МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Інженерно-енергетичний факультет
Кафедра вищої та прикладної математики

ВИЩА МАТЕМАТИКА

"Диференціальне числення"
методичні рекомендації для виконання самостійної роботи здобувачами початкового рівня (короткий цикл) вищої освіти ОПП "Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка" спеціальності 141 "Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка" денної форми здобуття вищої освіти

Миколаїв
2023

УДК 51
В 55

Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету (протокол № 7 від 27.02.2023 р.)

Укладачі:
В. С. Шебанін – д-р. техн. наук, академік, ректор МНАУ;
Є. Ю. Борчик – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої та прикладної математики, МНАУ;
С. І. Богданов – старший викладач кафедри вищої та прикладної математики, МНАУ;
О. В. Бойчук – канд. фіз.-мат. наук, старший викладач кафедри вищої та прикладної математики, МНАУ.

Рецензенти:
Р.В. Дінжос – д.т.н., професор, завідуючий кафедри фізики, математики та інформаційних технологій, Миколаївський національний університет ім. В. О. Сухомлинського;
О. С. Садовий – к.т.н, доцент кафедри електроенергетики, електротехніки та електромеханіки, Миколаївський національний аграрний університет.

ВСТУП

Вища математика як навчальна дисципліна є фундаментальним нормативним курсом, найвагомішою базовою складовою якісної підготовки висококваліфікованих фахівців у вищих навчальних закладах освіти III-IV рівнів акредитації.

У методичних рекомендаціях запропоновано завдання для самостійної роботи студентів за програмою з вищої математики для здобувачів початкового рівня (короткий цикл) спеціальності 141 “Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка”.

Матеріал даного посібника складається з основних теоретичних відомостей, розрахункових завдань та методичних рекомендацій. Розрахункові завдання розподілено на групи за тематикою та методами розв’язання. В методичних рекомендаціях пропонуються приклади розв’язання задач з кожної теми з повним обґрунтуванням. Розглядаються наступні теми:

Тема 1. Похідна та її зміст. Правила диференціювання.

Тема 2. Похідна складеної функції. Логарифмічне диференціювання.

Тема 3. Диференціювання неявної та параметричної функцій.

Тема 4. Диференціал функції.

Тема 5. Похідні вищих порядків.

Тема 6. Розкриття невизначеностей за правилом Лопіталя.

Тема 7. Застосування диференціального числення до дослідження і побудови графіку функції .

Тема 8. Застосування диференціального числення до розв’язання оптимізаційних задач .

Тема 1. Похідна та її зміст. Правила диференціювання.
1.1 Основні теоретичні відомості

Означення: границю відношення приросту функції до приросту аргументу (якщо така границя існує), за умови, що приріст аргументу прямує до нуля, називають похідною функціїї $y = f(x)$ в точці x_0.

Позначають так:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{df}{dx}.$$

Функцію, що має похідну в точці x_0, називають *диференційованою в точці* x_0.

Функцію, що має похідну в кожній точці інтервалу (a, b) (скінченного або нескінченного), називають *диференційованою на інтервалі (a, b).*

Операцію знаходження похідної функції називають *диференціюванням* функції.

Геометрично похідна являє собою кутовий коефіцієнт дотичної лінії до графіка функції $y = f(x)$ у точці x, тобто $y' = \mathrm{tg}\alpha$, де α – кут нахилу дотичної лінії.

Рівняння дотичної у точці $(x_0; y_0)$ до графіка функції $y = f(x)$: $y = y(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Рівняння нормалі до графіка функції $y = f(x)$: $y = y(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Нехай матеріальна точка рухається по траєкторії згідно закону руху $s = s(t)$. Механічно похідна являє собою миттєву швидкість матеріальної точки, тобто швидкість в момент часу t, тобто $s' = v$.

Нехай швидкість матеріальної точки змінюється згідно закону $v = v(t)$. Механічно похідна являє собою миттєве прискорення матеріальної точки, тобто прискорення в момент часу t, тобто $v' = a$.

Правила диференціювання

Нехай задано диференційовані функції $u = u(x)$ та $v = v(x)$.

1. Похідна суми/різниці диференційованих функцій дорівнює сумі/різниці похідних цих функцій $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

2. Похідна добутку двох диференційованих функцій дорівнює сумі добутку похідної першої функції на другу та добутку похідної другої функції на першу: $(u \cdot v)' = u'v + uv'$.

3. Похідна частки: $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Наслідок 1. Постійний множник C можна виносити за знак похідної: $(Cu)' = Cu'$; $\left(\dfrac{u}{C}\right)' = \dfrac{u'}{C}$.

Наслідок 2. $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$.

Наслідок 3. $\left(\dfrac{C}{v}\right)' = -\dfrac{C}{v^2}$.

Таблиця похідні елементарних функцій

1	$(C)' = 0$	7	$(a^x)' = a^x \ln a$	13	$(\mathrm{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
2	$x' = 1$	8	$(e^x)' = e^x$	14	$(\mathrm{ctg}x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
3	$(x^n)' = nx^{n-1}$	9	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	15	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4	$(x^{-n})' = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	10	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	16	$(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
5	$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	11	$(\sin x)' = \cos x$	17	$(\mathrm{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
6	$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	12	$(\cos x)' = -\sin x$	18	$(\mathrm{arcctg}x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

1.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Функція $y = x^2$. Користуючись означенням похідної знайти похідну в точках $x = 3$ і $x = -4$.

Розв’язання: Надамо аргументу x приросту Δx, тоді функція набуде приросту $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2 + x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$.

Складемо відношення приросту функції до приросту аргументу $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$, відшукаємо границю $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x$. Таким чином, $f'(x) = 2x$.

Похідна в точці $x = 3$ $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$, а похідна при $x = -4$ буде $f'(-4) = 2 \cdot (-4) = -8$.

Приклад 2. Знайти похідну функції $y = 3x^2 - \sqrt[3]{x} + \ln x$.

Розв'язання: Дана функція є алгебраїчною сумою функцій, тому використовуємо 1 правило диференціювання:

$$y' = \left(3x^2\right)' - \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' + \left(\ln x\right)'.$$

У здобутому виразі перший доданок алгебраїчної суми є добуток сталої величини на степеневу функцію $\Rightarrow$ — застосуємо до нього наслідок і формулу (3) таблиці похідних; другий — ірраціональна функція з показником $m = \frac{1}{3}$ — застосуємо формулу (3) таблиці похідних; третій — логарифмічна функція з основою $e \Rightarrow$ — використаємо формулу (8):

$$y' = 3 \cdot 2x - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{x} = 6x - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{x}.$$

Приклад 3. Обчислити похідну для функції $y = \sin 2x$.

Розв'язання: Дана функція є множенням двох функцій, тому використовуємо 2 правило диференціювання:

$$y' = \left(\sin 2x\right)' = \left(2\sin x \cos x\right)' = 2(\left(\sin x\right)' \cos x + \sin x\left(\cos x\right)') =$$
$$= 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2\cos 2x.$$

Таким чином, $(\sin 2x)' = 2\cos 2x.$

Приклад 4. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $f(x) = x^3 - 2x$ у точці $x_0 = 0$.

Розв'язання: $f'(x) = 3x^2 - 2$; $f'(0) = -2$.

Відповідь: –2.

Приклад 5. Знайти кутовий коефіцієнт нормалі до графіка функції $f(x) = 2x - x^3$ у точці $x_0 = 0$.

Розв'язання: $f'(x) = 2 - 3x^2$; $f'(0) = 2$; $k_{\perp} = -\frac{1}{2} = -0{,}5$.

Відповідь: –0,5.

Приклад 6. Скласти рівняння дотичної та нормалі до графіка кривої $y = x^2$ в точці $(1;1)$.

Розв'язання: $y' = 2x$; $y'(1) = 2$. Рівняння дотичної до графіка функції: $y = 1 + 2(x-1)$, $y = 2x - 1$. Рівняння нормалі до графіка функції: $y = 1 - \frac{1}{2}(x-1)$, $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

Відповідь: $y = 2x - 1$; $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

Приклад 7. Скласти рівняння дотичної та нормалі до графіка кривої $y = 6\sqrt[3]{x} - \frac{16\sqrt[4]{x}}{3}$ в точці $x_0 = 1$.

Розв'язання:

$y = 6x^{\frac{1}{3}} - \frac{16}{3}x^{\frac{1}{4}}$; $y' = \frac{6}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{16}{3}\cdot\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$; $y(1) = 6 - \frac{16}{3} = \frac{2}{3}$; $y'(1) = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$.

Рівняння дотичної до графіка функції: $y = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}(x-1)$, $y = \frac{2}{3}x$ або $2x - 3y = 0$. Рівняння нормалі до графіка функції: $y = \frac{2}{3} - \frac{3}{2}(x-1)$, $y = -\frac{3}{2}x + \frac{13}{6}$ або $9x + 6y - 13 = 0$.

Відповідь: $2x - 3y = 0$; $9x + 6y - 13 = 0$.

Приклад 8. Тіло рухається за законом $s(t) = t^3 + 2t$ (час вимірюється в секундах, шлях у метрах). Визначте швидкість його руху в момент часу $t = 2c$.

Розв'язання: $s'(t) = 3t^2 + 2$; $v(t) = s'(2) = 3\cdot 2^2 + 2 = 14\, м/с$.

Відповідь: $14\, м/с$.

Приклад 9. Швидкість тіла змінюється за законом $v(t) = 3t^2 + 4t$ (час вимірюється в секундах, швидкість у метрах за секундах). Визначте його прискорення в момент часу $t = 1c$.

Розв'язання: $v'(t) = 6t + 4$; $a(1) = v'(1) = 6\cdot 1 + 4 = 10\, м/с^2$.

Відповідь: $10\, м/с^2$.

Приклад 10. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 4t$ (час вимірюється в секундах, шлях у метрах). Визначте прискорення його руху в момент $t = 1c$.

Розв'язання: $s'(t) = \frac{2}{3}\cdot 3t^2 - 2\cdot 2t + 4 = 2t^2 - 4t + 4$; $v'(t) = 2\cdot 2t - 4 = 4t - 4$; $a(1) = v'(1) = 4\cdot 1 - 4 = 0\, м/с^2$.

Відповідь: 0.

1.3 Завдання для самостійного розв'язання

Завдання 1

Варіант	Знайти похідні функцій:		
1	$y=\frac{1}{2}x^3-3e^x+6$	$y=\log_3 x\cdot 2^x$	$y=\frac{4e^x}{\sqrt[3]{x^2}}$; $y=\frac{4+\cos x}{\sin x}$
	$y=\cos x-2^x-\ln x+\mathrm{tg}x$	$y=x^2\mathrm{arctg}x$	
2	$y=\frac{1}{5}x^3-2\sqrt{x}+2$	$y=\sqrt{x^3}\log_7 x$	$y=\frac{x+1}{e^x}$; $y=\frac{1-e^x}{\sin x}$
	$y=\sin x-\sqrt{x}+\arccos x$	$y=3^x\sin x$	
3	$y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{x}-8x+5$	$y=\left(x^2+2x\right)3^x$	$y=\frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$; $y=\frac{5+\sin x}{\cos x}$
	$y=3^x+6\cos x-4\ln x+2$	$y=\sin x\cdot\ln x$	
4	$y=\frac{1}{7}x^7-2\log_6 x-3x$	$y=\left(\sqrt{x}+2\right)\log_3 x$	$y=\frac{4x^2}{3+x^2}$; $y=\frac{5+\sin x}{4-\cos x}$
	$y=e^x+6\sin x-5\log_3 x+2$	$y=\cos x\cdot\log_2 x$	
5	$y=\frac{1}{6}x^4-\frac{5}{2}\sqrt[5]{x^2}+3$	$y=\frac{1}{3}x^9\log_4 x$	$y=\frac{12^x}{9+x^2}$; $y=\frac{1-\sin x}{\cos x}$
	$y=\mathrm{tg}x-6x+4^x$	$y=\arccos x\cdot 6^x$	
6	$y=\frac{1}{x}-x^2+3\log_2 x$	$y=\left(x+\frac{1}{x}\right)5^x$	$y=\frac{x^2-3x+3}{\sqrt{x}-1}$; $y=\frac{\sin x}{1-\cos x}$
	$y=\cos x-5x+7^x$	$y=\mathrm{arctg}x\cdot e^x$	
7	$y=-\frac{1}{5}x^3+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-4$	$y=\left(\sqrt{x}+\frac{2}{x}\right)\log_3 x$	$y=\frac{4-x^3}{e^x}$; $y=\frac{\cos x+\sin x}{x}$
	$y=7\sin x-3x^4+\arccos x$	$y=x^4\,\mathrm{arc\,tg}x$	
8	$y=\frac{3^x}{2}-\frac{7}{2}x^2-2$	$y=\left(4x+1\right)\sqrt[3]{x^2}$	$y=\frac{\log_4 x}{e^x+1}$; $y=\frac{\cos x-\sin x}{2x}$
	$y=3\cos x-2x^3+\arccos x$	$y=x^3\,\mathrm{arc\,ctg}x$	
9	$y=-\frac{1}{3}x^3+e^x+3x-2$	$y=\left(2^x+\frac{3}{x}\right)\log_{11} x$	$y=\frac{2x^3+1}{\sqrt{x}}$; $y=\frac{\sin x}{6-2^x}$
	$y=\sqrt{x}+5x-5\arccos x+4$	$y=\left(\cos x+1\right)\ln x$	

