лекцій 8 годин, практичних занять 16 годин, самостійна робота 22 години).

Галузь знань 01 «Освіта» спеціальності 015 «Професійна освіта (Аграрне виробництво, переробка сільськогосподарської продукції та харчові технології)»:

Семестр	Денна форма навчання					
	Всього	у тому числі:				
		лекції	сп	прак.	лаб., інд	с.р.
2	90	20	-	18	-	52
Форма контролю		Залік				
3	90	16	-	30	-	44
Форма контролю		Екзамен				
Разом	180	36	-	48	-	96

ОСНОВНІ ІСТОРИЧНІ ЕТАПИ РОЗВИТКУ МЕХАНІКИ THE MAIN HISTORICAL STAGES OF THE DEVELOPMENT OF MECHANICS

Механікою (mechanics) називається наука про механічний рух або рівновагу матеріальних тіл і виникаючу при цьому взаємодію між ними. Відноситься механіка до природничих наук.

Термін «механіка» є словом грецького походження, який в буквальному перекладі означає «хитромудрість». Цей термін вперше був вжитий в III в. до н.е. учнем великого давньогрецького філософа Арістотеля в момент спостереження роботи важеля, коли «мале долає велике». В праці Арістотеля (384-322 рр. до н.е.) «Механічні проблеми» міститься багато цінного для механіки. Але, поряд з тим, зустрічається так багато невірного, що праці Арістотеля відіграли в історії негативну роль, тому, що майже дві тисячі років він вважався церквою непогрішним.

Історики науки вважають, що початок механіки, як науки, пов'язаний з ім'ям великого механіка усіх часів Архімедом (287-212 рр. до н.е.). Він заклав основи механіки як точної науки, зробив відкриття в математиці, гідростатиці, створив теорію рівноваги важеля і вчення про центр ваги тіл.

В наступні півтори тисячі років розвиток механіки був зупинений. Дешевий людський труд і низький рівень техніки не створювали умов для розквіту цієї науки. Приватне господарство було розраховано лише на персональні потреби.

Тільки з XII ст. відкрились перші університети Європи, але готували вони переважно служителів духовництва та правників. Навіть у Парижі викладати геометрію було дозволено лише по святах, в 1355 р. Основою наук вважались праці Арістотеля, із яких було вилучено живий зміст.

Але поступово, у середині другого тисячоліття н.е., починають набирати темпи торгівельні відносини, а з ними і розвиток промисловості. Перед механікою постали проблеми в галузі техніки, пароплавства, у військовій справі. Для ефективної експлуатації шахт і копалин необхідно піднімати руду з великої глибини, будувати вентиляційні пристрої, відкачувати воду. Артилерія потребувала від механіки розв'язати такі питання, як міцність гармати при найменшій вазі, залежність опору повітря від швидкості снаряду, визначення траєкторії руху снаряду в повітрі і в пустоті.

З розвитком механіки, як науки, в ній з'явився цілий ряд самостійних галузей, пов'язаних з вивченням механіки твердих деформованих тіл, рідин і газів: теорія пружності, теорія пластичності, гідромеханіка, аеромеханіка, газова динаміка, опір матеріалів, будівельна механіка, теорія механізмів і машин, гідравліка, динаміка споруд та інші спеціальні інженерні дисципліни. Однак в усіх цих галузях поряд зі специфічними для кожної з них закономірностями і методами дослідження, використовуються поняття, закони і методи механіки, які є загальними для них.

Теоретична механіка (theoretical mechanics) – це частина механіки, в якій вивчаються найзагальніші закони механічного руху або рівноваги матеріальних тіл і механічної взаємодії між ними.

Механічний рух (mechanical movement) – найпростіша форма руху матерії, яка зводиться до простого переміщення за часом фізичних тіл з одного положення в просторі в інше.

В основі теоретичної механіки лежать закони Ісаака Ньютона, тому вона називається ньютонівською або класичною. Класична механіка, яка є граничним випадком релятивістської механіки А. Ейнштейна, з великою точністю задовольняє багатьом галузям сучасної техніки при швидкостях руху тіл, досить малих у порівнянні зі швидкістю світла.

Роль і значення теоретичної механіки в інженерній освіті визначається, по перше, тим, що вона є фундаментальною загальнонауковою дисципліною, оскільки методи теоретичної механіки дозволяють з єдиних позицій описувати динаміку і процеси не тільки в механічних системах, а і в інших частинах фізичних (наприклад, утворення комірок Бенара при тепловій конвекції; явище резонансу в електричних та оптичних ланцюгах), хімічних (хімічна термодинаміка, коливання атомів і молекул, міжмолекулярна взаємодія, динамічні явища при протіканні хімічної реакції Білоусова-Жаботинського), біологічних (динамічна поведінка системи хижак-жертва, життєвий цикл амеби), кліматичних (нерівноваженість клімату Земної кулі), космічних (теорія розвитку Всесвіту) та інших системах.

По друге, теоретична механіка є *основою інженерних розрахунків (the basis of engineering calculations)*, оскільки на її законах засновані статичні й динамічні розрахунки інженерних споруд (будівель, фундаментів, башт, мостів, гребель, трубопроводів, сховищ, технологічних споруд), транспортних засобів (вагонів, автомобілів, літаків, суден), виробничого устаткування (двигунів, насосів, компресорів), технологічних процесів (будівництва, транспортування, центрифугування, седиментації), параметрів польоту й керування літальними апаратами та ін.

Відвертаючись при вивченні руху матеріальних тіл від усього часткового, теоретична механіка розглядає тільки ті властивості, які в даній задачі є визначальними. Це приводить до розгляду різних моделей матеріальних тіл, які являють собою ту чи іншу ступень абстракції. До основних абстракцій теоретичної механіки відносять поняття матеріальної точки і абсолютно твердого тіла.

Матеріальною точкою (material point) називається тіло, розмірами якого можна знехтувати при розв'язанні певних задач. Наприклад, при наближеному дослідженні рухів планет їх можна розглядати як матеріальні точки.

Абсолютно твердим (absolutely solid body) називається тіло, відстань між будь-якими точками якого не змінюється під час рівноваги або руху.

Теоретична механіка широко користується не тільки методом абстракцій, а й узагальненням, математичними методами і методами формальної логіки. Застосування цих методів і узагальнень результатів безпосередніх спостережень, виробничої практики і досліду дозволили встановити певні загальні закони, що відіграють роль аксіом. Усі подальші висновки теоретичної механіки можуть бути отримані з цих аксіом за допомогою логічних міркувань і математичних викладок. При цьому достовірність положень теоретичної механіки перевіряється дослідом і практикою.

За характером задач, що вивчаються, теоретична механіка складається з трьох розділів:

- статики* (*statics*), в якій вивчаються методи еквівалентних перстворень систем сил, а також умови рівноваги матеріальних тіл;

- кінематики* (*kinematics*), в якій вивчається механічний рух матеріальних тіл з геометричної точки зору, тобто незалежно від мас та діючих на них сил;

- динаміки* (*dynamics*), в якій вивчається рух матеріальних тіл у зв'язку з діючими на них силами.

Окрім цих трьох розділів, у теоретичній механіці вивчаються також *елементи аналітичної механіки* (*elements of analytical mechanics*), яка являє собою сукупність найбільш узагальнених аналітичних методів розв'язання задач механіки, котрі дозволяють не тільки однаково розв'язувати задачі динаміки, а й розповсюджувати їх на такі галузі, як класична теорія поля і квантова механіка.

Закони теоретичної механіки сформульовані завдяки плідній праці багатьох поколінь вчених. Перші викладення загальних понять механіки містяться у творах старогрецького філософа Арістотеля (384-322 рр. до н.е.), який розглядав розв'язання практичних задач за допомогою важеля.

Вперше наукове обґрунтування механіки з'являється в роботі сіракузького геометра і механіка Архімеда (287-212 рр. до н.е.). Він здійснив спробу аксіоматизації механіки (статики), дав низку наукових узагальнень, що відносяться до вчення про рівновагу, центр ваги і гідростатики (закон Архімеда).

Швидкий розвиток механіки починається з епохи Відродження. Видатні вчені цієї епохи розвинули методи статики і заклали основи динаміки. Найбільш значний внесок в механіку внесли: Леонардо да Вінчі (1452-1519)-вивчав траєкторію тіла, що було кинуте під кутом до горизонту, рух тіла по площині і явище тертя, а також запровадив поняття моменту сили відносно точки.

Сімон Стевін (1548-1620)-дав аксіоматичну побудову статики на основі постулатів Архімеда, запровадив поняття силового трикутника і довів теорему про три сили.

Микола Копернік (1473-1543)-відкрив геліоцентричну систему світу.

Галілео Галілей (1564-1642)-встановив основні закони вільного падіння тіл, увів поняття про нерівномірний рух і прискорення точки, вперше сформулював закон інерції, принцип відносності класичної механіки і дослідив дію сил на тіла, що рухаються.

Іоганн Кеплер (1571-1630)-відкрив закони руху планет.

Рене Декарт (1596-1650)-ближче до своїх сучасників підійшов до правильного формулювання закону інерції, вперше увів поняття кількості руху матеріальної точки і дослідив питання про складання довільного числа рухів точки.

Христіан Гюйгенс (1629-1695)-розробив теорію коливань фізичного маятника і визначив центр його коливання, довів теореми про відцентрову силу, експериментально визначив прискорення сили тяжіння, дослідив проблему удару двох тіл.

Роберт Гук (1635-1703)-відкрив закон пропорційності між силою, прикладеною до пружного тіла, і його деформацією (закон Гука), що є основним співвідношенням при сучасних розрахунках динаміки та міцності конструкцій і споруд, а також передбачив закон всесвітнього тяжіння Ньютона.

П. Варіньон (1654-1722)-встановив в остаточному вигляді поняття моменту сили, умови рівноваги системи збіжних і паралельних сил, довів теорему про момент рівнодійної.

Одне з перших місць у розвитку механіки займає Готфрід Лейбніц (1646-1716), який розробив і застосував до задач механіки диференціальне і інтегральне числення, увів поняття кінетичної енергії і впритул наблизився до утворення варіаційного обчислення.

Завершив встановлення основних законів динаміки великий англійський математик і механік Ісаак Ньютон (1643-1727). У своєму знаменитому творі «Математичні основи натуральної філософії» (1687) він сформулював основні поняття класичної механіки, її аксіоматику, а також низку фундаментальних теорем небесної механіки і закон всесвітнього тяжіння.

Період розвитку механіки після Ньютона значною мірою пов'язаний з ім'ям Леонарда Ейлера (1707-1783), який більшу частину життя працював у Петербурзькій академії наук. Л. Ейлер повністю завершив процес математизації механіки точки, був засновником механіки твердого тіла і сформулював закони динаміки для безперервного середовища.

Подальший розвиток механіки проходив у зв'язку з вивченням руху системи матеріальних точок. Розвиток цього напрямку був покладений працями Ж.Л. Даламбера (1717-1783), який сформулював принцип, за допомогою якого формально задачі динаміки зводились до задач статички (принцип Даламбера) і Ж.Л. Лагранжа (1736-1813). У своєму видатному творі «Аналітична механіка» він сформулював найбільш загальний принцип статички-принцип можливих переміщень, знайшов загальну закономірність

механіки-загальне рівняння динаміки, і вивів в узагальненому вигляді диференціальні рівняння руху механічної системи (рівняння Лагранжа першого і другого роду).

У подальшому працями видатних математиків і механіків П.Л. Мопертюї (1698-1759), П.С. Лапласа (1749-1827), К.Ф. Гаусса (1777-1855), С. Пуассона (1781-1840), У. Гамільтона (1805-1865), К. Якобі (1804-1851), М.В. Остроградського (1801-1861) завершилась математизація механіки системи матеріальних точок і абсолютно твердого тіла, були вироблені специфічні для аналітичної механіки поняття (узагальнені координати, узагальнені швидкості, узагальнені сили) і розроблені математичні методи розв'язання багатьох задач.

Одночасно з розвитком аналітичних методів механіки в цей період удосконалюються геометричні методи, зокрема в задачах статички. Так, у книзі французького механіка Л. Пуансо (1777-1859) «Елементи статички» вперше була введена нова абстракція-пара сил і викладена теорія приведення довільної системи сил до заданого центру.

Наступний розвиток механіки характеризується поглибленим вивченням ряду її розділів і появою нових.

Слід відзначити роботи С.М. Ковалевської (1850-1891) з теорії обертання важкого твердого тіла навколо нерухомої точки, які стали початковою точкою для прикладної теорії гіроскопів.

Значний внесок у розвиток механіки неголономних систем, що має чисельні застосування в кібернетиці, теорії автоматичного керування, динаміці машин, зробили Д. Гіббс (1839-1903), С.А. Чаплигін (1863-1945) та інші вчені.

Теорія стійкості рівноваги та руху, яка була тісно пов'язана з проблемою точного приладобудування, створена і розвинута працями Е. Рауса (1831-1907), М.Є. Жуковського (1847-1921), О.М. Ляпунова (1857-1918), А. Пуанкаре (1854-1912).

Найбільш суттєві результати в теорії гіроскопів, які є основою навігаційних приладів, були отримані Л. Фуко (1819-1868), О.М. Криловим (1863-1945), В.В. Булгаковим (1901-1952) та іншими механіками.

Проблема боротьби з небезпечними вібраціями машин і споруд призвела до розробки теорії малих коливань, де значні результати отримали Релей (1842-1919), А. Пуанкаре, О.М. Крилов.

На початку ХХ сторіччя інтенсивного розвитку набула теорія нелінійних коливань, що описує процеси не тільки в механічних, а і в радіотехнічних, хімічних, біологічних та інших системах, основоположниками якої були Ван-дер-Поль, О.О. Андронов (1901-1952), М.М. Крилов (1879-1955), М.М. Боголюбов та ін.

Основи механіки тіла змінної маси, що є фундаментом вивчення реактивного польоту, були закладені в роботах І.В. Мещерського (1859-

1935), К.Е. Ціолковського (1857-1935) і розвинуті С.П. Корольовим (1907-1966). Подальший розвиток цього розділу механіки працями А. Лоренца (1853-1928), А. Пуанкаре і А. Ейнштейна (1879-1955) привів до встановлення положень теорії відносності, яка створила нову, після І.Ньютона, систему просторово-часових відношень.

Наприкінці ХІХ ст. під впливом розвитку кораблебудування і авіації почалась розробка проблем гідро-та аеродинаміки, де найбільш значні результати пов'язані з іменами М.Є. Жуковського, С.А. Чаплигіна, Л. Прандтля (1875-1953), Т. Кармана (1881-1963).

Теоретична механіка стала основою теорії автоматичного регулювання, значний внесок у розвиток якої зробив І.А. Вишнеградський (1831-1895).

Працями Л. Ейлера, Нав'є (1785-1836), Коші (1789-1857), Сен-Венана (1797-1886) у ХІХ ст. була створена теорія пружності-наука про закони статичного і динамічного деформування пружних тіл.

У другій половині ХХ ст. з'явився новий напрям науки і технологій-робототехніка, основою якого стала теоретична механіка та теорія механізмів і машин. Особливістю робототехніки є те, що вона об'єднує такі науки, як механіка, кібернетика і комп'ютерні технології. Великий внесок у розвиток цього напрямку мають: К.В. Фролов, Е.І. Воробйов, А.Г. Овакімов, Р. Уікер, М. Вулкобратович, М.З. Згуровський та ін.

Бурхливо розвинулась у минулому столітті механіка нелінійних коливань. Великий внесок у розвиток теорії нелінійних коливань належить українським вченим: М.М. Боголюбову, Ю.О. Митропольському, В.О. Кононенку та ін.

На початку ХХ сторіччя, у зв'язку з розвитком будівництва і машинобудування, виникла потреба розробки теорії пластин та оболонок, розвиток якої пов'язаний іменами Лява, Рейсснера, Доннелла, С.П. Тимошенко, В.З. Власова, В.В. Новожилова, Х.М. Муштарі, А.С. Вольміра, А.Л. Гольденвейзера та ін.

Теоретична механіка продовжує швидко розвиватись і тепер. Перед сучасними вченими постають великі задачі: засвоєння космосу, автоматика і телемеханіка, робототехніка і сучасні технології, машинобудування тощо. Це стимулює розвиток науки

В Україні сформувалось три школи прикладної теорії гіроскопів: О.Ю. Ішлінського-В.М. Кошлякова (Інститут математики НАНУ), А.О. Одінцова і М.А. Павловського (обидві Національний технічний університет Україна «Київський політехнічний інститут»).

На базі досягнень теоретичної механіки плідно працювали і працюють в галузі механіки суцільного середовища, теорії пружності, і пластичності відомі вчені: Г.М. Савін, О.М. Кільчевський, О.М. Гузь, А.Ф. Улітка, О.О. Горошко, В.Т. Грінченко та ін.

МОДУЛЬ 2. КІНЕМАТИКА. MODULE 2. KINEMATICS

КУРС ЛЕКЦІЙ. LECTURE'S COURSE

Лекція 1. Кінематика точки і твердого тіла

Lecture 1. Cinematics of point and solid body

Кінематикою називають розділ теоретичної механіки, в якому вивчаються загальні властивості і якості різних механічних рухів з геометричної точки зору без урахування причин, що викликають і змінюють ці рухи.

Кінематику можна розглядати як перехідну ступінь від геометрії до механіки – вона є геометрією чотирьох вимірів, бо крім трьох вимірів, прийнятих в геометрії, запроваджується четвертий – час. Кінематика для свого викладання не потребує ніяких нових аксіом і спирається на аксіоми евклідової геометрії.

Під рухом в механіці розуміють зміну з часом положення даного об'єкта по відношенню до іншого. Характер руху суттєво залежить від вибору тіла, з яким зв'язаний спостерігач.

Реальне (real body) або умовне тверде тіло (conditioned solid body), по відношенню до якого визначають положення чи рух інших об'єктів, називають *системою відліку (reference frame)*.

Простір в механіці розглядається як тривимірний і евклідовий.

Час (time) вважається універсальним, тобто таким, що плине абсолютно однаково в будь-якій системі відліку.

В задачах кінематики час приймається за незалежну змінну (аргумент). Відлік часу ведеться від певного початкового моменту, котрий обирають відповідно до конкретних умов задачі.

Кінематично задати рух матеріального об'єкту (тіла, точки) – означає задати положення цього об'єкту відносно обраної системи відліку в будь-який момент часу.

Якщо положення об'єкта визначається певними параметрами, то необхідно задати залежність параметрів від часу. Така залежність називається *кінематичними рівняннями руху (kinematic equations of motion)* або *законом руху (law of motion)*.

Основними питаннями кінематики є виявлення математичних способів задання руху і методів визначення всіх кінематичних величин, що характеризують даний рух.

1.1. Основні відомості з кінематики точки

Basic information on the point kinematics

1.1.1. Предмет кінематики. The subject of kinematics

Кінематикою називається розділ механіки, в якому визначається рух тіл без врахування їх маси і діючих на них сил.

Коли кажуть про рух тіла, то розуміють під цим зміну його положення з бігом часу по відношенню до якого-небудь другого тіла. Це означає, що при вивченні руху тіла ми завжди повинні вказувати, відносно якого другого тіла розглядається цей рух і на цьому другому тілі потрібно вибрати початок відліку (тобто вибрати систему координат). У кінематиці рух вважається заданим, якщо задані як функції часу параметри, які визначають положення тіла по відношенню до вибраної системи відліку.

При вивченні руху завжди встановлюється початок відліку часу (*start time delay*) $t = t_0 = 0$.

Під проміжком часу (*time space*) Δt (розуміють різницю між значеннями часу в який-небудь момент t_2 і момент t_1) ($\Delta t = t_2 - t_1$).

Якщо розміри тіла малі по відношенню до тих відстаней, які воно проходить, то це тіло називають точкою. Наприклад, планету Земля можна розглядати як точку, якщо вивчати її рух навколо Сонця. Неперервну криву, яку описує точка при своєму русі, називають *траєкторією* точки.

Якщо траєкторією *точки* (*point*) є пряма лінія, то рух точки називають *прямолінійним* (*rectilinear movement*), якщо траєкторією є крива лінія, то рух точки називають *криволінійним* (*curvilinear movement*).

Основна задача кінематики полягає в тому, щоб, знаючи закон руху даного тіла (точки), визначити всі кінематичні величини (траєкторію, швидкість, прискорення).

Для розв'язання цієї задачі необхідно, щоб був заданий закон руху даного тіла (точки). Існує і обернена задача: по відомим швидкостям і прискоренням знайти закон руху точки.

В модулі 2 ми будемо розглядати тільки рух точки.

1.1.2. Способи визначення руху точки

Ways to determine the movement of a point

Щоб описати *рух точки* (*point movement*) потрібно для кожного моменту часу задати її положення по відношенню до вибраної системи відліку. Для визначення криволінійного руху точки можна використати один із слідуєчих трьох способів:

- 1) векторний (*vector way*); 2) координатний (*coordinate way*);
- 3) натуральний (*natural way*).

1.1.2.1. Векторний спосіб визначення руху точки

Vector way to determine the motion of a point

Нехай точка М рухається в просторі по деякій траєкторії. Виберемо в просторі довільну точку О (рис. 1.1). Положення точки М в довільний момент часу можна визначити, якщо задати вектор $\vec{r}$, проведений з точки О в точку М. Вектор $\vec{r}$ називається *радіусом-вектором* точки М, а крива,

яку описує кінець вектора $\vec{r}$ називається *годографом радіуса-вектора*.

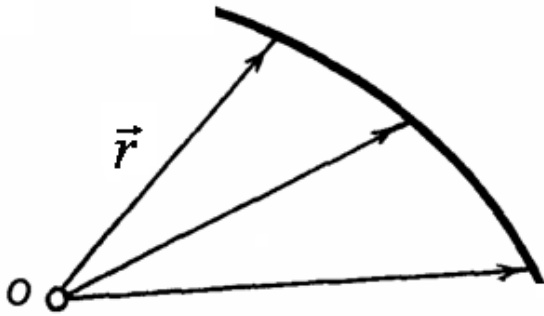


Рис. 1.1.

При русі точки М її радіус $\vec{r}$ неперервно змінюється (в загальному випадку і по модулю і по напрямку), тобто є функцією часу.

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (1.1)$$

Рівняння (1.1) називається векторним рівнянням руху точки.

1.1.2.2. Координатний спосіб

визначення руху точки

Coordinate method for determining the movement of a point

а) декартова система координат

Нехай точка М рухається в просторі по деякій траєкторії. Виберемо в просторі довільну точку О і прийнемо її за початок декартової системи координат ОХУZ (рис. 1.2).

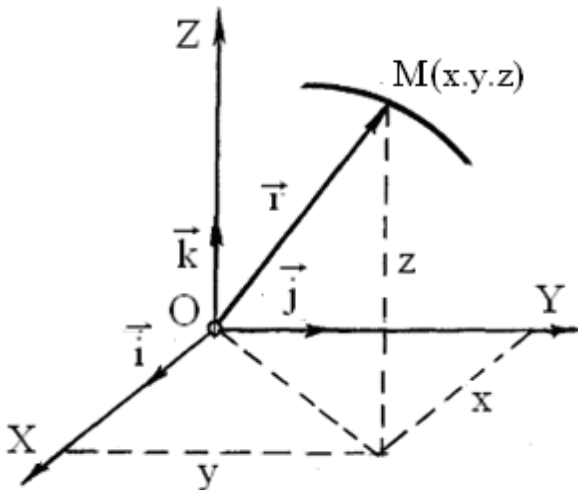


Рис. 1.2.

Положення точки М по відношенню до даної системи відліку ОХУZ можна визначити її декартовими координатами x, y, z . При русі точки М її координати змінюються з бігом часу, тобто є функціями часу t .

$$\begin{aligned} x &= f_1(t); \\ y &= f_2(t); \\ z &= f_3(t). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Рівняння (1.2) називаються рівняннями руху точки в декартових координатах.

Якщо під час руху точка М залишається в одній площині, то доцільно систему координат ОХУ розмістити в цій площині. Тоді плоский рух точки визначається двома рівняннями руху в прямокутних координатах

$$\begin{aligned} x &= f_1(t); \\ y &= f_2(t). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Якщо точка М здійснює прямолінійний рух, то зручно прийняти пряму, по якій рухається точка, за одну із координатних осей, наприклад, за вісь x . Положення точки М на цій осі визначається однією координатою $OM = x$

$$x = f_1(t). \quad (1.4)$$

Між координатним і векторним способами існує зв'язок (див. рис. 1.2).

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (1.5)$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор точки М;

x, y, z – координати точки М;

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні орти, тобто вектори, які чисельно дорівнюють одиниці і напрямлені відповідно вздовж осей x, y, z .

Рівняння (1.2), (1.3) одночасно представляють і рівняння траєкторії точки в параметричній формі, де роль параметра відіграє час t . Щоб знайти рівняння траєкторії точки в координатній формі, необхідно з рівнянь руху виключити час t .

б) полярна система координат

Коли точка М весь час рухається в одній і тій же площині, то її положення можна визначити полярними координатами r і φ (рис. 1.3), де r – відстань від полюса О до точки М, φ – кут, який утворюється радіусом-вектором $\vec{OM}$ точки М з горизонтальною прямою Ох – осью полярних координат.

