МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Інженерно-енергетичний факультет

Кафедра загальнотехнічних дисциплін

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

метод. реком. для виконання практ. робіт
здобувачами початкового рівня (короткий цикл) вищої освіти
ОПП «Агроінженерія» спеціальності 208 «Агроінженерія»
денної форми здобуття вищої освіти

МОДУЛЬ 1-2-3

МИКОЛАЇВ
2023

УДК 531.1
Т30

Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету від 30.03.2023 р., протокол № 8.

Укладачі:

О. В. Баранова – асистент кафедри загальнотехнічних дисциплін, Миколаївський національний аграрний університет;
П. **М. Полянський –** канд. екон. наук, доцент, в.о. завідувача кафедри загальнотехнічних дисциплін, Миколаївський національний аграрний університет;
Г. О. Іванов – канд. техн. наук, доцент кафедри загальнотехнічних дисциплін, Миколаївський національний аграрний університет;
С. М. Степанов – старший викладач кафедри загальнотехнічних дисциплін, Миколаївський національний аграрний університет.

Рецензент:

В. А. Грубань – канд. техн. наук, доцент, в.о. завідувача кафедри тракторів та сільськогосподарських машин, експлуатації і технічного сервісу, Миколаївський національний аграрний університет.

ЗМІСТ

ВСТУП

Теоретична механіка – це наука, яка дає універсальні методи складання і аналізу рівнянь руху і рівноваги складних матеріальних систем, що є основою їх моделювання.

Теоретична механіка поділяється на три частини: статика, кінематика, динаміка.

Статика вивчає умови рівноваги тіл.

Кінематика розглядає рух без урахування чинників, що його породжують.

Динаміка вивчає рух залежно від чинників, що його викликають, від взаємодії з іншими тілами.

Кожна практична робота складається з конкретних завдань за темами відповідних розділів/модулів теоретичної механіки. Виконання цих завдань у вигляді розв'язування відповідних конкретних задач і складає зміст роботи.

Для успішного виконання завдань необхідно:

– вивчити теоретичний матеріал з даної теми;
– ознайомитися з методикою розв'язання задачі;
– розібратися у наведеному прикладі;
– засвоїти умову задачі і записати її у скороченому вигляді;
– зробити, якщо необхідно, відповідний рисунок чи схему;
– проаналізувати зв'язок між величинами, що характеризують дане явище та записати відповідні рівняння;
– у разі необхідності, з'ясувати роль початкових та граничних умов;
– розв'язати рівняння або систему рівнянь та проаналізувати результати.

Практична робота С1
Знаходження головного вектора та головного моменту системи сил

Мета роботи:

1. Сформувати компетентності для визначення силових характеристик просторових систем сил.

2. Сформувати компетентності для самостійної роботи і творчого мислення.

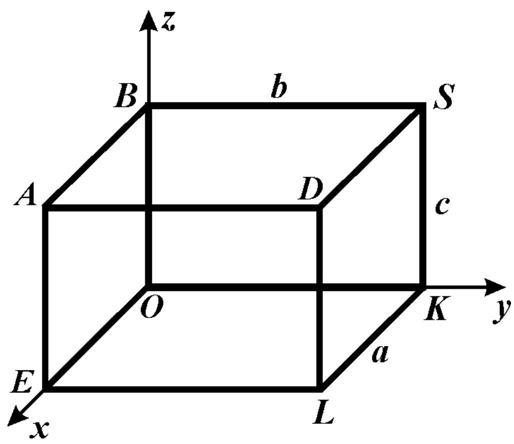


Рис. 1.1

Сили F_1 , F_2 , F_3 , F_4 прикладені у вершинах паралелепіпеда з ребрами a , b , c (рис. 1.1). Розміри паралелепіпеда (м), величини сил (Н) і точки їх прикладання та напрями вказані в таблиці 1. Знайти головний вектор і головний момент цієї системи сил (компоненти цих векторів, їхні модулі та напрямні косинуси). Зобразити головний вектор та головний момент у декартовій системі координат. Масштаб скорочення осі Ox відносно осей Oy та Oz прийняти як 1:2.

Методика розв'язання задачі

1. Креслимо паралелепіпед та вказуємо сили, які на нього діють (точки прикладання сил та їхні напрями).

2. Якщо сила непаралельна до будь-якої осі, то проектуємо її на декартові вісі. Тригонометричні функції кутів, які сила складає з осями координат визначаємо з геометричних міркувань.

3. Знаходимо алгебраїчні суми проекцій сил (R_x , R_y та R_z) на декартові вісі, модуль головного вектора сил та напрямні косинуси.

4. Знаходимо проекції головного моменту сил на декартові вісі (M_{Ox} , M_{Oy} , M_{Oz}), його модуль та напрямні косинуси.

5. У зручних масштабах креслимо головний вектор та головний момент системи сил.

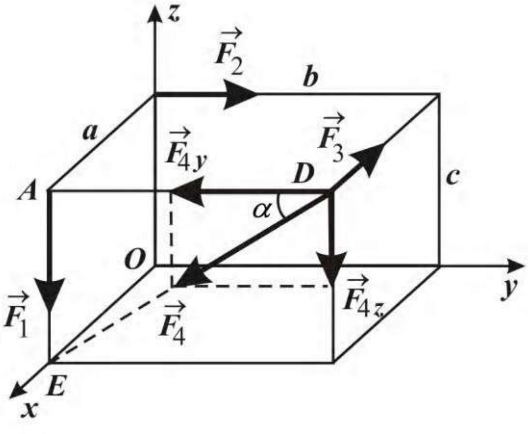


Рис. 1.2

Приклад.

Знайти головний вектор $\vec{R}$ та головний момент M_O системи сил, зображеної на рис. 1.2, якщо сили F_1 =25Н, F_2 =20Н, F_3 =30 Н, F_4 = 15 Н, прикладені у вершинах прямого паралелепіпеда з ребрами a = 6 м, b = 5 м, c = 3 м. Вектори $\vec{R}$ та $\vec{M}_O$ зобразити у декартових координатах у зручних масштабах.

Розв'язання. Головний вектор та головний момент системи сил визначаються як:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i, \quad (1)$$

$$\vec{M}_0 = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_0(\vec{F}_i). \quad (2)$$

1. Для головного вектора в нашому випадку отримуємо

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4.$$

Щоб знайти $\vec{R}$, визначимо алгебраїчні компоненти головного вектора, проектуючи вектори сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ та $\vec{F}_4$ на вісі Ox, Oy та Oz. Тоді отримуємо:

$$R_x = -F_3,$$
$$R_y = F_2 - F_{4y} = F_2 - F_4\cos\alpha,$$
$$R_z = -F_1 - F_{4z} = -F_1 - F_4\sin\alpha.$$

Тут α – кут між силою $\vec{F}_4$ та ребром AD. Тригонометричні функції цього кута знаходимо з прямокутного трикутника EAD, який є подібним до трикутника сил зі сторонами F_{4y}, F_{4z} та F_4:

$$\sin\alpha = AE/ED = c\big/\sqrt{c^2 + b^2},$$
$$\cos\alpha = AD/ED = b\big/\sqrt{c^2 + b^2}.$$

Таким чином, необхідні компоненти сили $\vec{F}_4$ визначаються як:

$$F_{4y} = F_4\cos\alpha = F_4(b/\sqrt{c^2 + b^2}) = 15\cdot 5/\sqrt{3^2 + 5^2} = 12{,}86 \text{ (Н)},$$

$$F_{4z} = F_4\sin\alpha = F_4(c/\sqrt{c^2 + b^2}) = 15\cdot 3/\sqrt{3^2 + 5^2} = 7{,}72 \text{ (Н)}.$$

Підставляючи дані задачі в (1) – (3), отримаємо:

R_x = – 30 (Н),

R_y = 20 – 12,86 = 7,14 (Н),

R_z = – 25 – 7,72 = – 32,72 (Н).

Це дозволяє знайти модуль головного вектора системи сил

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{30^2 + 7{,}14^2 + 32{,}72^2} = \sqrt{2021{,}6} = 44{,}96 \text{ (Н)}.$$

Напрямні косинуси головного вектора сили знайдемо за формулами:

$$\cos(\vec{i}, \vec{R}) = R_x/R = -30/44{,}96 = -0{,}667,$$
$$\cos(\vec{j}, \vec{R}) = R_y/R = 7{,}14/44{,}96 = 0{,}159,$$
$$\cos(\vec{k}, \vec{R}) = R_z/R = -32{,}72/44{,}96 = -0{,}728.$$

2. Визначимо головний момент системи сил, обчислюючи моменти сил відносно осей. Нагадаємо, що момент сили відносно осі дорівнює нулю, якщо лінія дії сили перетинає вісь або паралельна їй. В нашому прикладі

$$M_{Ox}(\vec{F}_1) = 0,\ M_{Ox}(\vec{F}_4) = 0,\ M_{Oz}(\vec{F}_2) = 0,$$

бо ці сили перетинають відповідні осі; та

$$M_{Ox}(\vec{F}_3) = 0,\ M_{Oz}(\vec{F}_1) = 0,\ M_{Oy}(\vec{F}_2) = 0,$$

оскільки ці сили паралельні вказаним осям.

Запишемо вирази для компонентів вектора головного моменту, беручі до уваги точки прикладання та нарями сил (рис. 1.2). Нагадаємо, що алгебраїчне значення моменту сили додатне, коли сила може викликати обертання проти руху стрілки годинника (дивлячись з додатного напряму відповідної осі), а якщо за рухом стрілки годинника – то від'ємне. Обчислення дають:

$$M_{Ox} = -F_2 \cdot c = -20 \cdot 3 = -60 \text{ (Н·м)},$$

$$M_{Oy} = F_1 \cdot a - F_3 \cdot c + F_{4z} \cdot a = 25 \cdot 6 - 30 \cdot 3 + 7{,}72 \cdot 6 = 106{,}32 \text{ (Н·м)},$$

$$M_{Oz} = F_3 \cdot b - F_{4y} \cdot a = 30 \cdot 5 - 12{,}86 \cdot 6 = 72{,}84 \text{ (Н·м)}.$$

Модуль головного моменту знайдемо за теоремою Піфагора

$$M_O = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2} = \sqrt{60^2 + 106{,}32^2 + 72{,}84^2} = 142{,}16 \text{ (Н·м)}.$$

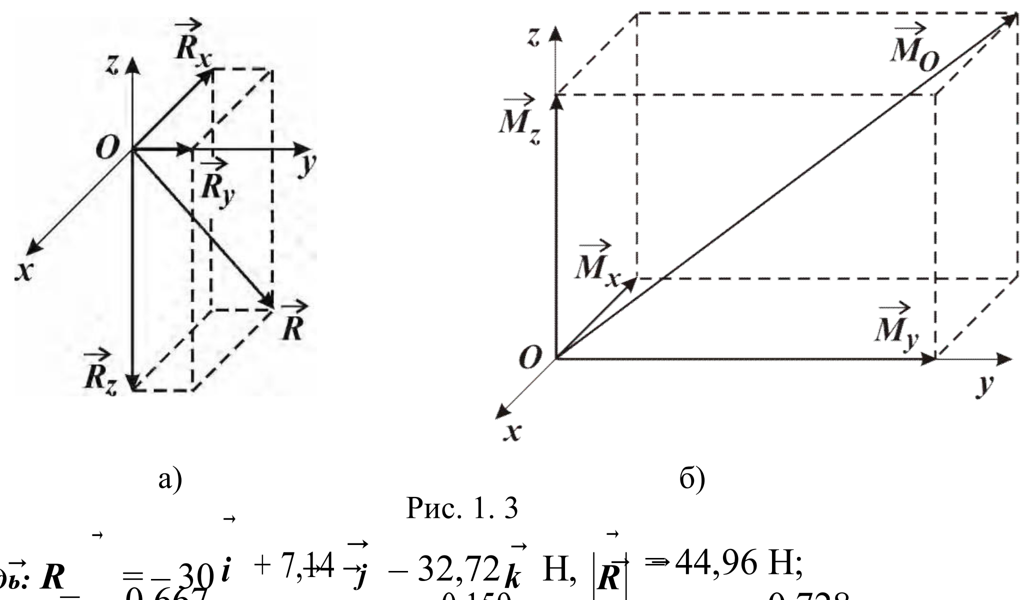
Напрямні косинуси цього вектора знайдемо за формулами:

$$\cos(\vec{i}, \vec{M}_O) = M_{Ox} / M_O = -60/142{,}16 = -0{,}422,$$

$$\cos(\vec{j}, \vec{M}_O) = M_{Oy} / M_O = 106{,}32/142{,}16 = 0{,}748,$$

$$\cos(\vec{k}, \vec{M}_O) = M_{Oz} / M_O = 72{,}84/142{,}16 = 0{,}512.$$

Знайдені вектори $\vec{R}$ і $\vec{M}_O$ та їхні компоненти зображені на рис. 1.3 (масштаб скорочення по осі Ox відносно осей Oy та Oz – 1:2).



а) б)

Рис. 1. 3

Відповідь: $\vec{R} = -30\vec{i} + 7{,}14\vec{j} - 32{,}72\vec{k}$ Н, $|\vec{R}| = 44{,}96$ Н; $\cos(\vec{i}, \vec{R}) = -0{,}667$, $\cos(\vec{j}, \vec{R}) = 0{,}159$, $\cos(\vec{k}, \vec{R}) = -0{,}728$;

$\vec{M}_O = -60\vec{i} + 106{,}32\vec{j} + 72{,}84\vec{k}$ Н·м, $|\vec{M}_O| = 142{,}16$ Н·м;

$$\cos(\vec{i}, \vec{M}_O) = -0{,}422, \quad \cos(\vec{j}, \vec{M}_O) = 0{,}748, \quad \cos(\vec{k}, \vec{M}_O) = 0{,}512.$$

Таблиця 1 – вихідні дані для розв'язання задачі 1.

№	*a*	*b*	*c*	F_1		F_2		F_3		F_4	
				модуль	напрям	модуль	напрям	модуль	напрям	модуль	напрям
0	5	4	2	160	*OB*	100	*OE*	50	*LA*	160	*KO*
1	4	6	3	95	*EA*	35	*BO*	35	*LO*	115	*SA*
2	2	6	5	80	*BE*	45	*ED*	85	*KO*	120	*SB*
3	3	5	5	75	*AS*	120	*LE*	25	*EA*	35	*KL*
4	5	4	4	155	*LA*	105	*OE*	50	*OB*	160	*KO*
5	3	2	5	65	*AE*	25	*DE*	60	*SK*	65	*SB*
6	6	3	2	85	*KB*	110	*AL*	50	*LD*	70	*OE*
7	5	4	4	115	*OB*	35	*BS*	145	*SL*	105	*BE*
8	6	4	4	85	*BS*	75	*SD*	115	*LA*	140	*AD*
9	6	3	5	85	*LO*	140	*LD*	55	*EA*	75	*AB*
10	4	2	4	75	*KE*	120	*BA*	50	*AE*	150	*EL*
11	4	6	4	100	*KD*	60	*BO*	20	*AD*	110	*LD*
12	3	5	5	160	*SL*	80	*DL*	95	*AD*	120	*EO*
13	5	3	2	25	*DK*	115	*BS*	90	*BO*	25	*EL*
14	3	2	3	135	*LS*	80	*LE*	150	*OB*	155	*SB*
15	2	6	2	110	*SA*	130	*LD*	75	*OB*	55	*BA*
16	3	2	6	85	*DB*	125	*KS*	25	*OE*	90	*AB*
17	3	4	2	25	*AS*	60	*DL*	25	*DS*	60	*KS*
18	5	3	3	50	*BD*	105	*AE*	90	*SK*	80	*LK*
19	4	6	4	120	*SO*	90	*AB*	130	*LD*	115	*KO*
20	4	4	2	95	*KB*	65	*DL*	85	*OE*	45	*EA*
21	5	6	6	155	*BK*	100	*KL*	105	*LE*	95	*KS*
22	3	3	4	60	*EB*	15	*LD*	20	*BS*	35	*SK*
23	5	5	3	110	*BE*	35	*SB*	130	*SD*	125	*EA*
24	4	2	4	155	*KE*	55	*LD*	110	*DA*	140	*SB*
25	3	4	6	30	*EK*	70	*BS*	110	*AE*	45	*EL*
26	5	3	4	90	*ED*	100	*KL*	105	*BO*	30	*AD*
27	4	3	2	40	*AL*	85	*AB*	20	*OK*	165	*LK*
28	6	4	5	95	*DE*	140	*BS*	25	*SD*	50	*AD*
29	4	6	3	15	*LA*	85	*KO*	90	*SK*	120	*BO*

Контрольні питання:

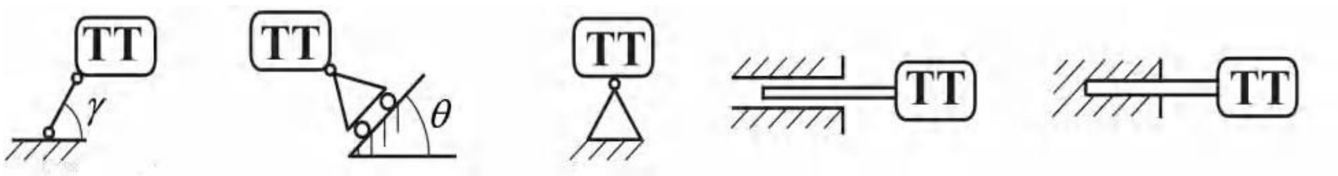
1. Що таке просторова система сил?
2. Дати визначення головного вектора просторової системи сил?
3. Дати визначення головного моменту просторової системи сил?
4. Послідовність визначення головного вектору і головного моменту?
5. З якою метою обчислюються напрямні косинуси?