10	$y=-\frac{1}{x}+2\log_3 x-9$	$y=\left(x^2+x\right)\sqrt[4]{x^3}$	$y=\frac{4^x}{x^2+3}$; $y=\frac{3+\sin x}{9-e^x}$
	$y=e^x-\sqrt{x}+5-5\cos x+4x$	$y=(\ln x+1)\cos x$	
11	$y=-\frac{1}{6}\sqrt{x^3}+2^x-4$	$y=\left(e^x+\frac{3}{x}\right)\sqrt{x}$	$y=\frac{x^2+1}{\log_3 x}$; $y=\frac{x-e^x}{\cos x}$
	$y=3\sqrt{x}-\arccos x-7\ln x$	$y=\left(x^3+\cos x\right)e^x$	
12	$y=-\log_3 x+3x-5$	$y=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)2^x$	$y=\frac{x^3}{2^x+1}$; $y=\frac{\cos x-e^x}{x}$
	$y=3\sqrt{x}+\arcsin x-7\log_2 x$	$y=\left(x^3+\arccos x\right)\sin x$	
13	$y=\frac{1}{2}x^3-\frac{5}{2}\sqrt{x}-2$	$y=\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)\sqrt[3]{x}$	$y=\frac{3^x}{x^2+12}$; $y=\frac{\sin x}{\sin x-\cos x}$
	$y=4\mathrm{tg}x+4x^2+\arcsin x-\sqrt{x}$	$y=(\mathrm{tg}x+\ln x)\cos x$	
14	$y=-\frac{1}{3}x^6+e^x-1$	$y=\left(x^3-2^x\right)\sqrt{x}$	$y=\frac{9-x^2}{\log_4 x}$; $y=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$
	$y=4\sin x-x^{12}+\mathrm{arctg}x-\sqrt{x}$	$y=\left(\mathrm{tg}x+\log_8 x\right)\arccos x$	
15	$y=\frac{1}{3}\log_2 x-\frac{4}{9}\sqrt[9]{x^4}-7x$	$y=\sqrt{x}\left(e^x+\frac{1}{x}\right)$	$y=\frac{8x}{x^2+4}$; $y=\frac{x-\cos x}{\sin x}$
	$y=7\mathrm{tg}x-x^3+5^x$	$y=3^x\cdot\mathrm{tg}x\cdot\sqrt{x}$	
16	$y=\frac{1}{6}\log_{13} x-\frac{4}{9}\left(\sqrt[5]{x^3}\right)^2-7^x$	$y=\sqrt{x}\left(\log_{17} x+\frac{1}{x}\right)$	$y=\frac{9\log_3 x-e^x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$; $y=\frac{x\cos x}{1-\sin x}$
	$y=6\mathrm{arctg}x-x^4+7e^x$	$y=2^x\cdot\mathrm{ctg}x\cdot\sqrt{x}$	
17	$y=\frac{1}{2}x^6-3e^x+6$	$y=\log_5 x\cdot 2^x$	$y=\frac{4e^{2x}}{\sqrt[3]{x^2}}$; $y=\frac{4+\cos x}{\sin 2x}$
	$y=\cos 3x-2^x-\ln x+\mathrm{tg}x$	$y=x^7\mathrm{arctg}x$	
18	$y=\frac{1}{5}x^7-2\sqrt{x}+2$	$y=\sqrt{x^5}\log_4 x$	$y=\frac{x+1}{e^{2x}}$; $y=\frac{1-e^x}{\sin 2x}$
	$y=\sin x-\sqrt{x}+\arccos 2x$	$y=3^x\sin 2x$	
19	$y=\frac{1}{3}x^8-\frac{1}{x}-8x+5$	$y=\left(x^3+2x\right)3^x$	$y=\frac{\sqrt{3x}+1}{x-1}$; $y=\frac{5+\sin 3x}{\cos x}$

	$y=3^{x}+6\cos 2x-4\ln x+2$	$y=\sin 2x\cdot\ln x$	
20	$y=\frac{1}{7}x^{7}-2\log_{7}x-3x$	$y=\left(\sqrt{x}+2\right)\log_{3}2x$	$y=\frac{4x^{3}}{3+x^{2}}$; $y=\frac{5+\sin 5x}{4-\cos x}$
	$y=e^{3x}+6\sin x-5\log_{3}x+2$	$y=\cos 2x\cdot\log_{2}x$	
21	$y=\frac{1}{6}x^{3}-\frac{5}{2}\sqrt[5]{x^{2}}+3$	$y=\frac{1}{3}x^{7}\log_{4}x$	$y=\frac{12^{3x}}{9+x^{2}}$; $y=\frac{1-\sin 5x}{\cos x}$
	$y=\mathrm{tg}2x-6x+4^{x}$	$y=\arccos 2x\cdot 6^{x}$	
22	$y=\frac{1}{x}-x^{2}+3\log_{2}5x$	$y=\left(2x+\frac{1}{x}\right)5^{x}$	$y=\frac{x^{3}-3x+3}{\sqrt{x}-1}$; $y=\frac{\sin 4x}{1-\cos x}$
	$y=\cos x-5x+7^{3x}$	$y=\mathrm{arctg}2x\cdot e^{x}$	
23	$y=-\frac{1}{5}x^{7}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^{2}}-4$	$y=\left(\sqrt{x}+\frac{2}{x}\right)\log_{3}5x$	$y=\frac{4-x^{3}}{e^{3x}}$; $y=\frac{\cos 2x+\sin x}{x}$
	$y=7\sin 2x-3x^{4}+\arccos x$	$y=x^{4}\,\mathrm{arc\,tg}3x$	
24	$y=\frac{3^{x}}{2}-\frac{7}{2}x^{3}-2$	$y=(4x+1)\sqrt[3]{x^{4}}$	$y=\frac{\log_{4}3x}{e^{x}+1}$; $y=\frac{\cos x-\sin 3x}{2x}$
	$y=3\cos 2x-2x^{3}+\arccos x$	$y=x^{3}\,\mathrm{arc\,ctg}2x$	
25	$y=-\frac{1}{3}x^{3}+e^{2x}+3x-2$	$y=\left(2^{x}+\frac{3}{x}\right)\log_{11}3x$	$y=\frac{2x^{3}+1}{\sqrt{5x}}$; $y=\frac{\sin 3x}{6-2^{x}}$
	$y=\sqrt{x}+5x-5\arccos 2x+4$	$y=(\cos x+1)\ln 2x$	
26	$y=-\frac{1}{x}+2\log_{3}5x-9$	$y=\left(x^{2}+x\right)\sqrt[4]{x^{5}}$	$y=\frac{4^{x}}{x^{3}+3}$; $y=\frac{3+\sin 2x}{9-e^{x}}$
	$y=e^{x}-\sqrt{x}+5-5\cos 2x+4x$	$y=(\ln x+1)\cos 2x$	
27	$y=-\frac{1}{6}\sqrt{x^{5}}+2^{x}-4$	$y=\left(e^{x}+\frac{3}{x}\right)\sqrt{5x}$	$y=\frac{x^{3}+1}{\log_{3}x}$; $y=\frac{x-e^{3x}}{\cos x}$
	$y=3\sqrt{x}-\arccos 2x-7\ln x$	$y=\left(x^{3}+\cos x\right)e^{2x}$	
28	$y=-\log_{3}5x+3x-5$	$y=\left(\sqrt{5x}+\frac{1}{x}\right)2^{x}$	$y=\frac{x^{4}}{2^{x}+1}$; $y=\frac{\cos 2x-e^{x}}{x}$
	$y=3\sqrt{x}+\arcsin 2x-7\log_{2}x$	$y=\left(x^{3}+\arccos 2x\right)\sin x$	
29.	$y=-\frac{1}{3}x^{6}+e^{x}-1$	$y=\left(x^{3}-2^{x}\right)\sqrt{x}$	$y=\frac{9-x^{2}}{\log_{4}x}$; $y=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$

	$y=\sqrt{x}+5x-5\arccos 2x+4$	$y=(\cos x+1)\ln 2x$	

Завдання 2

Скласти рівняння дотичної та рівняння нормалі до графіка кривої $y=f(x)$ в точці x_0:

Варіант				
1	$y=\dfrac{4x-x^2}{4}$	$x_0=2$	$y=2x^2+3x-1$	$x_0=-2$
2	$y=x-x^3$	$x_0=-1$	$y=x^2+8\sqrt{x}-32$	$x_0=4$
3	$y=x+\sqrt{x^3}$	$x_0=1$	$y=\dfrac{x^2-2x+6}{x^2}$	$x_0=-8$
4	$y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$	$x_0=4$	$y=8\sqrt[4]{x}-70$	$x_0=16$
5	$y=2x^2-3x+1$	$x_0=1$	$y=\sqrt[3]{x^2}-2$	$x_0=8$
6	$y=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}$	$x_0=64$	$y=\dfrac{x^3+2}{x^3-2}$	$x_0=2$
7	$y=2x^2+3$	$x_0=-1$	$y=\dfrac{x^{20}+6}{x^4+4}$	$x_0=1$
8	$y=\dfrac{2x+1}{x}$	$x_0=1$	$y=-\dfrac{2\left(x^8+2\right)}{3\left(x^4+1\right)}$	$x_0=1$
9	$y=\dfrac{x^5+1}{x^4+1}$	$x_0=1$	$y=\dfrac{x^{16}+9}{1-5x^2}$	$x_0=1$
10	$y=3\left(\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x}\right)$	$x_0=1$	$y=\dfrac{1}{3x+1}$	$x_0=2$
11	$y=\dfrac{x}{x^2+1}$	$x_0=-2$	$y=\dfrac{x^2+3x+3}{3}$	$x_0=2$
12	$y=\dfrac{2x}{x^2+1}$	$x_0=1$	$y=-2\left(\sqrt[3]{x}+3\sqrt{x}\right)$	$x_0=1$

13	$y=\frac{1+x^2}{1+x^2}$	$x_0=1$	$y=\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}+2$	$x_0=1$
14	$y=3\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}$	$x_0=1$	$y=\frac{3x-2x^3}{3}$	$x_0=1$
15	$y=\frac{x^2}{10}+1$	$x_0=2$	$y=\frac{x^2-2x-3}{4}$	$x_0=4$
16	$y=\frac{8x-x^2}{8}$	$x_0=2$	$y=4x^2+3x-1$	$x_0=-2$
17	$y=x-2x^3$	$x_0=-1$	$y=x^2+16\sqrt{x}-32$	$x_0=4$
18	$y=2x+\sqrt{x^3}$	$x_0=1$	$y=\frac{2x^2-4x+6}{2x^2}$	$x_0=-8$
19	$y=\frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$	$x_0=4$	$y=16\sqrt[4]{x}-70$	$x_0=16$
20	$y=4x^2-6x+1$	$x_0=1$	$y=\sqrt[3]{x^2}-4$	$x_0=8$
21	$y=4\sqrt{x}-6\sqrt[3]{x}$	$x_0=64$	$y=\frac{x^3+4}{x^3-4}$	$x_0=2$
22	$y=2x^2+6$	$x_0=-1$	$y=\frac{x^{20}+12}{x^4+8}$	$x_0=1$
23	$y=\frac{2x+2}{x}$	$x_0=1$	$y=-\frac{2\left(x^8+4\right)}{3\left(x^4+2\right)}$	$x_0=1$
24	$y=\frac{x^5+2}{x^4+2}$	$x_0=1$	$y=\frac{x^{16}+9}{1-10x^2}$	$x_0=1$
25	$y=3\left(2\sqrt[3]{x}-4\sqrt{x}\right)$	$x_0=1$	$y=\frac{1}{3x+2}$	$x_0=2$
26	$y=\frac{x}{x^2+2}$	$x_0=-2$	$y=\frac{x^2+3x+3}{6}$	$x_0=2$
27	$y=\frac{2x}{x^2+2}$	$x_0=1$	$y=-2\left(\sqrt[3]{x}+6\sqrt{x}\right)$	$x_0=1$
28	$y=\frac{1+2x^2}{2+x^2}$	$x_0=1$	$y=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+2$	$x_0=1$

29	$y=6\sqrt[4]{x}-2\sqrt{x}$	$x_0=1$	$y=\dfrac{3x-2x^3}{6}$	$x_0=1$
30	$y=\dfrac{x^2}{5}+2$	$x_0=2$	$y=\dfrac{x^2-2x-3}{8}$	$x_0=4$

Тема 2. Похідна складеної функції. Логарифмічне диференціювання.

2.1 Основні теоретичні відомості

Нехай змінна y є функцією від змінної u: $y=f(u)$, а змінна u є функцією від незалежної змінної x: $u=\varphi(x)$. Якщо $y=f(u)$ та $u=\varphi(x)$ – диференційовані функції своїх аргументів, то похідна складеної функції існує та рівна похідній даної функції за проміжним аргументом, помноженій на похідну проміжного аргументу за незалежною змінною x: $y'=f'(u)u'=f'(\varphi(x))\varphi'(x)$.