Під час руху точки М полярні координати r і φ будуть змінюватись. Закон руху точки в полярних координатах буде визначатись рівняннями:

$$r = f_1(t); \quad \varphi = f_2(t). \quad (1.6)$$

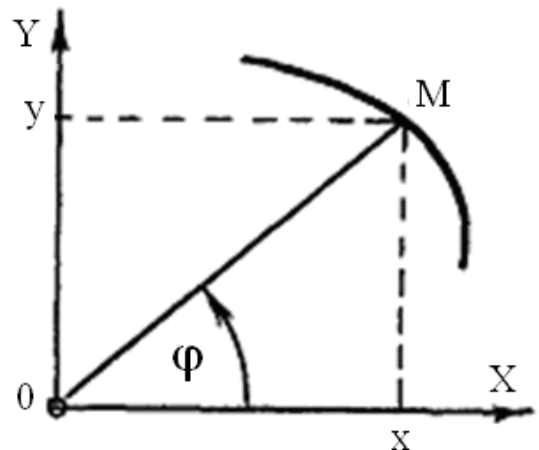


Рис. 1.3. Полярна система координат

Між полярними координатами r і φ та декартовими координатами x і y існує зв'язок:

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi. \quad (1.7)$$

1.1.2.3. Натуральна форма рівнянь руху

The natural form of the equations of motion

Цей спосіб можна використовувати тоді, коли наперед відома траєкторія руху точки.

Нехай траєкторія руху точки М відома (це може бути дуга кола, параболи, еліпса та ін.) (рис. 1.4).

Виберемо на цій лінії довільну точку відліку О. Положення точки М на траєкторії будемо визначати дуговою координатою (тобто довжиною дуги

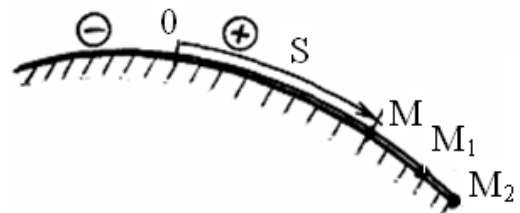


Рис. 1.4.

траєкторії будемо визначати дуговою координатою (тобто довжиною дуги

ОМ). Знак дугової координати визначаємо самостійно. Нехай зліва від точки О дугова координата буде від'ємна, праворуч від точки О – додатня. При русі точки М в положення M_1 , M_2 дугова координата буде змінюватись, тобто буде залежати від часу. Щоб знайти положення точки М на траєкторії в будь-який момент часу необхідно знати залежність:

$$S = f(t). \quad (1.8)$$

Рівняння (1.8) і виражає закон руху точки М вздовж траєкторії.

Примітка 1. У рівнянні (1.8) величина S визначає положення точки М на дуговій координаті, а не пройдений нею шлях. Наприклад, точка, рухаючись із точки відліку О, попадає в положення M_1 (рис. 1.4), а потім переміщуючись у зворотному напрямі попадає в положення М, то в цей момент її дугова координата $S = \overset{\circ}{O}M$, а пройдений шлях буде $\overset{\circ}{O}M = 2 \overset{\circ}{M_1}M$, тобто не дорівнює S .

У випадку прямолінійного руху, якщо вісь Ох направити вздовж траєкторії точки, будемо мати $S=x$ і закон прямолінійного руху точки буде:

$$x = f(t) \quad (1.9)$$

Примітка 2. Традиційно прийнято пройдений точкою шлях позначити буквою S . Від цього і ми не будемо відступати. А щоб відрізнити дугову координату точки і шлях, пройдений нею, то зробимо такі позначення: S – дугова координата, s – шлях, пройдений точкою.

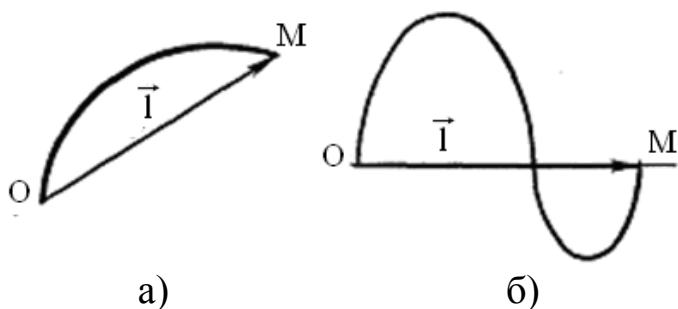


Рис. 1.7

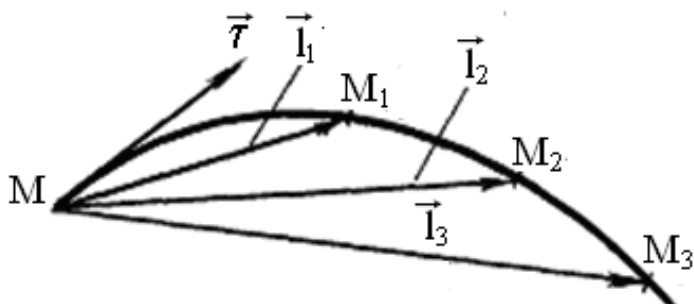


Рис. 1.8

Вектором переміщення $\vec{l}$ називають відрізок прямої, який проведений з початкового положення в кінцеве положення переміщуваної точки (рис. 1.7).

При прямолінійному русі точки вектор переміщення $\vec{l}$ являється відрізком траєкторії, при криволінійному русі – він замикає розглядувану частину траєкторії. Для різних проміжків часу вектори переміщень $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$, $\vec{l}_3$ мають різну величину і напрям (рис. 1.8).

Для нескінченно малого проміжку часу вектор переміщення при криволінійному русі співпадає по напрямку з напрямком дотичної

$\vec{\tau}$ до траєкторії руху (мова йде про дотичну до траєкторії), де в даний момент часу знаходиться рухома точка М.

1.2. Знаходження швидкості та прискорення точки при векторному способі визначення її руху

Finding the velocity and accelerating the point at the vector method of determining its motion

1.2.1. Знаходження швидкості точки

Finding the velocity of a point

Нехай точка М рухається по деякій траєкторії. Скористаємось векторним способом визначення руху точки М (див. пункт 1.1.2.1), тобто нам відомо $\vec{r} = \vec{f}(t)$.

Нехай рухома точка М в момент часу t знаходилась у положенні М, радіус-вектор якої $\vec{r}$, а в момент часу t_1 точка попала в положення М₁, радіус-вектор якої $\vec{r}_1$ (рис. 1.9).

Тоді за проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$ точка М отримала

переміщення $\Delta \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}$.

Візьмемо відношення

$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{V}_{\text{сер}}$ і назовемо його

середньою швидкістю.

Середня швидкість характеризує зміну вектора переміщення точки за деякий проміжок часу Δt . Вектор

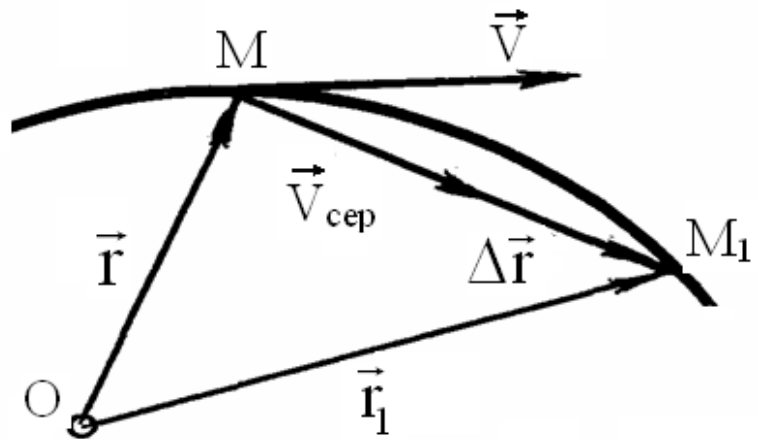


Рис. 1.9

середньої швидкості напрямлений по вектору $\Delta \vec{r}$. При криволінійному русі точки вектор середньої швидкості напрямлений по хорді ММ₁ в сторону руху точки, а при прямолінійному русі – вздовж самої траєкторії.

Якщо зменшувати проміжок часу Δt , то точка М₁ буде наближатись до точки М, а хорда ММ₁ прямує до положення дотичної в точці М (див. рис. 1.8), а середня швидкість буде характеризувати швидкість точки в положенні М. Така швидкість називається *миттєвою швидкістю (instant speed)* або швидкістю точки (*point speed*) в даний момент часу.

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{V}_{\text{сер}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \quad (1.10)$$

Вектор швидкості точки в даний момент часу дорівнює першій похідній по часу від радіуса-вектора точки.

Вектор швидкості напрямлений по дотичній до траєкторії руху в сторону руху точки.

Позначення $\dot{\vec{r}}$ говорить про те, що похідна береться тільки по часу t .

1.2.2. Знаходження прискорення точки

Finding the acceleration point Finding point speed

Нехай в деякий момент часу t точка знаходиться в положенні M і має швидкість $\vec{V}$, а в момент часу t_1 знаходиться в положенні M_1 і має

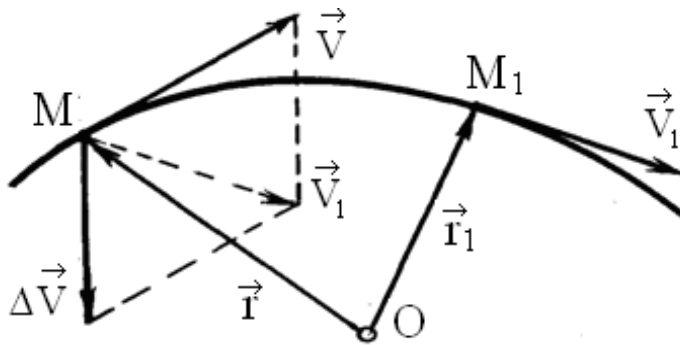


Рис. 1.10

швидкість $\vec{V}_1$ (рис. 1.10).

Тоді за проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$ сталася зміна швидкості

$$\Delta \vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}. \quad (a)$$

Візьмемо відношення

$$\frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \vec{a}_{\text{сеп}} \quad \text{і} \quad \text{назвемо його}$$

середнім прискоренням.

Середнє прискорення точки характеризує зміну вектора швидкості точки за деякий проміжок часу.

Побудуємо вектор $\Delta \vec{V}$. Для цього умовно перенесемо вектор швидкості $\vec{V}_1$ в точку M . Із виразу (а) маємо $\vec{V}_1 = \vec{V} + \Delta \vec{V}$. Вектор $\vec{V}_1$ повинен бути діагоналлю паралелограма, а вектори $\vec{V}$ і $\Delta \vec{V}$ його сторонами.

Вектор середнього прискорення $\vec{a}_{\text{сеп}}$ напрямлений по вектору $\Delta \vec{V}$, а вектор $\Delta \vec{V}$ завжди напрямлений в сторону увігнутості кривої лінії.

Вектор прискорення $\vec{a}$ в даний момент часу дорівнює граничному значенню середнього прискорення точки коли проміжок часу Δt наближається до нуля.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{a}_{\text{сеп}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt}; \quad \vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} \quad (1.11)$$

Прискорення руху точки дорівнює першій похідній по часу від вектора швидкості.

Якщо підставити вираз (1.10) в (1.11), то отримаємо ще одну формулу для обчислення прискорення точки:

$$\vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} \quad (1.12)$$

Прискорення дорівнює другій похідній по часу від радіуса-вектора рухомої точки.

1.3. Швидкість та прискорення точки в прямокутній декартовій системі координат

Speed and acceleration of a point in a rectangular Cartesian coordinate system

1.3.1. Знаходження швидкості точки

Finding the velocity of a point

Нехай точка M рухається відносно деякої системи координат $OXYZ$ згідно рівнянь $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$ (рис. 1.13).

Приймаючи за початок радіуса-вектора $\vec{r}$ рухомої точки M початок даної декартової системи координат, можна записати, згідно (1.5),

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (a)$$

де одиничні орти $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ постійні як по модулю так і за напрямом. Використаємо формулу (1.10). Підставимо вираз (a) в (1.10):

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

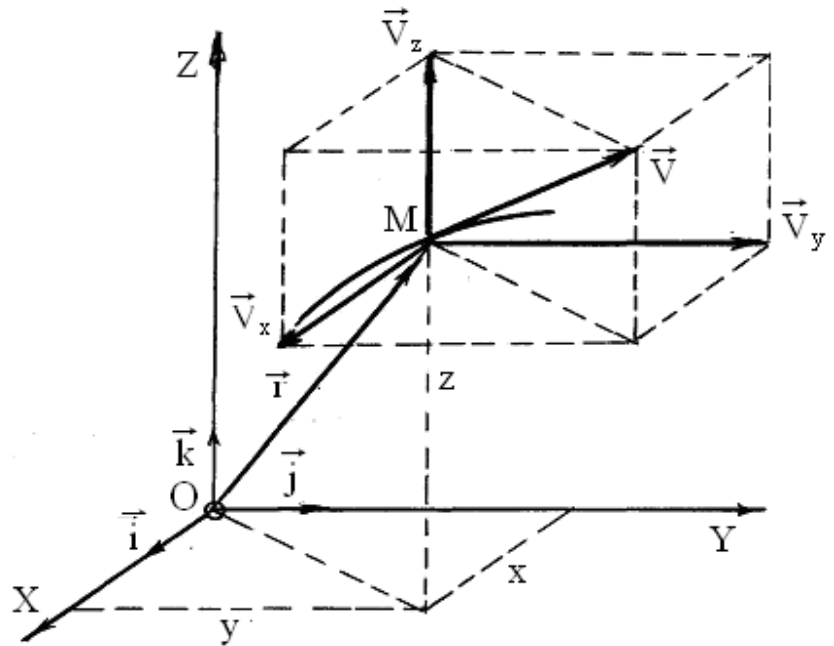


Рис. 1.11

Враховуючи те, що вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ незмінні, то похідні від них дорівнюють нулю, тому для швидкості $\vec{V}$ отримаємо

$$\vec{V} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k} \quad (1.13)$$

Оскільки швидкість $\vec{V}$ є вектор, то його можна розкласти на три складові вектори, які паралельні координатним осям.

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k} \quad (1.14)$$

Порівняючи (1.13) і (1.14), маємо:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \quad (1.15)$$

Проекція швидкості точки на яку-небудь координатну вісь дорівнює похідній по часу відповідної координати точки.

Маючи проекцію швидкості точки на осі координат, можна знайти модуль і напрям вектора швидкості:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \quad (1.16)$$

$$\cos(\hat{\vec{V}}, \vec{i}) = \frac{V_x}{V}; \cos(\hat{\vec{V}}, \vec{j}) = \frac{V_y}{V}; \cos(\hat{\vec{V}}, \vec{k}) = \frac{V_z}{V}. \quad (1.17)$$

1.3.2. Знаходження прискорення точки

Finding the acceleration point

Підставимо вираз (а) для радіуса-вектора $\vec{r}$ в (1.12). Маємо

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \vec{k} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}. \quad (1.18)$$

З другого боку вектор прискорення $\vec{a}$ можна розкласти на три складові

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad (1.19)$$

де a_x, a_y, a_z – проекції прискорення $\vec{a}$ на координатні осі.

Порівнюючи (1.18) і (1.19), маємо

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}; a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}; a_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}. \quad (1.20)$$

Маючи проекції прискорення точки на координатні осі, можна знайти модуль і напрям вектора прискорення:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (1.21)$$

$$\cos(\hat{\vec{a}}, \vec{i}) = \frac{a_x}{a}; \cos(\hat{\vec{a}}, \vec{j}) = \frac{a_y}{a}; \cos(\hat{\vec{a}}, \vec{k}) = \frac{a_z}{a}. \quad (1.22)$$

Лекція 2. Кінематика твердого тіла

Lecture 2. The solid body kinematics

Передмова (Preface)

Як зазначалось раніше, кінематика поділяється на кінематику точки і кінематику абсолютно твердого тіла. В лекції 1 розглядалась кінематика точки.

В цієї лекції будемо розглядати рух абсолютно твердого тіла без урахування діючих на нього сил.

Нагадаємо, що абсолютно твердим тілом називається тіло, відстань між точками якого не змінюється при русі цього тіла. В подальшому замість терміну «абсолютно тверде тіло» ми будемо говорити «тверде тіло», або просто “тіло”.

Як в кінематиці точки, так і в кінематиці твердого тіла, розв’язуються дві основні задачі.

Перша задача кінематики (the first task of kinematics) полягає в тому, щоб знайти рівняння руху твердого тіла по відношенню до вибраної системи відліку. Це означає, що треба записати такі рівняння, за

допомогою яких для довільного моменту часу можна знайти положення твердого тіла відносно вибраної системи відліку.

Друга задача кінематики (the second task of kinematics) полягає в тому, щоб по знайдених рівняннях руху твердого тіла знайти кінематичні характеристики руху тіла в цілому, а потім швидкість і прискорення точок, що належать цьому тілу.

Перед тим, як перейти до вивчення довільного або самого загального випадку руху тіла, спочатку вивчимо прості рухи тіла. До простих рухів тіла відноситься поступальний рух і обертальний рух навколо нерухомої осі.

2.1. Поступальний рух твердого тіла Propelled motion of a solid

Рух тіла називається поступальним, якщо довільний відрізок, узятий у цьому тілі, рухається паралельно самому собі (рис. 2.1).

Використаємо векторний спосіб завдання руху точки. Рух точки А тіла будемо характеризувати радіус-вектором $\vec{r}_A$, а точки В – радіус-вектором $\vec{r}_B$. Запишемо очевидну векторну рівність

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \overrightarrow{AB}, \quad (2.1)$$

де $\overrightarrow{AB}$ – вектор, що з'єднує точки А і В.

Тому, що тіло абсолютно тверде, відстань між точками А і В під час руху тіла не змінюється, тобто довжина $\overrightarrow{AB}$ постійна. Напрямок вектора $\overrightarrow{AB}$ також не змінюється згідно означенням поступального руху.

Таким чином, можна стверджувати: вектор $\overrightarrow{AB} = \text{const}$. (2.2).

Тоді з виразу (2.1), з урахуванням (2.2), можна зробити висновок: траєкторії точок А і В будуть однаковими, лише зміщеними на відстань АВ одна від одної.

Візьмемо першу похідну за часом (*the first derivative of the time*) від виразу (2.1).

$$\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \frac{d\vec{r}_B}{dt} + \frac{d(\overrightarrow{AB})}{dt}.$$

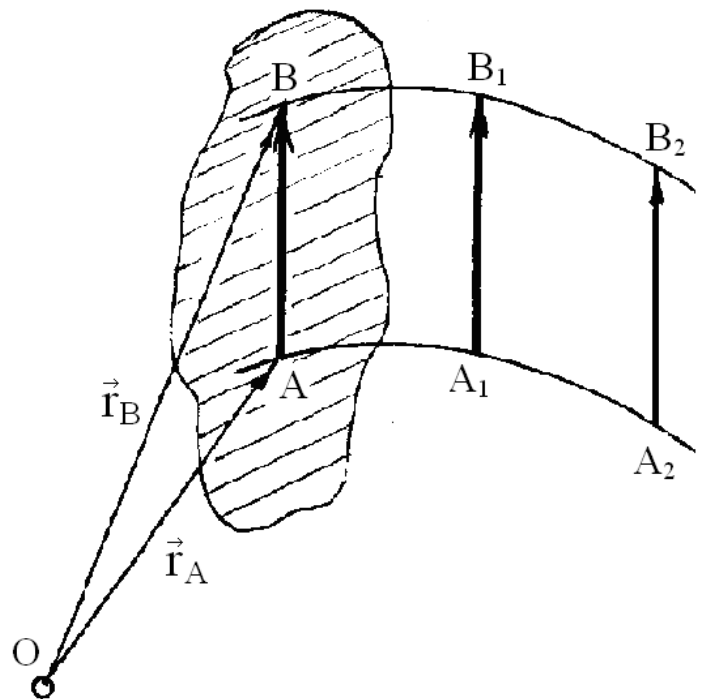


Рис. 2.1.

Але похідна за часом від постійного вектора $\overrightarrow{AB}$ [див.(2.2)] дорівнює нулю.

$$\text{Тоді } \frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt}, \text{ або інакше } \vec{V}_B = \vec{V}_A \quad (2.3).$$

Візьмемо похідну за часом від виразу (2.3). Тоді $\vec{a}_B = \vec{a}_A$ (2.4).

Можемо зробити остаточний висновок:

За поступального руху твердого тіла всі точки тіла рухаються за однаковими траєкторіями, мають однакові швидкості і прискорення.

Тому при розгляді поступального руху достатньо розглянути рух однієї з точок цього тіла (як правило – це центр тяжіння).

Виберемо в тілі будь-яку точку, наприклад, центр тяжіння $C(x,y,z)$ і запишемо рівняння її руху в виді

$$x_c=f_1(t); y_c=f_2(t); z_c=f_3(t). \quad (2.5)$$

Рівняння (2.5) є рівняннями поступального руху твердого тіла.

2.2. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі The rotational motion of a solid body around a stationary axis

Якщо хоча б дві точки тіла залишаються нерухомими при його русі, то такий рух називається обертальним рухом тіла навколо нерухомої осі.

Лінія, що проходить через нерухомі точки тіла, називається осью обертання (рис. 2.2). Лінія O_1O_2 – вісь обертання. Вісь обертання проходить через підшипники, що розміщені в точках O_1 і O_2 .

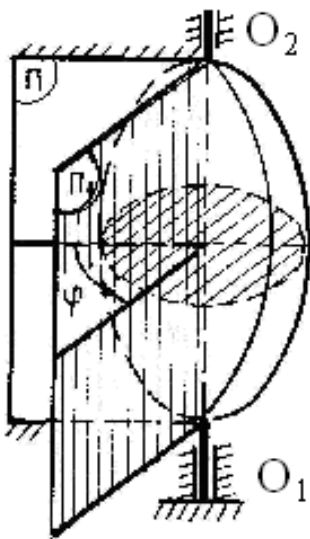


Рис. 2.2

2.2.1. Рівняння обертального руху, кутова швидкість, кутове прискорення

Equation of rotational motion, angular velocity, angular acceleration

Виведемо рівняння руху тіла, що дозволить побудувати положення тіла для довільного моменту часу. Введемо дві площини Π і Π_1 . Площина Π нерухома, а площина Π_1 зв'язана з тілом і якщо тіло обертається, то і ця площина обертається. Між цими площинами проведемо кут φ [рис. 2.2)] і якщо буде відомо, як він змінюється з плином часу, то це і буде *рівняння обертального руху тіла (equation of rotational motion)*:

$$\varphi = \varphi(t). \quad (2.6)$$

Кут φ вимірюється в радіанах.

Нехай у момент часу t кут був φ , а в момент часу t_1 – кут φ_1 .

Тоді за час $\Delta t = t_1 - t$ відбулася зміна кута $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$. Візьмемо відношення $\Delta\varphi/\Delta t$ і назовемо його середньою кутовою швидкістю

$$\omega_{\text{ср}} = \Delta\varphi/\Delta t.$$

Тут $\omega_{\text{сеп}}$ – середня кутова швидкість, що характеризує зміну кута φ за деякий проміжок часу. Розмірність кутової швидкості *рад/с*.

Чим меншим буде проміжок часу Δt , тим ближче за значенням середня кутова швидкість відповідає кутовій швидкості тіла в момент часу t .

Спрямуємо Δt до нуля. Знайдемо границю:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega_{\text{сеп}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega. \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad (2.7)$$

де ω – миттєва кутова швидкість тіла, тобто кутова швидкість тіла (*angular velocity of the body*) в даний момент часу.

Миттєва кутова швидкість тіла в даний момент часу дорівнює першій похідній за часом від функції кута обертання.

У подальшому замість «миттєва кутова швидкість» будемо говорити «кутова швидкість».

Нехай у деякий момент часу t кутова швидкість тіла ω , а в момент часу t_1 – кутова швидкість ω_1 . Тоді за проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$ ми одержимо зміну кутової швидкості $\Delta \omega = \omega_1 - \omega$.

Візьмемо відношення $\Delta \omega / \Delta t$ і назвемо його середнім кутовим прискоренням $\varepsilon_{\text{сеп}} = \Delta \omega / \Delta t$,

де $\varepsilon_{\text{сеп}}$ – середнє кутове прискорення, що характеризує зміну кутової швидкості за деякий проміжок часу. Розмірність кутового прискорення – *рад/с²*.

Спрямуємо Δt до нуля. Знайдемо границю:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_{\text{сеп}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon; \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt}. \quad (2.8)$$

Тут ε – миттєве кутове прискорення, тобто кутове прискорення тіла (*angular acceleration of the body*) в даний момент часу.

Миттєве кутове прискорення тіла в даний момент часу дорівнює першій похідній за часом від функції кутової швидкості.

У подальшому замість «миттєве кутове прискорення» будемо говорити «кутове прискорення».

Якщо вираз (2.7) підставити у вираз (2.8), то

$$\varepsilon = \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}. \quad (2.9)$$

Кутове прискорення дорівнює другій похідній за часом від функції кута обертання.

Додатний знак ε вказує на те, що кутова швидкість ω збільшується, тобто маємо прискорений обертальний рух тіла. Від’ємне значення ε свідчить про те, що обертальний рух сповільнений.

2.2.2. Рівняння рівномірного обертального руху тіла

Equation of uniform rotation of the body

За рівномірного обертання тіла кутова швидкість постійна ($\omega = \text{const}$).

Використаємо формулу (2.7), з якої $d\varphi = \omega \cdot dt$.

Візьмемо інтеграл

$$\int d\varphi = \omega \int dt. \text{ Маємо } \varphi = \omega t + c_1. \quad (\text{a})$$

Постійну інтегрування c_1 знайдемо, використовуючи початкові умови (П.У).