Практична робота С2

Визначення реакцій опор плоскої конструкції

Мета роботи:
1. Сформувати компетентності для визначення реакцій опор плоскої конструкції, яка знаходиться під дією системи сил.
2. Сформувати компетентності самостійної роботи і творчого мислення.

Жорстка балка знаходиться у вертикальній площині, складається з елементів кожний довжиною $\boldsymbol{a}$ метрів та погонною вагою $\boldsymbol{q}$ = 100 Н/м і закріплена в точках $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{K}$. На балку діють сили $\boldsymbol{F}_1$ (Н) та $\boldsymbol{F}_2$ (Н) під кутами α та β до неї відповідно (усі кути відкладаються проти руху стрілки годинника від горизонталі), та момент пари зовнішніх сил $\boldsymbol{M}$.
Визначити реакції опор конструкції. Тип балки, точки і способи закріплення (згідно з рис. 2.1) та навантаження на балку приведені в таблиці 2.



а) б) в) г) д)

Рис. 3.1

Способи закріплень твердого тіла (ТТ).
а) жорсткий невагомий стрижень на шарнірах; б) котки (рухомі шарніри);
в) циліндричний (сферичній) шарнір; г) напівзащемлена опора; д) замурування.

Зауваження.

1) При розв’язанні вважати, що закріплення не змінює розмірів балки.

2) Для закріплень **а**) і **б**) додатні кути γ та θ (рис. 3.1) відкладати проти руху стрілки годинника від горизонтальної осі $\boldsymbol{Ox}$, що спрямована праворуч.

3) У випадку закріплення **г**) виникає дві реакції (у місці закріплення) – сила, яка перпендикулярна до тіла (ТТ) та момент закріплення; а у випадку закріплення **д**) – три реакції: вертикальна та горизонтальна сили і момент закріплення.

4) Для визначення напрямів сил $\vec{\boldsymbol{F}}_1$ та $\vec{\boldsymbol{F}}_2$ додатні кути α та β відкладати проти руху стрілки годинника від горизонтальної осі $\boldsymbol{Ox}$, що спрямована праворуч.

Методика розв'язання задачі

1. Вибираємо зручну систему координат (як правило, горизонтальну вісь $\boldsymbol{x}$ та вертикальну вісь $\boldsymbol{y}$).

2. Звільняємо конструкцію від в'язів, а їхню дію замінюємо реакціями.

3. Розкладаємо активні сили та реакції на складові вздовж обраних осей.

4. Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad \sum F_{iy} = 0; \quad \sum M(\vec{F_i}) = 0 .$$

Останнє рівняння записуємо відносно довільної точки, використовуючи теорему Varіньона. Щоб спростити останнє рівняння, вибираємо ту точку, де перетинається найбільша кількість невідомих векторів сил.

5. Розв'язуємо систему рівнянь та визначаємо невідомі.

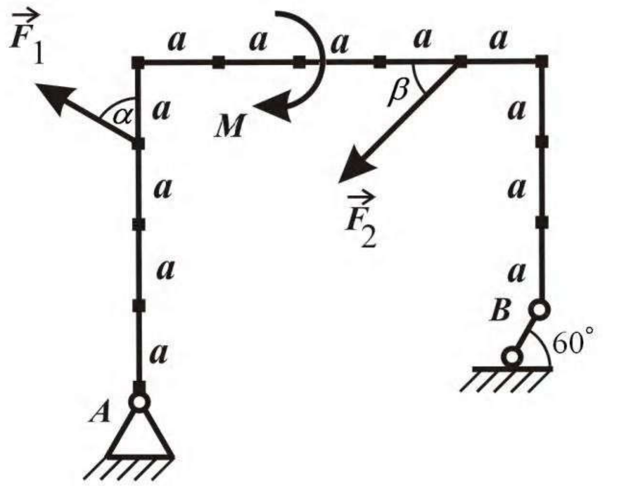


Рис. 3.2

Приклад.

Жорстка однорідна балка погонною вагою $\boldsymbol{q}$ = 100 Н/м знаходиться у вертикальній площині і складається з елементів, довжина кожного $\boldsymbol{a}$ = 0,5 м (рис. 3.2). Балка закріплена в точці ***A*** нерухомим шарніром та в точці ***B*** невагомим стрижнем з шарнірами на кінцях.

Визначити реакції опор в точках ***A*** і ***B***, якщо на балку діють сили F_1 = 80 Н та F_2 = 30 Н під кутами α = 60° та β = 45°, до неї відповідно, та момент пари зовнішніх сил $\boldsymbol{M}$ = 60 Н·м.

Розв'язання. Напрями осей декартової системи координат ***xOy*** спрямуємо паралельно елементам конструкції, оскільки вона складається з горизонтальних та вертикальних елементів (рис. 3.3).

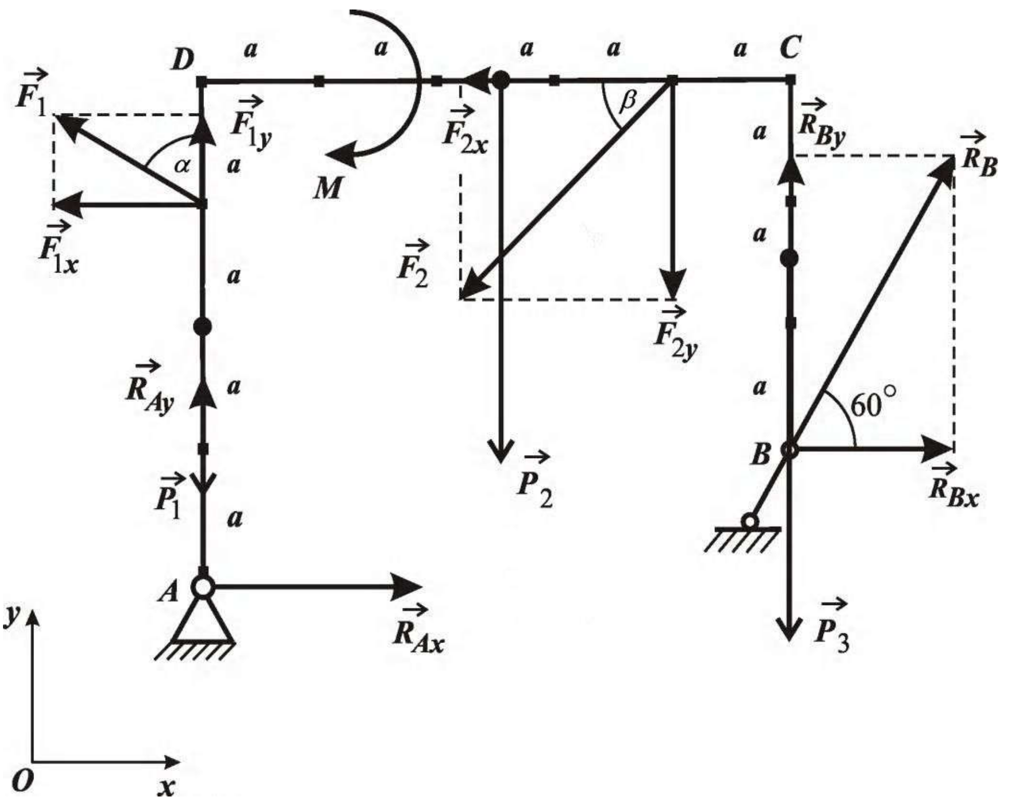


Рис. 3.3

Розглянемо рівновагу даної конструкції AB під дією заданих сил F_1, F_2 та моменту пари M. В'язями нашої конструкції AB є циліндричний шарнір A та стрижень B з шарнірами на кінцях. Звільняємо балку від в'язів, дію опор замінюємо на їхні реакції: тоді в точці A реакція циліндричного шарніра визначається двома складовими $\vec{R}_{Ax}$ і $\vec{R}_{Ay}$, а реакція стрижня в точці B спрямована вздовж лінії, яка з'єднує шарніри. Напрями реакцій виберемо умовно, бо справжні напрями визначаються після розв'язування рівнянь рівноваги.

Обчислимо вагу кожної ділянки балки (AD , DC і CB), які визначаємо як добуток погонної ваги q на довжину елементу l_i

$$P_i = q \cdot l_i$$

і отримаємо величини сил тяжіння, що діють на кожну ділянку конструкції:

$$P_1 = 100 \cdot 4 \cdot 0{,}5 = 200 \text{ (Н)},\ P_2 = 100 \cdot 5 \cdot 0{,}5 = 250 \text{ (Н)},\ P_3 = 100 \cdot 3 \cdot 0{,}5 = 150 \text{ (Н)}.$$

Ці сили прикладені до середин ділянок AD , DC і CB .
Запишемо рівняння рівноваги для нашого випадку:

$$\sum F_{ix} = R_{Ax} - F_1 \sin\alpha - F_2 \cos\beta + R_B \cos 60^\circ = 0, \tag{1}$$

$$\sum F_{iy} = R_{Ay} - P_1 + F_1 \cos\alpha - P_2 - F_2 \sin\beta - P_3 + R_B \sin 60^\circ = 0. \tag{2}$$

Рівняння для моменту сил запишемо відносно точки A, оскільки в цій точці перетинаються лінії дій двох невідомих реакцій (R_{Ax} і R_{Ay})

$$\sum M_A(\vec{F_i}) = F_1 \sin\alpha \cdot 3a - M - P_2 \cdot 2{,}5a + F_2 \cos\beta \cdot 4a - F_2 \sin\beta \cdot 4a -$$

$$- P_3 \cdot 5a + R_B \sin 60° \cdot 5a - R_B \cos 60° \cdot a = 0. \qquad (3)$$

Звернемо увагу на те, що лінія дії сили $\vec{F_2}$ в нашому прикладі проходить через точку A, тому $F_2(\cos 45°) \cdot 4a - F_2 \sin(45°) \cdot 4a \equiv 0$.

Таким чином ми отримали систему трьох рівнянь з трьома невідомими. Рівняння (3) містить одну невідому величину – R_B. Тому, підставляючи в нього вихідні дані задачі, отримаємо

$$80 \cdot \sin 60° \cdot 1{,}5 - 60 - 250 \cdot 1{,}25 - 150 \cdot 2{,}5 + R_B \cdot \sin 60° \cdot 2{,}5 - R_B \cdot \cos 60° \cdot 0{,}5 = 0,$$

отже $\quad -643{,}58 + 1{,}92 R_B = 0$, і $R_B = 643{,}58/1{,}92 = 336{,}06$ (Н).

Підставимо цей результат в (1) і (2) та знайдемо R_{Ax} та R_{Ay}:

$$R_{Ax} - 80 \cdot \sin 60° - 30 \cdot \cos 45° + 336{,}06 \cdot \cos 60° = R_{Ax} + 77{,}54 = 0,$$

$$\Rightarrow R_{Ax} = -\ 77{,}54 \text{ (Н)},$$

$$R_{Ay} - 200 + 80 \cdot \cos 60° - 250 - 30 \cdot \sin 45° - 150 + 9{,}7 \cdot \sin 60° = R_{Ay} - 290{,}18 = 0,$$

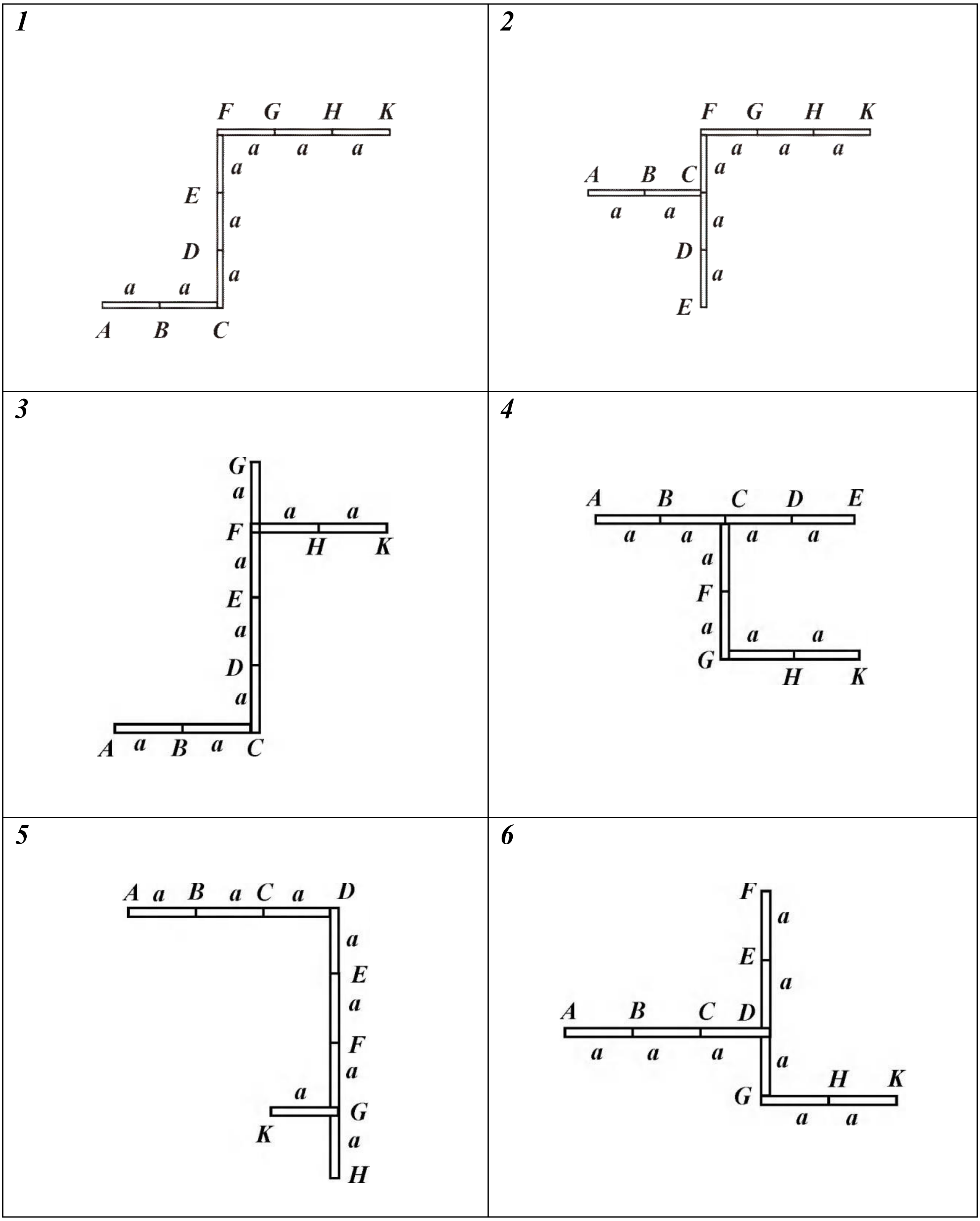
$$\Rightarrow R_{Ay} = 290{,}18 \text{ (Н)}.$$

Отже, напрями реакцій R_{Ay} та R_B відповідають тому, що зображено на рис. 2.3. Що стосується реакції R_{Ax}, то знак „–” свідчить про те, що реальний напрям ми не вгадали – ця реакція спрямована проти осі Ox. Оскільки $R_{Ax} \perp R_{Ay}$, модуль реакції в точці A обчислимо за формулою

$$R_A = \sqrt{R^2_{Ax} + R^2_{Ay}} = 300{,}36 \text{ (Н)}.$$

Відповідь: $R_A = 300$ Н, $R_B = 336$ Н.

Рисунок до задачі С. 2



Таблиця 2 – вихідні дані для розв’язання задачі С. 2

Варіант	Рисунок	a, (м)	Точка А, тип кріпл.	Кут, °	Точка К, тип кріпл.	Кут, °	F_1, модуль	Точка прикл.	α,°	F_2, модуль	Точка прикл.	β,°	М, (Н·м)
0	1	1,2	а	45	в	-	35	*C*	-120	15	*H*	-30	20
1	2	1,5	г	-	а	30	15	*B*	45	45	*G*	120	20
2	3	1,0	д	-	-	-	25	*B*	60	45	*D*	120	10
3	4	1,2	в	-	б	30	45	*F*	60	35	*H*	-30	10
4	5	1,2	а	- 60	г	-	15	*H*	120	30	*E*	30	20
5	6	1,4	б	30	в	-	35	*D*	-135	35	*F*	45	-10
6	1	1,0	г	-	а	-60	45	*E*	-120	30	*F*	30	-10
7	2	1,2	б	45	г	-	25	*D*	45	15	*H*	-60	-15
8	3	1,2	-	-	д	-	30	*E*	45	15	*H*	-60	25
9	4	1,4	г	-	а	60	35	*B*	-120	50	*D*	-30	-20
10	5	1,2	в	-	б	30	50	*B*	120	30	*D*	-45	15
11	6	1,5	а	-45	г	-	45	*C*	120	40	*F*	-60	-25
12	1	1,2	г	-	б	45	25	*D*	60	45	*C*	-45	15
13	2	1,0	-	-	д	-	15	*E*	-135	40	*H*	60	15
14	3	1,4	г	-	а	60	45	*D*	-45	40	*F*	30	15
15	4	1,2	б	30	в	-	35	*B*	60	40	*G*	-135	-25
16	5	1,2	а	60	в	-	40	*D*	60	20	*H*	-45	5
17	6	1,5	г	-	б	-60	10	*C*	-120	30	*H*	45	-20
18	1	1,4	д	-	-	-	15	*D*	-120	25	*G*	-45	-25
19	2	1,2	а	30	г	-	50	*C*	-120	50	*G*	-135	10
20	3	1,0	в	-	а	45	25	*E*	-150	10	*F*	45	-25
21	4	1,2	а	30	г	-	15	*C*	45	15	*H*	-90	-25
22	5	1,5	-	-	д	-	10	*B*	60	40	*E*	-150	10
23	6	1,2	б	30	в	-	30	*B*	-30	10	*E*	-150	-10
24	1	1,4	г	-	а	- 60	40	*D*	45	45	*G*	-60	5
25	2	1,2	в	-	б	30	45	*B*	60	25	*G*	-30	5
26	3	1,0	а	-60	г	-	45	*C*	60	15	*F*	-135	-20
27	4	1,2	г	-	б	45	25	*H*	-150	50	*E*	45	15
28	5	1,5	д	-	-	-	45	*E*	-150	50	*D*	60	10
29	6	1,2	а	60	г	-	5	*C*	-120	25	*E*	30	-15

Контрольні питання:
1. Що таке реакції опор?
2. Які види реакцій Ви знаєте?
3. Що таке балочна конструкція?
4. Як визначається напрямок реакції в опиранні?