Логарифмічне диференціювання застосовують до функції $y=f(x)^{\varphi(x)}$. Алгоритм:

Крок 1. Прологарифмуємо обидві частини рівності: $\ln y=\ln f(x)^{\varphi(x)}$;

Крок 2. За властивістю логарифма запишемо: $\ln y=\varphi(x)\ln f(x)$;

Крок 3. Диференціюємо:

$$\frac{1}{y}y'=\varphi'(x)\ln f(x)+\varphi(x)(\ln f(x))'=\varphi'(x)\ln f(x)+\frac{\varphi(x)f'(x)}{f(x)};$$

Крок 4. Помножимо обидві частини на y:

$$y'=y\left(\varphi'(x)\ln f(x)+\frac{\varphi(x)f'(x)}{f(x)}\right);$$

Крок 5. Замінимо y на $f(x)^{\varphi(x)}$:

$$y=f(x)^{\varphi(x)}\left(\varphi'(x)\ln f(x)+\frac{\varphi(x)f'(x)}{f(x)}\right).$$

Якщо треба продиференціювати добуток або (і) частку функцій, часто вигідно спочатку прологарифмувати за основою e, а потім уже приступити до диференціювання.

2.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Знайти похідну функції $y=\left(4^{\arcsin x}+\sin^2 6x\right)^6$.

Розв’язання:

Функція y – складена. Зовнішня функція – степенева, а внутрішня функція основи – це сума двох складених функцій. Зовнішня функція першої – показникова, а внутрішня – обернено тригонометрична. Зовнішня функція другої – степенева, а внутрішня функція – тригонометрична.

$$y' = 6\left(4^{\arcsin x} + \sin^2 6x\right)^5 \left(4^{\arcsin x} + \sin^2 6x\right)' = 6\left(4^{\arcsin x} + \sin^2 6x\right)^5 \left(\left(4^{\arcsin x}\right)' + \left(\sin^2 6x\right)'\right) =$$

$$= 6\left(4^{\arcsin x} + \sin^2 6x\right)^5 \left(\frac{4^{\arcsin x}\ln 4}{\sqrt{1-x^2}} + 12\sin 6x\cos 6x\right).$$

Відповідь: $y' = 6\left(4^{\arcsin x} + \sin^2 6x\right)^5 \left(\dfrac{4^{\arcsin x}\ln 4}{\sqrt{1-x^2}} + 12\sin 6x\cos 6x\right).$

Приклад 2. Знайти похідну функції $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^3+5x^2-2}}$.

Розв'язання:

Похідну функції y' запишемо за формулою похідної частки:

$$y' = \frac{(x+1)'\left(\sqrt{x^3+5x^2-2}\right) - (x+1)\left(\sqrt{x^3+5x^2-2}\right)'}{\left(\sqrt{x^3+5x^2-2}\right)^2} = \frac{\sqrt{x^3+5x^2-2} - \dfrac{(x+1)\left(x^3+5x^2-2\right)'}{2\sqrt{x^3+5x^2-2}}}{x^3+5x^2-2} =$$

$$= \frac{2\left(x^3+5x^2-2\right) - 3x^3 - 13x^2 - 10x}{2\left(x^3+5x^2-2\right)\sqrt{x^3+5x^2-2}} = \frac{2x^3+10x^2-4-3x^3-13x^2-10x}{2\left(x^3+5x^2-2\right)\sqrt{x^3+5x^2-2}} = \frac{-x^3-3x^2-10x-4}{2\left(\sqrt{x^3+5x-2}\right)^3}.$$

Відповідь: $y' = -\dfrac{x^3+3x^2+10x+4}{2\left(\sqrt{x^3+5x-2}\right)^3}$.

Приклад 3. Знайти похідну функції $y = (x+5)^{\operatorname{arctg} x}$.

Розв'язання:

$$\ln y = \ln(x+5)^{\operatorname{arctg} x} = \operatorname{arctg} x \cdot \ln(x+5);\ \frac{y'}{y} = \frac{1}{1+x^2}\cdot\ln(x+5) + \operatorname{arctg} x\cdot\frac{1}{x+5};$$

$$y' = y\left[\frac{1}{1+x^2}\cdot\ln(x+5) + \operatorname{arctg} x\cdot\frac{1}{x+5}\right] = (x+5)^{\operatorname{arctg} x}\left[\frac{1}{1+x^2}\cdot\ln(x+5) + \operatorname{arctg} x\cdot\frac{1}{x+5}\right].$$

Відповідь: $y' = (x+5)^{\operatorname{arctg} x}\left[\dfrac{1}{1+x^2}\ln(x+5) + \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x+5}\right]$.

Приклад 4. Знайти похідну функції $y = (1-\sin 10x)^{x^5}$.

Розв'язання:

$$\ln y=\ln(1-\sin 10x)^{x^5}=x^5\ln(1-\sin 10x);\ \frac{y'}{y}=5x^4\ln(1-\sin 10x)+x^5\frac{10\cos 10x}{1-\sin 10x};$$

$$y'=y\left[5x^4\ln(1-\sin 10x)+\frac{10x^5\cos 10x}{1-\sin 10x}\right]=(1-\sin 10x)^{x^5}\left[5x^4\ln(1-\sin 10x)+\frac{10x^5\cos 10x}{1-\sin 10x}\right].$$

Відповідь: $y'=(1-\sin 10x)^{x^5}\left[5x^4\ln(1-\sin 10x)+\frac{10x^5\cos 10x}{1-\sin 10x}\right].$

2.3 Завдання для самостійного розв'язання

Знайти похідні функцій

1.	$y=\frac{3x-4}{\sqrt{x^3+3x-2}}$; $y=\left(3^{\sin 2x}-\cos^2 2x\right)^3$; $y=\ln\arcsin\sqrt{1-x^2}$; $y=(2x+3)^{\mathrm{tg}x}$; $y=\left(\sin\sqrt{x}\right)^{\ln\sin x}$
2.	$y=\frac{x+3}{\sqrt{x^3-6x-9}}$; $y=\left(2^{\arcsin x}+\arccos x\right)^4$; $y=\ln \mathrm{tg}x^3$; $y=(1+\cos x)^{x^2}$; $y=(\arcsin x)^{\sqrt{1-x^2}}$
3.	$y=\frac{2x}{\sqrt{x^3-5x^2+3}}$; $y=\left(3^{\cos 3x}+\sin 3x\right)^3$; $y=\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{2x-1}$; $y=(\mathrm{tg}x)^{\sin x}$; $y=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^x$
4.	$y=\frac{3x}{\sqrt{x^3-4x^2+1}}$; $y=\ln\sqrt[4]{\frac{3x^2+2}{x^3+2x}}$; $y=\arcsin\sqrt{1-4x^2}$; $y=\left(x^3+2x\right)^{\sin x}$; $y=x^{e^{\mathrm{arctg}x}}$
5.	$y=\frac{4x}{\sqrt{x^3+5x^2-2}}$; $y=\left(5^{\mathrm{tg}2x}-x^2\right)^3$; $y=\ln\mathrm{arctg}\sqrt{x-1}$; $y=(x+1)^{\mathrm{arctg}\sqrt{x}}$; $y=(\sin x+\ln x)^{\frac{1}{x}}$
6.	$y=\frac{4x+1}{\sqrt{x^2-4x-2}}$; $y=\left(4^{\mathrm{tg}\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)^3$; $y=e^{\mathrm{arctg}\sqrt{2x-1}}$; $y=(\cos 2x)^{\mathrm{tg}2x}$; $y=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{\ln x}$
7.	$y=\frac{2x-3}{\sqrt{x^2+4x-3}}$; $y=\left(3^{\mathrm{arctg}2x}-\ln\left(1+4x^2\right)\right)^4$; $y=e^{\arcsin\sqrt{1-x}}$; $y=\left(\sin\sqrt{x}\right)^{\ln x}$; $y=x^{e^{\cos x}}$
8.	$y=\frac{3x-8}{\sqrt{x^2+3x-4}}$; $y=\left(2^{\cos^2 x}+\sin^2 x\right)^3$; $y=\ln\arcsin\frac{2}{\sqrt{x}}$; $y=(x+\cos x)^{x^2}$; $y=x^{e^{\sin x}}$
9.	$y=\frac{2x^3+5}{\sqrt{x^4+2x}}$; $y=\left(4^{\arccos 2x}-\sqrt{1-4x^2}\right)^3$; $y=\ln\mathrm{tg}\frac{1}{\sqrt{x}}$; $y=(\mathrm{ctg}x)^{\cos x}$; $y=(x+\sin x)^{x^3}$
10.	$y=\frac{x^3-10}{\sqrt{x^4-3x}}$; $y=\left(6^{\mathrm{arcctg}3x}+\mathrm{arcctg}3x\right)^4$; $y=\mathrm{arctg}\frac{2\sqrt{x}}{1-x}$; $y=\left(1-x^2\right)^{\arcsin x}$; $y=x^{e^{\mathrm{tg}2x}}$
11.	$y=\frac{3x+2}{\sqrt{x^2+3x+1}}$; $y=\left(2^{\mathrm{tg}x}-\cos 3x\right)^5$; $y=e^{\mathrm{arctg}\sqrt{x-1}}$; $y=\left(x+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$; $y=\left(1-x^2\right)^{\arccos x}$

12.	$y=\dfrac{2x}{\sqrt{x^3-5x^2+3}}$; $y=\left(3^{\cos 2x}+\cos^2 x\right)^3$; $y=\ln\cos e^{-x}$; $y=\left(x^2+1\right)^{\mathrm{arctg}x}$; $y=\left(x-\sin 2x\right)^{x^3}$
13.	$y=\dfrac{2x-7}{\sqrt{x^2+2x-14}}$; $y=\left(5^{\mathrm{ctg}2x}+\cos 2x\right)^3$; $y=\ln\arccos\dfrac{1}{x}$; $y=\left(\mathrm{tg}2x\right)^{\cos 2x}$; $y=\left(x^3+2\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$
14.	$y=\dfrac{3x-4}{\sqrt{x^2+9x-6}}$; $y=\left(5^{\sin x}-\cos 2x\right)^3$; $y=e^{\mathrm{arctg}\sqrt{x^2-1}}$; $y=\left(x^4+1\right)^{\frac{1}{x}}$; $y=\left(\arcsin x\right)^{\mathrm{tg}\sqrt{1-x^2}}$
15.	$y=\dfrac{5x+4}{\sqrt{x^2-5x-2}}$; $y=\left(2^{\arcsin x}-\sqrt{1-x^2}\right)^5$; $y=\log_2\cos\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $y=\left(x+\ln x\right)^{\frac{1}{x}}$; $y=\left(\sin\sqrt{x}\right)^{e^{\frac{1}{x}}}$
16.	$y=\dfrac{3x-1}{\sqrt{x^2+9x-1}}$; $y=\left(3^{\mathrm{arctg}2x}+\ln\left(1+x^2\right)\right)^4$; $y=\ln\arccos\dfrac{1}{\sqrt{2x}}$; $y=\left(\mathrm{ctg}x\right)^{\sin x}$; $y=x^{e^{\mathrm{ctg}x}}$
17.	$y=\dfrac{2x-3}{\sqrt[3]{x^3-8x+4}}$; $y=\left(5^{\mathrm{tg}^2x}+\cos^2 x\right)^3$; $y=\ln\mathrm{arcctg}\dfrac{1}{x}$; $y=x^{\ln x}$; $y=\left(3^{\mathrm{tg}x}+\arcsin x\right)^{3^x}$
18.	$y=\dfrac{2x+1}{\sqrt[3]{x^3+6+1}}$; $y=\left(4^{\mathrm{tg}2x}-\mathrm{tg}2x\right)^5$; $y=e^{\arccos\sqrt{1-x^2}}$; $y=\left(\sin x\right)^{\cos x}$; $y=\left(\arcsin\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}$
19.	$y=\dfrac{4x+3}{\sqrt[3]{x^3-x-1}}$; $y=\left(2^{\arccos\sqrt{x}}-\sqrt{1-x}\right)^4$; $y=\ln\mathrm{tg}e^{\sqrt{x}}$; $y=\left(\cos 2x\right)^{\sin x}$; $y=\left(\arcsin\sqrt{x}\right)^{2x}$
20.	$y=\dfrac{5x-6}{\sqrt[3]{x^3+5x-2}}$; $y=\left(3^{\mathrm{ctg}x}+\ln\sin x\right)^3$; $y=e^{\mathrm{arctg}\sqrt{4x-1}}$; $y=\left(x+1\right)^{\arcsin\sqrt{x}}$; $y=\left(\sin 2x+\ln x\right)^{\mathrm{tg}2x}$

Тема 3. Диференціювання неявної та параметричної функцій.

3.1 Основні теоретичні відомості

Якщо незалежна змінна x та функція y зв'язані рівнянням, що не розв'язується відносно y, то y називається неявною функцією x. Для знаходження похідної функції, заданої наявно, треба продиференціювати рівняння неявної функції по x, враховуючи, що y є функцію від x, а потім з отриманого рівняння виразити похідну y'.

Якщо функція аргументу x задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$ то її похідна буде дорівнюватимє частці від ділення похідних кожної складової: $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.

3.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Знайти похідну неявної функції $x - y = \arcsin 4x - \arcsin 4y$.

Розв'язання:

Диференціюємо по x обидві частини рівності та враховуємо те, що обидві обернено тригонометричні функції є складеними: $1 - y' = \frac{4}{\sqrt{1-16x^2}} - \frac{4y'}{\sqrt{1-16y^2}}$.

Перенесемо складові, що не містять y', у праву частину рівності, а складові, що містять y', у ліву частину рівності $\frac{4y'}{\sqrt{1-16y^2}} - y' = \frac{4}{\sqrt{1-16x^2}} - 1$.