Нехай на початку руху (при $t = 0$) початковий кут повороту дорівнював φ_0 . П.У: $t = 0, \varphi = \varphi_0$.

Початкові умови підставимо у вираз (a). Маємо $c_1 = \varphi_0$. Отже, рівняння рівномірного обертального руху має вигляд

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t. \quad (2.10)$$

$$\text{У разі, коли } \varphi_0 = 0, \text{ маємо } \varphi = \omega t. \quad (2.11)$$

Якщо тіло за деякий час зробило N обертів, то кут φ зв'язаний з кількістю обертів залежністю $\varphi = 2\pi N$.

Раніше ми зтверджували, що розмірність кутової швидкості рад/с.

Але в техніці існує і друга розмірність об/хв. Між цими розмірностями є зв'язок

$$\omega = \pi n / 30; n = 30\omega / \pi, \quad (2.12)$$

де ω – кутова швидкість в рад/с;

n – кутова швидкість (частота обертання) в об/хв.

2.2.3. Рівняння рівнозмінного обертального руху тіла

Equation of equal rotational motion of the body

Рівнозмісний обертальний рух (*equivalent rotational motion*) буде в тому разі, коли кутове прискорення $\varepsilon = \text{const}$.

Використаємо формулу (2.8), з якої $d\omega = \varepsilon dt$.

Проінтегрувавши останній вираз, маємо $\omega = \varepsilon t + c_2$. (б)

Постійну інтегрування знайдемо, використовуючи початкові умови (П.У.)

Нехай на початку руху ($t = 0$) початкова кутова швидкість була ω_0 .

П.У: $t = 0; \omega = \omega_0$.

Тоді з виразу (б), маємо $c_2 = \omega_0$.

$$\text{Отже, } \omega = \omega_0 + \varepsilon t. \quad (2.13)$$

Тут ω – кутова швидкість тіла в даний момент часу;

ω_0 – кутова швидкість тіла в початковий момент часу ($t = 0$).

Підставимо формулу (2.7) в формулу (2.13):

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon t. \text{ Звідси } d\varphi = \omega_0 dt + \varepsilon t dt.$$

Проінтегруємо цей вираз: $\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} + c_3$. П.У: $t = 0 \quad \varphi = \varphi_0$.

Тоді $c_3 = \varphi_0$.

$$\text{Остаточно маємо } \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \quad (2.14)$$

Вираз (2.14) є рівнянням *рівнозмінного обертального руху тіла*.

$$\text{В тому разі, коли } \varphi_0 = 0, \text{ маємо } \varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \quad (2.15)$$

Якщо кутове прискорення $\varepsilon > 0$, то (рівнозмінний) обертальний рух прискорений, якщо $\varepsilon_0 < 0$, то (рівнозмінний) обертальний рух сповільнений.

2.2.4. Швидкість і прискорення точок тіла, що обертається навколо нерухомої осі

The velocity and acceleration of points of the body rotating about a fixed axis

Нехай тіло обертається навколо нерухомої осі з кутовою швидкістю ω і кутовим прискоренням ε (рис.2.3). Нерухома вісь проходить через точку О перпендикулярно рисунку. Вияснимо, чому дорівнює швидкість і прискорення точки, що перебуває на відстані R від осі обертання.

Усі точки твердого тіла рухаються по колових траєкторіях, але з різними радіусами обертання. Тому, що нам відома траєкторія руху, скористуємося натуральним способом визначення руху точки:

$$V = \frac{ds}{dt}.$$

Нехай за елементарний проміжок часу dt тіло повернулося на кут $d\varphi$, а точка А тіла пройшла відстань $dS = R d\varphi$. Тоді

$$V = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega; \quad V = \omega R. \quad (2.16)$$

Швидкість точки (speed point), яка належить тілу, що обертається, дорівнює добутку кутової швидкості тіла на радіус обертання точки.

Вектор швидкості спрямований перпендикулярно радіусу обертання. [див. рис. 2.3]. Тому, що точки тіла рухаються по криволінійних траєкторіях,

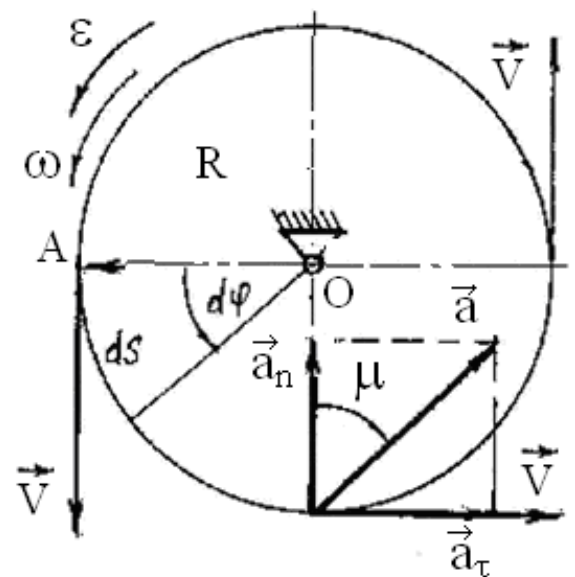


Рис.2.3. До поняття швидкості та прискорення точки

їх прискорення в загальному випадку складаються з дотичного

$$(a_{\tau} = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2} = \ddot{S}) \text{ і нормального } (a_n = \frac{V^2}{\rho}) \text{ прискорень.}$$

Дотичне (тангенціальне) прискорення точки (*tangential acceleration point*)

$$a_{\tau} = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega R) = R \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon R. \quad a_{\tau} = \varepsilon R. \quad (2.17)$$

Тангенціальне (дотичне) прискорення точки, яка належить тілу, що обертається, дорівнює добутку кутового прискорення тіла на радіус обертання точки.

Дотичне прискорення точки спрямоване перпендикулярно радіусу обертання. Якщо обертальний рух тіла прискорений, то дотичне прискорення збігається за напрямом з вектором швидкості, а якщо сповільнений – то вектор дотичного прискорення напрямлений у протилежний бік вектора швидкості.

Нормальне прискорення точки (*normal acceleration point*)

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R; \quad a_n = \omega^2 R. \quad (2.18)$$

Нормальне прискорення точки, яка належить тілу, що обертається, дорівнює добутку квадрата кутової швидкості тіла на радіус обертання точки.

Вектор нормального прискорення точки спрямований по радіусу обертання до центра обертання, т.б. $\vec{a}_n \perp \vec{a}_{\tau}$ (рис.2.3).

$$\text{Повне прискорення точки } \vec{a} = \vec{a}_{\tau} + \vec{a}_n. \quad (2.19)$$

$$\text{Модуль повного прискорення } a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2}. \quad (2.20)$$

З урахуванням формул (2.9) і (2.10), повне прискорення буде

$$a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (2.21)$$

Напрямок повного прискорення можна знайти за формулою

$$\operatorname{tg} \mu = a_{\tau} / a_n = \varepsilon / \omega^2. \quad (2.22)$$

Кут μ однаковий для всіх точок тіла в даний момент часу.

2.2.5. Кутова швидкість і кутове прискорення як вектори Angular velocity and angular acceleration as vectors

У виведених раніше формулах кутова швидкість ω і кутове прискорення ε – це скалярні величини. У подальшому кутову швидкість і кутове прискорення будемо розглядати не тільки як скалярні величини, а як і вектори. Домовимося вектор кутової швидкості (*angular velocity vector*)

$\vec{\omega}$ спрямовувати по осі обертання в той бік, звідки бачимо обертальний рух тіла проти ходу годинникової стрілки. (рис. 2.4). Точка прикладання вектора $\vec{\omega}$ на осі обертання довільна, тобто вектор $\vec{\omega}$ є ковзним вектором.

Вектор кутового прискорення (*angular acceleration vector*) також спрямований по осі обертання. Точка прикладання вектора $\vec{\epsilon}$ довільна, тобто цей вектор також є ковзним вектором. Якщо обертальний рух тіла прискорений, то напрям вектора $\vec{\epsilon}$ збігається з вектором кутової швидкості $\vec{\omega}$ (рис. 2.4, а).

Якщо обертальний рух сповільнений, то вектор $\vec{\epsilon}$ спрямований у протилежний бік вектора $\vec{\omega}$ (рис. 2.4, б).

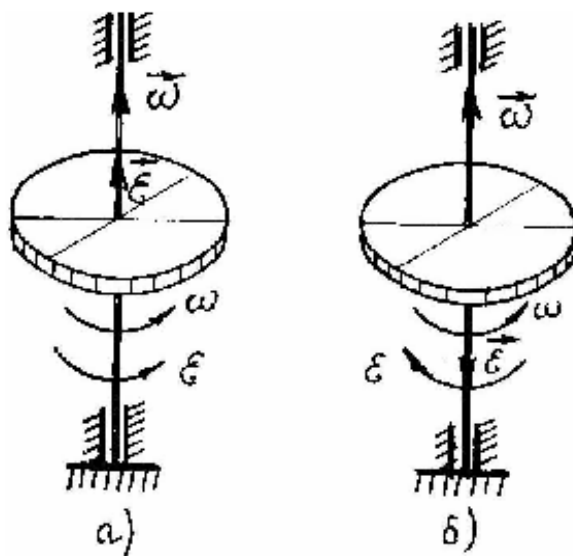


Рис. 2.4. До поняття кутової швидкості та кутового прискорення як векторів

2.2.6. Векторні формули для знаходження швидкості і

прискорення точок тіла, що обертається навколо нерухомої осі

Vector formulas for finding the velocity and acceleration of points of the body rotating around a fixed axis

Модулі швидкості, нормального і дотичного прискорення точки тіла (*Modules of speed, normal and tangent acceleration points*), що обертається, визначаються за формулами (2.16) – (2.19). Безпосередньо з цих формул неможливо встановити напрям швидкості і прискорення точки. В пункті 2.2.5 введено поняття вектора кутової швидкості $\vec{\omega}$ і вектора кутового прискорення $\vec{\epsilon}$. Використовуючи вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{\epsilon}$, запишемо такі формули, з яких для точки можна знайти не тільки модулі, а й напрями швидкості і прискорення.

Нехай точка М належить тілу, що обертається навколо нерухомої осі O_1O_2 з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ і кутовим прискоренням $\vec{\epsilon}$. Візьмемо на цій осі точку О і проведемо радіус-вектор $\vec{r}$ точки М (рис. 2.5). Точка М має швидкість $\vec{V}$, дотичне $\vec{a}_\tau$ і нормальне $\vec{a}_n$ прискорення.

Вектор швидкості $\vec{V}$ можна обчислити за допомогою векторного добутку

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (2.23)$$

Відомо, що вектор швидкості $\vec{V}$ перпендикулярний радіусу $R = CM$. За визначенням векторного добутку, вектор $\vec{V}$, перпендикулярний до

площини, яка проходить через $\vec{\omega}$ і $\vec{r}$, і спрямований так, що з його кінця найкоротший перехід від вектора $\vec{\omega}$ до $\vec{r}$ видно проти ходу годинникової стрілки. Напрямок швидкості $\vec{V}$, одержаний за формулою (2.23), збігається з дійсним напрямом швидкості точки М (рис. 2.5).

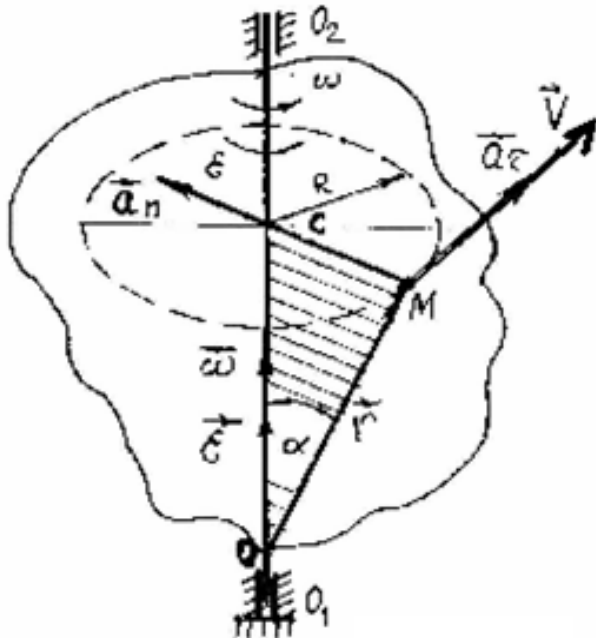


Рис. 2.5. До поняття векторних формул

Отже, з формули (2.23) можна знайти величину і напрям швидкості точки, яка належить тілу, що обертається.

Формула (2.23) називається *формулою Ейлера (Euler's formula)*.

Вектор швидкості (speed vector) будь-якої точки твердого тіла в обертальному русі дорівнює векторному добутку кутової швидкості тіла і радіус-вектора точки.

Швидкість точки в довільному випадку виражається похідною за часом від радіус-вектора $\vec{r}$, т.б.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (2.24)$$

У разі обертального руху тіла навколо нерухомої осі, величина радіус-вектора як відрізка, що з'єднує дві точки твердого тіла, залишається постійною при обертанні тіла. Отже, вираз (2.24) виражає похідну за часом від вектора постійного модуля $\vec{r}$.

Візьмемо похідну за часом від виразу (2.23):

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \right) + \left(\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right); \quad \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{a}; \quad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\epsilon}; \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}.$$

$$\text{Маємо: } \vec{a} = (\vec{\epsilon} \times \vec{r}) + (\vec{\omega} \times \vec{V}).$$

Введемо позначення :

$$\vec{a}_\tau = \vec{\epsilon} \times \vec{r}; \quad (2.25)$$

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{V}, \quad (2.26)$$

де $\vec{a}_\tau$ і $\vec{a}_n$ – відповідно дотичне і нормальне прискорення точки М тіла.

Лекція 3. Миттєвий центр швидкостей. План швидкостей і його властивості

Lecture 3. Instant speed center. Plan of speed and its properties

3.1. Миттєвий центр швидкостей. Instant speed center

В пункті 2.1 ми представили плоский рух тіла як поступальний рух

тіла (*flat body movement*) разом з полюсом і обертальний рух навколо полюса (*rotational motion around the pole*).

Але плоский рух тіла можна розглядати як суму миттєво обертальних рухів відносно деякої системи точок. Покажемо, що дійсно існують такі точки фігури, швидкість яких в даний момент часу дорівнює нулю і тіло в цей час виконує миттєво обертальний рух (*instantaneous rotational movement*).

Нехай тіло в плоскому русі в даний момент часу має кутову швидкість ω , а точка А—швидкість $\vec{V}_A$ (рис. 3.1). Проведемо через точку А перпендикуляр до вектора швидкості $\vec{V}_A$. Візьмемо на цьому перпендикулярі точку Р. Використовуючи формулу (3.4), для точки Р запишемо:

$$\vec{V}_P = \vec{V}_A + \vec{V}_{PA}, \quad (a)$$

де швидкість $\vec{V}_{PA}$ перпендикулярна відрітку АР.

Модуль швидкості (*speed module*)

$$V_{PA} = \omega \cdot AP. \quad (б)$$

Побудуємо векторну рівність (а) в

точці Р. В точці Р швидкість $\vec{V}_A$ і $\vec{V}_{PA}$ напрямлені по одній прямій в протилежні сторони. Тому модуль швидкості точки Р буде $V_P = V_A - V_{PA}$. З урахуванням виразу (б)

$$V_P = V_A - \omega \cdot AP.$$

Міняючи положення точки Р на перпендикулярі, тобто міняючи відстань АР, можна знайти таке положення точки Р, при якому швидкість $V_P = 0$. $0 = V_A - \omega \cdot AP$.

$$\text{Звідси } AP = \frac{V_A}{\omega}. \quad (3.1)$$

Таким чином довели, що існує така точка плоскої фігури, швидкість якої дорівнює нулю. Ця точка називається *миттєвим центром швидкостей (МЦШ)*.

Миттєвим центром швидкостей називається така точка плоскої фігури, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю.

Миттєвий центр швидкостей знаходиться на перпендикулярі до вектора швидкості на відстані $AP = \frac{V_A}{\omega}$.

Вивчимо розподіл швидкостей точок плоскої фігури в тому випадку, коли в даний момент часу відомо положення миттєвого центра швидкостей. Нехай це буде точка Р (рис. 3.2. Візьмемо за полюс (*pole*) точку Р.

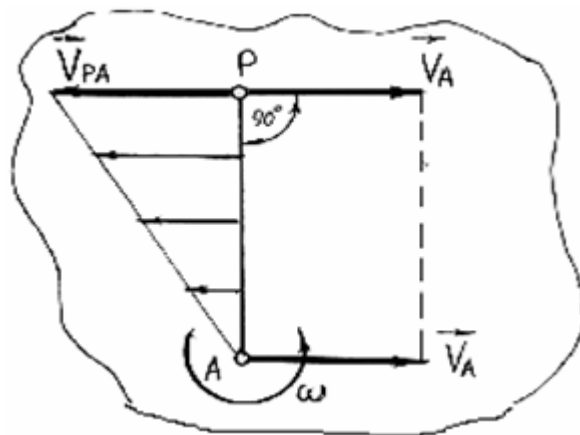


Рис. 3.1

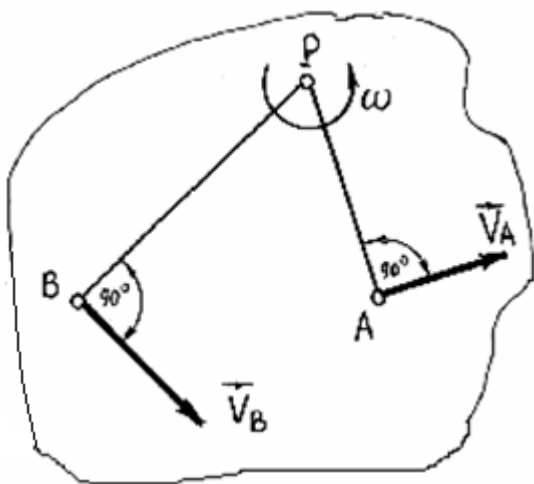


Рис. 3.2

Знайдемо швидкості довільних точок А і

$$B. \vec{V}_A = \vec{V}_P + \vec{V}_{AP}; \quad \vec{V}_B = \vec{V}_P + \vec{V}_{BP}.$$

Але швидкість $V_P = 0$.

$$\text{Тоді } \vec{V}_A = \vec{V}_{AP}; \quad \vec{V}_B = \vec{V}_{BP}.$$

Швидкість $\vec{V}_A \perp AP$; $\vec{V}_B \perp BP$.

Це означає, що

$$\vec{V}_A \perp AP; \quad \vec{V}_B \perp BP.$$

$$V_{AP} = \omega \cdot AP; \quad V_{BP} = \omega \cdot BP. \quad (3.2)$$

$$\text{Тобто } V_A = \omega \cdot AP; \quad V_B = \omega \cdot BP. \quad (3.3)$$

Відрізки AP і BP називаються миттєвими радіусами обертання

(*instant radii of rotation*).

$$\text{Візьмемо відношення } \frac{V_A}{V_B} = \frac{\omega \cdot AP}{\omega \cdot BP}. \text{ Маємо: } \frac{V_A}{V_B} = \frac{AP}{BP}. \quad (3.4)$$

Можна зробити такі висновки:

1. Швидкості точок плоскої фігури в даний момент часу розподіляються так само, як при обертанні фігури навколо осі, що проходить через миттєвий центр швидкості перпендикулярно площині фігури.

2. Модуль швидкості довільної точки плоскої фігури в кожний момент часу дорівнює добутку кутової швидкості тіла на миттєвий радіус обертання точки. Вектор швидкості перпендикулярний миттєвому радіусу обертання.

3. Миттєвий центр швидкостей знаходиться на перетині перпендикулярів до векторів швидкостей в даних точках.

4. Відношення швидкостей двох точок плоскої фігури прямо пропорційне відношенню відстаней цих точок до МЦШ.

5. Кутова швидкість обертання за допомогою м.ц.ш визначається за допомогою формули

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP}. \quad (3.5)$$

Щоб знайти кутову швидкість тіла при його плоскому русі за допомогою м.ц.ш., необхідно швидкість якої-небудь точки тіла розділити на її відстань до МЦШ.

3.1.1. Прийоми знаходження миттєвого центра швидкостей

Means of finding the instant center of speed

Розглянемо деякі випадки плоского руху тіла і прийоми знаходження МЦШ.

1. Нехай відома величина і напрям швидкості точки А. Треба знайти положення м.ц.ш., якщо відомо напрям швидкості точки В (рис. 3.3). Проведемо через точки А і В перпендикуляри до напрямів швидкостей $\vec{V}_A$ і $\vec{V}_B$. В точці Р, перетину перпендикулярів знаходиться миттєвий центр швидкостей тіла. Швидкість точки В і кутова швидкість тіла знаходяться за формулами:

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{AP}{BP}; \quad \omega = \frac{V_A}{AP}.$$

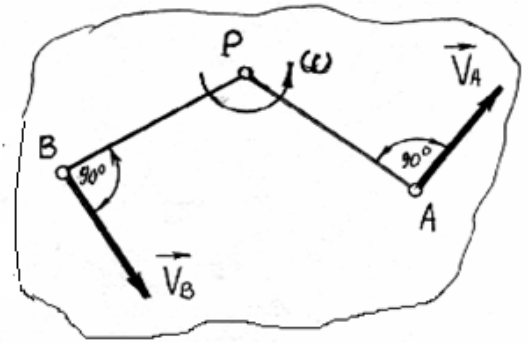


Рис. 3.3

2. Нехай точки лежать на спільному перпендикулярі до швидкостей цих точок, швидкості цих точок паралельні (рис. 3.4). Проведемо лінію через кінці векторів швидкостей до перетину з спільним перпендикуляром. Точка перетину Р є миттєвим центром швидкостей.

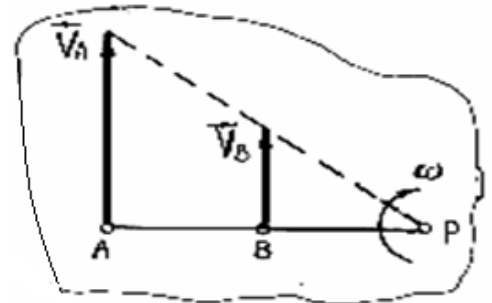


Рис. 3.4

3. Нехай точки лежать на спільному перпендикулярі до швидкостей цих точок, швидкості паралельні, але напрямлені в протилежні сторони (рис. 3.5). Знаходження положення МЦШ подібне пункту 2.

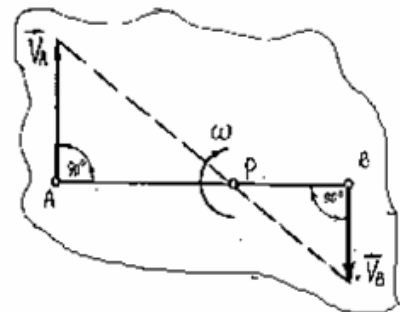


Рис. 3.5

4. Точки на одному перпендикулярі, швидкості їх однакові по величині і напрямку (рис. 3.6). Якщо виконати побудову, аналогічну пункту 2, то отримаємо, що лінії не перетинаються, тобто немає такої точки, відносно якої тіло обертається. Говорять, що МЦШ знаходиться на нескінченності. Це означає, що тіло виконує миттєвий оступальний рух. Швидкості $\vec{V}_A = \vec{V}_B$ і, взагалі, швидкості всіх точок тіла в цей момент часу однакові.

Кутова швидкість

$$\omega = \frac{V_A}{\infty} = 0. \quad (3.6)$$

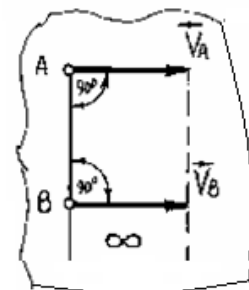


Рис. 3.6

5. Розглянемо рух колеса радіуса R по нерухомій площині (рис. 3.7). Нехай колесо котиться без ковзання по нерухомій лінії.

Нерухома лінія може бути прямолінійною MN, або криволінійною M_1N_1 . Точка Р-точка контакту колеса з нерухомою площиною.

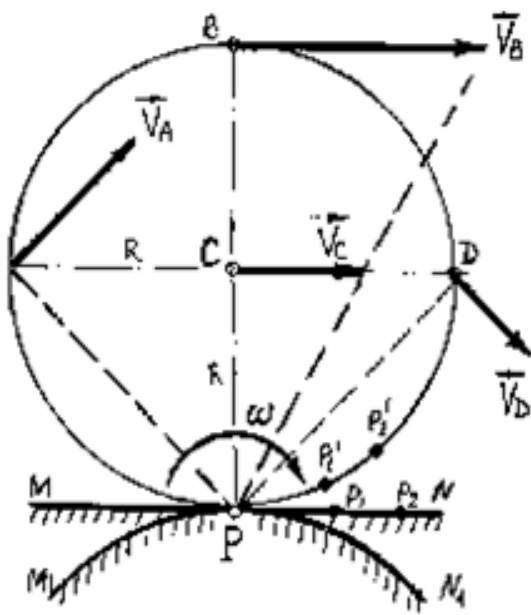


Рис. 3.7

Швидкість точки Р, що належить колесу, повинна бути такою ж самою, як і швидкість точки Р, що належить лінії MN. Але швидкості точок, що належать лінії MN, дорівнюють нулю. Тому швидкість точки Р, що належить колесу, дорівнює нулю.

$$V_P = 0. \quad (3.7)$$

Це означає, що точка контакту Р контуру плоскої фігури з нерухомою лінією MN (M_1N_1) є миттєвим центром швидкостей плоскої фігури.