Практична робота С3
Визначення центра ваги просторових однорідних тіл

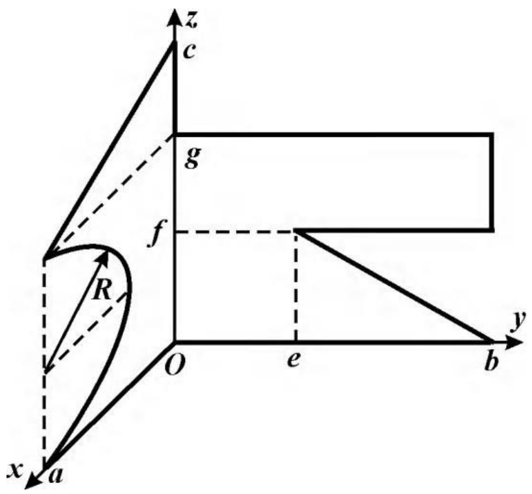
Мета роботи:

1. Сформувати компетентності для визначення центра ваги просторових тіл.
2. Сформувати компетентності самостійної роботи і творчого мислення.

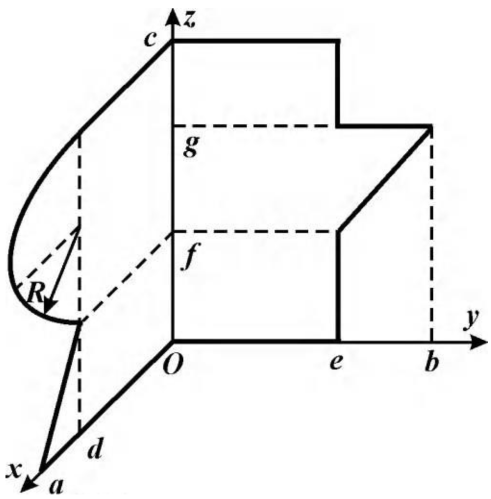
Знайти координати центра ваги просторової фігури, яка складаються з однорідних пластин (рис. 1-6), взявши необхідні розміри (у сантиметрах) з таблиці 2.

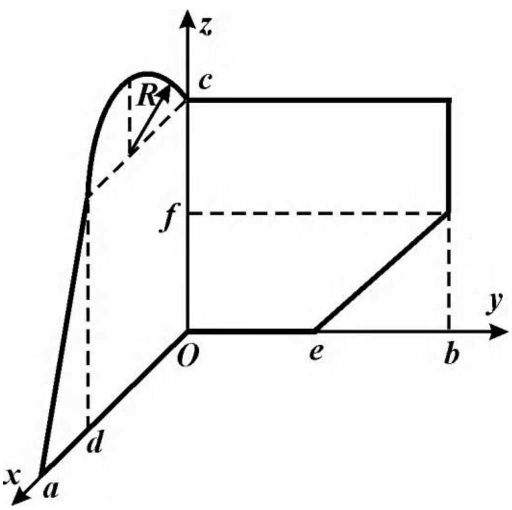
Накреслити фігуру у зручному масштабі відповідно до вказаних розмірів та позначити її центр ваги після виконаних розрахунків.

1

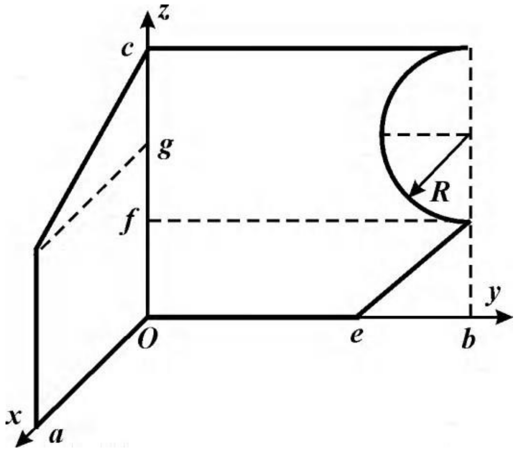


2

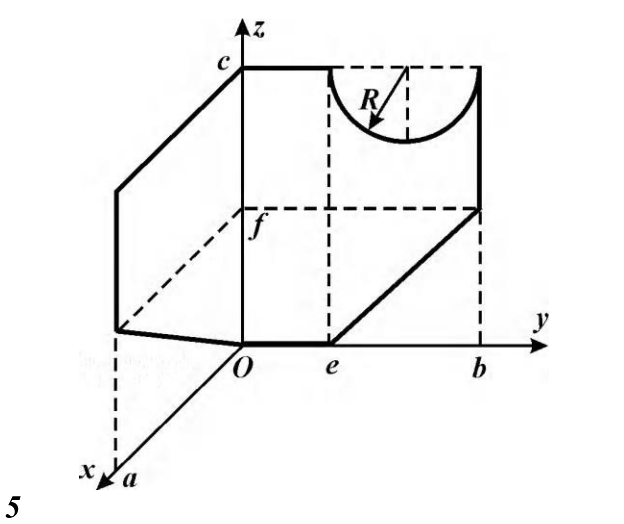


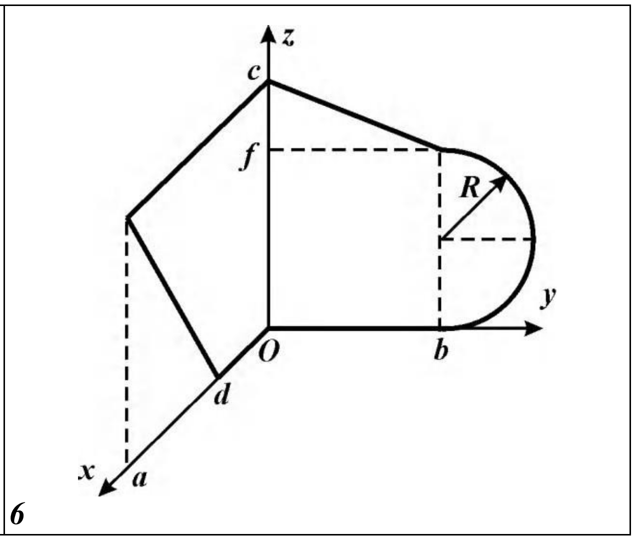


3



4





Таблиця 2 – вихідні дані для задачі 2.

№	Рис.	*a*, см	*b*, см	*c*, см	*d*, см	*e*, см	*f*, см	*g*, см
0	1	60	45	75	-	30	30	60
1	2	60	60	45	30	40	15	30
2	3	45	60	45	30	30	20	-
3	4	30	45	60	-	30	15	30
4	5	30	60	45	-	40	15	-
5	6	45	30	60	30	-	30	-
6	2	90	60	60	40	40	20	50
7	3	90	45	90	60	30	20	-
8	4	60	60	80	-	40	40	60
9	5	45	60	40	-	40	20	-
10	6	80	60	60	40	-	40	-
11	1	60	45	50	-	30	30	40
12	3	50	80	90	20	50	45	-
13	4	45	60	60	-	30	20	40
14	5	90	60	90	-	20	30	-
15	6	60	90	60	30	-	40	-
16	1	45	60	60	-	40	20	40

№	Рис.	a, см	b, см	c, см	d, см	e, см	f, см	g, см
17	2	45	60	90	30	30	30	60
18	4	80	40	70	-	10	30	60
19	5	70	80	90	-	40	60	-
20	6	75	90	90	60	-	40	-
21	1	90	75	75	-	30	45	60
22	2	60	40	60	40	10	10	40
23	3	80	60	80	50	45	30	-
24	5	90	60	90	-	20	30	-
25	6	90	70	80	45	-	50	-
26	1	60	90	60	-	60	30	50
27	2	60	60	90	30	30	30	60
28	3	90	60	90	50	45	60	-
29	4	45	90	60	-	60	20	40

Методика розв'язання задачі

1. Розбиваємо фігуру на прості елементи. Ця процедура неоднозначна, але раціональний поділ на прості фігури дозволяє спростити розрахунки.

2. За заданими розмірами обчислюємо площу та координати центра ваги кожного окремого елемента.

3. Знаходимо координати центра ваги фігури, беручи до уваги що площі вирізаних елементів треба брати зі знаком мінус.

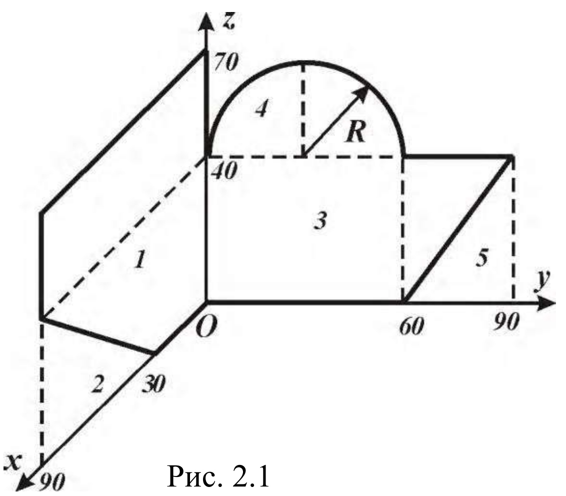


Рис. 2.1

Приклад:

Знайти координати центра ваги просторового тіла, яке виготовлено з однорідних пластин (рис. 3.1). Криволінійна ділянка є половиною кола.

Розв'язання. Тіло, для якого потрібно визначити центр ваги, складається з однорідних пластин. Тому для координат центра ваги тіла маємо:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} S_i}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} S_i}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} S_i}. \quad (1)$$

Розіб'ємо тіло на наступні елементи, площі та координати центра ваги кожного з яких легко знайти:

1. прямокутник зі сторонами 90 та 70;
2. прямокутний трикутник з катетами 60 та 40 (виріз);
3. прямокутник зі сторонами 90 та 40;
4. половина круга радіусом 30 см;
5. прямокутний трикутник з катетами 30 та 40 (виріз).

Послідовно обчислимо площі та координати центра ваги кожної фігури:

$\boldsymbol{S}_1 = 90\cdot70 = 6300$ см^2,

$\boldsymbol{x}_1 = (0+90)/2 = 45$ см,

$\boldsymbol{y}_1 = 0$, $\boldsymbol{z}_1 = (0+70)/2 = 35$ см;

$\boldsymbol{S}_2 = 60\cdot40/2 = 1200$ см^2,

$\boldsymbol{x}_2 = (90+90+30)/3 = 70$ см, $\boldsymbol{y}_2 = 0$, $\boldsymbol{z}_2 = (0+0+40)/3 = 13{,}3$ см;

$\boldsymbol{S}_3 = 90\cdot40 = 3600$ см^2, $\boldsymbol{x}_3 = 0$ см, $\boldsymbol{y}_3 = (0+90)/2 = 45$ см,

$\boldsymbol{z}_3 = (0+40)/2 = 20$ см;

$\boldsymbol{S}_4 = \pi \boldsymbol{R}^2/2 = 3{,}14\cdot900/2 = 1413$ см^2, $\boldsymbol{x}_4 = 0$ см, $\boldsymbol{y}_4 = 30$ см,

$\boldsymbol{z}_4 = 40 + 4\boldsymbol{R}/3\pi = 52{,}7$ см;

$\boldsymbol{S}_5 = 30\cdot40/2 = 600$ см^2, $\boldsymbol{x}_5 = 0$ см, $\boldsymbol{y}_5 = (60+90+90)/3 = 80$ см,

$\boldsymbol{z}_5 = (0+0+40)/3 = 13{,}3$ см;

Отримані значення та відповідні добутки, які входять до формул (1) внесемо у таблицю.

i	S_i, см^2	x_i, см	y_i, см	z_i, см	$S_i\cdot x_i$, см^3	$S_i\cdot y_i$, см^3	$S_i\cdot z_i$, см^3
1	6300	45	0	35,0	283500	0	220500
2	– 1200	70	0	13,3	– 84000	0	– 16000
3	3600	0	45	20,0	0	162000	72000
4	1413	0	30	52,7	0	42390	74465
5	– 600	0	80	13,3	0	– 48000	– 7980
$\sum$	9513				199500	156390	342945

Звернемо увагу на те, що площа вирізу (для трикутників 2 та 4) та добуток площі на координату увійшли в розрахунки зі знаком „–".

Визначаємо координати центра ваги фігури за наведеними формулами:

$\boldsymbol{x}_C = 199500/9510 = 21$ см, $\boldsymbol{y}_C = 15390/9510 = 16{,}4$ см, $\boldsymbol{z}_C = 342945/9510 = 36{,}1$ см.

Відповідь: $\boldsymbol{x}_C = 21$ см, $\boldsymbol{y}_C = 16{,}4$ см, $\boldsymbol{z}_C = 36{,}1$ см.

Контрольні питання:

1. Сформулювати визначення центра ваги?
2. В чому полягає метод розбивання фігури на прості?
3. Проаналізувати результати розрахунку та нанести крапку центра ваги?

Практична робота С4

Визначення центра ваги плоских однорідних тіл

Мета роботи:

1. Сформувати компетентності для визначення центра ваги пласких однородних тіл.
2. Сформувати компетентності самостійної роботи і творчого мислення.

Знайти координати центра ваги плоскої фігури відносно заданих осей координат. Задані розміри перерізу плоскої фігури вибрати за варіантом у відповідності до таблиці 2.Схеми завдань за варіантом показані на рисунку 2.1- 2.3.

Таблиця 2 – Вихідні дані задачі С2

№ варіанту	Розмір перерізу	№ варіанту	Розмір перерізу
	а, мм		а, мм
1	15	16	12
2	10	17	14
3	15	18	18
4	20	19	21
5	15	20	19
6	10	21	15
7	12	22	13
8	10	23	16
9	18	24	21
10	20	25	24
11	12	26	15
12	14	27	10
13	18	28	12
14	20	29	18
15	21	30	21

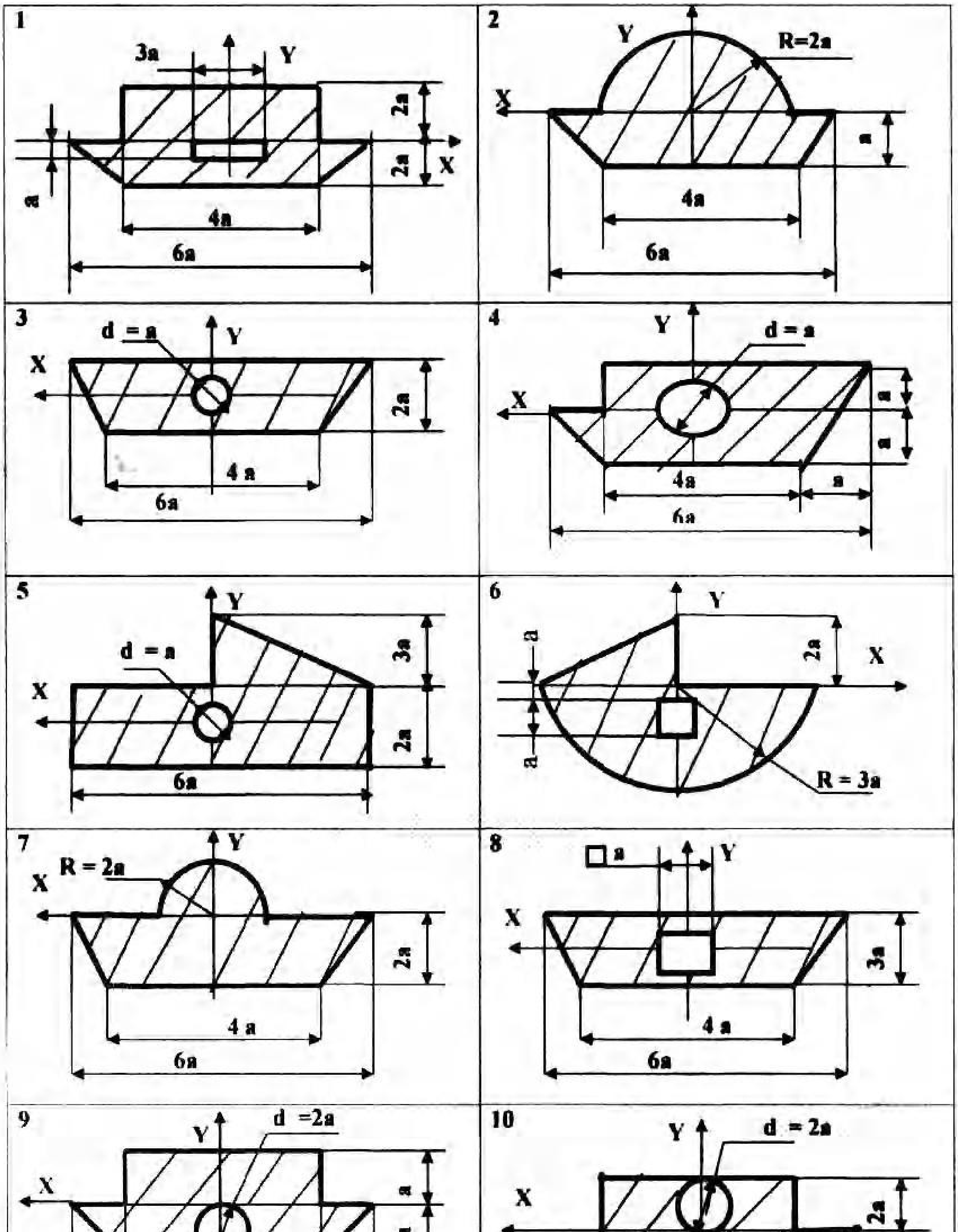


Рисунок 2 -1 – Схеми завдань задачі С3 (варіанти 1-10)