Винесемо y' за дужки $y'\left(\frac{4}{\sqrt{1-16y^2}} - 1\right) = \frac{4}{\sqrt{1-16x^2}} - 1$, звідки

$$y' = \frac{\frac{4}{\sqrt{1-16x^2}} - 1}{\frac{4}{\sqrt{1-16y^2}} - 1}.$$

Відповідь: $y' = \dfrac{\frac{4}{\sqrt{1-16x^2}} - 1}{\frac{4}{\sqrt{1-16y^2}} - 1}$.

Приклад 2. Знайти похідну неявної функції $e^y + y^3 + \sin x = 0$.

Розв'язання:

$e^y y' + 3y^2 y' + \cos x = 0$; $y'\left(e^y + 3y^2\right) = -\cos x$; $y' = -\frac{\cos x}{e^y + 3y^2}$.

Відповідь: $y' = -\dfrac{\cos x}{e^y + 3y^2}$

Приклад 3. Знайти похідну неявної функції $y = 1 + xe^y$.

Розв'язання:

$y' = e^y + xe^y y'$; $y'\left(1 - xe^y\right) = e^y$; $y' = \frac{e^y}{1 - xe^y}$.

Відповідь: $y' = \dfrac{e^y}{1 - xe^y}$.

Приклад 4. Знайти похідну функції, заданої параметрично, $\begin{cases} x = \dfrac{18t}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{18t^2}{1+t^3}. \end{cases}$

Розв’язання:

$$y'_t=\frac{36t\left(1+t^3\right)-3t^2\cdot 18t^2}{\left(1+t^3\right)^2}=\frac{36t-18t^4}{\left(1+t^3\right)^2};\qquad x'_t=\frac{18\left(1+t^3\right)-3t^2\cdot 18t}{\left(1+t^3\right)^2}=\frac{18-36t^3}{\left(1+t^3\right)^2};$$

$$y'_x=\frac{36t-18t^4}{18-36t^3}=\frac{2t-t^4}{1-2t^2}.$$

Відповідь: $y'_x=\dfrac{2t-t^4}{1-2t^2}$.

Приклад 5. Знайти похідну функції, заданої параметрично, $\begin{cases}x=2\cos^3 t,\\ y=2\sin^3 t.\end{cases}$

Розв’язання:

$$y'_t=2\cdot 3\sin^2 t\cdot\cos t=6\sin^2 t\cos t;\quad x'_t=2\cdot 3\cos^2 t\cdot\left(-\sin t\right)=-6\cos^2 t\sin t;$$

$$y'_x=-\frac{6\sin^2 t\cos t}{6\cos^2 t\sin t}=-\mathrm{tg}t.$$

Відповідь: $y'=-\mathrm{tg}t$.

3.3 Завдання для самостійного розв'язання

Знайти похідні функцій: у прикладі 1) – використовуючи метод знаходження похідної функції, заданої неявно; у прикладах 2) і 3) – використовуючи формулу знаходження похідної функції, заданої параметрично.

Варіант			
1.	$x^5+y^5-2y=0$,	$\begin{cases}x=\cos t,\\ y=t+2\sin t,\end{cases}$	$\begin{cases}x=1-t^2,\\ y=t-t^3.\end{cases}$
2.	$x^2+y^2-\cos 2y=0$,	$\begin{cases}x=3\cos t,\\ y=4\sin t,\end{cases}$	$\begin{cases}x=t^2-2t,\\ y=t^2+2t.\end{cases}$
3.	$e^{2x}-y^3-e^{2y}=0$,	$\begin{cases}x=\arcsin t,\\ y=3t-t^3,\end{cases}$	$\begin{cases}x=t^3-3t,\\ y=t^3+3t.\end{cases}$
4.	$e^{2x}-2y-y^4=0$,	$\begin{cases}x=\arccos t,\\ y=t-t^3,\end{cases}$	$\begin{cases}x=t-t^4,\\ y=t^2-t^3.\end{cases}$
5.	$5x-\sin 5y-y^5=0$,	$\begin{cases}x=2\left(t-\sin t\right),\\ y=2\left(1-\cos t\right),\end{cases}$	$\begin{cases}x=t^3+1,\\ y=t^2.\end{cases}$

6.	$2\sin x-\arccos 2y-y=0$,	$\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=\sin^3 t, \end{cases}$	$\begin{cases} x=3t^2, \\ y=6t-t^2. \end{cases}$
7.	$x^3+y^3-3xy=0$,	$\begin{cases} x=2t-\sin 2t, \\ y=8\sin^3 t, \end{cases}$	$\begin{cases} x=t^3+1, \\ y=t^2+t+1. \end{cases}$
8.	$e^{4x}-x^3y-e^{4y}=0$	$\begin{cases} x=2\cos^2 t, \\ y=3\sin^3 t, \end{cases}$	$\begin{cases} x=t-\ln t, \\ y=3t^2-2t^3. \end{cases}$
9.	$x\ln y-e^{2y}+x=0$	$\begin{cases} x=2\cos^3 t, \\ y=3\sin^3 t, \end{cases}$	$\begin{cases} x=2e^t, \\ y=e^{-t}. \end{cases}$
10.	$y=\mathrm{ctg}x+\ln\sqrt{4y+1}$	$\begin{cases} x=\sin t-t\cos t, \\ y=\cos t+t\sin t, \end{cases}$	$\begin{cases} x=t^2+\ln t, \\ y=2t^3+t. \end{cases}$
11.	$y+\mathrm{arctg}x-\ln\sqrt{2y+3}=0$	$\begin{cases} x=t(1-\sin t), \\ y=t\cos t, \end{cases}$	$\begin{cases} x=\dfrac{t+1}{t}, \\ y=\dfrac{t-1}{t}. \end{cases}$
12.	$y=\cos(x+y)$	$\begin{cases} x=\mathrm{arctg}3t, \\ y=\ln(1+9t^2), \end{cases}$	$\begin{cases} x=\mathrm{arctg}t, \\ y=\dfrac{1}{\cos t}. \end{cases}$
13.	$2x-\sin 2xy-y^2=0$	$\begin{cases} x=e^{2t}\sin t, \\ y=e^{2t}\cos t, \end{cases}$	$\begin{cases} x=\ln(1+t^2), \\ y=t-\mathrm{arctg}t. \end{cases}$
14.	$x^7+y^5-2y=0$,	$\begin{cases} x=\cos 2t, \\ y=t+2\sin t, \end{cases}$	$\begin{cases} x=1-t^2, \\ y=t-t^4. \end{cases}$
15.	$x^2+y^2-\cos 3y=0$,	$\begin{cases} x=3\cos 2t, \\ y=4\sin 2t, \end{cases}$	$\begin{cases} x=t^3-2t, \\ y=t^3+2t. \end{cases}$
16.	$e^{2x}-y^5-e^{2y}=0$,	$\begin{cases} x=\arcsin 2t, \\ y=3t-t^3, \end{cases}$	$\begin{cases} x=t^4-3t, \\ y=t^4+3t. \end{cases}$
17.	$e^{2x}-2y-y^5=0$,	$\begin{cases} x=\arccos 2t, \\ y=t-t^3, \end{cases}$	$\begin{cases} x=t-t^5, \\ y=t^2-t^3. \end{cases}$
18.	$5x-\sin 6y-y^5=0$,	$\begin{cases} x=2(t-\sin 2t), \\ y=2(1-\cos 2t), \end{cases}$	$\begin{cases} x=t^4+1, \\ y=t^2. \end{cases}$

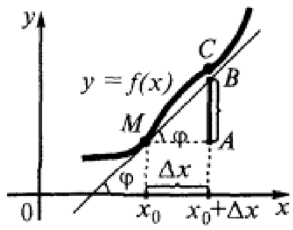
19.	$2\sin 2x - \arccos 2y - y = 0$,	$\begin{cases} x = t - \sin 2t, \\ y = \sin^3 2t, \end{cases}$	$\begin{cases} x = 3t^3, \\ y = 6t - t^2. \end{cases}$
20.	$x^3 + y^2 - 3xy = 0$,	$\begin{cases} x = 2t - \sin 2t, \\ y = 8\sin^3 2t, \end{cases}$	$\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^3 + 2t + 1. \end{cases}$

Тема 4. Диференціал функції
4.1 Основні теоретичні відомості

Диференціал змінної (аргументу функції) x називається її приріст $\Delta x = x - x_0$. Позначається $dx = \Delta x$.

Диференціалом функції $y = f(x)$ називається добуток похідної функції $f'(x)$ на приріст аргументу Δx. Диференціал функції позначається dy або $df(x)$: $dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$.

Диференціалом функції $y = f(x)$ в точці x_0 називається добуток похідної функції в цій точці, тобто $f'(x_0)$, на приріст аргументу Δx. Диференціал функції в точці x_0 позначається $dy(x_0)$ або $df(x_0)$: $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)dx$.



Диференціали елементарних функцій: $d(x^n) = nx^{n-1}dx$; $d(e^x) = e^x dx$; $d(a^x) = a^x \ln a dx$; $d(\ln x) = \frac{dx}{x}$; $d(\log_a x) = \frac{dx}{x \ln a}$; $d(\sin x) = \cos x dx$; $d(\cos x) = -\sin x dx$; $d(\text{tg} x) = \frac{dx}{\cos^2 x}$; $d(\text{ctg} x) = -\frac{dx}{\sin^2 x}$.

Диференціал функції $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$ (відрізок AB на рисунку) є головна лінійна (тобто пропорційна Δx) частина приросту функції (на рисунку відрізок AB – головна частина відрізка AC). Диференціал змінної $dx = \Delta x$ (відрізок AM на рисунку).

Так як $f(x) \approx f(x_0) + df(x_0)$ або $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)dx = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$. Формулу $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ використовують для наближених обчислень.

Застосуємо $\Delta x = x - x_0$, тоді $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ перепишемо як $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$.

Для $f(x) = \sin x$ маємо $f'(x) = \cos x$; при $x_0 = 0$ одержуємо $f(0) = \sin 0 = 0$, $f'(0) = \cos 0 = 1$; тоді $\sin(\Delta x) \approx \Delta x$ або $\sin\alpha \approx \alpha$ (для малих α).

Для $f(x) = \mathrm{tg}x$ маємо $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$; при $x_0 = 0$ одержуємо $f(0) = \mathrm{tg}0 = 0$, $f'(0) = \frac{1}{\cos^2 0} = 1$; тоді $\mathrm{tg}(\Delta x) \approx \Delta x$ або $\mathrm{tg}\alpha \approx \alpha$ (для малих α).

4.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Обчислити приріст функції Δy в точці $x_0=1$, якщо $y = f(x) = 3x^3 + 2x - 9$, $\Delta x = 0{,}1$.

Розв'язання:

Формула $\Delta y(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Так як $f(x_0)=f(1) = 3\cdot 1^3 + 2\cdot 1 - 9 = -4$, $f(x_0 + \Delta x)=f(1 + 0{,}1) = f(1{,}1)=3\cdot 1{,}1^3 + 2\cdot 1{,}1 - 9 = -2{,}807$, то $\Delta y(x_0) = -2{,}807 - (-4) = 1{,}193$.

Відповідь: 1,193.

Приклад 2. Знайти диференціал функції dy в точці $x_0=1$, якщо $y = f(x) = 3x^3 + 2x - 9$, $\Delta x = 0{,}1$.

Розв'язання:

Формула $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$.

Маємо $y' = f'(x) = 9x^2 + 2$, $f'(1)=9\cdot 1^2 + 2 = 11$, тоді $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x = 11\cdot 0{,}1 = 1{,}1$.

Відповідь: 1,1. Різниця між Δy і $dy(x_0)$ становить $0{,}093$.

Приклад 3. Обчислити наближено значення $\sqrt[3]{1{,}012}$.

Розв'язання:

Переформулюємо задачу: обчислити наближено значення функції $y = \sqrt[3]{x}$ в точці $x = 1{,}012$.

Покладемо $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}012$. Тоді $y(1{,}012) \approx y(1) + y'(1)\cdot 0{,}012$, але $y(1) = \sqrt[3]{1} = 1$, $y' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $y'(1) = \frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}} = \frac{1}{3}$. Отже, $y(1{,}012) \approx 1 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}012 = 1{,}004$.

Відповідь: 1,004.

Приклад 4. Обчислити наближено значення $\ln 1{,}1$.

Розв'язання:

Переформулюємо задачу: обчислити наближено значення функції $y=\ln x$ в точці $x=1{,}1$.

Покладемо $x_0=1$, $\Delta x=0{,}1$. Тоді $y(1{,}1)\approx y(1)+y'(1)\cdot 0{,}1$, але $y(1)=\ln 1=0$, $y'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$, $y'(1)=\frac{1}{1}=1$. Отже, $\ln(1{,}1)\approx 0+1\cdot 0{,}1=0{,}1$.

Відповідь: 0,1.

Приклад 5. Обчислити наближено значення функції $y=\frac{1}{\sqrt{2x^2+1}}$ в точці $x=1{,}58$.

Розв'язання:

Формула $df(x_0)=f'(x_0)\Delta x$.

Маємо $y'=f'(x)=9x^2+2$, $f'(1)=9\cdot 1^2+2=11$, тоді $df(x_0)=f'(x_0)\Delta x=11\cdot 0{,}1=1{,}1$.

Покладемо $x_0=2$, $\Delta x=-0{,}42$. Тоді $y(1{,}58)\approx y(2)+y'(2)\cdot(-0{,}42)$, але $y(2)=\frac{1}{\sqrt{2\cdot 2^2+1}}=\frac{1}{3}$, $y'=-\frac{1}{2}\frac{2\cdot 2x}{\sqrt{(2x^2+1)^3}}=-\frac{2x}{\sqrt{(2x^2+1)^3}}$, $y'(2)=-\frac{2\cdot 2}{\sqrt{(2\cdot 2^2+1)^3}}=-\frac{4}{27}$.