Кутова швидкість колеса знаходиться з формули

$$\omega = \frac{V_C}{CP}. \quad (3.8)$$

Напрями швидкостей точок А, В, D відповідно перпендикулярні до AP, BP, DP. Знайдемо модуль швидкостей точок А, В, D.

$$\frac{V_A}{V_C} = \frac{AP}{CP}, \text{ але } \frac{AP}{CP} = \frac{R\sqrt{2}}{R} = \sqrt{2}.$$

$$\text{Тоді } V_A = V_C \sqrt{2}. \quad (3.9)$$

$$\frac{V_B}{V_C} = \frac{BP}{CP}; \quad \frac{BP}{CP} = 2. \text{ Тоді } V_B = 2V_C. \quad (3.10)$$

Швидкість точки D по модулю дорівнює швидкості точки А:

$$V_D = V_C \sqrt{2}. \quad (3.11)$$

Крім миттєвого центра швидкостей Р плоскої фігури можна розглядати збіжну з нею точку Р нерухомої площини. Слід миттєвих центрів швидкостей в нерухомій площині називається *миттєвим центром обертання, плоскої фігури*.

Миттєвий центр швидкостей і миттєвий центр обертання (МЦО)-геометрично одна і та ж точка, з тією тільки різницею, що МЦШ - точка рухомої плоскої фігури, а МЦО - точка нерухомої площини, по якій рухається плоска фігура. Миттєвий центр швидкостей і миттєвий центр обертання з часом міняють своє положення. При цьому кожний з них викреслює деяку криву: миттєвий центр швидкостей в площині фігури, а миттєвий центр обертання - в нерухомій площині.

Геометричне місце миттєвих центрів швидкостей називається *рухомою центроїдою*, а геометричне місце миттєвих центрів обертання називається *нерухомою центроїдою*.

Звернемось до рис. 3.7. Так як площина MN нерухома, то швидкості точок контакту P_1, P_2 дорівнюють нулю, т.б. точки P_1, P_2 - є миттєвими центрами обертання. В розглянутому прикладі лінія MN є нерухомою центроїдою. Точкам $P_1, P_2...$ відповідають точки $P'_1, P'_2...$ поверхні (кола) колеса. Це означає, що рухомою центроїдою є коло колеса.

Узагальнюючи цей приклад, можна сказати, що при всякому не поступальному русі плоскої фігури рухома центроїда котиться по нерухомій центроїді.

3.2. План швидкостей і його властивості

Plan of velocities and their properties

Швидкості точок тіла можна знайти графічно, побудовою плану швидкостей.

Планом швидкостей називається діаграма, на якій від одного центра відкладені вектори швидкостей точок плоскої фігури. Ця діаграма дозволяє знайти швидкість будь-якої точки плоскої фігури.

Нехай в деякій момент часу руху плоскої фігури S швидкості її точок A, B, C і D - відомі (рис. 3.8, а).

Відкладемо від довільної точки O (рис. 3.8, б) вектори швидкостей цих точок в вибраному масштабі, так, що

$$\begin{aligned}\vec{V}_A &= \vec{oa}; \quad \vec{V}_B = \vec{ob}; \\ \vec{V}_D &= \vec{od}; \quad \vec{V}_C = \vec{oc}.\end{aligned}\quad (3.12)$$

і з'єднаємо a, b, c, d відрізками прямих.

Діаграма, яку отримали, називається *планом швидкостей*.

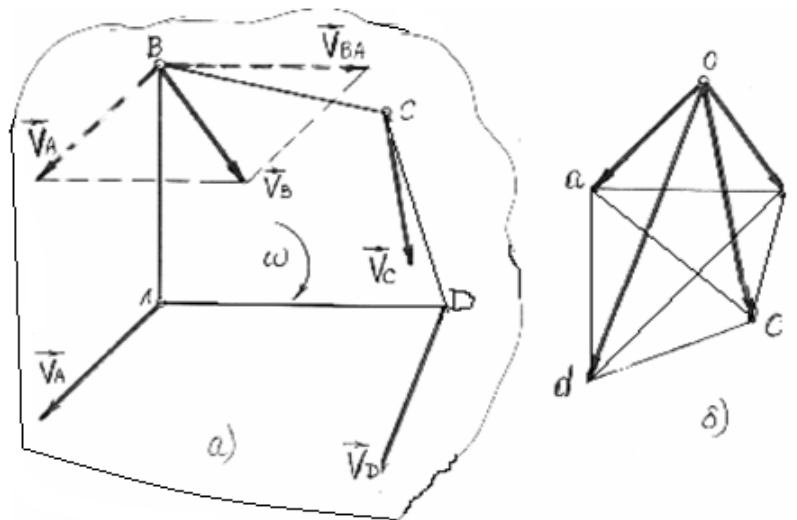


Рис. 3.8,

Відрізки oa, oc, od називаються *променями*, а точки a, b, c, d - *вершинами плану швидкостей*.

Розглянемо властивості плану швидкостей.

З трикутника oab плану швидкостей маємо:

$$\vec{ob} = \vec{oa} + \vec{ab}. \quad (a)$$

Якщо взяти точку A за полюс, то швидкість точки B плоскої фігури буде:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}. \quad (b)$$

Враховуючи позначення (3.12), вираз (b) перепишемо:

$$\vec{ob} = \vec{oa} + \vec{V}_{BA}. \quad (c)$$

З порівняння виразів (a) і (c), маємо:

$$\vec{ab} = \vec{V}_{BA}. \quad (3.13)$$

Виконуючи аналогічні операції по відношенню до других точок плоскої фігури отримаємо:

$$\vec{bc} = \vec{V}_{CB}, \vec{cd} = \vec{V}_{DC}, \vec{da} = \vec{V}_{AD}, \vec{ac} = \vec{V}_{CA}, \vec{bd} = \vec{V}_{DB} \quad (3.14)$$

тобто відрізки, що з'єднують вершини плану швидкостей, геометрично рівні обертальній швидкості відповідної точки плоскої фігури навколо другої точки, як навколо полюса.

Тому маємо:

$$\begin{aligned} ab &= AB \cdot \omega \quad i \quad ab \perp AB; \\ bc &= BC \cdot \omega \quad i \quad bc \perp BC; \\ cd &= CD \cdot \omega \quad i \quad cd \perp CD; \\ ad &= AD \cdot \omega \quad i \quad ad \perp AD; \\ bd &= BD \cdot \omega \quad i \quad bd \perp BD; \\ ac &= AC \cdot \omega \quad i \quad ac \perp AC. \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\text{Крім цього: } \frac{ab}{AB} = \frac{bc}{BC} = \frac{cd}{CD} = \dots = \omega. \quad (3.16)$$

Вираз (3.16) дозволяє за допомогою плану швидкостей знайти кутову швидкість плоскої фігури.

Всі відрізки прямих, що з'єднують вершини плану швидкостей, пропорційні відрізкам прямих, що з'єднують відповідні точки плоскої фігури, і повернуті відносно останніх на кут 90° в сторону обертального руху плоскої фігури.

План швидкості можна побудувати не тільки для окремої плоскої фігури, але і для плоского механізму, який є сукупністю взаємозалежних плоских фігур. При цьому, формули (3.15) і (3.16) справедливі тільки для кожної ланки плоского механізму окремо, але не для всього механізму в цілому.

3.2.1. Побудова плану швидкості. Building a speed plan

Розв'яжемо графічно таку задачу. Нехай тіло виконує плоский рух. Нехай відома швидкість точки А по модулю і напрямку. В точці «В» фігури відомо тільки лінія MN, по якій напрямлена швидкість цієї точки, а в других точках фігури невідомі ні модулі, ні напрями швидкостей. Необхідно знайти модуль і напрям швидкості всіх точок плоскої фігури (рис. 3.9).

З довільної точки O (рис. 3.9, б), відкладемо відрізок $\vec{oa} = \vec{V}_A$ і проведемо пряму, паралельну MN . З властивостей плану швидкостей випливає, що відрізки, які з'єднують вершини плану швидкостей, перпендикулярні відрізкам, які з'єднують відповідні точки фігури, тобто $ab \perp AB$ і т.д. Щоб знайти положення вершини b плану швидкостей, проведемо з вершини a пряму, перпендикулярну AB . Точка b знайдеться на перетині цього перпендикуляра і прямої, по якій напрямлена швидкість точки B .

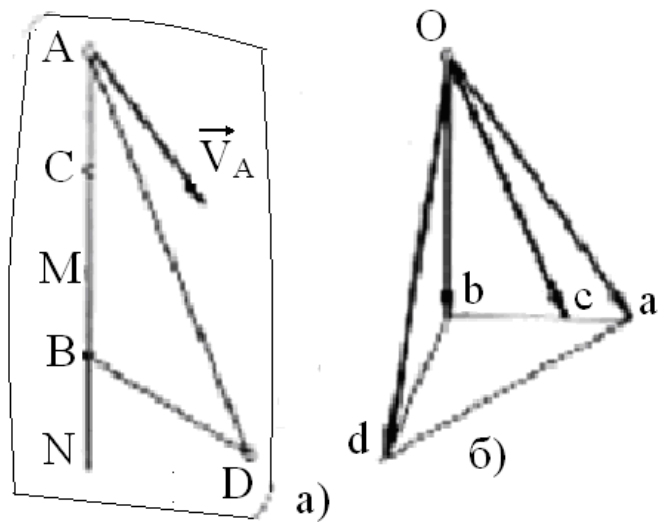


Рис. 3.9

Таким чином, промінь $\vec{ob}$ плану швидкостей рівний $\vec{V}_B$, знайдений.

Швидкість іншої точки, наприклад D , і відповідний їй промінь od плану швидкостей можна знайти, з'єднавши цю точку з точками A і B прямими на плоскій фігурі і провівши перпендикуляри з точок a і b плану швидкостей до AD і BD до їх перетину. Так знайдеться положення вершини d плану швидкостей і відрізок od , який визначає швидкість точки D .

Побудова, яка виконана для знаходження $\vec{V}_D$ точки D , ґрунтується на наступному: $\vec{V}_D = \vec{V}_A + \vec{V}_{DA}$, $\vec{V}_D = \vec{V}_B + \vec{V}_{DB}$, де за полюси взяти точки A і B .

Використовуючи позначення (3.13), маємо :

$$\vec{od} = \vec{oa} + \vec{ad}, \vec{od} = \vec{ob} + \vec{bd},$$

де $\vec{ad} \perp AD$, $\vec{bd} \perp BD$.

Побудову плану швидкостей можна продовжити для будь-якої кількості точок плоскої фігури.

Якщо промені $\vec{oa}$ і $\vec{ob}$ побудовані і є необхідність знайти швидкість точки C , яка лежить на прямій AB , наприклад, $\frac{1}{3}AB$ від точки A . Скористуємося властивістю 2 швидкостей точок фігури (див. пункт 3.2, формула 3.16)

$\frac{AC}{BC} = \frac{ac}{bc}$. Тому вершина c плану швидкостей буде розміщена на прямій ab в $\frac{1}{3}ab$ від точки a (рис. 3.9, б).

Побудову плану швидкостей для механізмів ми розглянемо в подальшому при розв'язанні конкретних задач.

Лекція 4. Визначення прискорення точок плоскої фігури. План прискорень

Lecture 4. Determination of the acceleration of points of a plane figure. Plan of acceleration

4.1. Прискорення точок тіла при його плоскому русі

Acceleration of the points of the body with its flat motion

Ми розглядали різні способи знаходження швидкостей точок тіла при його плоскому русі. Не менш важливою задачею є визначення прискорення точок тіла при його плоскому русі.

Нехай тіло виконує плоский рух. Відомі його кутова швидкість (*angular velocity*) $\vec{\omega}$ і кутове прискорення (*angular acceleration*) $\vec{\epsilon}$. Вектори кутової швидкості (*angular velocity vector*) $\vec{\omega}$ і кутового прискорення (*angular acceleration vector*) $\vec{\epsilon}$ напрямлені перпендикулярно площині рухомої фігури.

На рис. 4.1 (a) вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{\epsilon}$ співпадають по напрямку, тобто вважається, що плоска фігура (*flat figure*) виконує прискорений рух (*accelerated movement*).

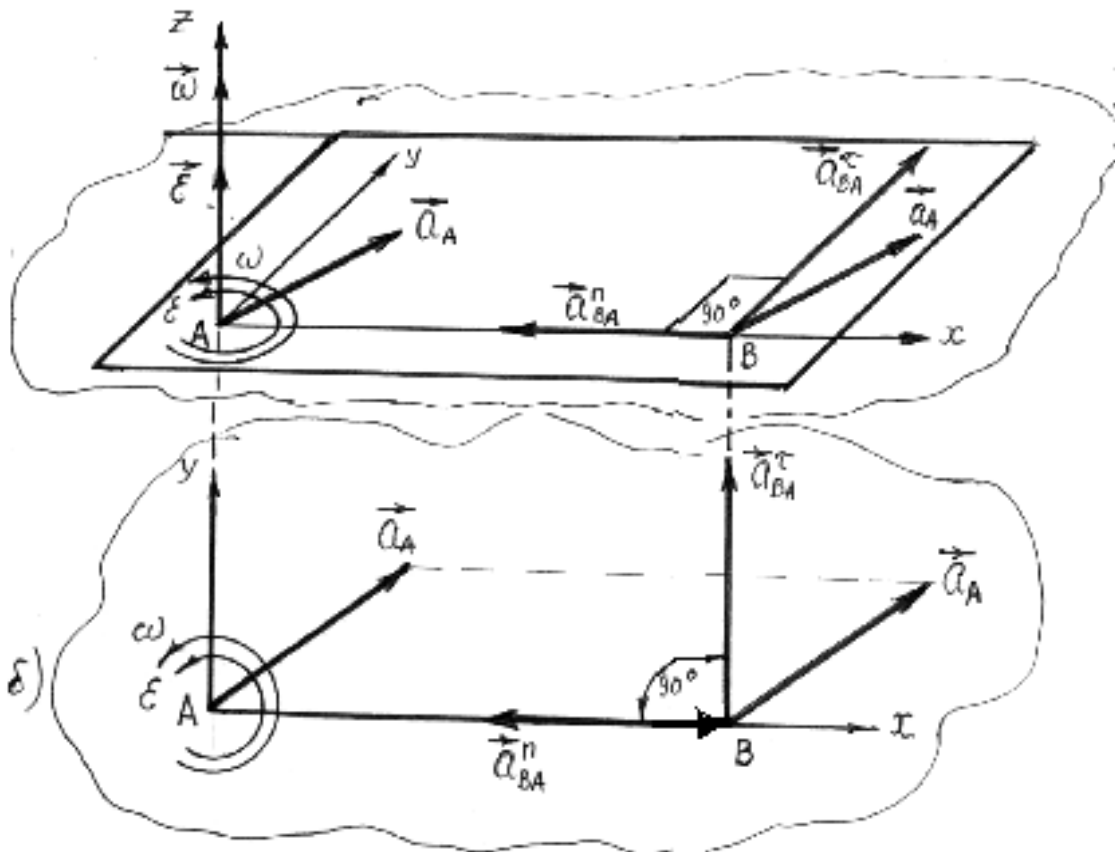


Рис. 4.1. Прискорення точок тіла при його плоскому русі

Візьмемо за полюс точку А, прискорення $\vec{a}_A$ якої відоме. Знайдемо прискорення іншої точки В цього тіла.

Використаємо формулу пункту 3.2.1.

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + (\vec{\omega} \times \vec{AB}) \quad (a)$$

Підкреслимо, що кутова швидкість $\vec{\omega}$ і вектор $\vec{AB}$ є величини змінні, тобто залежать від часу. Модуль вектора $\vec{AB}$ при русі тіла не змінюється, але змінюється його напрям.

Візьмемо похідну по часу від векторного виразу (а):

$$\frac{d\vec{V}_B}{dt} = \frac{d\vec{V}_A}{dt} + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{AA}\right) + (\vec{\omega} \times \frac{d\vec{AA}}{dt}).$$

В цьому виразі $\frac{d\vec{V}_B}{dt} = \vec{a}_B$, $\frac{d\vec{V}_A}{dt} = \vec{a}_A$ – відповідно прискорення точок В і А, $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$ – вектор кутового прискорення, $\frac{d\vec{AA}}{dt} = \vec{V}_{BA}$ – обертальна швидкість точки В навколо точки А.

Таким чином, прискорення точок А і В зв'язані між собою співвідношенням:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + (\vec{\varepsilon} \times \vec{AA}) + (\vec{\omega} \times \vec{V}_{BA}) \quad (б)$$

В розділі 2 ми розглядали обертальний рух тіла навколо нерухомої осі і представили дотичне і нормальне прискорення точки в вигляді векторного добутку (див. формули 2.17, 2.18).

Векторний добуток $(\vec{\varepsilon} \times \vec{AB})$ в даному випадку дає вектор, який лежить в площині фігури і перпендикулярний вектору $\vec{AA}$. Позначимо цей вектор через $\vec{a}_{AA}^{\tau}$ і назовемо дотичним прискоренням точки (*tangential acceleration point*) В при обертанні її навколо полюса А.

$$\vec{a}_{AA}^{\tau} = \vec{\varepsilon} \times \vec{AB}, \quad \vec{a}_{AA}^{\tau} \perp \vec{AA} \quad (4.1)$$

В зв'язку з тим, що вектор $\vec{\varepsilon}$ завжди перпендикулярний вектору $\vec{AB}$ (рис. 4.1, а), то модуль прискорення $\vec{a}_{AA}^{\tau}$ можна знайти з формули:

$$a_{AA}^{\tau} = \varepsilon \cdot AB. \quad (4.2)$$

Напрямок дотичного прискорення $\vec{a}_{AA}^{\tau}$ показаний на рис. 4.1, а і 4.1, б. На рис. 4.1, б показано вид фігури з додатного напрямку осі AZ.

Вектор обертальної швидкості $\vec{V}_{BA}$ точки В при обертанні її навколо полюса А напрямлений перпендикулярно вектору $\vec{AB}$ і лежить в площині плоскої фігури.

Векторний добуток $(\vec{\varepsilon} \times \vec{AA})$ дає вектор, який лежить в площині фігури і напрямлений по $\vec{AB}$ до полюса А. Позначимо цей вектор через $\vec{a}_{AA}^n$ і назовемо його нормальним прискоренням точки (*normal acceleration point*) В при обертанні її навколо полюса А (рис. 4.1).

$$\vec{a}_{BA}^n = \vec{\omega} \times \vec{V}_{BA}. \quad (4.3)$$

Вектор швидкості $\vec{V}_{BA}$ завжди лежить в площині фігури, а вектор кутової швидкості $\vec{\omega}$ перпендикулярний цій площині фігури, тому кут між цими векторами 90° .

Модуль нормального прискорення буде $\dot{a}_{AA}^n = \omega \cdot V_{BA}$. Враховуючи те, що $V_{BA} = \omega \cdot AB$ (див. формулу 3.2), маємо:

$$\dot{a}_{AA}^n = \omega^2 \cdot AB. \quad (4.4)$$

Вектор нормального прискорення довільної точки плоскої фігури завжди напрямлений до вибраного полюса.

Співвідношення (б) між векторами прискорень точок плоскої фігури, з урахуванням позначень (4.1) і (4.3), запишеться у вигляді:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau. \quad (4.5)$$

Прискорення довільної точки B плоскої фігури дорівнює геометричній сумі прискорення полюса, нормального і дотичного прискорень цієї точки при обертанні її навколо полюса.

Але геометрична сума нормального і дотичного прискорень є прискоренням точки при її обертанні навколо полюса A:

$$\vec{a}_{BA} = \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau. \quad (4.6)$$

Вектори $\vec{a}_{BA}^n$ і $\vec{a}_{BA}^\tau$ взаємно перпендикулярні:

$$\vec{a}_{BA}^n \perp \vec{a}_{BA}^\tau. \quad (4.7)$$

Прискорення $\vec{a}_{BA}$ є діагональ прямокутника, сторонами якого є прискорення $\vec{a}_{BA}^n$ і $\vec{a}_{BA}^\tau$. Модуль прискорення $\vec{a}_{BA}$ знаходиться з формули:

$$a_{BA} = \sqrt{(a_{BA}^n)^2 + (a_{BA}^\tau)^2}. \quad (4.8)$$

З урахуванням виразів (4/2-3.29) і (4/3-3.31), маємо:

$$a_{BA} = AB \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (4.9)$$

Співвідношення (4.5-3.32) можна записати в іншому вигляді:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}. \quad (4.10)$$

Щоб побудувати вектор прискорення точки B, доцільно спочатку отримати вектор $\vec{a}_{BA}$ як діагональ прямокутника, побудованого на дотичному і нормальному прискореннях точки B при обертальному русі навколо полюса A. Потім на векторі $\vec{a}_{BA}$ і векторі $\vec{a}_A$, перенесеному в точку B, побудувати паралелограм, діагональ якого по модулю і напрямку відповідає вектору прискорення точки B (рис. 4.2). Кут між векторами (angle between vectors) $\vec{a}_{BA}$ і $\vec{AB}$ позначимо через μ (рис. 4.2). Тоді напрям прискорен-

ня $\vec{a}_{BA}$ знайдемо з виразу:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{a_{BA}^{\tau}}{a_{BA}^n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (4.11)$$

З цього виразу видно, що для всіх точок плоскої фігури кут μ однаковий, тому що відношення ε/ω^2 не залежить від положення точок плоскої фігури.

На рис. 4.2 показаний механізм, у якого ланка АВ здійснює плоский рух. Нехай кривошип ОА радіуса r обертається з кутовою швидкістю ω_{OA} і кутовим прискоренням ε_{OA} . Прискорення точки А:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{AO}^{\tau} + \vec{a}_{AO}^n. \quad (4.12)$$

Згідно умови задачі прискорення точки А можна знайти. Щоб знайти прискорення точки В, необхідно за полюс взяти точку А, прискорення якої відоме. Тоді згідно (4.5) і (4.12) маємо:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{AO}^n + \vec{a}_{AO}^{\tau} + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^{\tau}. \quad (4.13)$$

Якби точка В належала повзуну, то напрям її прискорення $\vec{a}_B$ був би відомий. В даному випадку точка В належить кривошипу ВК, який обертається навколо точки К.

В цьому русі прискорення точки В можна розглядати як геометричну суму нормального і дотичного прискорень.

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{BK}^n + \vec{a}_{BK}^{\tau}. \quad (4.14)$$

Підставмо (4.14) в (4.13):

$$\vec{a}_{BK}^n + \vec{a}_{BK}^{\tau} = \vec{a}_{AO}^n + \vec{a}_{AO}^{\tau} + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^{\tau}. \quad (4.15)$$

Рівняння (4.15) є найбільш повним векторним рівнянням (*complete vector equation*) для знаходження прискорення точки В.

Запишемо формули, по яким знаходяться модулі окремих складових векторів прискорень виразу (4.15):

$$\dot{a}_{AO}^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA; \quad \dot{a}_{AO}^{\tau} = \varepsilon_{OA} \cdot AO; \quad a_{BK}^n = \frac{V_B^2}{BK} = \omega_{BK}^2 \cdot BK;$$

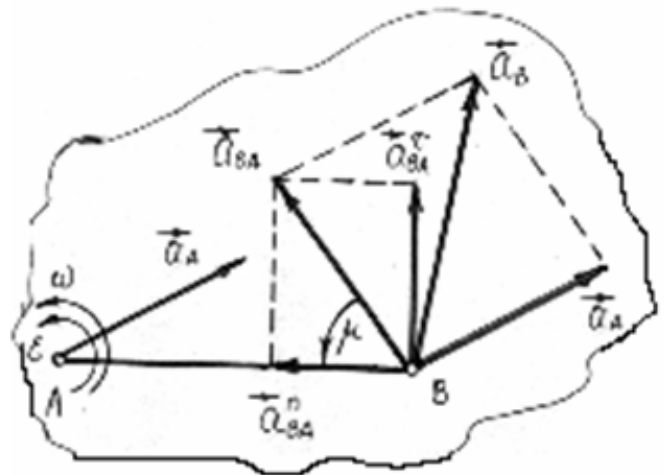


Рис. 4.2

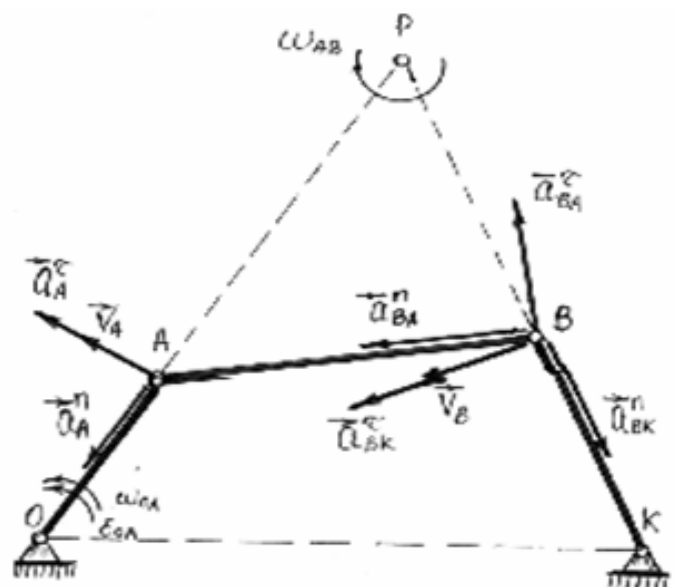


Рис. 4.3

$$\dot{a}_{BK}^{\tau} = \varepsilon_{BK} \cdot BK; \dot{a}_{AA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB; \dot{a}_{AA}^{\tau} = \varepsilon_{AB} \cdot AB.$$

Проаналізуємо, які величини відомі і невідомі в векторній рівності (4.15). Нормальне і дотичне прискорення точки А відомі. В рівності (4.15) підкреслимо їх двома рисками. Прискорення $\dot{a}_{AA}^n$ і $\dot{a}_{AK}^n$ можна знайти, якщо заздалегідь знайти кутову швидкість ω_{AB} ланки АВ і швидкість точки В. Це можна зробити за допомогою миттєвого центра швидкостей (на рис. 4.3 - це точка Р) або плану швидкостей. Таким чином, прискорення $\dot{a}_{AA}^n$ і $\dot{a}_{AK}^n$ також відомі. Підкреслимо їх в виразі (4.15) двома рисками. В векторному виразі (4.15) залишились невідомими модулі прискорень $\ddot{a}_{AA}^{\tau}$ і $\ddot{a}_{AK}^{\tau}$. Напрями цих прискорень відомі, вони відповідно перпендикулярні векторам $\vec{a}_{AA}^n$ і $\vec{a}_{AK}^n$: $\vec{a}_{BA}^n \perp \vec{a}_{BA}^{\tau}$; $\vec{a}_{BK}^n \perp \vec{a}_{BK}^{\tau}$.