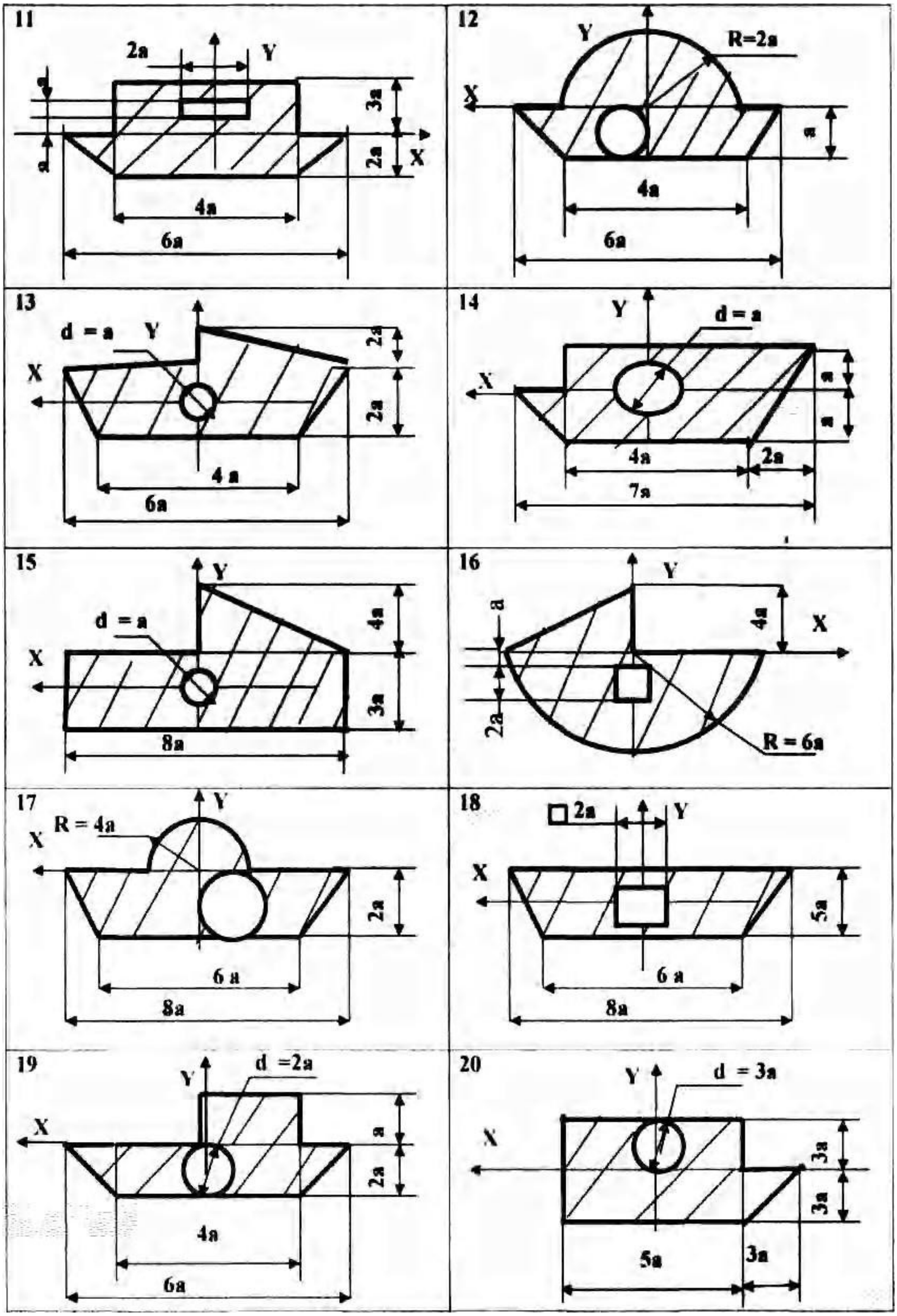


Рисунок 2-2– Схеми завдань задачі С3 (варіанти 10-20)

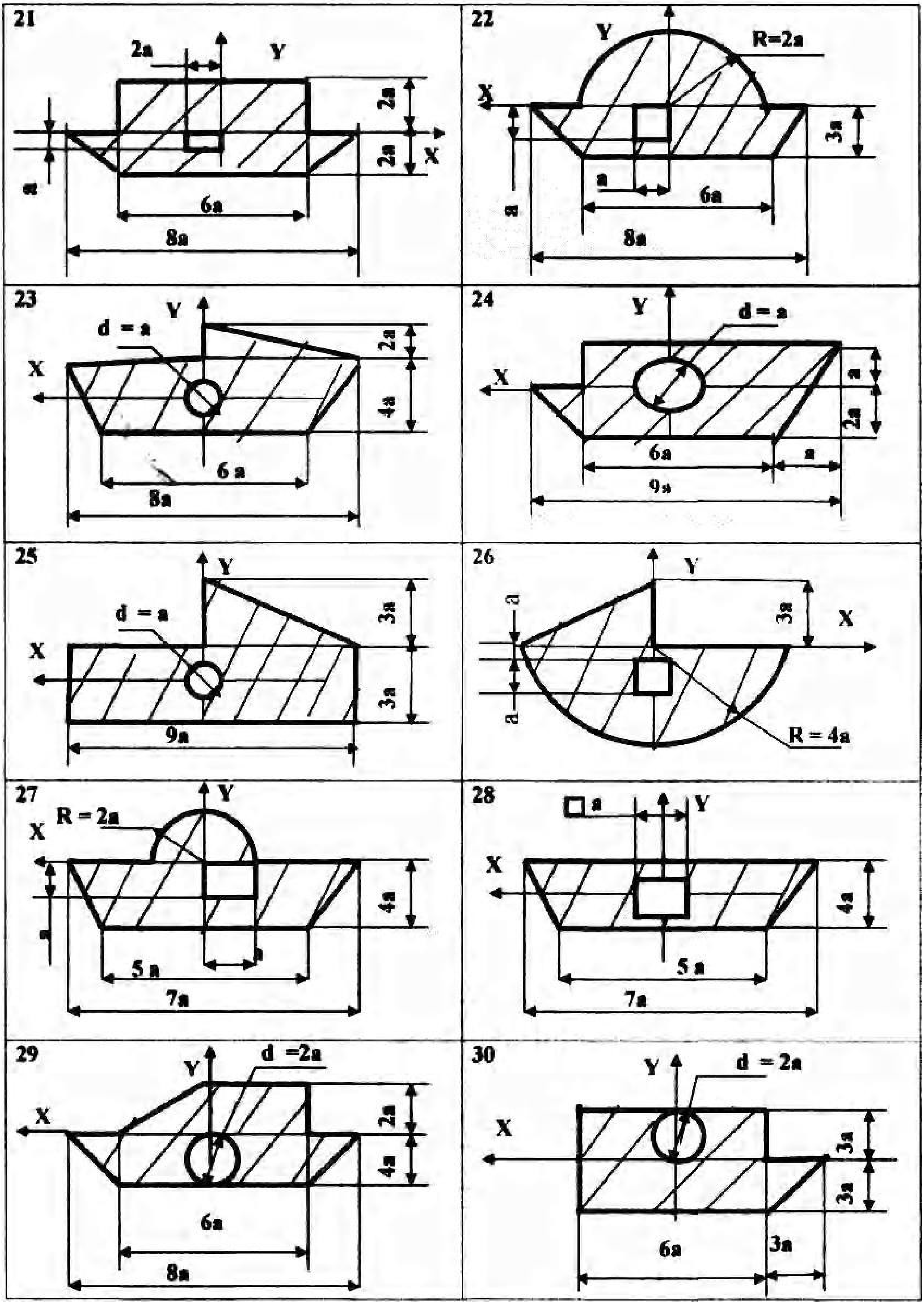


Рисунок 2-3 - Схеми завдань задачі С3 (варіанти 20-30)

1.2 Методика виконання задачі С3 А

Теоретичні відомості:

Сила ваги – сила з якого тіло притягується до Землі.

Сили ваги, що діють на кожну окрему елементарну частинку паралельні між собою.

Центром ваги тіла називають центр паралельних сил ваги всіх елементарних частинок цього тіла.

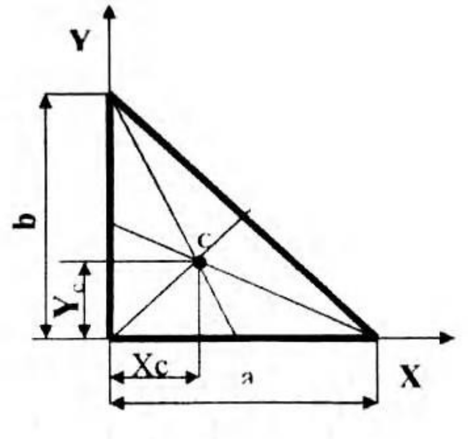
Для плоских перерізів координати центра ваги знаходять за допомогою формул:

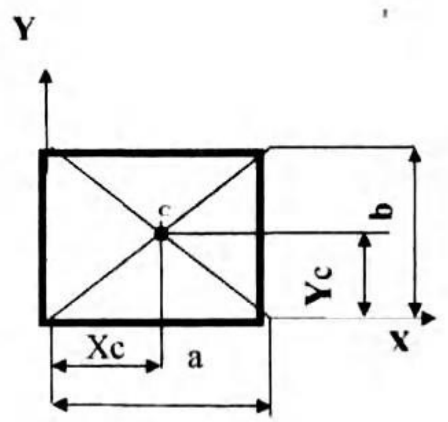
$$x_c = \frac{\sum(A_i x_i)}{\sum A_i} \qquad y_c = \frac{\sum(A_i y_i)}{\sum A_i} \qquad (1.1)$$

де A_i – площа окремого плоского перерізу (фігури на які розбита основна фігура);

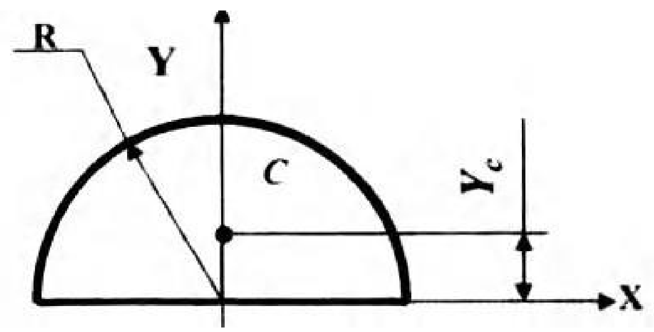
X_i, y_i – координати центра ваги окремого плоского перерізу (фігури);

ΣA_i – площа всього плоского перерізу (фігури);





а)центр ваги трикутник б) центр ваги прямокутника



в) центр ваги півкола

Рисунок 2.1. – Координати центру ваги

Центр ваги трикутника (точка С) знаходиться в точці перетину його медіан (медіана – відрізок, що з'єднує вершину трикутника та середину протилежної сторони). Координати центру ваги (Хс, Yc) прямокутного трикутника позначені на рисунку 1.1. а.

$$Xc=1/3\ a;\ Yc=1/3\ \ b \quad (1.2)$$

Центр ваги прямокутника знаходиться в точці перетину його діагоналей (точка С)

Координати центру ваги прямокутника (Хс, Yc) позначені на рисунку 1.1. б .

$$Xc = a/2;\ Yc = b/2 \qquad (1.3)$$

Центр ваги півкола (точка С) знаходиться в точці, що належить його осі симетрії.

$$Yc=4R\ /3\pi;\ Xc=0. \qquad (1.4)$$

При розв'язуванні задачі необхідно використовувати формули знаходження площин простих фігур:

$A=1/2\ a\ b$ – площа прямокутного трикутника (1.5)

$A=ab$ – площа прямокутника (1.6)

$A=\pi R^2$ – площа кола (1-7)

$A=\pi R^2/2$ – площа півкола (1.8)

Задача. С 2А Визначити центр ваги наданого плоского перерізу, зображеного на рисунку 1.2, відносно заданих осей координат. Розміри перерізу надані в міліметрах

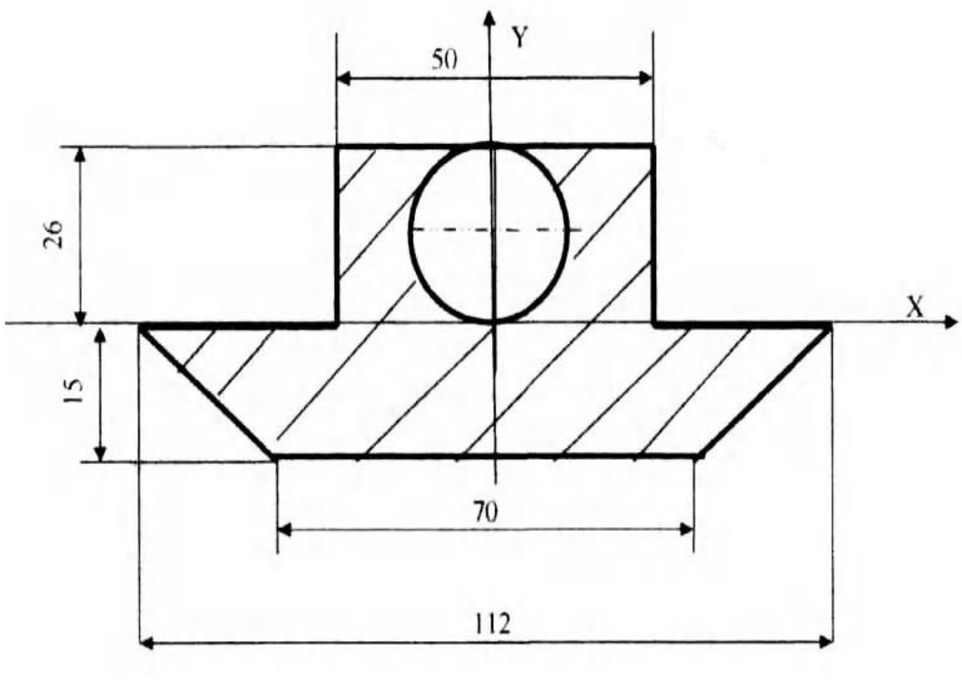


Рисунок 1.2 – Схема задачі С2 АА 221

Скористуємося методом групування та розділимо наданий плоский переріз на прості плоскі фігури центр ваги яких нам відомий:

1) прямокутник з розмірами 50 х 26 ;
2) коло радіуса R = 13 ;
3) прямокутник з розмірами 70 х 15 ;
4) трикутник з розмірами 21х 15;
5) трикутник з розмірами 21 х 15

Позначимо центри ваги кожної простої фігури на рисунку 1.3.

Центр ваги прямокутника 1, точка C_1. Знайдемо її координати за формулою (1.3) X = 50 : 2 = 25 мм Y = 26 : 2 = 13 мм.

Визначимо координати точки C1 відносно заданих осей координат OX та OY. $X_1 = 0$,(точка C_1 належить осі OY), $Y_1 = 13$ мм , таким чином $C_1(0;13)$.

Центр ваги кола 2, точка C_2 знаходиться в центрі кола. Знайдемо її координати точки $X_2 = 0$; $Y_2 = R = 13$ мм таким чином C_2 (0; 13), тобто координати точок C_1 та C_2 однакові, значить точки співпадають.

Центр ваги прямокутника 3-точка C_3. Знайдемо її координати за формулою (1.3) X = 70 : 2 = 35 мм , Y = 15 : 2 = 7,5 мм.

Визначимо координати точки C_2 відносно заданих осей координат OX та OY. $X_3 = 0$, (точка C_3 належить осі oY), а $Y_3 = -7,5$, таким чином C_3 (0;-7,5).