Отже, $y(1{,}58)=\frac{1}{3}+\frac{4}{27}\cdot 0{,}42=\frac{1}{3}+\frac{4}{9}\cdot 0{,}14=\frac{3+0{,}56}{9}=\frac{3{,}56}{9}=0{,}39(5)$.

Відповідь: 0,39(5).

Приклад 6. Обчислити наближено значення функції $y=\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}$ в точці $x=0{,}15$.

Розв'язання:

Покладемо $x_0=0$, $\Delta x=0{,}15$. Тоді $y(0{,}15)\approx y(0)+y'(0)\cdot(0{,}15)$, але $y(0)=\sqrt[3]{\frac{2-0}{2+0}}=1$, $y'=\frac{1}{3}\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{-2-x-2+x}{(2+x)^2}=-\frac{4}{3}\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{(2+x)^2}$, $y'=-\frac{4}{3}(1)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}$.

Отже, $y(0{,}15)\approx 1-\frac{1}{3}\cdot 0{,}15=0{,}95$.

Відповідь: 0,95.

3.3 Завдання для самостійного розв'язання

Знайти наближено за допомогою диференціала значення функції:

Варіант				
1.	$y = x^4$	$x = 3{,}998$	$y = \sqrt[3]{x}$	$x = 1{,}21$
2.	$y = x^5$	$x = 2{,}997$	$y = \sqrt[3]{x}$	$x = 7{,}76$
3.	$y = x^{11}$	$x = 1{,}021$	$y = \sqrt[3]{x}$	$x = 27{,}54$
4.	$y = x^6$	$x = 2{,}01$	$y = \sqrt[3]{x}$	$x = 26{,}46$
5.	$y = x^7$	$x = 1{,}996$	$y = \sqrt[3]{x}$	$x = 8{,}24$
6.	$y = x^7$	$x = 2{,}002$	$y = \sqrt[3]{x}$	$x = 0{,}98$
7.	$arctgx$	$x = 1{,}04$	$y = \sqrt[3]{x}$	$x = 8{,}36$
8.	$\arccos$	$x = 0{,}51$	$y = \sqrt[3]{x}$	$x = 7{,}64$
9.	$y = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 5}$	$x = 0{,}97$	$\arccos$	$x = 0{,}49$
10.	$y = \sqrt[3]{x^2}$	$x = 1{,}03$	$y = \cos x$	$x = 29^{\circ}$
11.	$y = \sqrt[5]{x^2}$	$x = 1{,}03$	$arctgx$	$x = 0{,}98$
12.	$y = \arcsin x$	$x = 0{,}08$	$y = \sqrt{x}$	$x = 1090$
13.	$y = \mathrm{arctg}\, x$	$x = 0{,}08$	$y = \sqrt[5]{x}$	$x = 1023$
14.	$y = \sqrt{1 + x + \sin x}$	$x = 0{,}01$	$arctgx$	$x = 1{,}05$
15.	$y = \sqrt[3]{3x + \cos x}$	$x = 0{,}01$	$y = \dfrac{1}{\sqrt{2x^2 + x + 1}}$	$x = 1{,}01$
16.	$y = \sqrt[4]{2x - \sin\dfrac{\pi x}{2}}$	$x = 1{,}02$	$y = \dfrac{x + \sqrt{5 - x^2}}{2}$	$x = 0{,}98$
17.	$y = \sqrt{x^2 + x + 3}$	$x = 1{,}97$	$y = \cos x$	$x = 61^{\circ}$
18.	$y = \sqrt[3]{x^3 + 7x}$	$x = 1{,}012$	$y = \sin x$	$x = 31^{\circ}$
19.	$y = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 5}$	$x = 0{,}97$	$y = \mathrm{tg} x$	$x = 46^{\circ}$
20.	$y = \sqrt{4x + 1}$	$x = 2{,}16$	$arctgx$	$x = 1{,}01$

21.	$y=\sqrt{4x+1}$	$x=1{,}78$	$y=\cos x$	$x=59^{\circ}56'$
22.	$y=\sqrt{x^2+5}$	$x=1{,}97$	$y=\sin x$	$x=58^{\circ}$
23.	$y=x^{21}$	$x=0{,}998$	$arctgx$	$x=0{,}98$
24.	$y=\ln x$	$x=0{,}8$	$y=\arcsin x$	$x=0{,}48$
25.	$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x=4{,}16$	$y=\sin x$	$x=30^{\circ}2'$

Тема 5. Похідні вищих порядків

5.1 Основні теоретичні відомості

Похідна другого порядку функції $y=f(x)$ – це похідна від похідної першого порядку $y''=(y')'$. Похідна третього порядку функції $y=f(x)$ – це похідна від похідної другого порядку $y'''=(y'')'$… Взагалі, похідна n –го порядку обчислюється за формулою $y^{n}=\left(y^{n-1}\right)'$.

Похідна другого порядку параметрично заданої функції $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases}$ визначається як $y''_{xx}=\dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}$.

5.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Знайти похідну другого порядку функції $y=\left(x^3+5\right)^2$.

Розв’язання:

$y'=2\left(x^3+5\right)\cdot 3x^2=6x^5+30x^2$; $y''=6\cdot 5x^4+30\cdot 2x=30x^4+60x$.

Відповідь: $y''=30x^4+60x$.

Приклад 2. Знайти похідну другого порядку функції $y=\left(x^3+5\right)^2$.

Розв’язання:

Знайти похідну другого порядку функції $y=\left(x^2+2\right)e^{2x}$.

Розв’язання:

$y'=2x\cdot e^{2x}+\left(x^2+2\right)\cdot e^{2x}\cdot 2$; $y''=2\cdot e^{2x}+2x\cdot e^{2x}\cdot 2+2x\cdot e^{2x}\cdot 2+\left(x^2+2\right)\cdot e^{2x}\cdot 2\cdot 2$.

Відповідь: $y''=10e^{2x}+8xe^{2x}+4x^2e^{2x}$.

Приклад 3. Знайти похідну другого порядку функції $y=x^2\cdot 5^{2x}$.

Розв’язання:

$$y' = 2x\cdot 5^{2x} + x^2\cdot 5^{2x}\cdot \ln 5\cdot 2\,;$$

$$y'' = 2\cdot 5^{2x} + 2x\cdot 5^{2x}\ln 5\cdot 2 + 2x\cdot 5^{2x}\cdot \ln 5\cdot 2 + x^2\cdot 5^{2x}\cdot \ln^2 5\cdot 2\cdot 2\,;$$

$$y'' = 2\cdot 5^{2x} + 8x\cdot 5^{2x}\ln 5 + 4x^2\cdot 5^{2x}\ln^2 5\,.$$

Відповідь: $y'' = \left(2 + 8x\ln 5 + 4x^2\ln^2 5\right)5^{2x}$.

Приклад 4. Знайти похідну третього порядку функції $y = \arcsin x$.

Розв'язання:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,;\; y'' = \frac{2x}{2\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3} = x\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\,;\; y''' = \left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}} - x\cdot\frac{3}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{5}{2}}\cdot(-2x)\,.$$

Відповідь: $y''' = \left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2\left(1-x^2\right)^{-\frac{5}{2}}$.

Приклад 5. Знайти похідну другого порядку функції $y = \operatorname{arctg}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

Розв'язання:

$$y' = \frac{1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{1 + \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^2} = \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{2 + 2x^2 + 2x\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{2\left(x^2+1\right)\left(1 + \sqrt{x^2+1}\right)} = \frac{1}{2\left(x^2+1\right)}\,;$$

$$y'' = -\frac{2x}{2\left(x^2+1\right)^2}\,.$$

Відповідь: $y'' = -\dfrac{x}{\left(x^2+1\right)^2}$.

Приклад 6. Знайти похідну другого порядку функції, заданої параметрично, $\begin{cases} x = 5\cos 2t, \\ y = 5\sin 2t. \end{cases}$

Розв'язання:

$$y'_t = 10\cos 2t\,;\qquad x'_t = -10\sin 2t\,;\qquad y'_x = -\operatorname{ctg} 2t\,;\qquad \left(y'_x\right)'_t = \left(-\operatorname{ctg} 2t\right)'_t = \frac{2}{\sin^2 2t}\,;$$

$$y''_{xx} = \frac{2}{-10\sin^3 2t}\,.$$

Відповідь: $y''_{xx} = -0{,}2\sin^{-3} 2t$.

Приклад 7. Знайти похідну другого порядку функції, заданої параметрично, $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t). \end{cases}$

Розв'язання:

$$y'_t = 2\sin t\,;\qquad x'_t = 2 - 2\cos t\,;\qquad y'_x = \frac{\sin t}{1 - \cos t}\,;$$

$$\left(y'_x\right)'_t = \frac{\cos t(1-\cos t) - \sin t\cdot\sin t}{(1-\cos t)^2} = \frac{\cos t - 1}{(1-\cos t)^2}\,.$$

Відповідь: $y''_{xx} = -\dfrac{1}{2(1-\cos t)^2}$.

Приклад 8. Знайти похідну третього порядку функції, заданої параметрично, $\begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = t^2. \end{cases}$

Розв'язання:

$y'_t = 2t$; $\quad x'_t = 2e^{2t}$; $\quad y'_x = \dfrac{t}{e^{2t}}$; $\quad \left(y'_x\right)'_t = \dfrac{e^{2t} - 2te^{2t}}{e^{4t}} = \dfrac{1-2t}{e^{2t}}$; $\quad y''_{xx} = \dfrac{1-2t}{2e^{4t}}$;

$\left(y''_{xx}\right)'_t = \dfrac{-4e^{4t} - (1-2t)8e^{4t}}{4e^{8t}} = \dfrac{4t-3}{e^{4t}}$; $y'''_{xxx} = \dfrac{4t-3}{2e^{6t}}$.

Відповідь: $y'''_{xxx} = \dfrac{4t-3}{2e^{6t}}$.

3.3 Завдання для самостійного розв'язання

Завдання 1

Знайти похідну ваaного порядку:

Варіант				
1.	$y = \left(2x^2 - 1\right)\cdot\ln\left(x-1\right)$	$y'' - ?$	$y = \left(x^2+1\right)\cdot \operatorname{arctg} x$	$y'' - ?$
2.	$y = x\cdot\cos x^2$	$y''' - ?$	$y = \dfrac{\ln\left(x-1\right)}{\sqrt{x-1}}$	$y'' - ?$
3.	$y = \dfrac{\log_2 x}{x^3}$	$y'' - ?$	$y = \left(4x^3+1\right)\cdot e^{2x+1}$	$y'' - ?$
4.	$y = x^2\cdot\sin\left(5x-1\right)$	$y''' - ?$	$y = \left(1-x^2\right)\cdot\ln^2 x$	$y'' - ?$
5.	$y = \left(2x+1\right)\cdot\ln^2 x$	$y'' - ?$	$y = \dfrac{\ln^3 x}{x^2}$	$y''' - ?$
6.	$y = \dfrac{\ln x}{x^3}$	$y'' - ?$	$y = \left(4x+1\right)\cdot 2^{-x}$	$y'' - ?$
7.	$y = e^{1-2x}\cdot\sin\left(1+3x\right)$	$y'' - ?$	$y = \dfrac{\ln\left(1+x\right)}{1+x}$	$y'' - ?$
8.	$y = \left(2x^3+1\right)\cdot\cos x$	$y''' - ?$	$y = \left(x^2+1\right)\cdot\ln\left(x-1\right)$	$y'' - ?$

9.	$y=\left(1-x-x^2\right)\cdot e^{\frac{1-x}{2}}$	$y''-?$	$y=\dfrac{\sin 2x}{x}$	$y''-?$
10.	$y=(x+1)\cdot\ln(x+1)$	$y''-?$	$y=(3x-1)\cdot 3^{-x}$	$y''-?$
11.	$y=\dfrac{\ln(1+2x)}{1+2x}$	$y''-?$	$y=e^{\frac{x}{2}}\cdot\sin 2x$	$y''-?$
12.	$y=\dfrac{\ln x}{x^5}$	$y''-?$	$y=x\cdot\ln(1-3x)$	$y''-?$
13.	$y=(5x-1)\cdot 2^{-x}$	$y''-?$	$y=\dfrac{\ln(x-1)}{x-1}$	$y''-?$
14.	$y=\left(1+3x+x^2\right)\cdot e^{3x+2}$	$y''-?$	$y=\dfrac{\log_3 x}{x^2}$	$y''-?$
15.	$y=(\cos 2x-\sin 2x)\cdot e^{-x}$	$y''-?$	$y=(5x-1)\cdot\ln^2 x$	$y''-?$
16.	$y=\left(2x^2-5\right)\cdot\ln(x-1)$	$y''-?$	$y=\left(x^2+4\right)\cdot\mathrm{arctg}x$	$y''-?$
17.	$y=2x\cdot\cos x^2$	$y'''-?$	$y=\dfrac{\ln(x-3)}{\sqrt{x-3}}$	$y''-?$
18.	$y=\dfrac{\log_2 x}{2x^3}$	$y''-?$	$y=\left(4x^3+7\right)\cdot e^{2x+1}$	$y''-?$
19.	$y=x^2\cdot\sin(5x-6)$	$y'''-?$	$y=\left(10-x^2\right)\cdot\ln^2 x$	$y''-?$
20.	$y=(2x+5)\cdot\ln^2 x$	$y''-?$	$y=\dfrac{\ln^3 x}{13x^2}$	$y'''-?$
21.	$y=\dfrac{2\ln x}{x^3}$	$y''-?$	$y=(4x+3)\cdot 2^{-x}$	$y''-?$
22.	$y=\dfrac{\ln(3+2x)}{3+2x}$	$y''-?$	$y=e^{\frac{x}{2}}\cdot 5\sin 2x$	$y''-?$
23.	$y=\dfrac{2\ln x}{x^5}$	$y''-?$	$y=x\cdot\ln(8-3x)$	$y''-?$