В рівнянні (4.15) ці вектори підкреслимо однією рисою.

Таким чином, в векторному рівнянні (4.15) маємо дві невідомі величини. Це $\dot{a}_{AA}^{\tau}$ і $\dot{a}_{AK}^{\tau}$.

Для розв'язання векторного рівняння (4.15) існує декілька способів:

1) аналітичний спосіб (*analytical method*); 2) графічний спосіб (план прискорень) *grafical method*.

Аналітичний спосіб полягає в тому, що векторне рівняння (4.15) проектується на дві координатні осі. В цьому випадку отримуємо два скалярних рівняння для знаходження двох прискорень.

Графічний спосіб полягає в побудові плану прискорень.

Більш детально ці способи будуть розглянуті при розв'язуванні конкретних задач.

Прискорення точок плоскої фігури можна знаходити за допомогою миттєвого центра прискорень.

4.2. Миттєвий центр прискорень. Instant center of acceleration

Миттєвим центром прискорень (МЦП) називається точка плоскої фігури, прискорення якої в даний момент часу дорівнює нулю.

Доведемо, що така точка існує. Нехай відомо прискорення $\ddot{a}_A$ точки А і відомі кутова швидкість ω і кутове прискорення ε плоскої фігури (рис. 4.4).

Через точку А проведемо промінь під кутом μ до вектора прискорення. Кут μ будемо відкладати від вектора прискорення в напрямі, що співпадає з напрямом кутового прискорення ε . Значення кута μ знайдемо з виразу $\operatorname{tg} \mu = \varepsilon / \omega^2$. На цьому промені візьмемо точку Q. Знайдемо прискорення точки Q. Візьмемо за полюс точку А. Тоді згідно (4.10) $\vec{a}_Q = \vec{a}_A + \vec{a}_{QA}$.

Згідно (4.9) модуль прискорення $a_{QA} = AQ \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$, а напрям прискорення

$\vec{a}_{QA}$ складає кут μ з відрізком AQ (див. 4.11).

Прискорення $\vec{a}_A$ і $\vec{a}_{QA}$ напрямлені по одній прямій в протилежні сторони. Тому прискорення точки Q буде $a_Q = a_A - a_{QA}$ або

$$a_Q = a_A - AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

На промені можна підібрати таке положення точки Q, щоб її прискорення було рівним нулю. $a_Q = 0$. Тоді $a_A - AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = 0$.

$$\text{Маємо } AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}. \quad (4.16)$$

Таким чином довели, що існує така точка плоскої фігури, прискорення якої в даний момент часу дорівнює нулю.

Щоб знайти положення миттєвого центра прискорень, необхідно:

1) по формулі $\operatorname{tg} \mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$ знайти кут μ ;

2) під кутом μ , що відкладається від відомого вектора $\vec{a}_A$ прискорення точки в сторону прискорення ε , провести промінь;

3) на промені на відстані $AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$ взяти точку Q, яка і буде миттєвим центром прискорень.

Якщо миттєвий центр прискорень прийняти за полюс, то прискорення довільної точки плоскої фігури в даний момент знаходиться як прискорення цієї точки при її обертальному русі навколо МЦП.

Дійсно, прийнявши за полюс точку Q – миттєвий центр прискорень, для довільних точок A і B плоскої фігури, отримаємо:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_Q + \vec{a}_{AQ}; \quad \vec{a}_B = \vec{a}_Q + \vec{a}_{BQ}.$$

$$\text{Так як } a_Q = 0, \text{ то } \vec{a}_A = \vec{a}_{AQ} \text{ і } \vec{a}_B = \vec{a}_{BQ},$$

де $\vec{a}_{AQ} = \vec{a}_{AQ}^n + \vec{a}_{AQ}^\tau$, $\vec{a}_{BQ} = \vec{a}_{BQ}^n + \vec{a}_{BQ}^\tau$ – прискорення точок A і B при їх обертальному русі навколо МЦП.

З цих співвідношень випливає, що

$$a_A = a_{AQ} = AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}; \quad (a)$$

$$a_B = a_{BQ} = BQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (б)$$

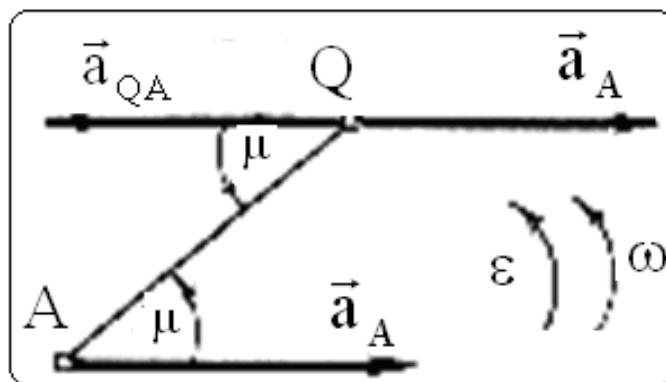


Рис. 4.4

Розділимо почленно (а) на (б):

$$\frac{a_A}{a_B} = \frac{AQ}{BQ}. \quad (4.17)$$

Модулі прискорень точок плоскої фігури в кожний момент часу пропорційні відстаням цих точок до м.ц.п., а вектори прискорень утворюють один і той же кут μ з відрізками, що з'єднують ці точки з МЦП.

На рис. 4.5 показані положення Q – миттєвого центра прискорень і напрямки прискорень точок A і B плоскої фігури.

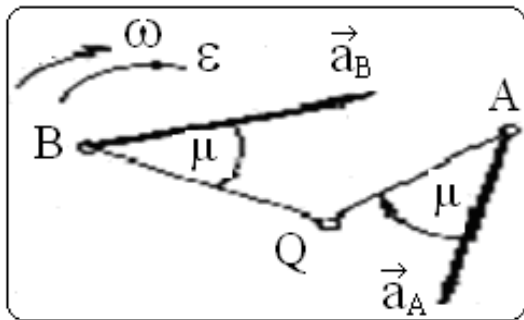


Рис. 4.5

4.2.1. Визначення положення миттєвого центра прискорень Definition of the momentary center of acceleration

При визначенні положення МЦП плоскої фігури залежно від початкових даних можна використати або умови (4.11) і (4.16), або той факт, що вектори прискорень точок плоскої фігури

складають з напрямом на МЦП один і той же кут.

Розглянемо три основні випадки визначення положення миттєвого центра прискорень.

Випадок 1. По умові задачі відомі слідуючі величини:

1. Модуль і напрям вектора прискорення однієї з точок плоскої фігури.
2. Модуль кутової швидкості плоскої фігури.
3. Модуль і напрям кутового прискорення плоскої фігури.

Знайдемо положення МЦП плоскої фігури якщо відомі, прискорення $\vec{a}_A$ точки A, кутове прискорення ϵ і кутова швидкість ω .

В цьому випадку положення миттєвого центра прискорень можна

знайти по формулам: $\mu = \arctg \frac{|\epsilon|}{\omega^2}$; $AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}}$.

Залежно від величини і напрямів ω і ϵ розглянемо три окремих варіанта цього випадку:

а) $\omega \neq 0$, $\epsilon = 0$.

Кутове прискорення ϵ дорівнює нулю або при рівномірному обертанні плоскої фігури навколо полюса, або в той момент часу, коли кутове прискорення ϵ змінює свій знак. В цьому випадку формули (4.11), (4.16)

будуть мати вигляд: $\mu = \arctg 0 = 0$, $AQ = \frac{a_A}{\omega^2}$.

Таким чином, МЦП в даному випадку лежить на продовженні вектора $\vec{a}_A$ і вектори прискорень всіх точок плоскої фігури мають напрям до МЦП. Q (рис. 4.6, а).

б) $\omega = 0, \varepsilon \neq 0$.

Такий випадок руху плоскої фігури можливий, якщо кутова швидкість ω змінює свій знак. Для цього випадку положення миттєвого центра прискорень Q знаходиться з виразів:

$$\mu = \arctg \infty = 90^\circ; AQ = a_A / \varepsilon.$$

Кут μ відкладається в напрямі кутового прискорення. Якщо при русі плоскої фігури $\omega = 0, \varepsilon \neq 0$ і відомі прискорення двох її точок, то МЦП знайдеться на перетині перпендикулярів до відомих векторів прискорень (рис. 4.6, б).

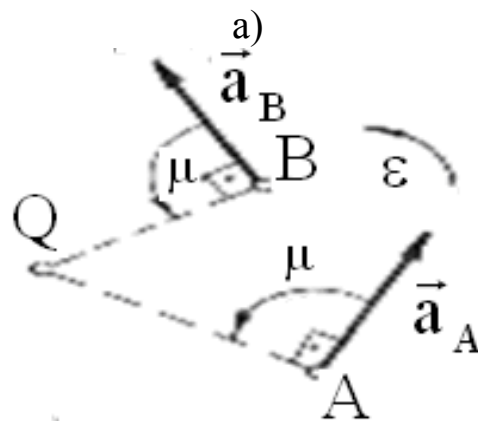
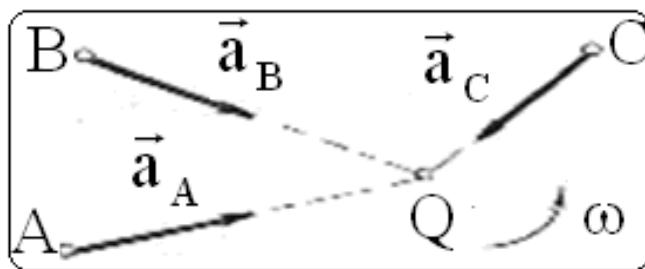
в) $\omega = 0, \varepsilon = 0$.

В цьому випадку прискорення всіх точок плоскої фігури при обертанні їх навколо полюса дорівнюють нулю, отже, прискорення кожної її точки дорівнює прискоренню полюса і миттєвий центр прискорень відсутній.

Випадок 2. По умові задачі відомі модулі і напрямки прискорень двох точок плоскої фігури.

В даному випадку ні величина кута μ , ні напрям кутового прискорення плоскої фігури не відомі. Але і те і друге можна знайти, якщо знайти прискорення однієї з точок плоскої фігури в її обертальному русі навколо другої точки як навколо полюса.

Нехай прискорення точок A і B плоскої фігури відомі (рис. 4.7). Візьмемо за полюс точку A. Тоді прискорення точки B можна зв'язати з прискоренням точки A виразом $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}$. Побудуємо при точці B у відповідному масштабі паралелограм прискорень по заданій діагоналі $\vec{a}_B$ і одній з сторін $\vec{a}_A$. Друга сторона паралелограма визначить прискорення $\vec{a}_{BA}$ при обертанні точки B навколо точки A. Прискорення $\vec{a}_{BA}$ складає кут $\mu = \arctg |\varepsilon| / \omega^2$ з відрізком AB, який з'єднує точку B з полюсом A. Кут μ відкладається в напрямі від вектора $\vec{a}_{BA}$ до відрізка AB. Це дає змогу знайти напрям кутового прискорення ε . Відкладемо під кутом μ від векторів прискорень точок A і B два промені і продовжимо їх до перетину в точці Q, яка і буде



б)
Рис. 4.6

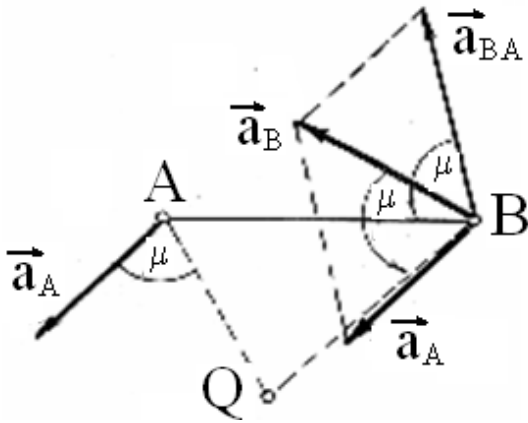


Рис. 4.7

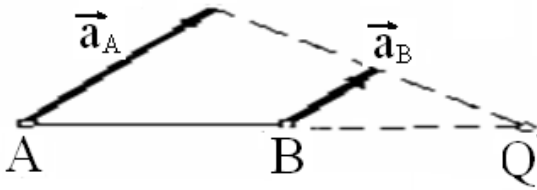


Рис. 4.8

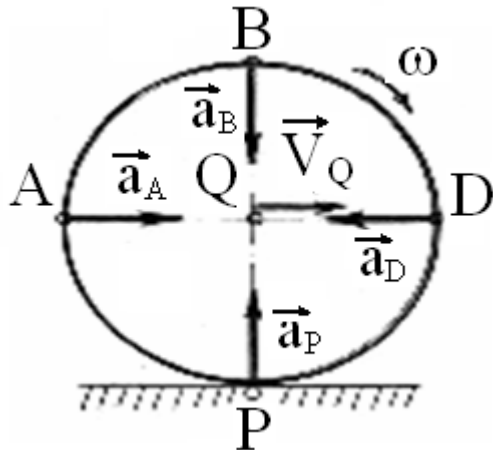


Рис. 4.9

миттєвим центром прискорень.

Якщо прискорення двох точок A і B в плоскій фігури паралельні, то спосіб знаходження миттєвого центра прискорень показаний на рис. 4.8. В справедливості цієї побудови можна переконатися, порівнюючи пропорцію $\frac{a_A}{a_B} = \frac{AQ}{BQ}$, отриману з подібності трикутників (рис. 4.8) з аналогічною пропорцією (4.17), яка характеризує властивість миттєвого центра прискорень.

Випадок 3. По умові задачі відома така точка плоскій фігури, прискорення якої в даний момент часу дорівнює нулю. Ця точка, якщо вона єдина, і буде миттєвим центром прискорень.

Для ілюстрації розглянемо прямо лінійний рух колеса, швидкість V_Q центра Q якого постійна. $V_Q = \text{const}$ (рис. 4.9). Це означає, що прискорення центра колеса дорівнює нулю $a_Q = 0$. Доведемо, що дійсно точка Q є миттєвим центром прискорень.

Точка P — миттєвий центр швидкостей. Кутова швидкість колеса $\omega = \frac{V_Q}{QP}$. Кутове прискорення колеса

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{V_Q}{QP} \right).$$

При русі колеса відстань QP не змінюється, т.б. $QP = \text{const}$.

$$\text{Тоді } \varepsilon = \frac{1}{QP} \cdot \frac{dV_Q}{dt} = \frac{a_Q}{QP} = 0.$$

Маємо для колеса $\omega \neq 0$, $\varepsilon = 0$.

Такий рух плоскій фігури розглянуто [див. випадок 1 (а), рис. 4.5].

Таким чином, прискорення всіх точок колеса напрямлені до центра колеса, т.б. точка Q є миттєвим центром прискорень.

Примітка. Цей приклад наочно показує, що миттєвий центр прискорень і миттєвий центр швидкостей плоскій фігури не співпадають.

Дійсно, миттєвим центром швидкостей колеса є точка Р, прискорення якої $a_p = \omega^2 \cdot QP \neq 0$.

Лекція 5. Сферичний рух твердого тіла

Lecture 5. Spherical motion of a rigid body

Рух твердого тіла, яке має одну нерухому точку, називається обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої точки.

The motion of a rigid body that has one fixed point is called the rotational motion of a rigid body around a fixed point.

Якщо тіло обертається навколо нерухомої точки, то всі точки тіла рухаються по поверхні сфер, спільний центр яких співпадає з нерухомою точкою О. В зв'язку з цим, *рух тіла навколо нерухомої точки, називається сферичним рухом твердого тіла* (the motion of a body around a fixed point is called the spherical motion of a rigid body).

Прикладом сферичного руху тіла є рух дзиги.

5.1. Кути Ейлера. Рівняння руху твердого тіла навколо нерухомої точки

Euler angles. Equation of motion of a rigid body around a fixed point

Вяси́мо, скільки потрібно параметрів для визначення в просторі положення твердого тіла, яке має одну нерухому точку. Введемо дві системи координат: система координат $OX_1Y_1Z_1$ – нерухома система координат; рухома система координат $OXYZ$ зв'язана з рухомим тілом. Точка О – нерухома точка, навколо якої обертається тіло (рис. 5.1). Положення тіла в просторі буде повністю визначено, якщо буде відоме положення рухомої системи координат $OXYZ$.

З аналітичної геометрії відомо, що положення рухомої системи координат відносно нерухомої можна визначити за допомогою дев'яти напрямних косину-сів рухомих осей, тобто косинусами тих кутів, які кожна з рухомих осей утворює з нерухомими осями. Використання напрямних косинусів для визначення положення твердого тіла в просторі на практиці не зручне, тому що потрібно задавати дев'ять напрямних косинусів. Але значно простіше і зручніше визначати положення системи $OXYZ$ відносно осей $OX_1Y_1Z_1$ за допомогою трьох кутів. На практиці найбільше розповсюдження набув вибір трьох кутів, який запропонував Ейлер (див. рис. 5.1).

Леонард Ейлер (1707-1783)- народився в м. Базелі (Швейцарія). Його наукова спадщина понад 850 наукових праць дослідження з математики, механіки, теорії пружності, математичної фізики, оптики, теорії машин, гідромеханіки, астрономії. Ейлер довго жив і працював у Росії як академік Петербурзької Акад.-мії наук, де надруку-вав 473 наукових праці.

Через ON позначимо лінію перетину координатних площин OX_1Y_1 і OXY . Пряма ON називається *лінією вузлів* (line of nodes). Напря́м від О до N

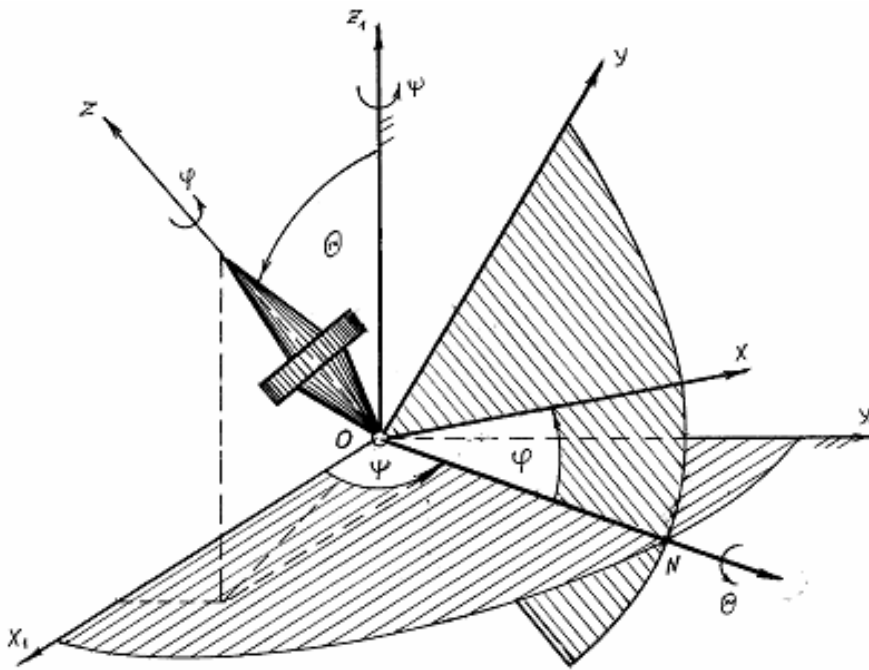


Рис. 5.1. До поняття кутів Ейлера

будемо вважати додатнім. Кут між віссю OX_1 і лінією вузлів позначимо через ψ і будемо називати *кутом прецесії* (angle of precession). Цей кут лежить в площині OX_1Y_1 і відраховується від осі OX_1 проти ходу годинникової стрілки, якщо дивитись з додатного напрямку осі Z_1 . Другим кутом Ейлера

є кут між координатними площинами OX_1Y_1 і OXY . Його вимірюють кутом θ між осями OZ_1 і OZ . Кут θ називається *кутом нутації* (nutation angle).

. Кут нутації відраховується від осі OZ_1 проти ходу годинникової стрілки, якщо дивитись з додатного напрямку лінії вузлів ON .

Кут між лінією вузлів ON і віссю OX позначимо через φ . Кут φ називається *кутом власного обертання* (the angle of its own rotation). Кут φ лежить в площині OXY і відраховується від лінії вузлів проти ходу годинникової стрілки, якщо дивитись з додатного напрямку осі OZ .

Кути ψ , θ і φ називаються кутами Ейлера.

При русі тіла ці кути є функціями часу

$$\psi = f_1(t); \theta = f_2(t); \varphi = f_3(t). \quad (5.1)$$

Рівняння (5.1) є рівняннями обертального руху твердого тіла навколо нерухомої точки. Якщо ці рівняння задані, то в довільний момент часу можна знайти положення твердого тіла відносно нерухомої системи координат $OX_1Y_1Z_1$.

Примітка: Крім кутів Ейлера в практиці використовують і кути Крилова. Олексій Миколайович Крилов (1863-1945) – видатний російський математик, механік і кораблебудівник, засновник теорії корабля. Йому належать ряд видатних робіт по наближеним обчисленням, рівнянням математичної фізики, зовнішньої балістики і теорії пружності. Кути Ейлера знайшли використання в небесній механіці. Кути Крилова використовуються в технічних задачах – гіроскопії, динаміці рухомих об'єктів, роботів. Послідовність поворотів Крилова добре модулюється кардановим підвісом.

Положення корабля відносно його центра тяжіння C визначається *корабельними кутами*, які запропонував Крилов. Вісь CX системи

координат $CXYZ$, жорстко зв'язаної з кораблем, напрямляється від корми до носу, вісь CY – до лівого борту, а вісь CZ розміщена в діаметральній площині корабля. В положенні рівноваги корабля осі системи координат $CXYZ$ співпадають з осями незмінного напрямку системи координат $CX_1Y_1Z_1$. Кут ψ між віссю CX_1 і лінією CN , утвореною перетином площин XYZ і X_1CZ_1 називається *кутом диферента* (the angle of the trim), кут φ між лінією вузлів CN і віссю CX називається *кутом рискання* (the angle of the trim). Кут θ між віссю CZ і лінією CM перетину площин X_1CZ_1 і Y_1CZ називається *кутом нахилу* (angle of inclination).

Стосовно авіації кути ψ , θ і φ називаються: ψ – кут рискання, θ – кут тангажа, φ – кут нахилу.

5.2. Теорема Ейлера-Даламбера про переміщення твердого тіла.

Миттєва вісь обертання

Euler-D'Alembert theorem on the displacement of a rigid body.

Instantaneous axis of rotation

Теорема Ейлера-Д'аламбера має наступне твердження:

Тіло, яке має одну нерухому точку, із одного положення в інше можна перевести одним поворотом навколо осі, що проходить через нерухому точку.

A body that has one fixed point can be moved from one position to another by a single rotation around an axis passing through a fixed point.

Перед тим як довести цю теорему, ми звернемося до плоского руху тіла. Вивчаючи плоский рух твердого тіла було встановлено, що існує така точка тіла (МЦШ), навколо якої тіло робить миттєвий поворот. Існування такої точки доведено в пункті 3.1. Існування миттєвого центра обертання доведемо іншим шляхом. Нехай тіло виконує плоский рух. Візьмемо в тілі відрізок AB . Через деякий час руху тіла відрізок AB зайняв положення A_1B_1 (рис. 5.2).