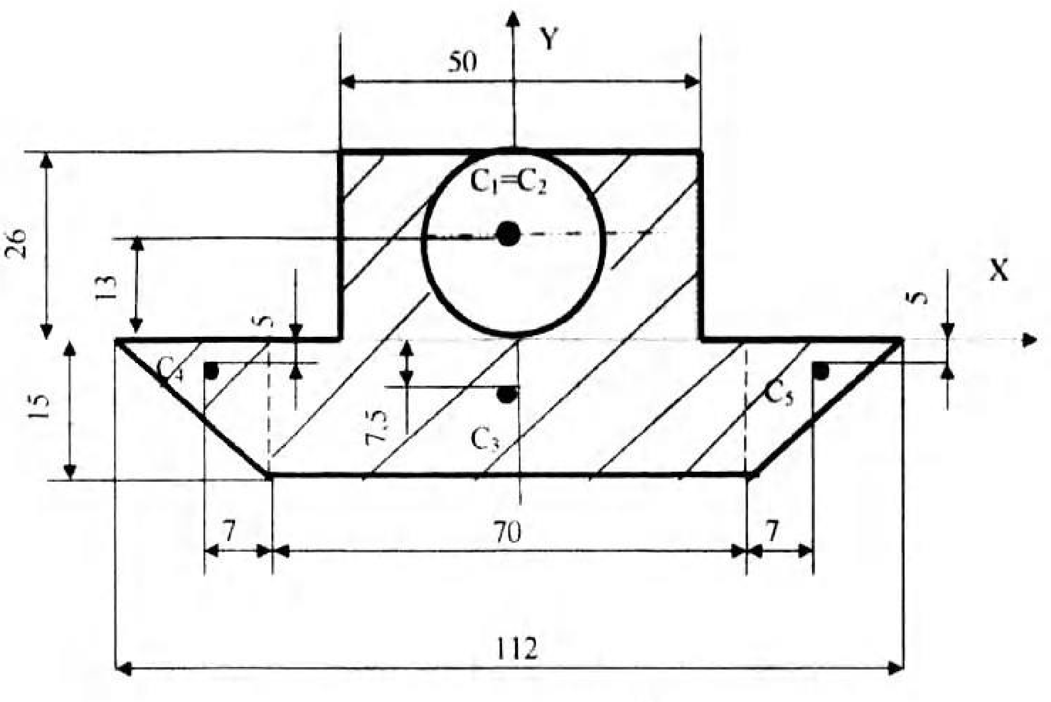


Рисунок 1.3 - Координати центру ваги.

Центр ваги трикутника 4 точка C_4. Знайдемо її координати за формулою (1.2) X = 21 : 3 = 7мм , Y = 15 : 3 = 5 мм.

Визначимо координати точки C_4 відносно заданих осей координат OX та OУ. X4 = -35-7 = -42 мм, $Y_4 = -5$, тоді C_4 (-42; -5).

Центр ваги трикутника 5 точка C_5. Знайдемо координати за формулою (1.2). X = 21 : 3 = 7мм, Y = 15 : 3 = 5 мм.

Визначимо ці координати відносно заданих осей координат OX та OY $X_5 = 35 + 7 = 42$ мм, $Y_5 = -5$ мм, C_5 (42; -5).

3. За допомогою відомих формул (1.6), (1.5), (1.7), обчислимо площі наданих п'яти фігур:

1) площа прямокутника 1

$$A_1 = 50 \text{ x } 26 = 1300\text{мм}^2$$

2) площа кола 2 від'ємна, тому що коло є порожниною (метод від'ємних мас).

$$A_2 = 3.14 \text{ x } 13^2 = -530{,}7 \text{ мм}^2$$

3) площа прямокутника 3

$$A_3 = 70 \text{ x } 15 = 1050\text{мм}^2$$

4) площа трикутників 4 та 5 буде однакова:

$$A_4 = A_5 = (21 \text{ x } 15) : 2 = 157{,}5\text{мм}^2$$

1. Формули (1.1) для наданої плоскої фігури матимуть вигляд:
2.

$$\chi_c = \frac{A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4 + A_5x_5}{A_1 - A_2 + A_3 + A_4 + A_5};$$

$$y_c = \frac{A_1y_1 + A_2y_2 + A_3y_3 + A_4y_4 + A_5y_5}{A_1 - A_2 + A_3 + A_4 + A_5}$$

Підставимо обчислені значення величин, отримуємо:

$$x_c = \frac{1300 \cdot 0 + (-530{,}7) \cdot 0 + 1050 \cdot 0 + 157{,}5 \cdot (-42) + 157{,}5 \cdot 42}{1300 - 530{,}7 + 1050 + 157{,}5 + 157{,}5} = 0 \text{ мм}$$

$$y_c = \frac{1300 \cdot 13 + (-530{,}7) \cdot 13 + 1050 \cdot (-7{,}5) + 157{,}5 \cdot (-5) + 157{,}5 \cdot (-5)}{1300 - 530{,}7 + 1050 + 157{,}5 + 157{,}5} = 0{,}25 \text{ мм}$$

Відповідь: С (0; 0,25)

Контрольні питання:

1. Що таке центр ваги тіла?
2. Способи визначення координати центра ваги простих фігур?
3. Нанести визначенні координати на малюнок і пояснити логічно?
4. Навести приклади необхідності визначення центра ваги?

Практична робота К 1

Визначення кінематичних характеристик плоского криволінійного руху точки

Мета роботи:

1. Сформувати компетентності для визначення основних кінематичних характеристик тіл, які здійснюють плоский криволінійний рух тіла.
2. Сформувати компетентності самостійної роботи і творчого мислення.

Рух точки задано у параметричному вигляді рівняннями:

$$x = x(t),\ y = y(t),$$

де x, y - в сантиметрах, t - в секундах (дивись таблицю). Визначити рівняння траєкторії руху точки і для моменту часу t_1 знайти:

1) положення точки на траєкторії,
2) її швидкість,
3) тангенціальне (дотичне), нормальне та повне прискорення,
4) радіус кривизни траєкторії в цьому положенні точки,
5) на рисунку зобразити траєкторію та всі вектори в обраному масштабі.

Вихідні дані наведені в таблиці 3.

Таблиця – вихідні дані для виконання задачі К1.

№	$x = x(t)$, см	$y = y(t)$, см	t_1, с	№	$x = x(t)$, см	$y = y(t)$, см	t_1, с
0	$2\sin(\pi t/3) - 4$	$3\cos(\pi t/3) - 1$	1	15	$5\cos(\pi t/3) - 2$	$3\sin(\pi t/3) + 3$	2
1	$3\sin(\pi t/6) - 3$	$5\cos(\pi t/6) + 2$	2	16	$3\sin(\pi t/6) - 1$	$3\cos(\pi t/6) + 2$	2
2	$6\sin(\pi t/4) - 2$	$4\cos(\pi t/4) + 3$	5	17	$3\sin(\pi t/4) + 2$	$4\cos(\pi t/4) - 3$	1
3	$3\cos(\pi t/3) + 4$	$4\sin(\pi t/3) - 2$	2	18	$3\sin(\pi t/3) + 2$	$3\cos(\pi t/3) - 4$	2
4	$5\cos(\pi t/6) + 2$	$3\sin(\pi t/6) - 3$	2	19	$4\sin(\pi t/4) - 2$	$2\cos(\pi t/4) - 3$	3
5	$4\cos(\pi t/4) + 3$	$3\sin(\pi t/4) - 2$	1	20	$4\cos(\pi t/4) + 3$	$6\sin(\pi t/4) - 2$	5
6	$3\sin(\pi t/3) - 2$	$4\cos(\pi t/3) + 3$	2	21	$4\sin(\pi t/3) + 1$	$3\cos(\pi t/3) - 4$	2
7	$3\sin(\pi t/6) - 3$	$4\cos(\pi t/6) + 2$	2	22	$3\cos(\pi t/6) - 2$	$6\sin(\pi t/6) + 2$	2
8	$3\sin(\pi t/4) - 2$	$5\cos(\pi t/4) + 3$	3	23	$3\cos(\pi t/4) + 2$	$4\sin(\pi t/4) - 3$	3
9	$3\cos(\pi t/3) - 1$	$2\sin(\pi t/3) - 4$	1	24	$3\cos(\pi t/3) + 1$	$6\sin(\pi t/3) - 2$	2
10	$3\cos(\pi t/6) - 1$	$5\sin(\pi t/6) - 3$	2	25	$5\sin(\pi t/6) - 2$	$3\cos(\pi t/6) + 2$	1
11	$-3\cos(\pi t/4) - 2$	$5\sin(\pi t/4) + 3$	3	26	$4\cos(\pi t/4) - 1$	$4\sin(\pi t/4) + 2$	1
12	$4\sin(\pi t/3) + 2$	$3\cos(\pi t/3) - 1$	4	27	$4\cos(\pi t/3) - 2$	$3\sin(\pi t/3) + 3$	1
13	$3\sin(\pi t/4) + 2$	$4\cos(\pi t/4) - 3$	5	28	$4\sin(\pi t/6) - 1$	$5\cos(\pi t/6) + 2$	2
14	$5\cos(\pi t/6) - 2$	$4\sin(\pi t/6) + 2$	1	29	$6\cos(\pi t/4) + 2$	$4\sin(\pi t/4) + 2$	3

Методика розв'язання задачі

1. Знаходимо рівняння траєкторії руху точки, виключаючи час з рівнянь руху, будуємо її та знаходимо положення точки у заданий момент часу.

2. Визначаємо компоненти швидкості $v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$, .

та знаходимо її модуль $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

3. Визначаємо компоненти прискорення $a_x = dv_x/dt$, $a_y = dv_y/dt$,

та знаходимо його модуль $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

4. Знаходимо алгебраїчне значення тангенціального прискорення

$$a_\tau = \frac{a_x v_x + a_y v_y}{v}.$$

5. Знаходимо модуль нормального прискорення $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$.

6. Визначаємо радіус кривизни траєкторії $\rho = v^2 / a_n$.

Приклад.

Розв'яжемо задачу, коли рівняння руху точки задано у параметричному вигляді через тригонометричні функції:

$$x = 5\sin(\pi t/3) + 2, \qquad (1)$$

$$y = 3\cos(\pi t/3) - 1, \qquad (2)$$

Визначимо рівняння траєкторії, по якій рухається точка, та її кінематичні характеристики руху на момент часу $t = 1$ с.

Для того, щоб визначити рівняння траєкторії (виключити час з цих рівнянь), послідовно виконаємо наступні операції. Перепишемо рівняння (1) та (2) у вигляді:

$$(x - 2)/5 = \sin(\pi t/3), \qquad (3)$$

$$(y + 1)/3 = \cos(\pi t/3). \qquad (4)$$

Піднесемо праву та ліву частину рівнянь (3) та (4) до другого ступеня, складемо праві та ліві частини і отримаємо

$$(x - 2)^2/5^2 + (y + 1)^2/3^2 = 1 \qquad (5)$$

Ми отримали рівняння еліпса з півосями 5 та 3 з центром у точці (2, -1).

Знайдемо положення рухомої точки M. При $t = 1$ с з рівнянь (1) і (2) отримуємо:

$$x_M = 6{,}33 \text{ (см)}, \quad y_M = 0{,}50 \text{ (см)},$$

Компоненти вектора швидкості знайдемо як перші похідні від x та y за часом:

$$v_x = dx/dt = 5(\pi/3)\cos(\pi t/3),$$

$$v_y = dy/dt = -3(\pi/3)\sin(\pi t/3).$$

Отже, для $t_1 = 1$ с:

$$v_x = 5 \cdot (3{,}14/3) \cdot \cos(\pi/3) = 2{,}62 \text{ (см/с)},$$

$$v_y = -3 \cdot (3{,}14/3) \cdot \sin(\pi/3) = -2{,}72 \text{ (м/с)},$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 3{,}78 \text{ (см/с)}.$$

Відповідні вектори приведені на рис. 4.1.
Далі визначимо компоненти прискорення як похідні від компонент відповідних швидкостей:

$$a_x = dv_x/dt = -5(\pi/3)^2 \sin(\pi t/3),$$
$$a_y = dv_y/dt = -3(\pi/3)^2 \cos(\pi t/3).$$

З останніх рівнянь знайдемо компоненти прискорення та його модуль в завданий момент часу $t_1 = 1$ с:

$$a_x = -5 \cdot (3{,}14/3)^2 \cdot \sin(\pi/3) = -4{,}75 \text{ (см/с}^2),$$
$$a_y = -3 \cdot (3{,}14/3)^2 \cdot \cos(\pi/3) = -1{,}65 \text{ (см/с}^2),$$
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 5{,}03 \text{ (см/с}^2).$$

Відповідні вектори прискорень зображені на рис. 4.2.
Знаходимо алгебраїчне значення тангенціального прискорення

$$a_\tau = \frac{a_x v_x + a_y v_y}{v} = \frac{-4{,}75 \cdot 2{,}62 + 1{,}645 \cdot 2{,}71}{3{,}78} = -2{,}11 \text{ (см/с}^2).$$

Від'ємне значення a_τ означає, що рух точки сповільнений, а тому тангенціальне прискорення $\vec{a}_\tau$ напрямлене проти вектора швидкості $\vec{v}$ (дивись рис. 4.1 та 4.2).
Визначаємо нормальне прискорення і радіус кривизни траєкторії точки M:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = 4{,}56 \text{ (см/с}^2),$$
$$\rho = v^2/a_n = 14{,}28/4{,}56 = 3{,}13 \text{ (см)}.$$

Відповідь: траєкторія руху точки – еліпс, при $t_1 = 1$ с: M (6,33; 0,5), $v_x = 2{,}62$ см/с, $v_y = -2{,}72$ см/с, $v = 3{,}78$ см/с, $a_\tau = -2{,}11$ см/с^2, $a_n = 4{,}56$ см/с^2, $a = 5{,}03$ см/с^2, $\rho = 3{,}13$ см.

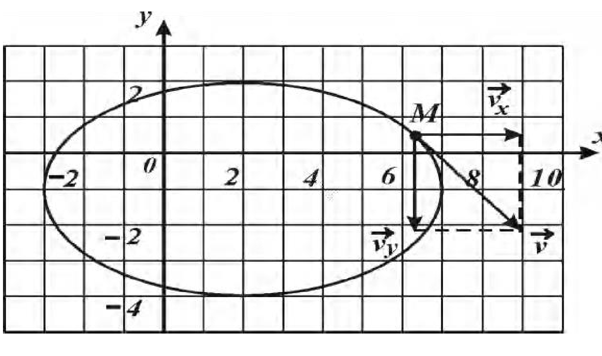


Рис. 3.1

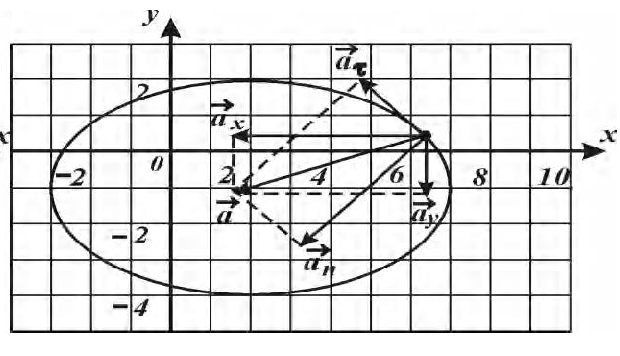


Рис. 3.2

Контрольні питання:
1. Що таке криволінійний рух тіла, якими показниками він характеризується?
2. Що означає поняття «параметричне рівняння руху» ?
3. Як визначається швидкість руху, які висновки можна зробити на основі аналізу її значення?

Практична робота К 2

Знаходження МЦШ та швидкостей точок тіла, що здійснює плоский рух

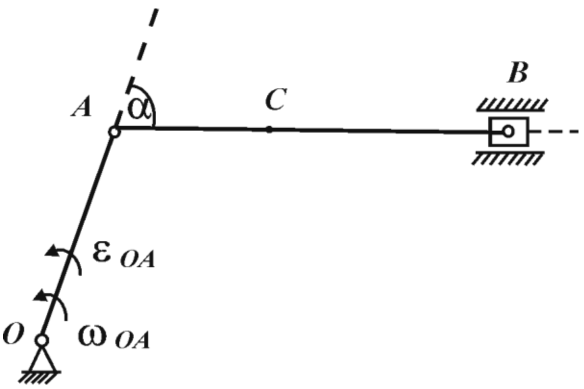
Мета роботи:

1. Сформувати компетентності для визначення основних кінематичних характеристик тіл, які здійснюють плоско паралельний рух.

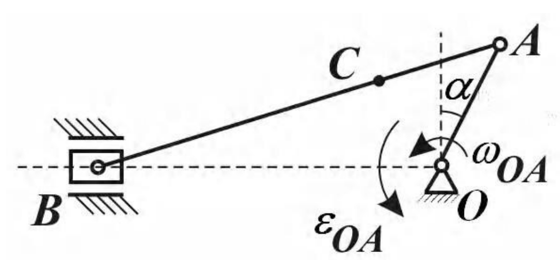
2. Сформувати компетентності самостійної роботи і творчого мислення.

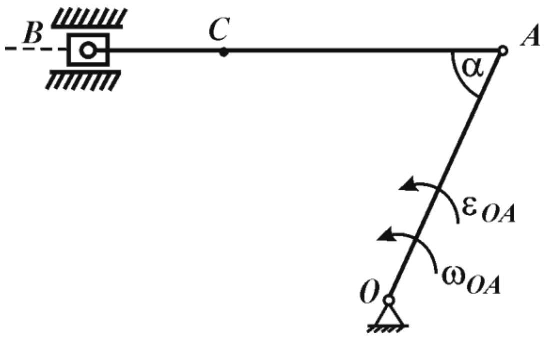
Для заданого положення механізму знайти положення миттєвого центру швидкостей та кутову швидкість ланки, що здійснює плоский рух, та швидкості точок ***A, B*** , ***C*** . Схеми механізмів наведені на рис. 1 – 6, а дані – в таблиці .