24.	$y=(5x-9)\cdot 2^{-x}$	$y''-?$	$y=\dfrac{\ln(x-6)}{x-6}$	$y''-?$
25.	$y=\left(4+3x+x^2\right)\cdot e^{3x+2}$	$y''-?$	$y=\dfrac{7\log_3 x}{x^2}$	$y''-?$

Завдання 2

Знайти похідну другого порядку від функції, заданої параметрично:

Варіант			Варіант		
1.	$\begin{cases} x=\cos t+t\sin t, \\ y=\sin t-t\cos t. \end{cases}$	$\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\ln\sin t. \end{cases}$	2.	$\begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=4(2+\cos t). \end{cases}$	$\begin{cases} x=e^t, \\ y=\arcsin t. \end{cases}$
3.	$\begin{cases} x=t+\sin t, \\ y=2-\cos t. \end{cases}$	$\begin{cases} x=\sqrt{t-3}, \\ y=\ln(t-2). \end{cases}$	4.	$\begin{cases} x=\sin t, \\ y=\ln\cos t. \end{cases}$	$\begin{cases} x=\cos^2 t, \\ y=\mathrm{tg}^2 t. \end{cases}$
5.	$\begin{cases} x=\cos 2t, \\ y=\dfrac{2}{\cos 2t}. \end{cases}$	$\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2}, \\ y=\dfrac{1}{t}. \end{cases}$	6.	$\begin{cases} x=\sqrt{t}, \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}. \end{cases}$	$\begin{cases} x=\sin t, \\ y=\dfrac{1}{\cos t}. \end{cases}$
7.	$\begin{cases} x=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}, \\ y=\dfrac{2}{e^t+e^{-t}}. \end{cases}$	$\begin{cases} x=\dfrac{1}{t}, \\ y=\dfrac{1}{1+t^2}. \end{cases}$	8.	$\begin{cases} x=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}, \\ y=\dfrac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}. \end{cases}$	$\begin{cases} x=\dfrac{1}{t^2}, \\ y=\dfrac{1}{t^2+1}. \end{cases}$
9.	$\begin{cases} x=e^t\cos t, \\ y=e^t\sin t. \end{cases}$	$\begin{cases} x=\sqrt{t}, \\ y=\sqrt[3]{t-1}. \end{cases}$	10.	$\begin{cases} x=\sqrt{t^3-1}, \\ y=\ln t. \end{cases}$	$\begin{cases} x=t+\sin t, \\ y=2+\cos t. \end{cases}$
11.	$\begin{cases} x=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}, \\ y=\dfrac{\sqrt[3]{e^t+e^{-t}}}{2}. \end{cases}$	$\begin{cases} x=\sqrt{t-1}, \\ y=\dfrac{t}{\sqrt{t-1}}. \end{cases}$	12.	$\begin{cases} x=\dfrac{\cos t}{1+2\cos t}, \\ y=\dfrac{\sin t}{1+2\cos t}. \end{cases}$	$\begin{cases} x=\sqrt{t-1}, \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{t}}. \end{cases}$
13.	$\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=2-\cos t. \end{cases}$	$\begin{cases} x=\sin t, \\ y=\ln\cos t. \end{cases}$	14.	$\begin{cases} x=\sin t+\cos t, \\ y=\sin 2t. \end{cases}$	$\begin{cases} x=2^t, \\ y=\arccos t. \end{cases}$

15.	$\begin{cases} x=\operatorname{tg}t, \\ y=\dfrac{1}{\sin 2t}. \end{cases}$	$\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin^4\dfrac{t}{2}. \end{cases}$	16.	$\begin{cases} x=\operatorname{arctg}t, \\ y=\dfrac{t^2}{2}. \end{cases}$	$\begin{cases} x=\sin t, \\ y=\cos^4\dfrac{t}{2}. \end{cases}$
17.	$\begin{cases} x=\cos 2t+t\sin t, \\ y=\sin 2t-t\cos t. \end{cases}$	$\begin{cases} x=\cos 3t, \\ y=\ln\sin 3t. \end{cases}$	18.	$\begin{cases} x=4(t-\sin t), \\ y=8(2+\cos t). \end{cases}$	$\begin{cases} x=e^{2t}, \\ y=\arcsin 2t. \end{cases}$
19.	$\begin{cases} x=t+\sin 2t, \\ y=2-\cos 2t. \end{cases}$	$\begin{cases} x=\sqrt{t-6}, \\ y=\ln(t-4). \end{cases}$	20.	$\begin{cases} x=\sin 2t, \\ y=\ln\cos 2t. \end{cases}$	$\begin{cases} x=\cos^4 t, \\ y=\operatorname{tg}^4 t. \end{cases}$
21.	$\begin{cases} x=\cos 4t, \\ y=\dfrac{2}{\cos 4t}. \end{cases}$	$\begin{cases} x=\sqrt{1-t^4}, \\ y=\dfrac{1}{2t}. \end{cases}$	22.	$\begin{cases} x=\sqrt{2t}, \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{1-2t}}. \end{cases}$	$\begin{cases} x=\sin 2t, \\ y=\dfrac{1}{\cos 2t}. \end{cases}$
23.	$\begin{cases} x=\dfrac{e^t+e^{-t}}{4}, \\ y=\dfrac{4}{e^t+e^{-t}}. \end{cases}$	$\begin{cases} x=\dfrac{1}{t}, \\ y=\dfrac{1}{1+t^4}. \end{cases}$	24.	$\begin{cases} x=\dfrac{e^t-e^{-t}}{4}, \\ y=\dfrac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}. \end{cases}$	$\begin{cases} x=\dfrac{1}{t^4}, \\ y=\dfrac{1}{t^4+1}. \end{cases}$
25.	$\begin{cases} x=e^t\cos 2t, \\ y=e^t\sin 2t. \end{cases}$	$\begin{cases} x=\sqrt{2t}, \\ y=\sqrt[3]{2t-1}. \end{cases}$	26.	$\begin{cases} x=\sqrt{t^6-1}, \\ y=\ln 2t. \end{cases}$	$\begin{cases} x=t+\sin 2t, \\ y=2+\cos 2t. \end{cases}$

Тема 6. Розкриття невизначеностей за правилом Лопіталя

6.1 Основні теоретичні відомості

Правило Лопіталя – метод знаходження границь функцій, що розкриває невизначеності виду $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ і $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$. Суть правила: границя відношення функцій дорівнює границі відношення їхніх похідних (похідні окремо тільки від чисельника і тільки від знаменника, а не від дробу!!!) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Невизначеність $\{\infty \cdot 0\}$ теж можна розкрити за правилом Лопіталя, попередньо змінивши добуток функцій на відношення.

6.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Знайти границю функції за допомогою правила Лопіталя $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\sin 2x}{x^3}$.

Розв'язання:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{x^3}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{3x^2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 2x}{6x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{8\cos 2x}{6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}.$$

Відповідь: $4/3$.

Приклад 2. Знайти границю функції за допомогою правила Лопіталя $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^6-1}{x^3+x^2-x-1}$.

Розв'язання:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^6-1}{x^3+x^2-x-1}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{6x^5}{3x^2+2x-1}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}.$$

Відповідь: $3/2$.

Приклад 3. Знайти границю функції за допомогою правила Лопіталя $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

Розв'язання:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2.$$

Відповідь: 2.

Приклад 4. Знайти границю функції за допомогою правила Лопіталя $\lim\limits_{x\to 50}\left(\ln\left(2-\dfrac{x}{50}\right)\cdot \operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{100}\right)$.

Розв'язання:

Маємо невизначеність $\{0\cdot\infty\}$. Перепишемо добуток у вигляді частки, маємо $\lim\limits_{x\to 50}\dfrac{\ln\left(2-\dfrac{x}{50}\right)}{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{100}}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 50}\dfrac{\left(-\dfrac{1}{50}\right)\sin^2\dfrac{\pi x}{100}}{-\dfrac{\pi}{100}\left(2-\dfrac{x}{50}\right)}=\lim\limits_{x\to 50}\dfrac{\sin^2\dfrac{\pi x}{100}}{\dfrac{\pi}{2}\left(2-\dfrac{x}{50}\right)}=\dfrac{1^2}{\dfrac{\pi}{2}\cdot(2-1)}=\dfrac{2}{\pi}$.

Відповідь: $2/\pi$.

Приклад 5. Знайти границю функції за допомогою правила Лопіталя $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

Розв'язання:

Маємо невизначеність $\{\infty-\infty\}$. Приведемо дроби до спільного знаменника $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1-x}{xe^x-x}\right)=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{e^x+xe^x-1}\right)=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x}{e^x+xe^x+e^x}\right)=\frac{1}{2}$.

Відповідь: 0,5.

6.3 Завдання для самостійного розв'язання

Знайти границі, застосовуючи правило Лопіталя:

Варіант		Варіант	
1	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-5x^2+2x-1}{2x^3+3}$	2	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$
3	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^5-3x^2+7x-5}{x^4-5x+4}$	4	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{\pi-2x}$
5	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$	6	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-2\cos x+e^{-x}}{x\cdot\sin x}$
7	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+6x}{e^{3x}}$	8	$\lim\limits_{\varphi\to 0}\frac{\varphi-\arcsin\varphi}{\sin^3\varphi}$
9	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3+3x-5}{x^3-6x^2+5}$	10	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x}+x-1}{x^2}$
11	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{40}-40x+39}{x^{78}-78x+77}$	12	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\sin^3 x}$
13	$\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-6x+8}$	14	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot e^x-5x}{4x^2+7x}$
15	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^4 x}{e^{x^2}-1-x^2}$	16	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$
17	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x-1}{\ln(1+x)}$	18	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\mathrm{tg}x}{\sin^3 x}$
19	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x-\sin x}$	20	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-\cos x)}{\ln\mathrm{tg}x}$

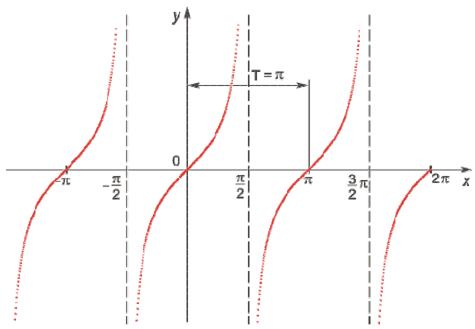
21	$\lim\limits_{x\to b}\dfrac{\sin x-\sin b}{x-b}$	22	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\arcsin^2 x}{x\cos x-\sin x}$
23	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^n-1}$	24	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\mathrm{tg}x}{\cos 2x}$
25	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}$	26	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x^3-x}-2x}{\sqrt[5]{x^2}-1}$
27	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x-\sin x}$	28	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$

Тема 7. Застосування диференціального числення до дослідження і побудови графіку функції

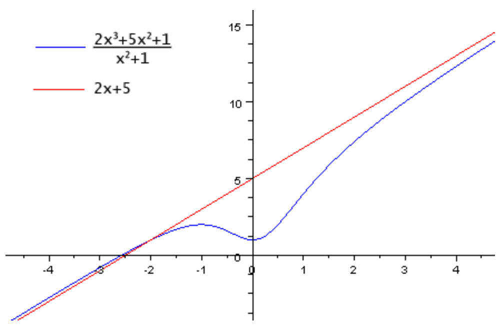
7.1 Основні теоретичні відомості

Пряма називається асимптотою кривої, якщо точка кривої необмежено наближається до неї при зростанні абсциси чи ординати. Асимптоти поділяють на вертикальні, похилі (горизонтальні).

Графік функції $y=f(x)$ при змінній, що прямує до деякої точки $x\to a$, має *вертикальну асимптоту*, якщо границя функції нескінченна $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$. Точка $x=a$ є точкою розриву ІІ роду, а рівняння вертикальної асимптоти має вигляд $x=a$.



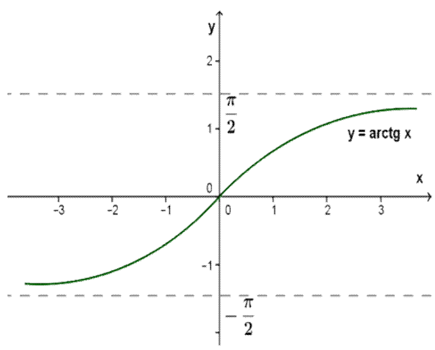
Рівняння *похилої асимптоти* задається рівнянням прямої на площині $y=kx+b$, де кутовий коефіцієнт k та вільний коефіцієнт b – границі, що обчислюються як $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)$.



Якщо обидві границі існують і скінченні, то функція має *похилу асимптоту*, інакше – не має.

Іноді слід окремо розглядати випадки, коли змінна прямує до плюс безмежності $x\to+\infty$ та мінус $x\to-\infty$.