Доведемо наступну теорему: «Всякий не поступальний рух плоскої фігури із одного положення в друге можна здійснити за допомогою одного повороту на деякий кут навколо деякої визначеної

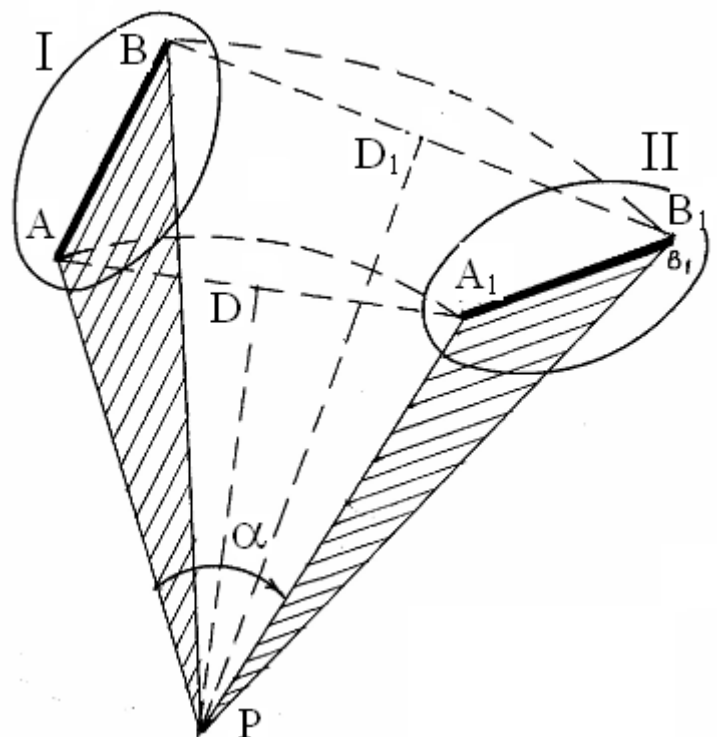


Рис. 5.2

точки».

We prove the following theorem: «Any non-translational motion of a flat figure from one position to another can be carried out by means of one rotation at some angle around some definite point».

З'єднаємо точку A з точкою A_1 . Через середину D відрізка AA_1 проведемо перпендикуляр. Аналогічно, через середину D_1 відрізка BB_1 також проведемо перпендикуляр. Ці два перпендикуляра перетинаються в точці P . Доведемо, що точка P є миттєвим центром обертання плоскої фігури. Розглянемо трикутники ABP і A_1B_1P . У цих трикутників сторони $AP=A_1P$, $BP=B_1P$ за властивістю серединного перпендикуляра, $AB=A_1B_1$. Ці трикутники мають по три рівні сторони, а тому вони рівні. Повернемо трикутник ABC навколо точки P на кут α так, щоб сторона AP сумістилась зі стороною A_1P , тоді сторона BP суміститься зі стороною B_1P , а відрізок AB суміститься з відрізком A_1B_1 . Таким чином, існує така точка P навколо якої можна одним поворотом перевести плоску фігуру з одного положення в друге. Ця точка називається *миттєвим центром обертання* (instantaneous center of rotation).

Повернемося тепер до доведення теореми Ейлера-Д'аламбера у випадку руху тіла навколо нерухомої точки. Як визначалось раніше, всі точки тіла рухаються по поверхням сфер, спільний центр яких співпадає з нерухомою точкою O .

Візьмемо в тілі дві точки A і B , які знаходяться на однаковій відстані R від нерухомої точки O . Проведемо через ці дві точки сферу з центром в точці O (рис. 5.3). Площина трикутника OAB перетинає сферу по колу великого круга. Лінія, яка з'єднує точки A і B є дугою круга радіуса R . Будемо вважати, що точки A і B лежать на поверхні рухомої сфери з радіусом R , яка рухається навколо нерухомої сфери з тим же радіусом. Дуга AB при русі тіла буде зміщуватись по нерухомій сферичній поверхні і через деякий час займе положення A_1B_1 ($AB=A_1B_1$) (рис. 5.4).

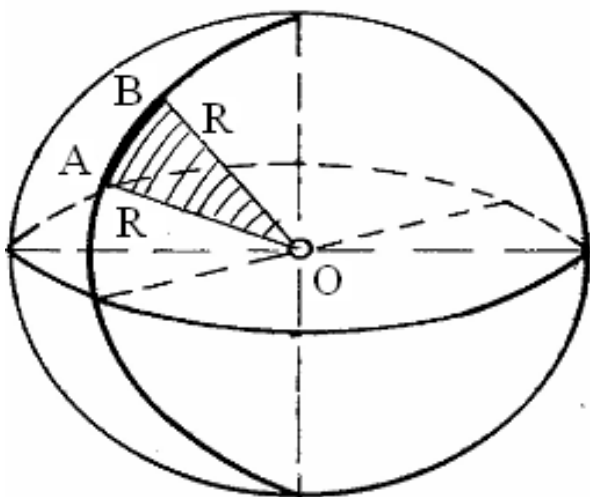


Рис. 5.3

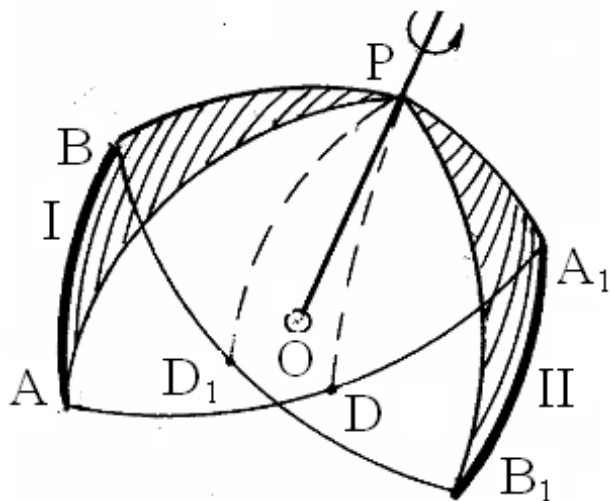


Рис. 5.4

Доведемо, що із положення I, яке характеризується дугою АВ, можна потрапити в положення II, яке характеризується дугою A_1B_1 одним поворотом відносно деякої нерухомої осі. Одна точка цієї осі уже відома. Це точка О. Знайдемо положення другої точки осі. Для цього, як і в попередньому випадку, з'єднаємо точки А і A_1 , В і B_1 дугами великого круга, проведеними з нерухомої точки тіла.

В середині дуг AA_1 , BB_1 точок D і D_1 проведемо сферичні перпендикуляри. Ці перпендикуляри лежать на поверхні сфери і перетинаються в точці Р. Сферичні трикутники АВР і A_1B_1P рівні, бо мають по три рівні сторони $AP=A_1P$, $BP=B_1P$, $AB=A_1B_1$. Доведення цього аналогічне попередньому випадку. Якщо повернути заштрихований сферичний трикутник АВР навколо осі, яка проходить через точку Р і нерухому точку О, то цей трикутник, перемістившись по нерухомій сфері співпаде з усіма точками сферичного трикутника A_1B_1P .

Вісь ОР називають *віссю кінцевого обертання* (The axis of the OP is called the axis of final rotation). Положення осі ОР залежить від початкового і кінцевого положення тіла. Якщо проміжок часу між початковим і кінцевим положеннями тіла дуже малий ($t_2 - t_1 = \Delta t \rightarrow 0$), то вісь кінцевого обертання буде змінювати своє положення, прямуючи до свого граничного положення. Граничне положення осі кінцевого обертання при $\Delta t \rightarrow 0$ *називається миттєвою віссю обертання* (is called the instantaneous axis of rotation) для моменту часу t.

Таким чином, при русі тіла навколо нерухомої точки завжди можна знайти таку миттєву вісь обертання, навколо якої тіло в даний момент часу виконує обертальний рух.

5.3. Вектори кутової швидкості та кутового прискорення

Vectors of angular velocity and angular acceleration

Для прикладу розглянемо рух конуса по нерухомій горизонтальній площині. Вершина О конуса залишається нерухомою (рис. 5.5). Знайдемо положення миттєвої осі обертання.

Миттєва вісь обертання повинна проходити через нерухому точку О. Якщо конус по нерухомій площині рухається без ковзання, то швидкості точок конуса, які контактують з площиною, дорівнюють нулю. Це означає, що твірна ОР є миттєвою віссю обертання, яка змінює свій напрям, обертаючись в площині навколо точки О. Конус навколо миттєвої осі ОР обертається з деякою кутовою швидкістю. Встановимо напрям кутової швидкості. Поняття кутової швидкості як вектора було розглянуто в пункті 2.2.5, де зазначалось, що вектор кутової швидкості напрямляється по нерухомій осі обертання. В даному випадку вектор кутової швидкості $\vec{\omega}$ будемо напрямляти по миттєвій осі обертання в ту сторону, звідки обертання тіла навколо осі видно проти ходу годинникової стрілки (рис.

5.5). Як зазначалось раніше, миттєва вісь обертання в свою чергу обертається навколо точки O . Це означає, що вектор кутової швидкості тіла змінює свій напрям. Таким чином, при обертанні тіла навколо нерухомої точки, кутова швидкість тіла може змінюватись як по модулю, так і по напрямку, тому вона і носить назву – *миттєва кутова швидкість* (instantaneous angular velocity).

При обертанні тіла навколо нерухомої осі кутове прискорення ϵ визначалось як перша похідна від функції кутової швидкості (формула 2.8) і напрямлялось по осі обертання.

Аналогічно будемо визначати кутове прискорення і у випадку руху тіла навколо нерухомої точки.

$$\vec{\epsilon} = d\vec{\omega} / dt. \quad (5.2)$$

У виразі (5.2) кутова швидкість і кутове прискорення є векторними величинами. Кінець вектора кутової швидкості $\vec{\omega}$ при русі конуса рухається по деякій траєкторії KL . Якщо вектор $\vec{\omega}$ вважати радіусом-вектором точки K , то по аналогії з формулою (1.10) модуля 3 ($\vec{V} = d\vec{r} / dt$), можна вважати, що вектор кутового прискорення $\vec{\epsilon}$ напрямлений по дотичній до траєкторії руху точки K і є швидкістю, з якою кінець вектора $\vec{\omega}$ переміщується вздовж кривої KL (рис. 5.5). Як бачимо, кутове прискорення $\vec{\epsilon}$ не напрямлене по миттєвій осі обертання. В подальшому вектор $\vec{\epsilon}$ будемо зображувати в нерухомій точці O тіла паралельно лінії, яка дотична до годографа вектора $\vec{\omega}$ в даний момент часу.

Зазначимо, що крива лінія KL кінця вектора $\vec{\omega}$ може мати різний вигляд, бо залежить від зміни кутової швидкості по величині і по напрямку.

Якщо позначити через $\vec{r}_0$ одиничний орт миттєвої осі обертання, то кутову швидкість можна записати у вигляді

$$\vec{\omega} = \omega \vec{r}_0,$$

де ω – модуль вектора $\vec{\omega}$.

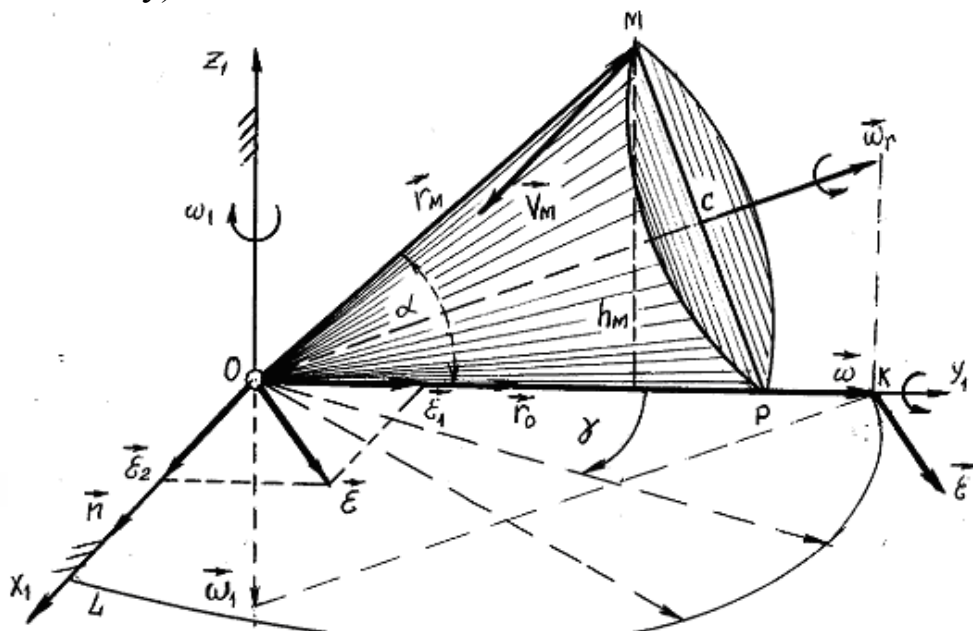


Рис. 5.5

Скористаємось формулою (5.2)

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega \vec{r}_0) = \frac{d\omega}{dt} \vec{r}_0 + \omega \frac{d\vec{r}_0}{dt}.$$

$$\text{Позначимо } \vec{\varepsilon}_1 = \frac{d\omega}{dt} \vec{r}_0; \quad \vec{\varepsilon}_2 = \omega \frac{d\vec{r}_0}{dt}. \quad (5.3)$$

Як було доведено раніше (див. модуль 3, формула 1.48), похідна від одиничного орта дає вектор, який перпендикулярний даному одиничному орту.

$$\frac{d\vec{r}_0}{dt} = \frac{d\gamma}{dt} \vec{n}.$$

Тут одиничний орт $\vec{n} \perp \vec{r}_0$, $\frac{d\gamma}{dt} = \omega_1$ – є кутовою швидкістю обертання вектора $\vec{\omega}$ навколо осі, перпендикулярній вектору $\vec{\omega}$.

$$\text{Тоді } \vec{\varepsilon}_2 = \omega_1 \omega \vec{n}. \quad (5.4)$$

Вектор кутового прискорення $\vec{\varepsilon}_1$ напрямлений по миттєвій осі обертання і характеризує зміну вектора кутової швидкості по величині, а кутове прискорення $\vec{\varepsilon}_2$, характеризує зміну кутової швидкості тільки по напрямку.

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2. \quad (5.5)$$

Враховуючи те, що $\vec{\varepsilon}_1 \perp \vec{\varepsilon}_2$, маємо

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}. \quad (5.6)$$

Формулу (5.5) перепишемо у вигляді векторного добутку

$$\vec{\varepsilon}_2 = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}. \quad (5.7)$$

Примітка: 1. Вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ потрібно прикласти в нерухомій точці О.

2. Рух конуса (рис. 5.5) можна розглядати як обертальний рух навколо осі симетрії ОС з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_r$ і разом з осяю ОС навколо осі OZ_1 з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_1$. Тоді $\vec{\omega} = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_1$

Більш детально ці питання будуть розглядатися в лекції 7.

5.4. Швидкість точок тіла, яке обертається навколо нерухомої точки

Velocity of points of a body rotating around a fixed point

Звернемось до рис. 5.5. Тіло (конус) в даний момент часу обертається навколо миттєвої осі обертання ОР. Швидкість всіх точок, які належать миттєвій осі обертання, дорівнюють нулю. Визначимо швидкість довільної точки М тіла. Для цього опустимо з точки М перпендикуляр на вісь ОР. Тоді

$$V_M = \omega \cdot h_M = \omega \cdot OM \sin \alpha. \quad (5.8)$$

Швидкість $\vec{V}_M$ напрямлена перпендикулярно радіусу h_M , тобто паралельно осі OX_1 .

При вивченні руху тіла навколо нерухомої осі була отримана формула Ейлера (2.23). Запишемо формулу Ейлера для випадку руху тіла навколо нерухомої точки

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (5.9)$$

Використовуючи формулу (5.8), визначимо швидкість точки М. Проведемо з точки О радіус-вектор $\vec{r}_M$. Тоді

$$\vec{V}_M = \omega \times \vec{r}_M.$$

$$\text{Модуль швидкості } V_M = \omega \cdot r_M \sin(\vec{\omega}, \vec{r}_M) = \omega \cdot OM \cdot \sin \alpha \quad (5.10)$$

Порівнюючи вирази (5.7) і (5.10), встановлюємо, що при обертанні тіла навколо нерухомої точки, можна користуватись формулою (5.9) для визначення швидкості точки тіла як по величині, так і по напрямку.

Положення довільної точки М твердого тіла визначається радіусом-вектором $\vec{r}$. Якщо x, y і z – координати точки М в рухомій системі координат $OXYZ$, а $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори осей цієї системи координат, то радіус-вектор можна записати у вигляді $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

В аналогічному вигляді можна записати вектор кутової швидкості

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k},$$

де $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проекції кутової швидкості на відповідні осі координат.

Розглянемо векторний добуток

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\omega_y z - \omega_z y)\vec{i} + (\omega_z x - \omega_x z)\vec{j} + (\omega_x y - \omega_y x)\vec{k}.$$

Звідси встановлюємо формули для визначення проекцій вектора швидкості $\vec{V}$ точки М на рухомі координатні осі:

$$V_x = \omega_y z - \omega_z y; V_y = \omega_z x - \omega_x z; V_z = \omega_x y - \omega_y x. \quad (5.11)$$

Якщо проекції вектора $\vec{\omega}$ на нерухомі осі координат $OX_1 Y_1 Z_1$ позначити через $\omega_{x1}, \omega_{y1}, \omega_{z1}$, а проекції радіуса-вектора $\vec{r}$ точки М на ті ж осі – через x_1, y_1, z_1 , то ми отримаємо подібно попередньому проекції швидкості довільної точки тіла на нерухомі координатні осі.

$$V_{x1} = \omega_{y1} z_1 - \omega_{z1} y_1; V_{y1} = \omega_{z1} x_1 - \omega_{x1} z_1; V_{z1} = \omega_{x1} y_1 - \omega_{y1} x_1. \quad (5.12)$$

Формули (5.11) і (5.12) називаються *формулами Ейлера*.

Якщо ми візьмемо точку, яка лежить в даний момент часу на миттєвій осі обертання, то радіус-вектор цієї точки і вектор кутової швидкості $\vec{\omega}$ тіла

будуть напрямлені по одній прямій, а тому векторний добуток цих векторів дорівнює нулю, тобто

$$\omega \times \vec{r} = 0. \quad (5.13)$$

Рівняння (5.13) представляє собою рівняння миттєвої осі обертання.

Проектуючи векторне рівняння (5.13) на рухомі координатні осі, отримаємо рівняння миттєвої осі обертання в рухомій системі координат

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}. \quad (5.14)$$

Аналогічно рівнянням (5.14) ми отримаємо і рівняння миттєвої осі обертання в нерухомій системі координат

$$\frac{x_1}{\omega_{x1}} = \frac{y_1}{\omega_{y1}} = \frac{z_1}{\omega_{z1}}. \quad (5.15)$$

5.5. Зв'язок вектора миттєвої кутової швидкості з кутами Ейлера

Relationship of the instantaneous angular velocity vector with Euler angles

Якщо задані кути Ейлера в функціях від часу, то проекції кутової швидкості $\vec{\omega}$ на рухомі координатні осі визначаються за формулами

$$\omega_x = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi; \omega_y = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi; \omega_z = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta. \quad (5.16)$$

Проекції вектора $\vec{\omega}$ на нерухомі координатні осі визначаються за формулами:

$$\omega_{x1} = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi; \omega_{y1} = -\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi; \omega_{z1} = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}. \quad (5.17)$$

Рівняння (5.16) і (5.17) називаються *кінематичними рівняннями Ейлера*.

Модуль вектора $\vec{\omega}$ буде

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta}. \quad (5.18)$$

Проекції кутового прискорення визначаються за формулами

$$\varepsilon_x = \frac{d\omega_x}{dt} = \dot{\omega}_x; \varepsilon_y = \frac{d\omega_y}{dt} = \dot{\omega}_y; \varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \dot{\omega}_z. \quad (5.19)$$

Диференціюючи формули (5.15) по часу, можна визначити проекції вектора миттєвого кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$ через кути Ейлера.

Модуль вектора $\vec{\varepsilon}$ буде

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2}. \quad (5.20)$$

5.6. Прискорення точок тіла при обертанні навколо нерухомої точки

Acceleration of body points when rotating around a fixed point

Щоб знайти прискорення точки M тіла при його обертанні навколо нерухомої точки, необхідно продиференціювати по часу вираз (5.9)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \right) + \left(\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right).$$

$$\text{Маємо } \vec{a} = (\vec{\varepsilon} \times \vec{r}) + (\vec{\omega} \times \vec{V}).$$

$$\text{Введемо позначення } \vec{a}^{\text{ia}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}. \quad (5.21)$$

$$\vec{a}^{\text{a.in}} = \vec{\omega} \times \vec{V}. \quad (5.22)$$

$$\text{Тоді } \vec{a} = \vec{a}^{\text{ia}} + \vec{a}^{\text{a.in}}. \quad (5.23)$$

Прискорення $\vec{a}^{\text{ia}}$ називається *обертальним прискоренням* точки M , а прискорення $\vec{a}^{\text{a.in}}$ - *доосьовим*.

Вектор обертального прискорення $\vec{a}^{\text{ia}}$ (як видно з формули (5.21)) спрямований перпендикулярно площині, яка проходить через миттєве кутове прискорення $\vec{\varepsilon}$ тіла і радіус-вектор $\vec{r}$ точки M , в ту сторону звідки найкоротший поворот від $\vec{\varepsilon}$ до $\vec{r}$ видно проти ходу стрілки годинника (рис. 5.6).

Модуль обертального прискорення визначається за формулою

$$a^{\text{ia}} = \varepsilon r \sin(\vec{\varepsilon}, \vec{r}). \quad (5.24)$$

У випадку, коли $\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2$ (див. вирвзу (5.5)), обертальне прискорення визначається за формулою.

$$\vec{a}^{\text{ia}} = (\vec{\varepsilon}_1 \times \vec{r}) + (\vec{\varepsilon}_2 \times \vec{r}). \quad (5.25)$$

Модуль доосьового прискорення визначається за формулою

$$a^{\text{a.in}} = \omega V \sin 90^\circ = \omega \cdot \omega h = \omega^2 h, \quad (5.26)$$

де h – відстань від точки M до миттєвої осі обертання.

Модуль прискорення $\vec{a}$ точки M визначається за формулою

$$a = \sqrt{(a^{\text{ia}})^2 + (a^{\text{a.in}})^2 + 2a^{\text{ia}} a^{\text{a.in}} \cos \beta}. \quad (5.27)$$

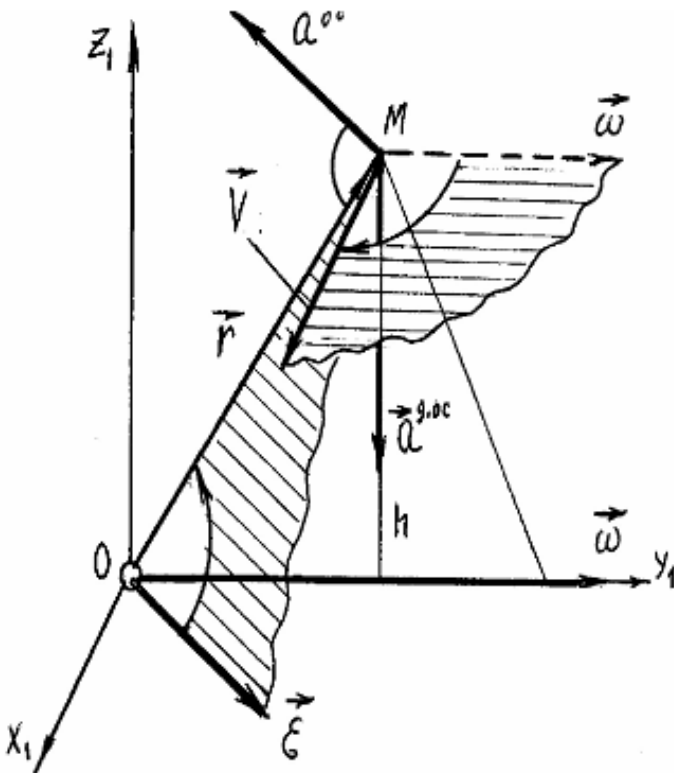


Рис. 5.6

де β – кут між векторами прискорень $\vec{a}^{i\dot{a}}$ і $\vec{a}^{a.\dot{a}}$.

Спроекуємо вектор прискорення $\vec{a}$ точки М на осі рухомої системи координат.

Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь ОХ, використовуючи формулу (5.11), буде мати вигляд

$$\dot{a}_o = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega_y z - \omega_z y) = \frac{d\omega_y}{dt} z + \omega_y \frac{dz}{dt} - \frac{d\omega_z}{dt} y - \omega_z \frac{dy}{dt} = \varepsilon_y z + \omega_y V_z - \varepsilon_z y - \omega_z V_y.$$

Підставляючи замість V_z і V_y їх значення з формули (5.11), остаточно отримаємо:

$$a_x = \varepsilon_y z - \varepsilon_z y + \omega_x U - x\omega^2; \quad a_y = \varepsilon_z x - \varepsilon_x z + \omega_y U - y\omega^2; \quad a_z = \varepsilon_x y - \varepsilon_y x + \omega_z U - z\omega, \quad (5.28)$$

де $U = x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z$.

Прискорення a_z і a_y отримані шляхом перестановки букв.

Аналогічним шляхом визначаються проекції прискорення $\vec{a}$ на координатні осі OX_1 , OY_1 і OZ_1 нерухомої системи координат.

$$a_{x1} = \varepsilon_{y1} z_1 - \varepsilon_{z1} y_1 + \omega_{x1} U_1 - x_1 \omega^2;$$

$$a_{y1} = \varepsilon_{z1} x_1 - \varepsilon_{x1} z_1 + \omega_{y1} U_1 - y_1 \omega^2;$$

$$a_{z1} = \varepsilon_{x1} y_1 - \varepsilon_{y1} x_1 + \omega_{z1} U_1 - z_1 \omega^2.$$

(5.29)

Тут $U_1 = x_1 \omega_{x1} + y_1 \omega_{y1} + z_1 \omega_{z1}$.