1

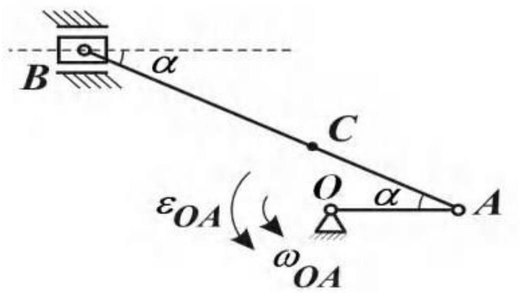


2



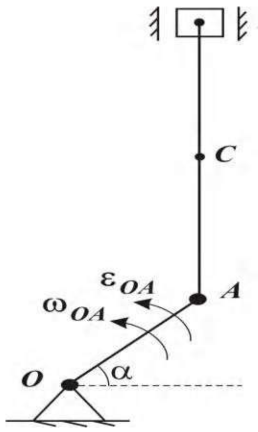


3

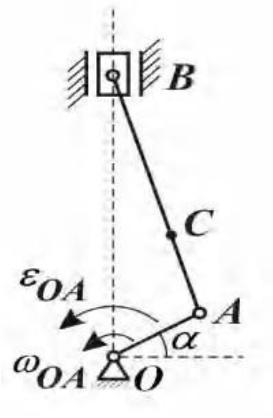


4

5



6



Додатним значенням кутових швидкостей і прискорень в таблиці відповідає напрям, указаний на рисунку (проти руху стрілки годинника).

Таблиця – вихідні дані для задачі К.2

№	Рис.	AO, см	AB, см	AC, см	α,°	ω_{OA}, рад/с	ε_{OA}, рад/с^2
0	1	30	100	30	60	3	2
1	2	50	150	50	30	2	3
2	3	20	80	40	30	4	3
3	4	30	100	40	30	2	4
4	5	30	100	20	30	2	3
5	6	40	120	40	45	3	2
6	1	25	80	35	30	– 4	5
7	2	40	120	50	60	3	2
8	3	30	90	40	45	2	– 3
9	4	30	90	30	60	2	– 2
10	5	20	80	40	45	– 2	4
11	6	30	100	30	60	– 3	3
12	1	15	60	20	45	2	– 2
13	2	30	100	40	45	– 2	2
14	3	25	80	30	60	– 2	– 3
15	4	20	70	30	45	– 2	2
16	5	25	90	40	60	3	– 2
17	6	20	80	40	45	2	– 4
18	1	10	50	20	30	– 2	– 2
19	2	20	75	40	30	– 2	– 2
20	3	20	60	30	45	2	– 3
21	4	15	50	20	60	– 3	– 4
22	5	10	50	20	30	– 2	3
23	6	15	70	30	60	3	– 2
24	1	10	50	20	45	– 2	3
25	2	25	100	30	60	3	– 4
26	3	15	60	40	30	– 2	– 2
27	4	10	40	20	30	4	3
28	5	20	60	30	45	2	– 4
29	6	10	40	20	30	– 2	– 2

Методика розв'язання задачі

1. Проводимо аналіз механізму та визначаємо характер руху кожної ланки.

2. На ланці, яка здійснює плоский рух, знаходимо точки, швидкості яких визначаються однозначно з умов задачі та схеми механізму.

3. Визначаємо положення МЦШ ланки, що здійснює плоский рух.

4. Знаючи швидкість певної точки і положення МЦШ визначаємо кутову швидкість ланки ω_K.

5. Визначаємо швидкості цих точок ланки

$$\boldsymbol{v_i} = \omega_K \cdot \boldsymbol{h_i},$$

де $\boldsymbol{h_i}$ – відстані $\boldsymbol{i}$-тих точок ланки, які нас цікавлять, від МЦШ.

Приклад.

Розглянемо механізм, який складається з кривошипа $\boldsymbol{OA}$, що обертається навколо осі $\boldsymbol{O}$, шатуна $\boldsymbol{AB}$ та поршня $\boldsymbol{B}$, який рухається в циліндрі (рис. К.1). Знайти швидкості точок $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$, а також кутову швидкість шатуна $\boldsymbol{AB}$ для заданого положення механізму, якщо: $\boldsymbol{OA}$ = 30 см, $\boldsymbol{AB}$ = 75 см, $\boldsymbol{BC}$ = 45 см, $\omega_{OA} = 4$ рад/с.

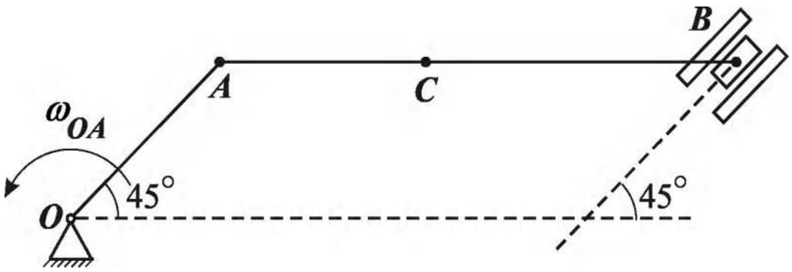


Рис. К.2.1

Розв'язання. Згідно з умовою задачі всі ланки механізму рухаються в незмінних площинах. При цьому кривошип $\boldsymbol{OA}$ здійснює обертальний рух навколо точки $\boldsymbol{O}$, поршень $\boldsymbol{B}$ – поступальний рух вздовж направляючих (стінок циліндру), а шатун $\boldsymbol{AB}$ – плоский рух.

Оскільки нас цікавлять кінематичні характеристики точок, які знаходяться на шатуні $\boldsymbol{AB}$, визначимо модуль та напрям лінійної швидкості точки $\boldsymbol{A}$. Ця точка $\boldsymbol{A}$ одночасно належить до кривошипа $\boldsymbol{OA}$, що обертається навколо нерухомої осі $\boldsymbol{O}$, з відомою кутовою швидкістю ω_{OA}, тому лінійну швидкість точки $\boldsymbol{A}$ знаходимо за законом обертального руху

$$\vec{v}_A = \vec{\omega}_{OA} \times \overrightarrow{OA}.$$

Її модуль $v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 4 \cdot 0{,}3 = 1{,}2$ (м/с), а вектор швидкості спрямований в бік обертання ланки $\boldsymbol{OA}$ (проти руху стрілки годинника) перпендикулярно до $\boldsymbol{OA}$ (рис. 6.2).

Напрям руху точки $\boldsymbol{B}$ визначають направляючі поршня (циліндр). Таким чином, швидкість точки $\boldsymbol{B}$ спрямована під кутом 45° до горизонту. Щоб знайти модуль швидкості точки $\boldsymbol{B}$ можна скористатися **теоремою про проекції,** оскільки точки $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ належать до одного твердого тіла (шатуна $\boldsymbol{AB}$) $Пр_{AB}\vec{v}_A = Пр_{AB}\vec{v}_B$,

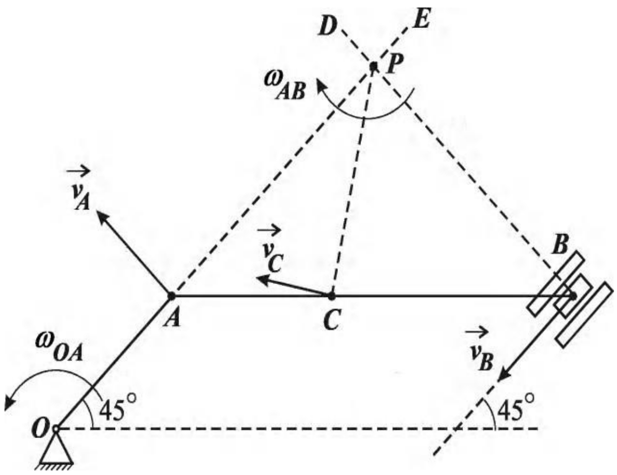


Рис. К.2.2

звідки отримуємо

$\boldsymbol{v_A} \cdot \mathbf{cos}\,45° = \boldsymbol{v_B} \cdot \mathbf{cos}\,45°$, тобто

$\boldsymbol{v_A} = \boldsymbol{v_B} = 1{,}2$ (м/с).

Для визначеня швидкості довільної точки ланки $\boldsymbol{AB}$ потрібно знайти МЦШ ланки $\boldsymbol{AB}$ та її кутову швидкість. Для визначення МЦШ встановимо перпендикуляри до швидкостей $\vec{v}_A$ та $\vec{v}_B$ в точках $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ (лінії $\boldsymbol{AE}$ та $\boldsymbol{BD}$). Точка перетину цих ліній ($\boldsymbol{P}$) є МЦШ ланки $\boldsymbol{AB}$ на даний момент часу.

Отже, шатун $\boldsymbol{AB}$ в даний момент часу здійснює обертальний рух навколо МЦШ (точки $\boldsymbol{P}$) з кутовою швидкістю ω_{AB}, яку будемо шукати з рівняння $\boldsymbol{v_A} = \omega_{AB} \cdot \boldsymbol{PA}$, в якому нам відома лінійна швидкість точки $\boldsymbol{A}$.

Величину $\boldsymbol{PA}$ визначимо із трикутника $\boldsymbol{APB}$ (дивись рис. К.2). Оскільки $\angle \boldsymbol{PAB} = \angle \boldsymbol{PBA} = 45°$, а $\angle \boldsymbol{APB} = 90°$, то $\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{PB} = \boldsymbol{AB} \cdot \mathbf{cos}45° =$ $= 75 \cdot 0{,}707 = 53$ (см) $= 0{,}53$ (м). Отже, підставляючи лінійну швидкість точки $\boldsymbol{A}$ та відстань від неї до МЦШ $\boldsymbol{PA}$ в попередню формулу, отримуємо кутову швидкість шатуна $\omega_{AB} = \boldsymbol{v_A} / \boldsymbol{PA} = 1{,}2/0{,}53 = 2{,}3$ (рад/с).

Знаючи миттєве значення кутової швидкості ω_{AB} ланки $\boldsymbol{AB}$ і положення МЦШ, можемо знайти швидкість довільної точки цієї ланки в даний момент часу (для даного положення механізму). Так, для швидкості точки $\boldsymbol{B}$ маємо $\boldsymbol{v_B} = \omega_{AB} \cdot \boldsymbol{PB} = 1{,}2$ (м/с).

Звернемо увагу на те, що різні методи – теорема про проекції та використання властивостей МЦШ – дають однакові результати для швидкості точки $\boldsymbol{B}$.

Знаючи положення МЦШ можемо визначити швидкість довільної точки ланки $\boldsymbol{AB}$. Так, швидкість точки $\boldsymbol{C}$ можна знайти за формулою $\boldsymbol{v_C} = \omega_{AB} \cdot \boldsymbol{PC}$.

Відстань $\boldsymbol{PC}$ між точкою $\boldsymbol{C}$ і МЦШ знайдемо з трикутника $\boldsymbol{APC}$ (дивись рис. К.2), скориставшись теоремою косинусів

$$\boldsymbol{PC} = \sqrt{\boldsymbol{AP}^2 + \boldsymbol{AC}^2 - 2\boldsymbol{AP} \cdot \boldsymbol{AC} \cdot \mathbf{cos}\,45°} = \sqrt{0{,}53^2 + 0{,}3^2 - 2 \cdot 0{,}53 \cdot 0{,}3 \cdot \mathbf{cos}\,45°} = 0{,}38(\text{м})$$

Тоді для швидкості точки $\boldsymbol{C}$ отримаємо $\boldsymbol{v_C} = \omega_{AB} \cdot \boldsymbol{PC} = 2{,}3 \cdot 0{,}38 = 0{,}86$(м/с).

Контрольні питання:

1. Що таке плоский рух?
2. Порядок визначення миттєвого центру швидкостей?
3. Як визначається швидкість ланок?

Практична робота К 3

Найпростіші перетворення рухів тіл в механізмах

Мета роботи:

1. Сформувати компетентності для визначення закономірностей перетворення рухів тіл в механізмах.
2. Сформувати компетентності самостійної роботи і творчого мислення.

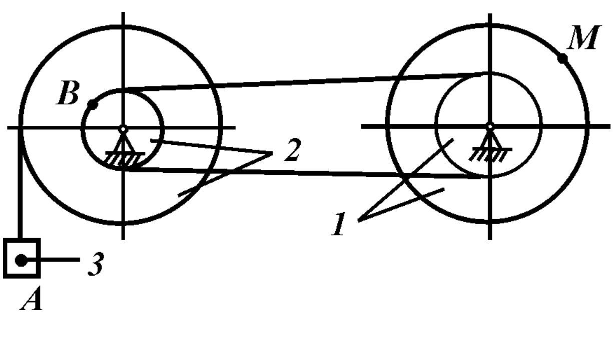
Знайти кутові швидкості та прискорення тіл 1 та 2, лінійні швидкості і прискорення точок ***A, B*** та ***M*** у заданий момент часу t_1 .

Непарні варіанти. Диск 1 здійснює обертальний рух за законом $\varphi_1 = at^3 + bt^2 + ct$ (рад) та за допомогою пасової (чи фрикційної) передачі приводить в обертання тіло 2. На нього намотана мотузка, яка з'єднана з тілом 3. (Кут повороту додатний при обертанні проти стрілки годинника).

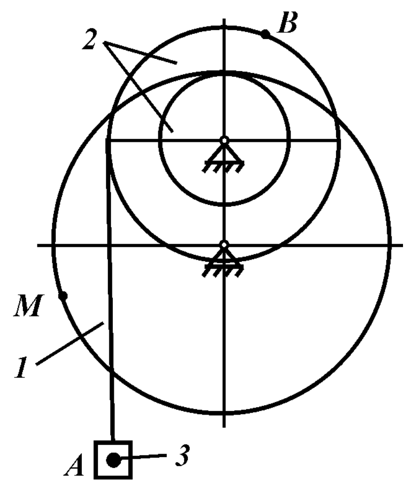
Парні варіанти. Тіло 3 здійснює поступальний рух за законом $z(t) = at^3 + bt^2 + ct$ (м). (Додатний напрям осі z співпадає з рухом тіла 3 вниз). За допомогою мотузки приводиться в обертальний рух тіло 2, яке за допомогою пасової (чи фрикційної) передачі зумовлює обертання тіла 1.

Всі вектори вказати на рисунку. Закон обертання диска 1, руху тіла 3 та номер рисунку зі схемою механізму вказані в таблиці К.3