Графік функції $y=f(x)$ має *горизонтальну асимптоту* $y=b$, коли $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$, та існує



скінченна границя функції при змінній прямуючій до безмежності $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, і ця границя рівна сталій $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$.

Графіки можуть мати кілька видів асимптот.

Проміжки зростання-спадання, екстремуми функції:

- функція зростає на проміжку, де $y' > 0$; функція спадає на проміжку, де $y' < 0$;
- в точках, де $y' = 0$ або не існує, може бути екстремум (максимум або мінімум).

Проміжки опуклості-вгнутості графіка, перегини функції:

- функція вгнута на проміжку, де $y'' > 0$; функція опукла на проміжку, де $y'' < 0$;
- в точках, де $y'' = 0$ або не існує, може бути перегин.

Схема повного дослідження функції та побудова її графіку

1. Знайти область визначення та область значень функції.
2. Дослідити функцію на парність – непарність.
3. Знайти інтервали монотонності (зростання та спадання) функції, точки локальних екстремумів та значення функції в цих точках.
4. Знайти точки перегину графіка функції та інтервали опуклості і вгнутості.
5. Дослідити графік функції на наявність асимптот.
6. Скласти таблицю значень функції для деяких значень її аргументу.
7. Використовуючи всі отримані результати, побудувати графік функції.

7.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Знайти асимптоти графіка функції $y = \dfrac{x^3 + 9x}{x^2 - 4}$.

Розв’язання:

Область визначення функції $(-\infty;-2) \cup (-2;2) \cup (2;+\infty)$, тобто $x \neq \pm 2$.

В точках $x = -2$ та $x = 2$ функція невизначена, в цих точках можуть існувати вертикальні асимптоти.

Графік функції має вертикальні асимптоти $x \to a$, якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$.

Оскільки $\lim\limits_{x\to -2-0} \dfrac{x^3+9x}{x^2-4} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to -2+0} \dfrac{x^3+9x}{x^2-4} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to +2-0} \dfrac{x^3+9x}{x^2-4} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to +2+0} \dfrac{x^3+9x}{x^2-4} = +\infty$ та $\lim\limits_{x\to +2} \dfrac{x^3+9x}{x^2-4} = \infty$, то $x=-2$ та $x=2$ – вертикальні асимптоти.

Перевіримо наявність похилих асимптот. Рівняння похилої асимптоти записується наступним чином: $y = kx + b$. Знайдемо k та b.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+9x}{x^3-4x} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3+9x}{x^2-4} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{13x}{x^2-4} = 0 \cdot$$

Отже, рівняння похилої асимптоти буде мати наступний вигляд: $y = x$.

Відповідь: $x=-2$ та $x=2$ – вертикальні асимптоти; похила асимптота $y = x$.

Приклад 2. Провести повне дослідження функції $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2$ та побудувати її графік.

Розв'язання:

1. Область визначення функції $x \in (-\infty; +\infty)$. Область значень функції: $y \in (-\infty; +\infty)$.

2. Для дослідження функції на парність-непарність аргумент x замінимо на $(-x)$, тоді $y(-x) = \frac{1}{3}(-x)^3 - (-x)^2 - 3(-x) + 2 = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + 2$, тобто $y(-x) \neq y(x)$ і $y(-x) \neq -y(x)$. Отже задана функція не є парною і не є непарною, тобто є функцією загального вигляду.

3. Дослідимо задану функцію на екстремум за допомогою необхідної і достатньої ознак. Визначимо критичні точки. Для цього знаходимо першу похідну даної функції і прирівнюємо її до нуля: $y' = x^2 - 2x - 3 = 0$.

Розв'язкам рівняння $x^2 - 2x - 3 = 0$ є $x_1 = -1$ та $x_2 = 3$. Таким чином, $x_1 = -1$ та $x_2 = 3$ – критичні точки. Оскільки похідна існує при будь-якому x, то інших критичних точок немає.

За допомогою методу інтервалів визначимо знаки похідної зліва та справа від критичних точок. При $x \in (-\infty; -1)$ похідна функції додатна $y'(x) > 0$; якщо $x \in (-1; 3)$ похідна функції від'ємна $y'(x) < 0$; якщо $x \in (3; +\infty)$, то похідна знов додатна $y'(x) > 0$. Функція зростає на проміжках $x \in (-\infty; -1)$ та $x \in (3; +\infty)$. Функція спадає на проміжку $x \in (-1; 3)$.

Згідно достатній умові існування екстремуму функції $x_{\max} = -1$, а $x_{\min} = 3$. Визначимо значення функції в точках мінімуму та максимуму. $y_{\max} = y(-1) = -\frac{1}{3} - 1 + 3 + 2 = 3\frac{2}{3}$; $y_{\min} = y(3) = 9 - 9 - 9 + 2 = -7$. Таким чином, точка максимуму $A\left(-1; 3\frac{2}{3}\right)$, точка мінімуму $B(3; -7)$.

4. Знайдемо точки перегину графіка функції та інтервали опуклості та вгнутості.

Для цього знаходимо другу похідну, прирівняємо її до нуля та знайдемо корені рівняння: $y''(x) = 2x - 2 = 0$. Тоді $x = 1$ – критична точка другого роду.

Запишемо другу похідну у вигляді $y''(x) = 2(x - 1)$. З правої частини цієї рівності випливає, що при $x < 1$ друга похідна від'ємна $y''(x) < 0$, а при $x > 1$ друга похідна додатна $y''(x) > 0$.

На інтервалі $x \in (-\infty; 1)$ графік функції є опуклим, на інтервалі $x \in (1; +\infty)$ – вгнутим.

Друга похідна при переході через точку $x = 1$ змінює свій знак. Отже, $x = 1$ є абсцисою точки перегину. Обчислимо ординату цієї точки: $y(1) = \frac{1}{3} - 1 - 3 + 2 = -\frac{5}{3}$. Таким чином, точка $P\left(1; -\frac{5}{3}\right)$ є точкою перегину графіка функції.

5. З'ясуємо наявність асимптот графіка функції.

Вертикальних асимптот немає, бо функція визначена при всіх дійсних значеннях аргумента.

Похилих асимптот також нема, бо $k = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2}{x} \right) = \infty$.

6. Складемо таблицю значень функції для деяких значень її аргументу:

x	$x \in (-\infty; -1)$	–1	$x \in (-1; 1)$	1	$x \in (-1; 3)$	3	$x \in (3; +\infty)$
y	зростає	$3\frac{2}{3}$	спадає	$-1\frac{2}{3}$	спадає	–7	зростає

7. Скориставшись отриманими результатами, побудуємо графік функції.

Приклад 3. Провести повне дослідження функції $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ та побудувати її графік.

Розв'язання:

1) Знаходимо область визначення функції. Такяк $x^2 - 1 \neq 0$, $x \neq \pm\sqrt{1}$, $x \neq -1$, $x \neq 1$, то область визначення є об'єднання інтервалів: $(-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;+\infty)$.

2) Досліджуємо функцію на парність-непарність: $f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = -\frac{x^3}{x^2 - 1} = f(x)$. Отже, функція непарна, графік функції симетричний відносно початку координат.

3) Знаходимо точки перетину графіка функції з осями координат. Для цього прирівнюємо функцію до нуля: $y = \frac{x^3}{x^2 - 1} = 0$, $x^3 = 0$, $x = 0$. Графік перетинає вісь Ox тільки в одній точці $x = 0$.

Знаходимо інтервали знакосталості функції з урахуванням області визначення. Щоб знайти знак функції на інтервалі $x \in (-\infty;-1)$, знайдемо, наприклад, $y(-2) = \frac{(-2)^3}{(-2)^2 - 1} = \frac{-8}{4-1} < 0$, таким чином на інтервалі $(-\infty;-1)$ функція від'ємна. Аналогічні дослідження проведемо для інтервалу $x \in (-1;0)$: $y(-0,5) = \frac{-0,125}{0,25 - 1} > 0$ (на інтервалі $(-1;0)$ функція додатна); для інтервалу $x \in (0;1)$: $y(0,5) = \frac{0,125}{0,25 - 1} < 0$ (на інтервалі $(0;1)$ функція від'ємна); для інтервалу $x \in (1;+\infty)$: $y(2) = \frac{8}{4-1} > 0$ (на інтервалі $(1;+\infty)$ функція додатна).

4) Знаходимо точки розриву і перевіряємо наявність вертикальних асимптот. Точки розриву: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Якщо x прямує до -1 зліва, то $x^2 - 1 > 0$, $x^3 < 0$ і $\frac{x^3}{x^2 - 1} < 0$. Тому $\lim\limits_{x \to -1-0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty$. Якщо x прямує до -1 справа, то $x^2 - 1 < 0$, $x^3 < 0$ і $\frac{x^3}{x^2 - 1} > 0$. Отже, $\lim\limits_{x \to -1+0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty$. Аналогічні дослідження

проведемо для точки $x_2 = 1$. Маємо $\lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty$. Звідси випливає, що прямі $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ є вертикальними асимптотами.

Перевіримо функцію на наявність похилої асимптоти: $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3}{x\left(x^2 - 1\right)} = 1$,

$b = \lim\limits_{x \to \infty} \left(f(x) - kx \right) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2 - 1} - 1 \cdot x \right) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{x^2 - 1} = 0$. Отже, існує похила асимптота $y = 1 \cdot x + 0 = x$, тобто $y = x$.

5) Шукаємо інтервали зростання та спадання функції і її екстремуми.

Перевіряємо необхідну умову: якщо функція $y = f(x)$ має в точці $x = x_0$ локальний екстремум, то її похідна в цій точці дорівнює 0 або не існує. В нашому випадку

$$y' = \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} \right)' = \frac{3x^2\left(x^2 - 1\right) - x^3 \cdot 2x}{\left(x^2 - 1\right)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{\left(x^2 - 1\right)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{\left(x^2 - 1\right)^2} = \frac{\left(x^2 - 3\right)x^2}{\left(x^2 - 1\right)^2}.$$

Прирівнюючи першу похідну до нуля, знаходимо стаціонарні точки (точки підозрілі на екстремум): $y' = \dfrac{\left(x^2 - 3\right)x^2}{\left(x^2 - 1\right)^2} = 0$, $x^2\left(x^2 - 3\right) = 0$, $x_{1,2} = 0$, $x_3 = -\sqrt{3}$, $x_4 = \sqrt{3}$. Критичними є також точки, де похідна не існує. В нашому випадку це точки $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Критичні точки розбивають область визначення на інтервали зростання і спадання функції: $\left(-\infty; -\sqrt{3}\right) \cup \left(-\sqrt{3}; -1\right) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup \left(1; \sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; +\infty\right)$.

Враховуючи знаки першої похідної в інтервалах і обчислюючи значення функції в критичних точках, складаємо зведену таблицю:

x	$\left(-\infty; -\sqrt{3}\right)$	$-\sqrt{3}$	$\left(-\sqrt{3}; -1\right)$	$-1-0$	$-1+0$	$(-1; 0)$
$f'(x)$	>0	0	<0	$\overline{\exists}$	$\overline{\exists}$	<0
$f(x)$	$\uparrow$	$-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$	$\downarrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\downarrow$
0	$(0; 1)$	$1-0$	$1+0$	$\left(1; \sqrt{3}\right)$	$\sqrt{3}$	$\left(\sqrt{3}; +\infty\right)$
0	<0	$\overline{\exists}$	$\overline{\exists}$	<0	0	>0

0	$\downarrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\downarrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\uparrow$

6) Шукаємо точки перегину й інтервали опуклості та угнутості.

$$y''=\left(\frac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}\right)'=\left(\frac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2}\right)'=\frac{\left(4x^3-6x\right)\cdot\left(x^2-1\right)^2-2\left(x^2-1\right)\cdot 2x\cdot\left(x^4-3x^2\right)}{\left(x^2-1\right)^4}=$$

$$=\frac{\left(4x^3-6x\right)\cdot\left(x^2-1\right)-4x\cdot\left(x^4-3x^2\right)}{\left(x^2-1\right)^3}=\frac{4x^5-6x^3-4x^3+6x-4x^5+12x^3}{\left(x^2-1\right)^3}=\frac{2x^3+6x}{\left(x^2-1\right)^3}=\frac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}$$

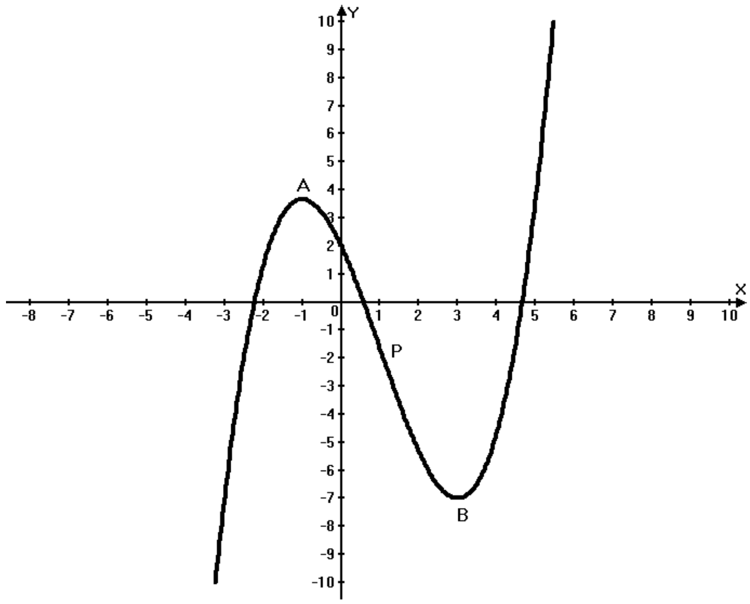
,

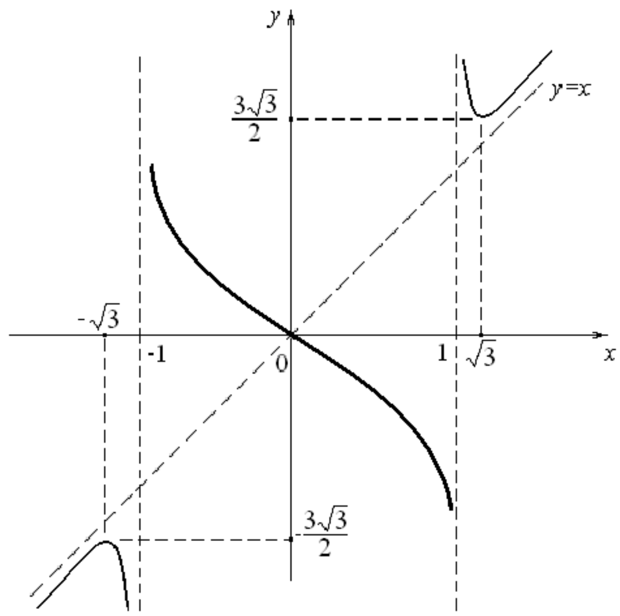
$y''=\frac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}=0$, звідки $x_1=0$. Крім того, друга похідна не існує в точках $x_1=-1$, $x_2=1$. Отже, область визначення розбивається на інтервали: $(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$.