Лекція 6. Кінематика складного руху точки

Lecture 6. Kinematics of complex point motion

6.1. Основні поняття. Basic concepts

Рух точки М називається складним, якщо вона одночасно бере участь в декількох рухах. Наприклад; людина на човні хоче потрапити з пункту А в пункт В на другому березі річки (рис. 6.1).

Спрямовуючи човен перпендикулярно берегам річки людина в кінцевому підсумку не попадає в пункт В, а попадає в пункт С. Пояснюється це слідуючим чином. Човен одночасно бере участь в двох рухах: в першому русі він переміщується відносно води і в другому русі незалежно від волі людини човен переміщується разом з водою по течії річки. Таким чином, рух човна є складним.

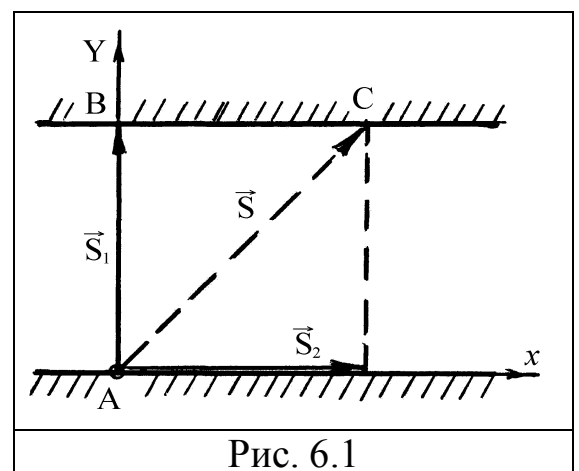


Рис. 6.1

Зробимо слідуюче узагальнення.

Нехай тіло Т рухається відносно нерухомої системи координат $X_1 Y_1 Z_1$, а по тілу Т рухається точка М.

Рух точки M є складним. На тілі T виберемо систему координат XYZ , яка жорстко зав'язана з цим тілом і разом з ним переміщується. Систему координат XYZ назовемо рухомою системою координат (див. рис. 6.2).

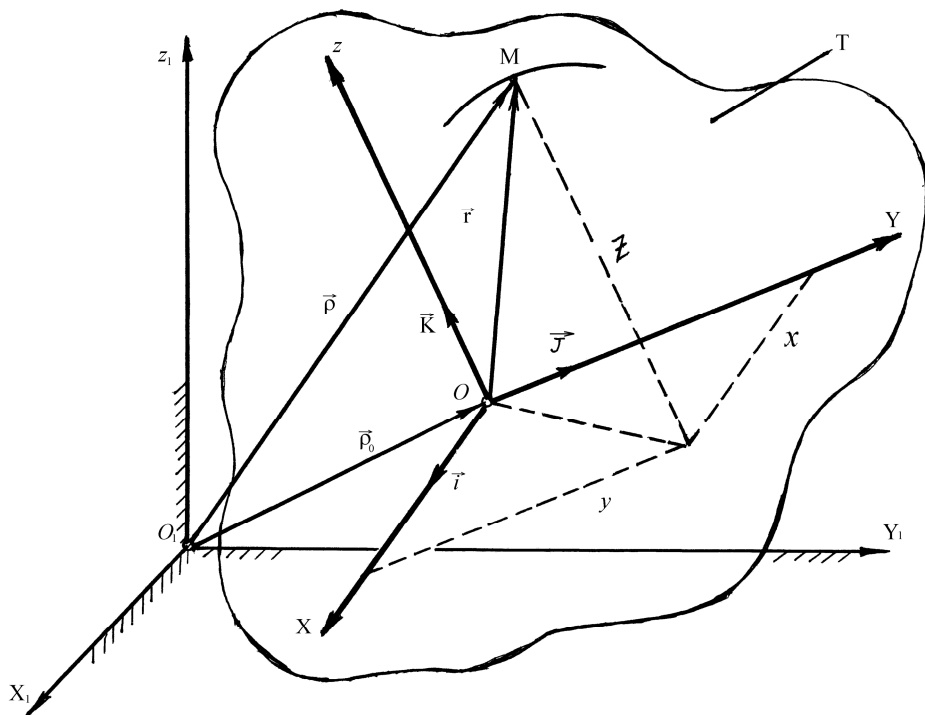


Рис. 6.2

Введемо слідуєчі позначення:

1. Рух точки M відносно нерухомого тіла, на якому вибрана нерухома система координат $X_1Y_1Z_1$, будемо називати *абсолютним рухом* (absolute movement).

При цьому русі точка M має абсолютну швидкість (absolute speed) $\vec{V}_a$ і абсолютне прискорення (absolute acceleration) $\vec{a}_a$.

2. Рух точки M відносно рухомої системи координат XYZ (т.б. відносно рухомого тіла T) будемо називати *відносним рухом* (relative movement). При цьому русі точка M має відносну швидкість (relative velocity) $\vec{V}_r$ і відносне прискорення (relative acceleration) $\vec{a}_r$.

3. Рух тіла T разом з системою координат $OXYZ$ відносно нерухомої системи координат $O_1X_1Y_1Z_1$ є для точки M *переносним рухом* (portable movement), а швидкість і прискорення тієї точки тіла T , де в даний момент часу знаходиться точка M , називається переносною швидкістю $\vec{V}_e$ і переносним прискоренням $\vec{a}_e$.

Якщо звернутись до нашого прикладу з човном, то рух човна відносно, наприклад, точки A , розміщеної на нерухомому березі (там і початок нерухомої системи координат $X_1Y_1Z_1$) буде абсолютним рухом.

Рух човна відносно води буде відносним рухом, а рух частинок води відносно берега – переносним рухом.

Основною задачею кінематики складного руху точки є встановлення залежності між швидкостями і прискореннями в двох системах координат: нерухомої і рухомої.

6.2. Рівняння руху точки. Equation of motion of a point

Нехай точка М одночасно здійснює рух відносно нерухомої і рухомої системи координат. Як видно з рисунку 6.2, рівняння руху точки М в векторній формі можна записати слідуочим чином:

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}_0 + \vec{r}, \quad (6.1)$$

де $\vec{\rho}$ – радіус-вектор (radius-vector), який описує рух точки М відносно нерухомої системи координат, тобто характеризує абсолютний рух точки:

$\vec{r}$ – радіус-вектор, який описує рух точки М відносно рухомої системи координат, т.б. характеризує відносний рух точки;

$\vec{\rho}_0$ – радіус-вектор, який описує рух точки О (початок рухомої системи координат) відносно нерухомої системи координат.

Радіус-вектор $\vec{r}$ точки М можна представити в такому вигляді:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (6.2)$$

Тут x, y, z – координати точки М в рухомій системі координат OXYZ;

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні орти рухомої системи координат (див. рис. 6.2).

При русі точки М її координати x, y, z змінюються, тобто вони є функціями часу:

$$x = x(t); y = y(t); z = z(t). \quad (6.3)$$

Рівняння (5.3) є рівняннями відносного руху точки М.

Поставимо таке запитання: одиничні орти $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, є функціями часу, чи ні?

Одиничні орти, як вектори, характеризуються модулем вектора і його напрямом. Так як ці вектори одиничні, то їх модуль дорівнює 1.

Що стосується напрямів ортів, то вони залежать від виду руху рухомої системи координат.

Якщо тіло Т і зв'язана з ним система координат рухається поступально, то орти $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ не змінюють свого напрямку, т.б. є постійними величинами.

Отже, в випадку поступального руху.

$$\vec{i} = \text{const}; \vec{j} = \text{const}; \vec{k} = \text{const}. \quad (6.4)$$

Якщо тіло Т здійснює обертальний рух навколо точки О, то рухома система координат також обертається і напрями одиничних ортів змінюються.

Таким чином, в загальному випадку, одиничні орти є функціями часу:

$$\vec{i} = \vec{i}(t), \vec{j} = \vec{j}(t), \vec{k} = \vec{k}(t). \quad (6.5)$$

Початок О рухомої системи координат може переміщатися відносно нерухомої системи координат, тому

$$\vec{\rho}_0 = \vec{\rho}(t). \quad (6.6)$$

Рівняння (6.4) – (6.6) характеризують переносний рух рухомої системи координат (equations of relative motion of point M).

З урахуванням (6.2) рівняння руху точки М можна записати у вигляді

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}_0 + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (6.7)$$

6.3. Теорема про додавання швидкостей

The theorem on adding speeds

Теорема. При складному русі точки її абсолютна швидкість (absolute speed) $\vec{V}_a$ дорівнює геометричній сумі відносної швидкості (relative speed) $\vec{V}_r$ і переносної швидкості (portable speed) $\vec{V}_e$.

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e; \quad (6.8)$$

$$\vec{V}_e = \vec{V}_0 + x \frac{d\vec{i}}{dt} + y \frac{d\vec{j}}{dt} + z \frac{d\vec{k}}{dt}; \quad (6.9)$$

$$\vec{V}_r = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}, \quad (6.10)$$

де $\vec{V}_0$ – швидкість точки О початку рухомої системи координат відносно нерухомої, $\vec{V}_0 = d\vec{\rho}_0 / dt$.

Розглянемо окремо вираз (6.9) для переносної швидкості $\vec{V}_e$. В ньому зустрічаються похідні по часу від одиничних ортів. Встановимо, чому дорівнюють похідні по часу від одиничних ортів. Ці похідні залежать від виду руху тіла Т і пов'язаної з ним системи координат:

1. Нехай тіло Т здійснює поступальний рух. Тоді одиничні орти $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ є постійними величинами [див. Вираз (5.4)], а їх похідні по часу дорівнюють нулю.

З врахуванням цього, вираз (6.9) прийме вигляд: $\vec{V}_e = \vec{V}_0$.

Таким чином, при поступальному русі рухомої системи координат переносна швидкість точки М дорівнює швидкості точки О-початку рухомої системи координат.

2. Нехай точка О нерухома ($\vec{V}_0 = 0$), система координат XYZ відносно неї здійснює обертальний рух. При обертанні рухомої системи координат одиничні орти є функціями часу [див. вираз (6.5)].

Абстрактно розглянемо деяке тіло В, яке обертається відносно осі ON з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$. Знайдемо швидкість довільної точки М цього тіла. Проведемо з точки О радіус-вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ (рис. 6.3).

Як відомо, при векторному способі визначення руху точки її швидкість знаходиться з формули $\vec{V} = d\vec{l} / dt$. (а)

З другої сторони, при обертанні тіла відносно осі швидкість точки визначається по формулі Ейлера: $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{l}$. (б)

Порівнюючи вирази (а) і (б), маємо

$$d\vec{l} / dt = \vec{\omega} \times \vec{l}. \quad (6.11)$$

Рухомою системою координат ОХYZ, яка закріплена тільки в одній точці О, обертається навколо осі ON (миттєвою осью обертання) з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_e$ (рис. 6.4). Тоді по аналогії з виразом (6.12) можна записати:

$$\begin{aligned} d\vec{i} / dt &= \vec{\omega}_e \times \vec{i}; \quad d\vec{j} / dt = \vec{\omega}_e \times \vec{j}; \\ d\vec{k} / dt &= \vec{\omega}_e \times \vec{k}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

де $\vec{\omega}_e$ – кутова швидкість переносного руху (angular velocity of portable movement).

Підставивши вираз (6.12) в (6.9), маємо:

$$\begin{aligned} \vec{V}_e &= x(\vec{\omega}_e \times \vec{i}) + y(\vec{\omega}_e \times \vec{j}) + z(\vec{\omega}_e \times \vec{k}) = \\ &= \vec{\omega}_e \times (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}). \end{aligned}$$

Використовуючи вираз (6.2),

$$\text{отримаємо } \vec{V}_e = \vec{\omega}_e \times \vec{r}. \quad (6.13)$$

Таким чином, якщо переносний рух є обертальним, то переносна швидкість точки М знаходиться по формулі Ейлера (2.23).

3. В загальному випадку, якщо точка О рухається зі швидкістю $\vec{V}_o$, а рухомою системою координат обертається навколо точки О, то переносна швидкість точки М знаходиться з формули.

$$\vec{V}_e = \vec{V}_o + (\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r). \quad (6.14)$$

Формула (6.8) виражає правило паралелограма швидкостей. Відносна і переносна швидкості можуть бути спрямовані під різними кутами одна до одної. Знайдемо модуль абсолютної швидкості точки М при різних випадках руху.

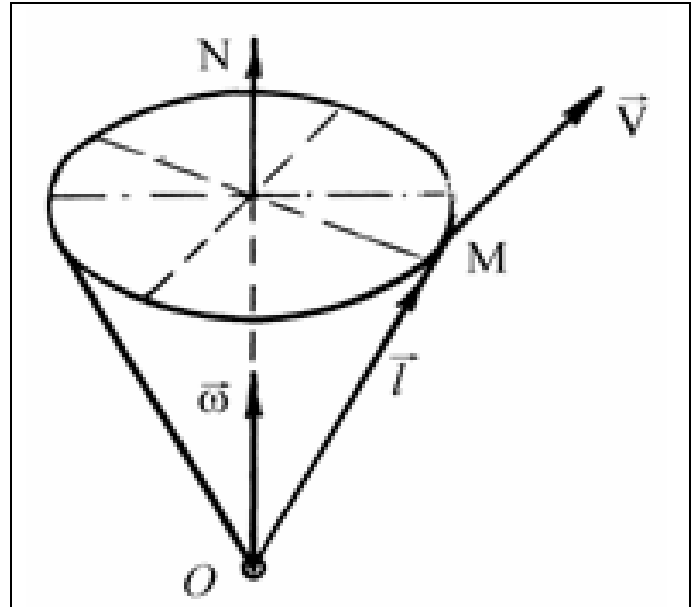


Рис. 6.3

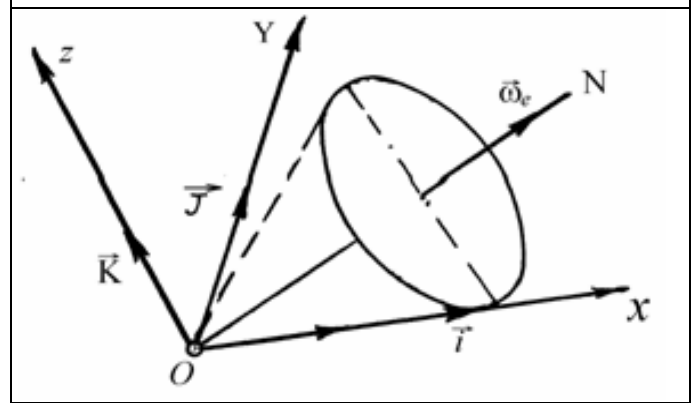


Рис. 6.4

1. Нехай $\vec{V}_r \perp \vec{V}_e$ (рис. 6.5). Тоді

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2}. \quad (6.15)$$

2. Нехай $\vec{V}_r$ і $\vec{V}_e$ (рис. 6.6). Тоді

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2V_r V_e \cos \alpha}. \quad (6.16)$$

3. Нехай $\vec{V}_r$ і $\vec{V}_e$ спрямовані по одній прямій в одну сторону (рис. 6.7). Тоді

$$V_a = V_r + V_e. \quad (6.17)$$

4. Нехай $\vec{V}_r$ і $\vec{V}_e$ спрямовані по одній прямій в різні сторони (рис. 6.8). Тоді

$$V_a = V_r - V_e. \quad (6.18)$$

Абсолютна швидкість $\vec{V}_a$ буде спрямована в сторону більшої швидкості.

6.4. Теорема про додавання прискорень (теорема Коріоліса)

Acceleration Addition Theorem (Coriolis Theorem)

Гюстав Гаспар Коріоліс (1792-1843)-французький математик та механік, член Паризької академії наук.

Щоб знайти абсолютне прискорення точки М, т.б. її прискорення по відношенню до нерухомої системи координат, візьмемо похідну по часу від абсолютної швидкості (6.9):

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \underbrace{\left(\frac{d\vec{\rho}_0}{dt} + x \frac{d\vec{i}}{dt} + y \frac{d\vec{j}}{dt} + z \frac{d\vec{k}}{dt} \right)}_{\vec{V}_e} + \underbrace{\left(\frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} \right)}_{\vec{V}_r} \quad (6.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\vec{\rho}}{dt^2} = & \left(\frac{d^2\vec{\rho}_0}{dt^2} + x \frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y \frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z \frac{d^2\vec{k}}{dt^2} \right) + \\ & + \left(\frac{d^2x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{k} \right) + 2 \left(\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d\vec{k}}{dt} \right), \end{aligned} \quad (6.20)$$

де $\frac{d^2\vec{\rho}}{dt^2} = \vec{a}_a$ – абсолютне прискорення точки М (the absolute acceleration of the point М).

Використовуючи міркування, які приведені в пункті 6.3, встановлюємо, що перший доданок, виділений круглими дужками, є

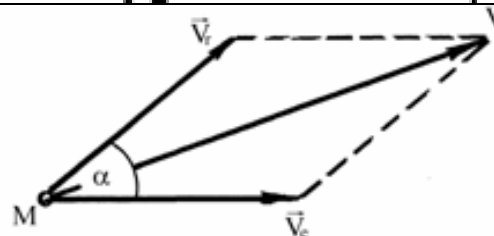
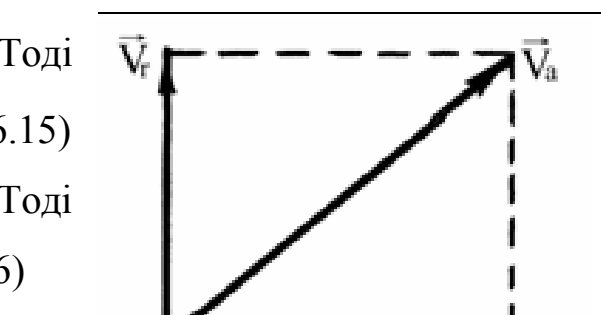


Рис. 6.6

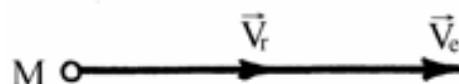


Рис. 6.7

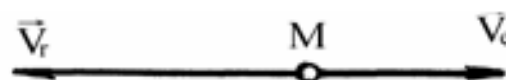


Рис. 6.8

переносним прискоренням, а другий доданок-відносним прискоренням точки:

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\vec{\rho}_0}{dt^2} + x \frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y \frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z \frac{d^2\vec{k}}{dt^2} ; \quad (6.21)$$

$$\vec{a}_r = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{k} . \quad (6.22)$$

Третій доданок одночасно враховує рух точки М відносно рухомої системи координат і обертання рухомої системи координат відносно полюса О. Цей вираз називається коріолісовим прискоренням (coriolis acceleration):

$$\vec{a}_c = 2 \left(\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d\vec{k}}{dt} \right). \quad (5.23)$$

Більш простий вираз для коріолісового прискорення буде виведено в подальшому.

Використовуючи позначення, які прийняті в виразах (6.21) – (6.23), і підставляючи їх в (6.20), отримаємо

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c . \quad (6.24)$$

Вираз (6.24) є математичним записом теореми Коріоліса:

при складному русі точки її абсолютне прискорення дорівнює геометричній сумі відносного, переносного і коріолісового прискорень.

Вернемось до виразу (6.21) для переносного прискорення $\vec{a}_e$.

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\vec{\rho}_0}{dt^2} + x \frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y \frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z \frac{d^2\vec{k}}{dt^2} .$$

Прискорення центра О рухомої системи координат $d^2\vec{\rho}_0 / dt^2 = \vec{a}_o$.

Розглянемо, чому дорівнює вираз $d^2\vec{i} / dt^2$ і йому аналогічні.

Для цього скористаємось виразом (6.13):

$$\frac{d^2\vec{i}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{i}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (\vec{\omega}_e \times \vec{i}) = \left(\frac{d\vec{\omega}_e}{dt} \times \vec{i} \right) + \left(\vec{\omega}_e \times \frac{d\vec{i}}{dt} \right) .$$

Остаточно можна записати:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\vec{i}}{dt^2} &= (\vec{\varepsilon}_e \times \vec{i}) + [\vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{i})], \quad \frac{d^2\vec{j}}{dt^2} = (\vec{\varepsilon}_e \times \vec{j}) + [\vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{j})], \\ \frac{d^2\vec{k}}{dt^2} &= (\vec{\varepsilon}_e \times \vec{k}) + [\vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{k})], \end{aligned} \quad (6.25)$$

де $\vec{\varepsilon}_e$ – кутове прискорення рухомої системи координат (angular acceleration of the moving coordinate system) (тіла Т) при обертанні її навколо центра О.

Підставивши (6.25) в (6.21), маємо

$$\vec{a}_e = \vec{a}_0 [\vec{\varepsilon}_e \times (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})] + [\vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}))]$$

Використовуючи вираз (6.2) і (6.14), отримаємо

$$\vec{a}_e = \vec{a}_0 + (\vec{\varepsilon}_e \times \vec{r}) + [\vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{r})]$$

Перший доданок, виділений дужками, є тангенціальним (дотичним) прискоренням (tangential acceleration) $\vec{a}_e^\tau$ точки М, а другий доданок – нормальним прискоренням (normal acceleration) $\vec{a}_e^n$ при переносному обертальному русі тіла Т:

$$\vec{a}_e^\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}; \quad (6.26)$$

$$\vec{a}_e^n = \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{r}). \quad (6.27)$$

Тоді остаточно для переносного прискорення $\vec{a}_e$ в загальному випадку руху рухомої системи координат (тіла Т) можна записати:

$$\vec{a}_e = \vec{a}_0 + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_e^n. \quad (6.28)$$

Розглянемо окремі випадки руху рухомої системи координат (тіла Т)

1. В випадку поступального руху тіла Т $\omega_e = \varepsilon_e = 0$.

Тоді, як видно з формули (6.26) – (6.28), $\vec{a}_e^\tau = \vec{a}_e^n = 0$, а переносне прискорення $\vec{a}_e = \vec{a}_0$.

2. Якщо початок О рухомої системи координат не рухається, а система координат (тіла Т) обертається навколо точки О, то $a_0 = 0$, $a_e^\tau \neq 0$, $a_e^n \neq 0$.

Переносне прискорення $\vec{a}_e = \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_e^n$.

Виведемо більш просту формулу коріолісового прискорення.

Підставимо вираз (6.13) в (6.23).

$$\vec{a}_e = 2\vec{\omega}_e \times \left(\frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} \right).$$

Використовуючи вираз (6.11), остаточно будемо мати:

$$\vec{a}_e = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r). \quad (6.29)$$

Коріолісове прискорення дорівнює подвоєному векторному добутку кутової швидкості переносного руху на відносну лінійну швидкість точки.

Числове значення коріолісового прискорення знаходиться як модуль векторного добутку (6.29):

$$a_e = 2\omega_e V_r \sin(\vec{\omega}_e \wedge \vec{V}_r). \quad (6.30)$$

Напрямок коріолісового прискорення знаходиться або по правилу векторного добутку (rule vector product) [по (6.29)], або по правилу

Жуковського (Zhukovsky's rule). Микола Єгорович Жуковський (1847-1921)- видатний російський вчений, засновник сучасної гідро і аеродинаміки. Він є також автором багатьох праць з теоретичної механіки. Винайшов формулу для визначення підйомної сили крила літака.

Правило Жуковського. Щоб знайти напрям коріолісового прискорення, необхідно (рис. 6.9):

1.Провести площину, перпендикулярну вектору кутової швидкості $\vec{\omega}_e$.

2.Спроектувати відносну швидкість $\vec{V}_r$ на цю площину.

3. Повернути проекцію швидкості на кут 90° в сторону обертання тіла Т. Це буде напрямом коріолісового прискорення.

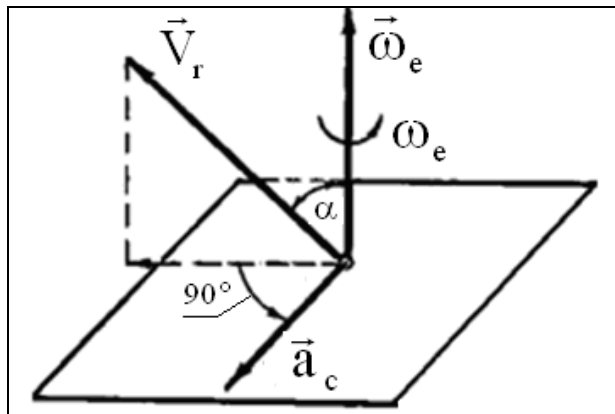


Рис. 6.9

Вияснимо, в яких випадках руху точки

М і рухомої системи координат (тіла Т) коріолісове прискорення буде відсутнє, т.б. дорівнювати нулю.

1. Нехай точка М переміщується по тілу Т, а тіло Т (рухома система координат) здійснює поступальний рух. Це означає, що відносна швидкість $V_r \neq 0$, а переносна кутова швидкість

$\omega_e = 0$. Тоді, виходячи з (6.30), маємо, що $a_c = 0$.

2. Нехай тіло Т здійснює обертальний рух ($\omega_e \neq 0$), а точка М відносно тіла Т не переміщується ($V_r = 0$). Тоді з виразу (6.30) випливає, що коріолісове прискорення $a_c = 0$.

3. Нехай тіло Т обертається ($\omega_e \neq 0$), точка М переміщується по тілу Т ($V_r \neq 0$), але напрям відносної швидкості $\vec{V}_r$ паралельний осі обертання тіла Т (рис. 6.10). Тоді кут між векторами $\vec{\omega}_e$ і $\vec{V}_r$ складає або 0° , або 180° . Синус цих кутів дорівнює нулю і коріолісове прискорення [(згідно (6.30)] $a_c = 0$.