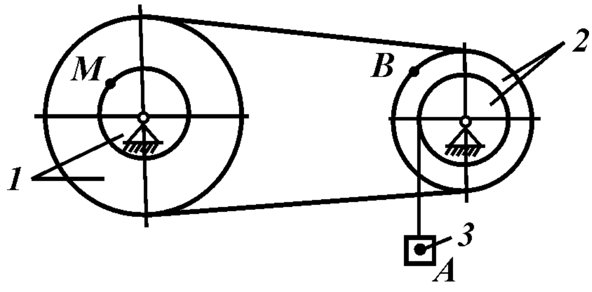
1



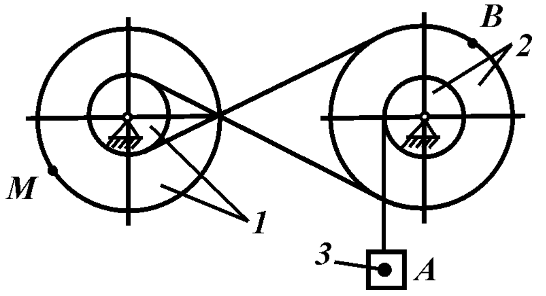
2



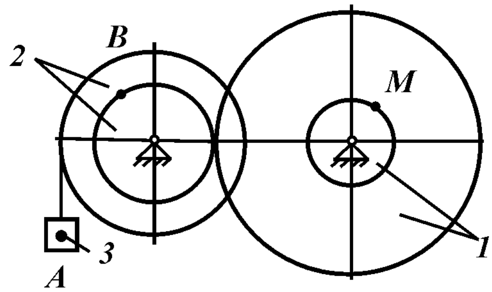
3



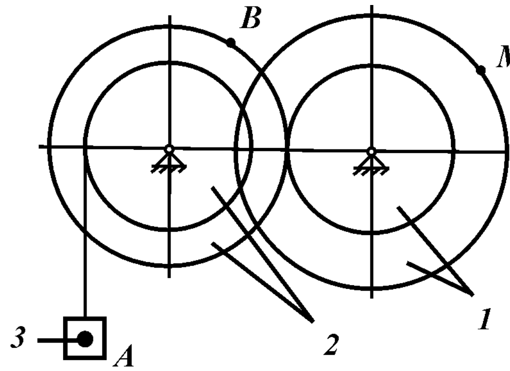
4



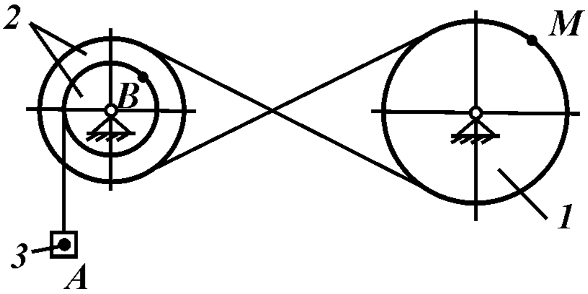
5



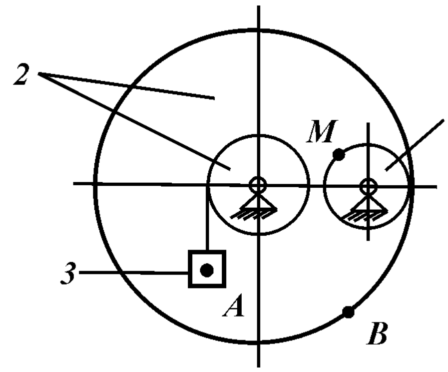
6



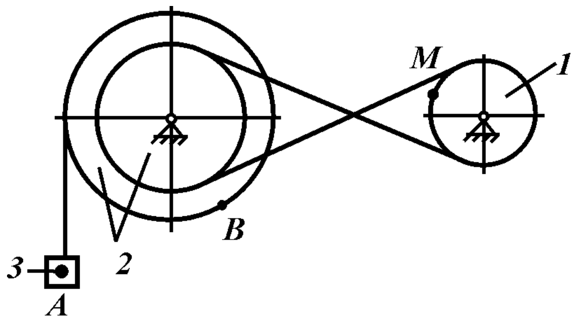
7



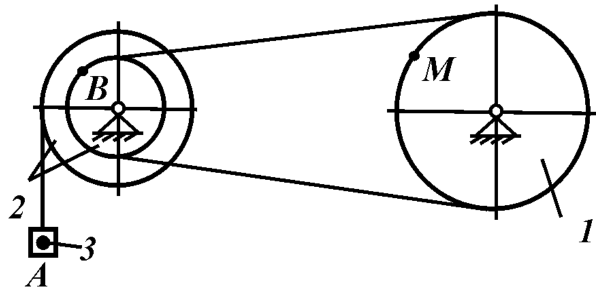
8



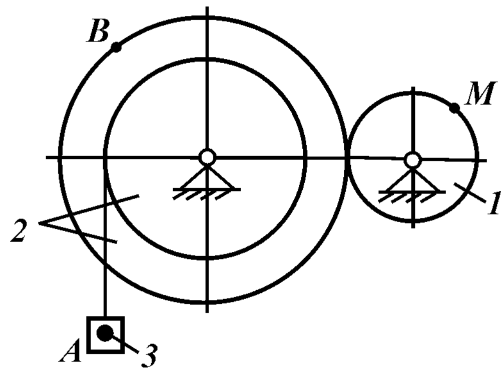
9



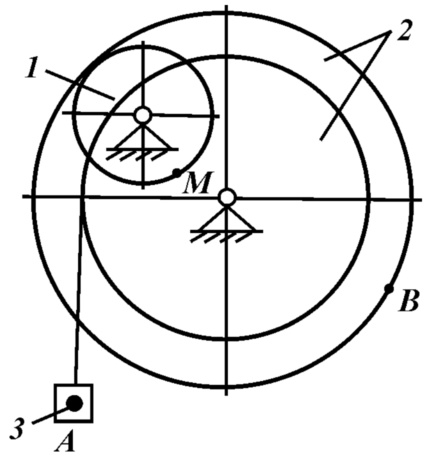
10



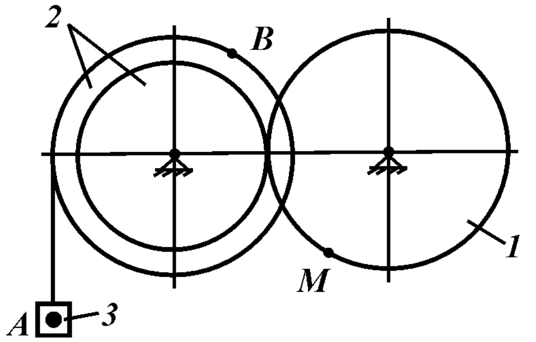
11



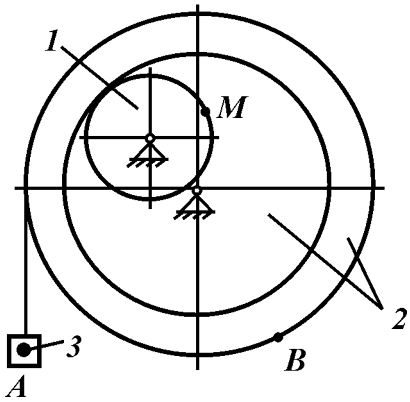
12



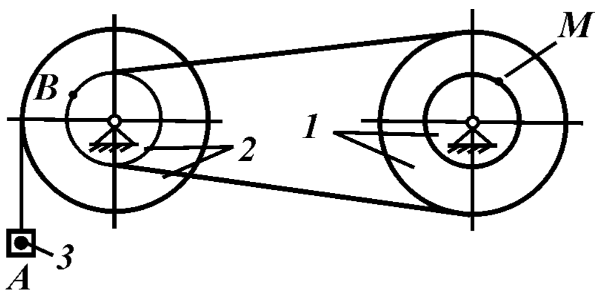
13



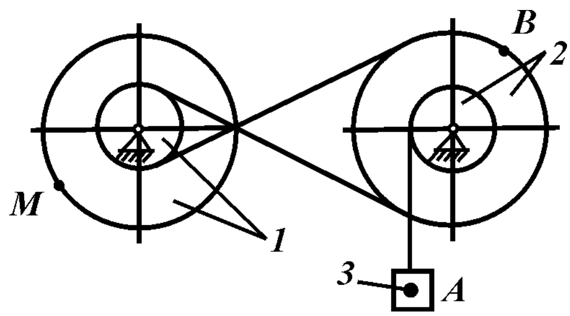
14



15



16



Таблиця К.3 – вихідні дані для задачі К.3

№ вар.	№ рис.	a, рад/с^3, (м/с^3)	b, рад/с^2, (м/с^2)	c рад/с, (м/с)	t_1, с	R_1, см	r_1, см	R_2, см	r_2, см
0	1	1	-2	3	1	40	30	40	20
1	1	1	-2	3	1	40	30	40	20
2	2	1	-1	-3	2	45	-	30	20
3	2	1	-4	4	1	45	-	30	20
4	3	1	-2	0	2	54	18	36	27
5	3	1	-2	-5	2	54	18	36	27
6	4	2	-3	-1	1	45	15	30	15
7	4	2	-3	-1	1	45	15	30	15
8	5	-1	2	1	1	50	20	40	20
9	5	-1	2	1	1	50	20	40	20
10	6	-2	5	-2	2	40	20	30	20
11	6	-2	3	-2	1	40	20	30	20
12	7	1	-4	0	3	50	-	35	25
13	7	1	-5	0	3	50	-	35	25

№ вар.	№ рис.	a, рад/с^3, (м/с^3)	b, рад/с^2, (м/с^2)	c рад/с, (м/с)	t_1, с	R_1, см	r_1, см	R_2, см	r_2, см
14	8	-1	2	0	2	15	-	50	10
15	8	-1	2	0	2	15	-	50	10
16	9	0	-2	3	2	30	-	60	45
17	9	0	-2	6	2	30	-	60	45
18	10	2	-1	0	1	50	-	40	25
19	10	2	-2	0	1	50	-	40	25
20	11	1	-3	-3	2	40	-	45	20
21	11	1	-3	-3	2	40	-	45	20
22	12	2	-3	1	2	20	-	50	40
23	12	2	-5	1	1	20	-	50	40
24	13	2	-5	-1	2	50	-	40	25
25	13	2	-3	-1	1	50	-	40	25
26	14	-1	0	5	1	12	-	48	36
27	14	-1	0	5	1	12	-	48	36
28	15	0	2	-3	2	45	25	40	30
29	16	0	2	-3	2	40	20	50	30

Методика розв'язання задачі

Якщо ***механічна система*** складається з декількох тіл, які здійснюють поступальний та обертальний рухи, то для визначення кінематичних характеристик ***точки твердого тіла*** поступаємо наступним чином:

1. Визначаємо кінематичні характеристики руху тіла, яке приводить в рух систему:

а) якщо заданий закон $S(t)$ руху тіла, що здійснює прямолінійний поступальний рух, то його швидкість та прискорення знаходимо за формулами

$$v = dS(t)/dt, \quad a = a_\tau = d^2S(t)/dt^2. \qquad (1)$$

б) якщо заданий закон $\varphi(t)$ обертального руху тіла навколо фіксованої осі z, то знаходимо його кутову швидкість та кутове прискорення як

$$\omega_z = d\varphi(t)/dt, \quad \varepsilon_z = d\omega_z/dt = d^2\varphi(t)/dt^2. \qquad (2)$$

У подальшому для спрощення запису, індекс z вказувати не будемо.

2. Визначаємо кутову швидкість тіла, зв'язаного ***нерозтяжною*** ниткою або фракційною передачею з тілом, кутова швидкість якого відома:

а) коли поступальний рух тіла 1 передається обертальному руху тіла 2 (або навпаки), то

$$v_1 = \omega_2 R, \qquad (3)$$

де $\boldsymbol{R}$ – радіус тіла 2, що знаходиться у контакті з поступальним рухом тіла 1, а ω_2 – кутова швидкість тіла 2;

б) коли обертальний рух тіла 1 передається обертальному руху тіла 2, то

$$\omega_1 \cdot \boldsymbol{R}_1 = \pm\omega_2 \boldsymbol{R}_2 , \quad (4)$$

де $\boldsymbol{R}_1$ та $\boldsymbol{R}_2$ – радіуси коліс (блоків), між якими існує передача, ω_1 та ω_2 – проекції кутових швидкостей на вісь обертання. Знак мінус беремо, коли ремінна передача хрестоподібна або являє собою зовнішнє зчеплення – тоді колеса обертаються в протилежних напрямах.

3. Беремо похідну за часом від рівняння (3) та (4) і отримуємо рівняння для визначення кутового прискорення:

$$\boldsymbol{a}_\tau = \varepsilon \boldsymbol{R} , \quad (5)$$

$$\varepsilon_1 \cdot \boldsymbol{R}_1 = \pm\varepsilon_2 \cdot \boldsymbol{R}_2 . \quad (6)$$

4. Повторюємо п.2.2 та п.2.3 для кожної пари зв’язаних тіл.
5. Розв’язуючи рівняння, знаходимо невідомі величини.

Зауважимо, що формули (3-4) та (5-6) є наслідком відсутності ковзання у місті контакту для фрикційної передачі, або відсутності ковзання та недеформованості паса для пасової передачі.

Приклад.

Тіло 1 здійснює обертальний рух за законом $\varphi_1 = -\boldsymbol{t}^3 + 5\boldsymbol{t}$ і за допомогою пасової передачі (рис. 5.1) приводить в обертання тіло 2, до якого на мотузці прикріплено тіло 3.

Знайти кутові швидкості та прискорення тіл 1 та 2, лінійні швидкості і прискорення точок ***A, B*** та ***M*** у заданий момент часу $\boldsymbol{t}_1 = 1$ с, якщо $\boldsymbol{R}_1 = 32$ см, $\boldsymbol{r}_1 = 16$ см, $\boldsymbol{R}_2 = 32$ см, $\boldsymbol{r}_2 = 16$ см. Кут повороту вважати додатним при обертанні проти руху стрілки годинника.

Розв’язання. Знаючи закон зміни кута повороту з часом, знайдемо кутову швидкість та кутове прискорення тіла 1:

$$\omega_1 = d\varphi_1 / dt = -3t^2 + 5 ,$$

$$\varepsilon_1 = d\omega_1 / dt = -6t .$$

Підставляючи в отримані вирази вказаний момент часу, маємо

$$\omega_1(1) = 2 \text{ (рад/с)}, \ \varepsilon_1(1) = -6 \text{ (рад/с}^2\text{)}.$$

Додатне значення кутової швидкості означає, що тіло 1 обертається проти руху стрілки годинника і вектор кутової швидкості спрямований перпендикулярно площині (рис. 5.1) до нас. Від’ємне значення кутового прискорення означає, що швидкість обертання зменшується за модулем, а вектор кутового прискорення спрямований перпендикулярно площині (рис. 5.1) від нас.

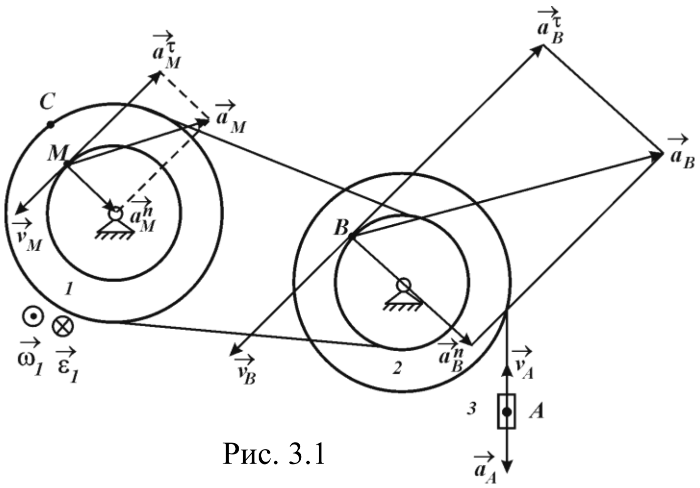


Рис. 3.1

Модуль лінійної швидкості точки $\boldsymbol{M}$ знайдемо за формулою $v_M = \omega_1 \cdot r_1 = 2 \cdot 16 = 32$ (см/с), а вектор швидкості напрямлений по дотичній до траєкторії в напрямі обертання.

Згідно з (5) визначаємо модуль вектора тангенціального прискорення

$\left| \vec{a}^{\tau}_M \right| = \left| \vec{\varepsilon}_1 \right| \cdot r_1 = 6 \cdot 16 = 96$ (см/с^2), а напрям цього вектора протилежний напряму швидкості, оскільки обертання сповільнене.

Нормальне прискорення спрямоване до центру диска і дорівнює

$$a^n_M = \omega_1^2 \cdot r_1 = 4 \cdot 16 = 64 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Модуль вектора повного прискорення точки $\boldsymbol{M}$ знайдемо як

$$a_M = \sqrt{(a^{\tau}_M)^2 + (a^n_M)^2} = r_1\sqrt{\varepsilon_1^2 + \omega_1^4} = 115{,}4 \text{ (см/с}^2\text{)},$$

оскільки нормальне та тангенціальне прискорення взаємно перпендикулярні, а його напрям визначаємо за правилом складання векторів.

Знайдені величини для точки $\boldsymbol{M}$ зображені на рис. 1.

Тіло 1 зв'язане з тілом 2 пасом, що дозволяє записати рівняння зв'язку між кінематичними характеристиками тіл 1 та 2. За умови відсутності ковзання паса та його нерозтяжності, лінійна швидкість довільної точки $\boldsymbol{C}$, яка знаходиться на зовнішній поверхні тіла 1 (радіуса R_1) співпадає відповідно з лінійною швидкістю довільної точки $\boldsymbol{B}$, що знаходиться на внутрішньому ободі тіла 2 (радіуса r_2). Отже:

$$v_B = v_C.$$

Беручи до уваги те, що точки $\boldsymbol{B}$ та $\boldsymbol{C}$ здійснюють обертальний рух, з отриманого рівняння маємо

$$r_2 \cdot \omega_2 = R_1 \cdot \omega_1,$$

звідки знаходимо формулу для визначення модуля кутової швидкості тіла 2

$$\omega_2 = (R_1 / r_2) \cdot \omega_1.$$

Взявши похідну за часом від останньої формули, отримуємо форуму, яка зв'язує кутові присклрення тіл 1 та 2

$$\varepsilon_2 = (R_1 / r_2) \cdot \varepsilon_1.$$

Напрями вектора $\vec{\omega}_2$ визначаються напрямом вектора $\vec{\omega}_1$ 1, оскільки, в нашому прикладі пас між тілами 1 та 2 не змінює напряму обертання тіл, тобто $\vec{\omega}_2$ - напрямлений від нас перпендикулярно рис..1. Якби передача була перехресна або фрикційна зовнішня, то напрям вектора кутової швидкості тіла 2 змінився би на протилежний. Напрям вектора $\vec{\varepsilon}_2$

визначається характером обертання тіла, оскільки тіло 1 обертається сповільнено, то і тіло 2 обертається теж сповільнено, отже вектор $\vec{\varepsilon}_2$ напрямлений до нас перпендикулярно рис.1.

Підставляючи чисельні значення величин знаходимоω_2 та ε_2:

$$\omega_2 = (32/16)\cdot 2 = 4 \text{ (рад/с)},$$

$$\varepsilon_2 = (32/16)\cdot 6 = 12 \text{ (рад/с}^2\text{)}.$$

Знаючи кутове прискорення ε_2, знаходимо тангенціальні прискорення точки $\boldsymbol{B}$, що знаходяться на тілі 2

$$\left|\vec{\ }^{\tau}_{B}\right| = \left|\varepsilon_2\right| \cdot \boldsymbol{r}_2 = 12\ 16 = 192 \text{ (см}^2\text{/с)}.$$

Модулі нормального та повного прискорень точки $\boldsymbol{B}$ знайдемо аналогічно тому, як для точки $\boldsymbol{M}$:

$$\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{B}} = \omega_2^2 \cdot \boldsymbol{r}_2 = 4^2\ 16 = 256 \text{ (см/с}^2\text{)},$$

$$\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{B}} = \sqrt{\varepsilon_2^2 + \omega_2^4} \cdot \boldsymbol{r}_2 = \sqrt{12^2 + 4^4} \cdot 16 = 20\ 16 = 320 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Знайдені вектори кінематичних характеристик тіла 2 та т. $\boldsymbol{B}$ зображені на рис. 1.