Враховуючи знаки другої похідної в інтервалах і обчислюючи значення функції в точках перегину, складаємо зведену таблицю:

x	$(-\infty;-1)$	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	$(1;+\infty)$
$f'(x)$	<0	>0	0	<0	>0
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	0	$\cap$	$\cup$

7) Будуємо графік функції. Починаємо із проведення асимптот. Провівши асимптоти, наносимо координати точок мінімуму, максимуму та перегину. Після цього, користуючись даними таблиць, будуємо графік функції.





7.3 Завдання для самостійного розв'язання

Завдання 1

Знайти асимптоти графіка функції:

1. $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$
2. $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$
3. $y=\dfrac{2}{x^2+2x}$
4. $y=\dfrac{4x^2}{3-x^2}$
5. $y=\dfrac{12x}{9-x^2}$
6. $y=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$
7. $y=\dfrac{4-x^3}{x^2}$
8. $y=\dfrac{x^2-4x+1}{x-4}$
9. $y=\dfrac{2x^3+1}{x^2}$
10. $y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}$
11. $y=\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$
12. $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2$
13. $y=\dfrac{12-3x^2}{x^2+x}$
14. $y=\dfrac{9+6x-3x^2}{x^2-2x-3}$
15. $y=-\dfrac{8x}{x^2-4}$
16. $y=\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$
17. $y=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$
18. $y=\dfrac{4x}{(x+1)^2}$
19. $y=\dfrac{8(x-1)}{(x+1)^2}$
20. $y=\dfrac{1-2x^3}{x^2}$

Завдання 2

Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

1. $y=\dfrac{1}{2}x^3-3x^2+6$
2. $y=\dfrac{1}{5}x^3-2x^2+2$
3. $y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-8x+5$
4. $y=\dfrac{1}{8}x^3-\dfrac{3}{8}x^2-3x$
5. $y=\dfrac{1}{6}x^3-\dfrac{5}{2}x^2+3$
6. $y=-\dfrac{1}{5}x^3+\dfrac{3}{2}x^2-4$
7. $y=\dfrac{1}{9}x^3-3x^2+3$
8. $y=\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{7}{2}x^2-2$
9. $y=-\dfrac{1}{3}x^3+x^2+3x-2$
10. $y=-\dfrac{1}{8}x^3+2x-3$
11. $y=-\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{3}{2}x^2-4$
12. $y=-\dfrac{1}{9}x^3+3x-5$

13. $y=\frac{1}{2}x^3-\frac{5}{2}x^2-2$ 14. $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{9}x^2-4$ 15. $y=-\frac{1}{3}x^3+6x^2-1$

16. $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{3}x^2+2$ 17. $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{3}x^2+2$ 18. $y=\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{3}x^2-3$

19. $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x^2-4x$ 20. $y=\frac{1}{6}x^3-\frac{7}{2}x^2-5$

Тема 8. Застосування диференціального числення до розв'язання оптимізаційних задач

Приклади виконання завдань

Приклад 1. Яке співвідношення має бути між розмірами прямокутних вікон, щоб при заданій освітленості (площа вікна дорівнює S) периметр вікна був найменшим?

Розв'язання:

Нехай маємо прямокутне вікно розміром $a\times b$, його площа за умовою задачі дорівнює $a\cdot b=S$, звідки $a=\frac{S}{b}$. Периметр вікна дорівнює $2a+2b=P$, або що те саме: $P=P(b)=\frac{S}{b}+b$.

Оскільки функція $P(b)$ залежить від невідомої b, відшукаємо за якого значення $b_{\min}$ функція $P(b)$ набуде найменшого значення. Для цього знайдемо похідну та прирівняємо її до нуля: $P'_b=-\frac{S}{b^2}+1=\frac{-S+b^2}{b^2}=0$, тобто $-S+b^2=0$, звідки $b_{\min}=\sqrt{S}$, $a_{\min}=\frac{S}{b}=\frac{S}{\sqrt{S}}=\sqrt{S}$, тобто $a_{\min}=b_{\min}$.

Відповідь: вікно має бути квадратним.

Завдання для самостійного виконання

1. Яке співвідношення має бути між розмірами прямокутних вікон заданого периметра, щоб освітленість приміщення була найбільшою?

2. Сіткою завдовжки $120\,м$ треба обгородити прилеглу до будинку земельну ділянку найбільшої площі. Знайти розміри цієї ділянки.

3. Визначити розміри відкритого басейну з квадратним дном і об'ємом $32\,м^3$, щоб на облицювання його стін і дна витратити якнайменше матеріалу.

4. Із квадратного листа картону розміром $18\times18\,см^2$ виготовляють відкриту коробку. Для цього із кутів листа вирізають 4 однакових квадрати і

лист згинають по пунктирних лініях. Якою має бути сторона вирізуваного квадрата, щоб коробка мала найбільший об'єм?

5. Є прямокутний лист жерсті розміром $50 \times 80\ см^2$. У чотирьох його кутах вирізають однакові квадрати та роблять відкриту коробку, загинаючи краї під прямим кутом. Яка максимально можлива місткість такої коробки?

6. Потрібно виготовити коробку, об'єм якої дорівнював би $72\ см^3$, при співвідношені сторін 1:2. Якими мають бути розміри всіх сторін, щоб повна поверхня коробки була найменшою?

7. На сторінці книги друкований текст має займати $432\ см^2$. Поля зверху і знизу мають бути по $2\ см$, а справа і зліва – по $1{,}5\ см$. Визначити найекономніші розміри паперу.

8. Знайти співвідношення між радіусом та висотою циліндра, що при даному об'ємі має найменшу поверхню.

9. Треба виготовити бочку циліндричної форми при даному об'ємі $3\ м^3$. Якими мають бути радіус і висота бочки, щоб на її виготовлення пішло якнайменше матеріалу?

10. Якими мають бути радіус і висота консервної банку циліндричної форми, щоб при даному об'ємі $100\ см^3$ на її виготовлення пішло якнайменше матеріалу?

11. Довести, що конічне шатро (вігвам) заданої місткості потребує найменшої кількості матерії, коли його висота в $\sqrt{2}$ разів більше радіуса основи.

12. На якій висоті над центром круглої платформи радіуса R слід повісити ліхтар, щоб він найкраще освітлював доріжку довкола платформи. (Ступінь освітлення прямо пропорційний косинусу кута падіння променя і обернено пропорційний квадрату відстані до джерела світла.)

13. Витрати на пальне для двигуна яхти пропорційні кубу її швидкості. При швидкості $10 км/год$ витрати на пальне складають $300 грн/год$, інші ж витрати (що не залежать від швидкості) становлять $4800 грн/год$. При якій швидкості яхти загальна сума витрат на $1\ км$ шляху буде найменшою?

14. З пунктів A та B, розташованих на вулицях, які перетинаються під кутом 60°, одночасно виїжджають два велосипедисти в напрямку перехрестя C. Через який час відстань між ними буде найменшою, якщо швидкість першого велосипедиста – $15 км/год$, швидкість другого – $12 км/год$, $AC = 9\ км$ і $BC = 6\ км$?

15. Рибалка поспішає додому. Йому треба перейти поле (з пункту C), щоб потрапити на шосе, де розташовано його селище (пункт A). Найближча відстань до шосе $3\,км$ (пункт B). Відстань між A і B дорівнює $5\,км$. Проте рибалка пішов полем у напрямку пункту D, розташованого на шосе на відстані $1\,км$ від його селища. Чому рибалка прийняв таке рішення, хоча полем він рухається зі швидкістю $4\,км/год$, а по шосе – $5\,км/год$?

16. Риболовецький катер стоїть на якорі в $9\,км$ від найближчої точки берега. З катера слід відіслати гінця в офіс, розташований в $15\,км$, рахуючи по узбережжю від найближчої до катера точки берега (офіс розташований на узбережжі). Якщо гонець може рухатися пішки зі швидкістю $5\,км/год$, а на веслах $4\,км/год$, то в якому пункті берега йому слід пристати, щоб потрапити в офіс якнайшвидше?

17. Число 8 розбити на два такі доданки, щоб сума їх кубів була найменшою.

18. Число 36 розкласти на два такі множники, щоб сума їх квадратів була найменшою.

19. Об’єм правильної трикутної призми дорівнює V. Якою повинна бути сторона основи, щоб повна поверхня призми була найменшою?

20. Знайти співвідношення між радіусом R та висотою H циліндра, який при заданому об’ємі має найменшу повну поверхню.

21. Знайти найбільший об’єм конуса з твірною l.

22. Знайти найбільший об’єм циліндра, повна поверхня якого дорівнює S.

23. На колі дано точку A. Провести хорду BC паралельно дотичній до кола в т. A так, щоб площа трикутника ABC була найбільшою.

24. Знайти сторони прямокутника найбільшого периметра, вписаного в півколо радіусом R.

25. У заданий сегмент кола вписати прямокутник найбільшої площі.

26. Навколо заданого циліндра описати конус найменшого об’єму так, щоб основи циліндра і конуса лежали в одній площині.

27. Знайти кут при вершині рівнобедреного трикутника заданої площі, щоб радіус вписаного в цей трикутник кола був найбільшим.

28. Знайти висоту прямого кругового конуса найменшого об’єму, описаного навколо кулі радіусом R.

29. Якою має бути висота конуса, вписаного в кулю радіусом R, щоб його бічна поверхня була найбільшою?

30. Через дану точку $A(1;\,4)$ проведіть пряму так, щоб сума довжин відрізків, які вона відтинає на осях системи координат, була найменшою.

Список рекомендованої літератури

Основна:

1. Вища математика : метод. реком. до виконання практичних робіт для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «молодший бакалавр» початкового рівня (короткий цикл) спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» денної форми навчання / уклад. : В. С. Шебанін, О. В. Шебаніна, І. П. Атаманюк, О. В. Шептилевський, О. В. Бойчук, Є. Ю. Борчик, С. І. Богданов. Миколаїв : МНАУ, 2021. 154 с.

2. Практикум з вищої математики : комп'ютерна система для дистанційного навчання / уклад. : В. С. Шебанін, О. В. Шебаніна, І. П. Атаманюк та ін. Миколаїв : МНАУ, 2016. Ч. І. 232 с.

3.Практикум з вищої математики. Ч. ІІ : комп'ютерна система для дистанційного навчання / уклад. : В. С. Шебанін, О. В. Шебаніна, І. П. Атаманюк та ін. Миколаїв : МНАУ, 2018. 380 с.

4.Вища математика : типові завдання до модулів 04 «Диференціальне числення функцій однієї змінної», 05 «Диференціальне числення функцій багатьох змінних», 06 «Інтегральне числення функції однієї змінної», 07 «Диференціальні рівняння», 08 «Числові та функціональні ряди» для виконання контрольних та самостійних робіт студентами напрямів підготовки: 6.030509 «Облік та аудит», 6.030601 «Менеджмент організацій», 6.030601 «Менеджмент ЗЕД» / уклад. : В. С. Шебанін, О. В. Шебаніна, В. Г. Богза та ін. Миколаїв : МНАУ, 2011. 140 с.

Додаткова:

1. Алілуйко А. М., Дзюбановська Н. В., Лесик О. Ф. Вища математика у прикладах і задачах для економістів : навч. посібник. Тернопіль : ТНЕУ, 2017. 148 с.

2. Зайцев Є. П. Вища математика. Київ : Алерта, 2018. 608 с.

3. Клепко В. Ю., Голець В. Л. Вища математика в прикладах і задачах: Київ : ЦНЛ, 2019. 594 с

Зміст

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Методичні рекомендації

Укладачі: **Шебанін** В'ячеслав Сергійович
Бойчук Олена Володимирівна
Борчик Євген Юрійович
Богданов Сергій Іванович

Формат 60х84/16 Ум. друк. арк. 2
Тираж 25 прим. Зам. №

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Г. Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.