В усіх інших випадках руху точки М і тіла Т коріолісове прискорення буде існувати.

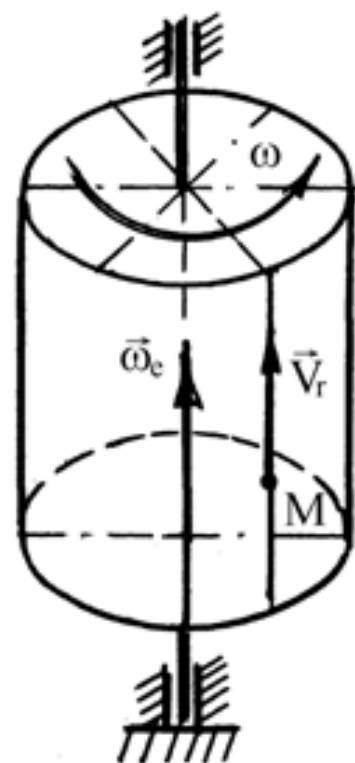


Рис. 6.10

Лекція 7. Кінематика складного руху твердого тіла Lecture 7. Kinematics of complex motion of a rigid body

7.1. Переносний рух середовища, абсолютний і відносний рух твердого тіла

Portable medium motion, absolute and relative motion of a solid

В лекції 6 ми розглядали складний рух точки. В цій лекції будемо розглядати складний рух твердого тіла, яке не можна розглядати як матеріальну точку.

Рух твердого тіла називається складним, якщо воно одночасно бере участь в декількох рухах.

Звернемось до рис. 6.2, де замість рухомої точки M в нас рухоме тіло D . Нехай тіло T рухається відносно нерухомої системи координат $X_1Y_1Z_1$, а по тілу T рухається тіло D . Рух тіла D є складним. На тілі T виберемо систему координат XYZ , яка жорстко зв'язана з цим тілом. Система координат XYZ – рухома система координат.

Рух тіла D відносно рухомої системи координат XYZ називається *відносним рухом*, а рух тіла T (рухомої системи координат) відносно нерухомої системи координат є *переносним рухом*. Рух тіла D відносно нерухомої системи координат $X_1Y_1Z_1$ є *абсолютним рухом*.

7.2. Додавання двох миттєвих поступальних рухів тіла

Adding two instantaneous translational movements of the body

Теорема 1. Якщо тіло одночасно бере участь в декількох поступальних рухах, то результуючий рух тіла буде поступальним.

Нехай тіло D рухається поступально зі швидкістю $\vec{V}_r$ відносно системи координат XYZ (тіла T), а тіло T в свою чергу рухається поступально зі швидкістю $\vec{V}_e$ відносно нерухомої системи координат $X_1Y_1Z_1$. Знайдемо абсолютну швидкість точок тіла.

По теоремі складання швидкостей швидкість довільної точки тіла в кожній момент часу дорівнює геометричній сумі швидкостей $\vec{V}_r$ і $\vec{V}_e$. В нашому випадку відносний і переносний рухи є поступальними, швидкості всіх точок тіла в відносному русі визначаються вектором $\vec{V}_r$, а в переносному русі-вектором $\vec{V}_e$, тому абсолютні швидкості всіх точок тіла будуть рівні між собою і виражені рівністю

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e. \quad (7.1)$$

Отже, результуючий рух буде поступальним.

7.3. Додавання двох миттєвих обертань навколо осей, що перетинаються

Adding two instantaneous rotations about intersecting axes

Теорема 2. Якщо тіло одночасно бере участь в двох обертаннях навколо осей, що перетинаються, то результуючий (абсолютний) рух тіла в даний момент часу є обертальним рухом навколо осі, яка проходить через точку перетину осей відносного і переносного обертань.

Миттєва кутова швидкість $\vec{\omega}_a$ складного руху тіла (instantaneous angular velocity of complex body movement) дорівнює векторній сумі миттєвих кутових швидкостей відносного $\vec{\omega}_r$ і переносного $\vec{\omega}_e$ обертань.

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e. \quad (7.2)$$

Нехай колесо D обертається навколо осі OA, а вісь OA обертається навколо осі OB. Осі OA і OB перетинаються в точці O (рис. 7.1). Обертальний рух колеса D відносно осі OA є відносним рухом з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_r$, а обертальний рух осі OA відносно осі OB – переносним рухом з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_e$. Знайдемо абсолютну швидкість $\vec{\omega}_a$ колеса D. Спочатку знайдемо положення миттєвої осі абсолютного обертання тіла D.

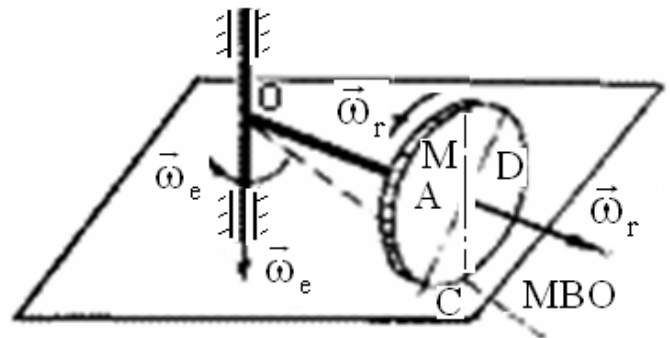


Рис. 7.1

Миттєва вісь обертання (the instantaneous axis of rotation)-це лінія, лінійні швидкості точок якої в даний момент часу дорівнюють нулю. Одна точка цієї лінії вже відома. Це точка O. Знайдемо ще одну точку.

Проведемо дві площини Π і Π_1 . Через вектори $\vec{\omega}_r$ і $\vec{\omega}_e$ проведемо площину Π , а площину $\Pi_1 \perp \Pi$. Побудуємо паралелограм на векторах $\vec{\omega}_r$ і $\vec{\omega}_e$ і проведемо діагональ OC (рис. 7.2).

$$\text{Знайдемо абсолютну швидкість } \vec{V}_C^a \text{ точки C. } \vec{V}_C^a = \vec{V}_C^r + \vec{V}_C^e, \quad (7.3)$$

де $\vec{V}_C^r$ і $\vec{V}_C^e$ – відповідно відносна і переносна швидкості точки C.

$$\vec{V}_C^r = \omega_r \cdot h_r = S_{OACB}. \quad (7.4)$$

Тут h_r – радіус обертання точки C в її відносному русі;

S_{OACB} – площа паралелограма OACB.

Швидкість $\vec{V}_C^r$ напрямлена перпендикулярно площині Π від нас. $\vec{V}_C^r \perp \Pi$.

$$\text{Переносна швидкість } \vec{V}_C^e = \omega_e \cdot h_e = S_{OACB}, \quad (7.4, a)$$

де h_e – радіус обертання точки C в її переносному русі.

Швидкість $\vec{V}_C^e$ спрямована на перпендикулярно площині Π до нас. $\vec{V}_C^e \perp \Pi$.

З виразів (7.4) і (7.4, а) видно, що переносна і відносна швидкості по модулю однакові, а напрями цих швидкостей протилежно напрямлені. Це означає, що абсолютна швидкість

точки C $\vec{V}_C^a$, яка знаходиться з формули (7.3), дорівнює нулю $V_C^a = V_C^r - V_C^e = 0$.

Якщо через точки O і C провести лінію, то ця лінія буде миттєвою осью обертання (МВО).

Миттєва вісь обертання проходить по діагоналі паралелограма, побудованого на векторах кутових швидкостей при відносному і переносному обертаннях твердого тіла.

Відносно МВО тіло виконує обертальний рух в абсолютному русі. Знайдемо абсолютну кутову швидкість тіла $\vec{\omega}_a$. Візьмемо на колесі D довільну точку M . Абсолютна швидкість точки M

$$\vec{V}_M^a = \vec{V}_M^r + \vec{V}_M^e, \quad (7.5)$$

де $\vec{V}_M^r$ і $\vec{V}_M^e$ – відповідно відносна і переносна швидкості точки M .

Використовуючи формулу Ейлера, запишемо

$$\vec{V}_M^a = \vec{\omega}_a \times OM; \quad \vec{V}_M^r = \vec{\omega}_r \times OM; \quad \vec{V}_M^e = \vec{\omega}_e \times OM. \quad (7.6)$$

Підставимо вирази (7.6) в (7.5).

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e. \quad (7.7)$$

При обертанні твердого тіла навколо осей, які перетинаються, абсолютна кутова швидкість тіла дорівнює геометричній сумі кутових швидкостей відносного і переносного обертань.

7.4. Додавання двох миттєвих обертань навколо паралельних осей Adding two instantaneous rotations about parallel axes

Нехай тверде тіло D обертається навколо осі AX , а сама вісь обертається навколо паралельній їй осі OX_1 (рис. 7.3). Тіло D бере участь в двох рухах. Обертальний рух тіла D навколо осі AX є відносним рухом з відносною кутовою швидкістю $\vec{\omega}_r$, а обертальний рух осі AX навколо осі OX_1 є переносним рухом з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_e$. Знайдемо абсолютну кутову швидкість $\vec{\omega}_a$ тіла D .

Розглянемо два випадки руху, а саме, коли обертання відбувається в одному напрямі і коли в протилежних напрямках.

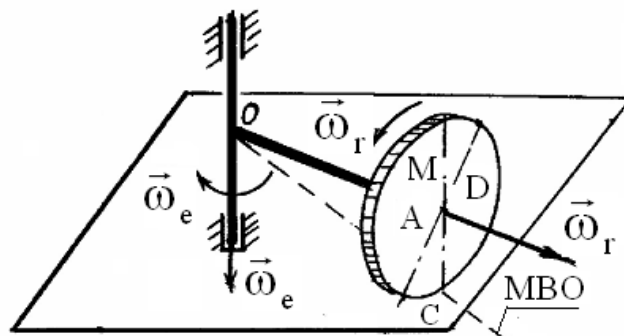


Рис. 7.2

7.4.1. Обертання в одному напрямі Rotation in one direction

Розглянемо систему двох коліс. Колесо 1 нерухоме, а колесо 2 обертається з відносною кутовою швидкістю $\vec{\omega}_r$ відносно осі AX, а вісь AX обертається в тому ж напрямі з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_a$ навколо осі OX_1 . Знайдемо абсолютну кутову швидкість $\vec{\omega}_a$ колеса 2 (рис. 7.3).

Розглянемо довільну точку C, яка знаходиться на осі OA. Її абсолютна швидкість $\vec{V}_C^a = \vec{V}_C^r + \vec{V}_C^e$,

де $\vec{V}_C^r$ і $\vec{V}_C^e$ – відповідно відносна і

переносна швидкості точки C: $V_C^r = \omega_r \cdot AC$; $V_C^e = \omega_e \cdot OC$.

Напрями цих швидкостей показані на рис. 7.3. Ці швидкості напрямлені по одній прямій в протилежні сторони. Тому абсолютна швидкість $\vec{V}_C^a$ буде $V_C^a = V_C^r - V_C^e = \omega_r \cdot AC - \omega_e \cdot OC$.

Це означає, що на осі OA можна знайти таку точку C, абсолютна швидкість якої дорівнює нулю, т.б. $\omega_r \cdot AC - \omega_e \cdot OC = 0$.

$$\text{Звідси } \frac{OC}{AC} = \frac{\omega_r}{\omega_e}. \quad (7.8)$$

Через точку C, положення якої знаходиться з виразу (7.8), проходить миттєва вісь абсолютного обертання колеса 2. Миттєва вісь абсолютного обертання поділяє відстань між осями коліс 1 і 2 у відношенні, обернено пропорційному величинам миттєвих кутових швидкостей відносного і переносного обертань.

Вектор абсолютної кутової швидкості (absolute angular velocity vector) $\vec{\omega}_a$ напрямлений по MBO.

Знайдемо значення абсолютної кутової швидкості ω_a колеса 2.

$$\text{Абсолютна швидкість точки A } \vec{V}_A^a = \vec{V}_A^r + \vec{V}_A^e.$$

Точка A лежить на осі обертання AX, тому $V_A^r = 0$. Маємо $V_A^a = V_A^e$.

$$V_A^a = \omega_a \cdot AC; V_A^e = \omega_e \cdot OA,$$

де AC – відстань точки A до MBO.

$$\omega_a \cdot AC = \omega_e \cdot OA; \omega_a = \omega_e \cdot OA / AC; OA = OC + AC.$$

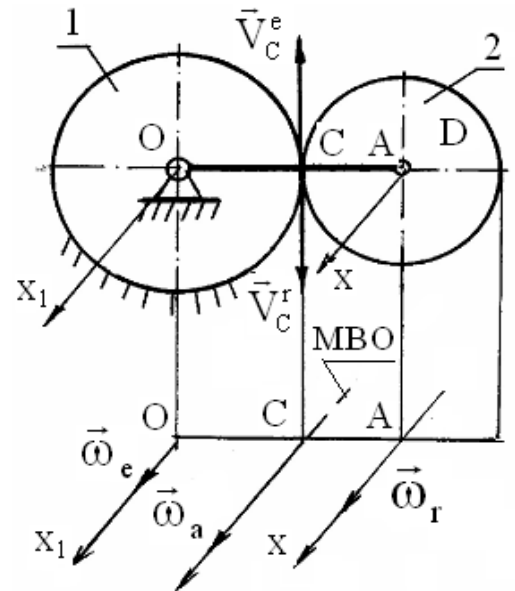


Рис. 7.3. Обертання в одному напрямі

Тоді $\omega_a = \omega_e \cdot (OC + AC) / AC = \omega_e \cdot OC / AC + \omega_e$.

Використаємо вираз (7.8): $\omega_a = \omega_e \cdot \omega_r / \omega_e + \omega_e$.

Остаточно $\omega_a = \omega_r + \omega_e$. (7.9)

При обертанні твердого тіла навколо паралельних осей (обертання в одному напрямі) абсолютна миттєва кутова швидкість дорівнює алгебраїчній сумі миттєвих кутових швидкостей відносного і переносного обертань.

Вектор абсолютної кутової швидкості $\vec{\omega}_a$ паралельний кутовим швидкостям $\vec{\omega}_r$ і $\vec{\omega}_e$ і напрямлений в ту ж сторону.

7.4.2. Обертання в протилежних напрямках Rotation in opposite directions.

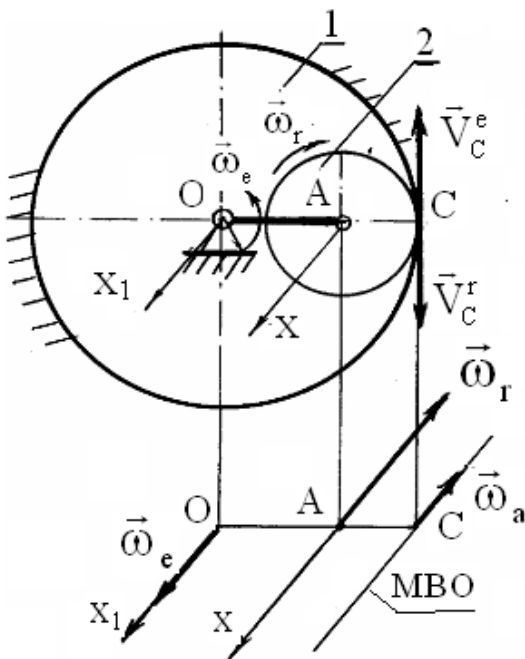


Рис. 7.4. Обертання в протилежних напрямках

Для ілюстрації цього руху розглянемо внутрішнє кочення по нерухомій шестірні 1 другої шестірні, яку приводить в рух кривошип. Колесо 1 нерухоме, колесо 2 виконує складний рух (рис. 7.4).

Знайдемо абсолютну швидкість точки C, яка знаходиться на прямій, що проходить через точки O і A.

$$\vec{V}_C^a = \vec{V}_C^r + \vec{V}_C^e; \quad V_C^r = \omega_r \cdot AC;$$

$$V_C^e = \omega_e \cdot OC.$$

Напрями цих швидкостей показані на рис. 7.4. Ці швидкості напрямлені по одній прямій в протилежні сторони, тому абсолютна швидкість точки C

$$V_C^a = V_C^r - V_C^e = \omega_r \cdot AC - \omega_e \cdot OC.$$

Міняючи положення точки C, можна

знайти таке місце, де її абсолютна швидкість дорівнює нулю.

$$V_C^a = 0; \quad \omega_r \cdot AC - \omega_e \cdot OC = 0.$$

$$\text{Звідси} \quad \frac{OC}{AC} = \frac{\omega_r}{\omega_e}. \quad (7.10)$$

Через точку C, положення якої знаходиться з виразу (7.10), проходить миттєва вісь обертання колеса 2.

Знайдемо значення абсолютної кутової швидкості (absolute angular velocity) ω_a колеса 2.

Абсолютна швидкість точки А $\vec{V}_A^a = \vec{V}_A^r + \vec{V}_A^e$.

Але відносна швидкість точки А $V_A^r = 0$. Тому $V_A^a = V_A^e$.

$$V_A^a = \omega_a \cdot AC; \quad V_A^e = \omega_e \cdot OA,$$

де AC – відстань точки А до МВО.

$$\omega_a \cdot AC = \omega_e \cdot OA; \quad \omega_a = \omega_e \cdot \frac{OA}{AC}; \quad OA = OC - AC.$$

$$\text{Тоді } \omega_a = \omega_e \cdot \frac{OC - AC}{AC} = \omega_e \cdot \frac{OC}{AC} - \omega_e.$$

Використовуючи вираз (7.10), маємо

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_r - \vec{\omega}_e. \quad (7.11)$$

При складанні двох антипаралельних обертань, результирующим рухом тіла є обертання навколо миттєвої вісі, паралельної даним осям AX і OX_1 . МВО ділить відстань між осями зовнішнім чином на частини, обернено пропорційні кутовим швидкостям ω_r і ω_e .

Кутова швидкість ω_a результирующего руху дорівнює різниці кутових швидкостей і напрямлена в сторону більшої кутової швидкості.

Примітка. Як видно з рис. 7.3 і 7.4 миттєва вісь обертання проходить через точку контакту рухомого колеса 2 з нерухомим колесом 1.

7.4.3. Пара обертань. A pair of rotations

Розглянемо випадок коли два миттєві обертання рівні за величиною, але протилежні за напрямом, і не відбуваються навколо однієї осі. Сукупність двох таких миттєвих обертань називається *парою миттєвих обертань*.

Для прикладу візьмемо рух педалі велосипеда (рис. 7.5). Рух педалі утворюється внаслідок протилежних обертань навколо паралельних осей: власної осі педалі, що проходить через точку А, і осі ведучої шестірні.

Покажемо, що в випадку пари обертань ($\vec{\omega}_r = -\vec{\omega}_e$, а по величині $\omega_r = \omega_e$), результируючий рух тіла буде поступальним. Візьмемо в площині Π довільну точку М. Абсолютна швидкість точки М може бути представлена як геометрична сума двох швидкостей

$$\vec{V}_M^a = \vec{V}_M^r + \vec{V}_M^e, \quad \text{де, використовуючи}$$

формулу Ейлера, $\vec{V}_M^r = \vec{\omega}_r \times \vec{AM}$ – швидкість точки М при її обертанні

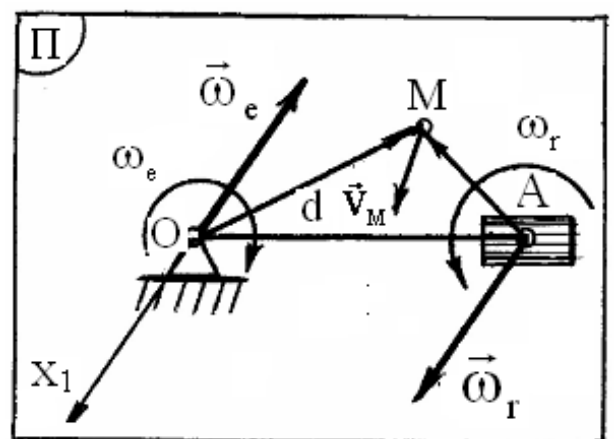


Рис. 7.5. Пара обертань

навколо точки А, а $V_M^e = \vec{\omega}_e \times \overrightarrow{OM}$ – швидкість точки М при її обертанні навколо точки О.

$$\text{Тоді } \vec{V}_M^a = (\vec{\omega}_r \times \overrightarrow{AM}) + (\vec{\omega}_e \times \overrightarrow{OM}).$$

Враховуючи те, що $\vec{\omega}_r = -\vec{\omega}_e$, маємо

$$\vec{V}_M^a = (-\vec{\omega}_e \times \overrightarrow{AM}) + (\vec{\omega}_e \times \overrightarrow{OM}) = \vec{\omega}_e \times (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{AM}) = \vec{\omega}_e \times \overrightarrow{OA}.$$

Як видно з цього виразу, швидкість точки М не залежить від її положення в тілі.

$$\vec{V}_M^a = \vec{\omega}_e \times \overrightarrow{OA}. \quad (7.12)$$

З цієї формули видно, що *якщо тіло бере участь в парі обертання, то результуючий рух тіла буде поступальним*. Дійсно, рух педалі велосипеда є поступальним рухом.

З формули (7.12) можна знайти величину швидкості поступального руху тіла $V = \omega_e \cdot d$,
де d – найкоротша відстань між осями обертання.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ. QUESTIONS FOR SELF-CONTROL

1. Основні відомості з кінематики точки
2. Предмет кінематики.
3. Способи визначення руху точки.
4. Векторний спосіб визначення руху точки.
5. Координатний спосіб визначення руху точки.
6. Натуральна форма рівнянь руху.
7. Знаходження швидкості та прискорення точки при векторному способі визначення її руху.
8. Знаходження швидкості точки.
9. Знаходження прискорення точки.
10. Швидкість та прискорення точки в прямокутній декартовій системі координат.
11. Знаходження швидкості точки.
12. Знаходження прискорення точки.
13. Швидкість і прискорення точки при натуральному способі визначення її руху.
14. Знаходження швидкості точки .
15. Натуральні осі та натуральний тригранник.
16. Кривизна лінії.
17. Знаходження прискорення точки. Дотичне і нормальне прискорення.
18. Закон рівномірного і рівноприскореного (рівносповільненого) руху точки по траєкторії.
19. Закон рівномірного руху точки по траєкторії.
20. Закон рівноприскореного (рівносповільненого) руху точки по траєкторії.
21. Знаходження швидкості та прискорення точки при полярному способі визначення її руху.
22. Знаходження швидкості точки.
23. Знаходження прискорення точки.
24. Поступальний рух твердого тіла.
25. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі.
26. Рівняння обертального руху. Кутова швидкість, кутове прискорення.
27. Рівняння рівномірного обертального руху тіла.
28. Рівняння рівнозмінного обертального руху тіла.
29. Швидкість і прискорення точок тіла, яке обертається навколо нерухомої осі.
30. Кутова швидкість і кутове прискорення як вектори.

31. Векторні формули для знаходження швидкості і прискорення точок тіла, яке обертається навколо нерухомої осі.
32. Передаточні механізми.
33. Зовнішнє зачеплення коліс.
34. Внутрішнє зачеплення коліс.
35. Пасова передача.
36. Плоский рух твердого тіла.
37. Означення плоского руху твердого тіла.
38. Рівняння плоского руху твердого тіла.
39. Представлення плоского руху тіла на поступальний рух тіла разом з полюсом і обертальний рух навколо полюса.
40. Швидкість точок тіла при його плоскому русі.
41. Властивості швидкостей точок плоскої фігури, які лежать на одній прямій.
42. Миттєвий центр швидкостей.
43. Прийоми знаходження миттєвого центра швидкостей.
44. План швидкостей і його властивості.
45. Побудова плану швидкостей.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

LIST OF USED LITERATURE

1. Пастушенко С. І., Руденко О. Г., Іщенко В. В. Практикум з теоретичної механіки. Частина II. : Динаміка. Вінниця : Нова книга, 2007. 543 с.
2. Пастушунко С. І., Руденко О. Г., Іщенко В. В. Практикум з теоретичної механіки : навчальний посібник. Ч. I. : Статика. Кінематика. Вінниця : Нова книга, 2006. 380 с.
3. Теоретична механіка / І. В. Кузьо та ін. Харків : Фоліо, 2017. 347 с.
4. Черниш О. М., Березовий М. Г., Яременко В. В., Головач І. В. Теоретична механіка : навчальний посібник. Київ : Центр навчальної літератури, 2018. 760 с.
5. Штефан Н. І., Гнатейко Н. В., Федоров В. М. Теоретична механіка. Кінематика точки і твердого тіла : підручник для студентів спеціальностей: 133 «Галузеве машинобудування», 131 «Прикладна механіка» / КПІ ім. Ігоря Сікорського. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського. 2020. 120 с.

Навчальне видання

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА: КІНЕМАТИКА

курс лекцій

Укладачі: **Іванов** Геннадій Олександрович.
Бабенко Дмитро Володимирович
Полянський Павло Миколайович
Степанов Сергій Миколайович
Баранова Олена Володимірівна

Технічний редактор: П. М. Полянський

Дизайн обкладинки: П. М. Полянський

Комп'ютерний набір: Г. О. Іванов, П. М. Полянський

Комп'ютерна верстка – П. М. Полянський
Формат 60x84/1/16. Папір офсетний.
Ум. друк. арк. 6,50. Наклад 100 прим. Зам. №

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Геологія Гонгадзе, 9.
Тел./факс: (0512) 341082

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК №4490 від 20.02.2013 р.