Точка $\boldsymbol{A}$ знаходиться на тілі 3, яке здійснює поступальний рух, тому нормальне прискорення точки $\boldsymbol{A}$ відсутнє $\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{A}} = 0$. Швидкість і тангенціальне прискорення точки $\boldsymbol{A}$ співпадають з відповідними величинами для довільної точки, що знаходиться на зовнішній поверхні тіла 2, що випливає з умови зв'язку між тілами 2 та 3. Тому отримуємо:

$$\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{A}} = \omega_2 \cdot \boldsymbol{R}_2 = 4\ 32\cdot = 128 \text{ (см/с)},$$

$$\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{a}^{\tau}_{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{R}_2 \varepsilon_2 = 12\ 32 = 384 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Оскільки обертальний рух тіла 2 сповільнений, то і поступальний рух тіла 3 теж сповільнений, тому вектори $\vec{\ }_A$ та $\vec{\ }^{\tau}_A$ мають протилежні напрями (рис.1).

Відповідь: $\omega_1 = 2$ рад/с, $\varepsilon_1 = 6$ рад/с^2, $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{M}} = 32$ см/с, $\boldsymbol{a}^{\tau}_{\boldsymbol{M}} = 96$ см/с^2, $\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{M}} = 64$ см/с^2, $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{M}} = 115{,}4$ см/с^2; $\omega_2 = 4$ рад/с, $\varepsilon_2 = 12$ рад/с^2, $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{B}} = 64$ см/с, $\boldsymbol{a}^{\tau}_{\boldsymbol{B}} = 192$ см/с^2, $\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{B}} = 256$ см/с^2, $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{B}} = 320$ см/с^2, $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{A}} = 128$ см/с, $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{a}^{\tau}_{\boldsymbol{A}} = 384$см/с^2.

Контрольні питання:

1. Якими характеристиками визначається рух тіла?
2. Що означає поняття «закон руху тіла»?
3. Навести визначення основного закону руху тіла?
4. Як визначається передаточне число через основний закон обертального руху?
5. Наведіть приклади перетворення руху?

Практична робота Д 1

Завдання ДТ. ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

Задача ДТ1. ПРЯМА ОСНОВНА ЗАДАЧА ДИНАМІКИ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

Мета роботи:

1. Сформувати компетентності для визначення динамічних характеристик матеріальної точки.
2. Сформувати компетентності самостійної роботи і творчого мислення.

Визначити рівнодійну силу $\vec{F}$ сил, діючих на матеріальну точку, якщо задана маса точки m і кінематичні рівняння її руху.

Необхідні дані наведені в таблиці Д. 1.

<u>Необхідно знати:</u>

1. Диференціальні рівняння руху матеріальної точки в проекціях на декартові осі координат.

<u>Необхідно вміти:</u>

1.Брати похідні від різних функцій.

Приклад виконання завдання

Задача. Матеріальна точка маси m рухається шорсткою горизонтальною площиною вздовж осі x за рівнянням $x = af(t)$ під дією сили $\vec{F}(t)$, що напрямлена під кутом α до осі x. Визначити значення сили $\vec{F}$ в момент часу t, якщо коефіцієнт тертя ковзання μ.

Дано:

$m = 9кг, \alpha = 45°, a = 7,$
$f(t) = a\cos\varphi;\ \varphi = \pi t;$
$\mu = 0{,}15;\ t = 3c$

F-?

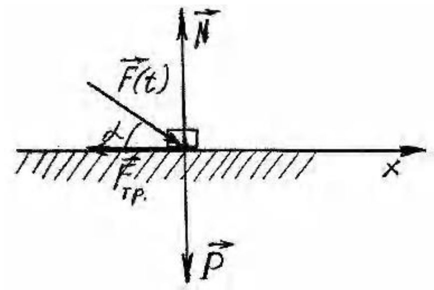


Рис. 3.1

Розв’язання. Матеріальну точку, в довільному положенні під час руху, показуємо у вигляді точки на (рис. 3.1). Прикладемо до неї активні сили *F(t)* і вагу $P = mg$,силу тертя $F_{тр}$ і реакцію в’язі N. Запишемо диференціальне рівняння прямолінійного руху матеріальної точки вздовж осі x , (рис.3.1), яку напрямимо в сторону руху точки, $m\ddot{x} = \sum F_{ix}$. За умовами задачі кінематичне рівняння руху точки має вигляд $x = a\cos\varphi = 7\cos\pi t.$

Візьмемо другу похідну по часу від лівої і правої часток цього рівняння:

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -7\pi^2 \cos\pi t. \qquad (a)$$

Крім того маємо $\sum F_{ix} = F\cos\alpha - F_{тр}$.Силу тертя визначаємо з відомої формули $F_{тр} = \mu N;\ N = P = mg$, отже $\sum F_{ix} = F\cos\alpha - \mu mg.$ Таким чином маємо

$$m\ddot{x} = F\cos\alpha - \mu mg\,. \qquad (б)$$

Підставляючи (а) в (б) маємо при $t = T = 3c$ F=906,53 H.

Відповідь: F=906,53 H.

Таблиця Д.1

№ варіанта	m , кг	α, град.	a, м	f	φ(t), рад	μ	t_1, с
00	50	30	5	sinφ	0,25πt	0,20	2
01	40	45	4	cosφ	πt	0,30	3
02	30	60	3	φ^3	3t	0,15	4
03	20	30	2	φ^4	2t	0,25	5
04	10	45	1	$\cos\varphi^2$	πt	0,40	6
05	20	60	2	$\sin\varphi^2$	0,5πt	0,30	7
06	30	30	3	φ^4	0,5t	0,20	8
07	40	45	4	φ^5	t	0,10	9
08	50	60	5	φ^3	2t	0,15	10
09	60	60	6	cosφ	0,5πt	0,355	9
10	70	30	7	sinφ	0,25πt	0,40	8
11	80	45	8	φ^6	t	0,25	7
12	90	30	9	φ^5	2t	0,10	6
13	80	60	10	φ^4	2,5t	0,20	5
14	70	45	9	φ^3	T	0,30	4
15	60	60	8	sinφ	1,5πt	0,40	3
16	50	30	7	cosφ	0,75πt	0,20	2
17	40	45	6	φ	4t	0,25	1
18	30	30	5	$\sin\varphi^2$	√2πt	0,10	2
19	20	45	4	cosφ	4πt	0,20	3
20	10	60	3	φ^6	1,5t	0,30	4
21	20	60	2	$\cos^2\varphi$	πt	0,40	5
22	30	45	1	φ^8	√t	0,15	6
23	40	30	2	φ^3	3t	0,20	7
24	50	45	3	φ^4	0,5t	0,25	8
25	60	60	4	$\sin\varphi^2$	√0,5πt	0,40	9
26	70	30	5	$\cos\varphi^2$	√2πt	0,30	10
27	80	30	6	sinφ	$0{,}5\pi t^2$	0,20	10
28	10	45	4	cosφ	πt	0,15	3
29	20	60	2	3φ	T	0,30	4
30	30	30	3	$2\varphi^2$	√3πt	0,20	5

Контрольні питання:

1. Як використовуються диференціальні рівняння руху матеріальної точки в проекціях на декартові осі координат?
2. Як визначаєть швидкість та прискорення?
3. Як впливає сила тертя на динамічні характеристики?

Практична робота Д2

Задача ДТ2. ОБЕРНЕНА ОСНОВНА ЗАДАЧА ДИНАМІКИ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ.

Мета роботи:

1. Сформувати компетентності для визначення динамічних характеристик матеріальної точки.
2. Сформувати компетентності самостійної роботи і творчого мислення.

Варіант 1. Важке тіло рухається до низу по жорсткій площині з кутом нахилу α до горизонту. Тіло має початкову швидкість v_0 і за час t_1 проходить шлях S. Коефіцієнт тертя дорівнює μ . Треба визначити величину, яка в таблиці Д.2 позначена знаком питання (?).

Необхідні дані наведені в таблиці Д.2 завдань.

<u>Необхідно знати:</u>

1. Диференціальні рівняння руху матеріальної точки у проекціях на осі. координат.
2. Визначення постійних інтегрування за початковими умовами. задачі.

<u>Необхідно вміти:</u>

1. Проеціювати сили на осі. координат.
2. Інтегрувати диференціальні рівняння невизначеним інтегралом.
3. Визначати початкові умови з умов задачі.
4. Знаходити постійні інтегрування за початковими умовами.

Приклади виконання завдання

Задача 1. Важке тіло масою m рухається вниз по жорсткій площині, нахиленої під кутом $\alpha = 30^0$ до горизонту. Початкова швидкість тіла дорівнює $\upsilon_0 = 2\frac{м}{с}$. Коефіцієнт тертя $\mu = 0{,}4$.

Визначити рівняння руху і шлях, який пройшло тіло за час t=2c.

Розв'язання. Приймаючи тіло за матеріальну точку, розглянемо його рух під дією сил, прикладених до нього.

Щоб правильно вказати схему сил, розглянемо з якими тілами взаємодіє тіло. Воно взаємодіє з похилою площиною і повітрям, опором якого нехтуємо. Сила взаємодії тіла з Землею є сила ваги $G=mg$. Реакція площини має дві складові: нормальну складову $\vec{N}$ та силу тертя $\vec{F}_{TP.}$ (рис. 3.2).

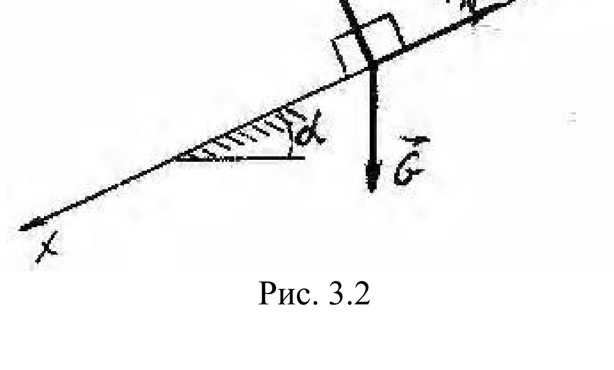


Рис. 3.2

Напрямимо вісь Ох паралельно траєкторії в бік руху тіла і складемо диференціальне рівняння руху матеріальної точки в проекції на вісь Ох: $mx = \sum F_{ix}$, тобто

$$mx = P\sin\alpha - F_{TP}.$$

Але за законом сухого тертя $F_{TP} = \mu \cdot N = \mu \cdot P\cos\alpha$,
тобто

$$mx = P\sin\alpha - P \cdot \mu\cos\alpha, mx = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha),$$

або

$$x = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha). \qquad (а)$$

Звідки інтегруванням знайдемо X як функцію часу t.
Враховуючи, що $x = dx/dt$ (а) запишимо у вигляді:

$$dx = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)dt.$$

В результаті першого інтегрування невизначеним інтегралом матимемо:

$$\int dx = \int g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)dt \quad \Rightarrow \quad x = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t + c_1.$$

Сталу інтегрування c_1 знайдемо з початкових умов: при t=0 υ_0=2м/с. Дістанемо $c_1 = \upsilon_0$. Отже,

$$x = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t + \upsilon_0.$$

Інтегруючи вдруге, з врахуванням що $x = dx/dt$, тобто $dx = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)tdt + \upsilon_0 dt$, матимемо $\int dx = \int g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)tdt + \int \upsilon_0 dt$:

$$x = \frac{1}{2}g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t^2 + \upsilon_0 t + c_2. \qquad (б)$$

Сталу інтегрування c_2 знайдемо з початкових умов: при t=0 x=0 (початок координат знаходиться в початковому положенні точки). Дістанемо $c_2 = 0$. Після підстановки в (б) $c_2 = 0$ маємо рівняння

$$x = \frac{1}{2}g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t^2 + \upsilon_0 t, \qquad (в)$$

яке є законом руху точки.

Для визначення шуканого шляху s за τ секунд, покладемо у рівнянні руху точки (в) t=τ , і
дістанемо

$$s = \upsilon_0 \tau + \frac{1}{2}g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\tau^2.$$

При $\tau = 2c$ матимемо $s = 7{,}02м$.

Відповідь: рівняння руху $x = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t^2$; шлях $s = 7{,}02м$.

Таблиця Д.2

№ варіанта	α, град.	V_0, м/с	μ	t_1, с.	S, м
00	60	2	0,40	3	?
01	45	4	0,30	?	5
02	30	6	0,20	2	?
03	30	8	0,10	5	?
04	45	10	0,15	?	4
05	60	12	0,20	?	6
06	60	16	0,25	1	?
07	45	18	0,30	6	?
08	30	20	0,35	?	10
09	30	20	0,40	?	8
10	60	18	0,35	2	?
11	45	16	0,30	4	?
12	45	14	0,25	5	?
13	60	12	0,20	6	?
14	30	10	0,15	?	4
15	45	8	0,10	?	8
16	30	6	0,10	?	10
17	60	4	0,15	2	?
18	45	2	0,20	3	?
19	45	3	0,25	?	5
20	60	4	0,30	5	?
21	30	5	0,35	6	?
22	30	6	0,40	?	6
23	45	7	0,45	10	?
24	60	8	0,35	?	8
25	60	9	0,30	?	10
26	30	10	0,25	6	?
27	45	10	0,20	3	?
28	30	15	0,15	?	3
29	45	25	0,25	2	?
30	60	30	0,35	?	2

Конторольні питання:

1. Що означає обернена задача динаміки?
2. В яких випадках зручно користуватись методом оберненої задачі?

Практична робота Д3

Задача ДС. ДИНАМІКА МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

Мета роботи:

1. Сформувати компетентності для визначення динамічних характеристик системи матеріальних тіл.
2. Сформувати компетентності самостійної роботи і творчого мислення.

Дослідження дінаміки руху системи матеріальних точок проводяться комплексно, шляхом використання різних методів для визначення основних характеристик руху конкретної механічної системи абсолютно твердих тіл під дією постійних сил ваги.

Такий підхід дозволяє, крім тривіального надання навиків використання теорії для практичних розрахунків та їх закріплення, розв'язати також дуже важливу проблему аналізу одержаних різними методами результатів розв'язку однієї задачі динаміки. Це дає можливість порівняти різні шляхи розв'язання однієї задачі і перевірити правильність отриманих результатів.

Умови задач завдань ДС

Механічна система (механізм), яка складена з декількох абсолютно твердих тіл, починає рухатися з стану спокою під дією сил ваги. Вважаючи в'язі ідеальними і нехтуючи їх масами визначити в мить часу, коли тіло А пройде шлях S, величини які вказані в завданнях ДС.

Схеми механічних систем показані на рис. ДС.

В завданнях прийняті слідуючи позначення: $m_А$, $m_В$, $m_Б$, $m_Д$ - маси тіл А, В, Б, Д; $R_в=2r_в$, $R_Д=1{,}5r_Д$ - радіуси великих і малих кіл; $i_{вх}$, $i_{дх}$ - радіуси інерції тіл В і Д, відносно горизонтальних осей, що проходять через їх центри мас, α, β - кути нахилу площин до горизонту; μ - коефіцієнт тертя тіла А.

Необхідні дані наведені в таблиці ДС.

Задачі завдання ДС

Задача ДС1.

Знайти швидкість тіла А даної механічної системи за допомогою теореми про зміну кінетичної енергії.

<u>Необхідно знати:</u>

1. Теорему про зміну кінетичної енергії механічної системи.
2. Формули, за якими визначається кінетична енергія при поступальному, обертальному і плоскому рухах твердого тіла.
3. Формули, за якими визначається робота постійної сили, змінної сили, сили тертя, сили тяжіння, моменту сили.

<u>Необхідно вміти:</u>

1. Визначати рухи твердого тіла.

2. Виконувати кінематичний розрахунок системи: за заданою швидкістю (прискоренням, переміщенням) даного тіла визначити швидкість (прискорення, переміщення) всіх об'єктів та точок, що складають систему твердих тіл.

3. Вираховувати кінетичну енергію конкретних твердих тіл, які складають механічну систему, в залежності від їх руху.

4. Вираховувати роботу конкретних сил, прикладених до тіл механічної системи.

Приклад виконання завдання

Задача. Механічна система, яка складається з трьох абсолютно твердих тіл (рис ДС), починає рухатися з стану спокою під дією сил ваги. Вважаючи в’язі ідеальними і нехтуючи їх масами визначити швидкість тіла А системи в залежності від шляху S.

<u>Дано</u>:

$m_A = 2m_B = 0{,}5m_Д = m$; $R_Д = 0{,}3\,м$; $r_B = 0{,}15\,м$; $R_B = 0{,}2$; $i_B = 0{,}17\,м$; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 60^\circ$;

S=6м; k=0,2.

Знайти $V_A(S)$.

Розв’язання. За умовою задачі вихідна механічна система (рис. ДС) складається з абсолютно твердих тіл і якщо силу тертя вважати заданою, а інші в’язі ідеальними, то маємо що $\sum A^i_i = 0$, а $\sum A^e_i = \sum A^a_i$, де $\sum A^a_i$ - сума робіт зовнішніх сил, включаючи силу тертя. Крім того, в початковому положенні система нерухома і тому $T_0 = 0$. Звідси випливає, що для даної системи теорема про зміну кінематичної енергії в інтегральній формі приймає вигляд:

$$T_к = \sum A^a_i\,. \qquad (a)$$

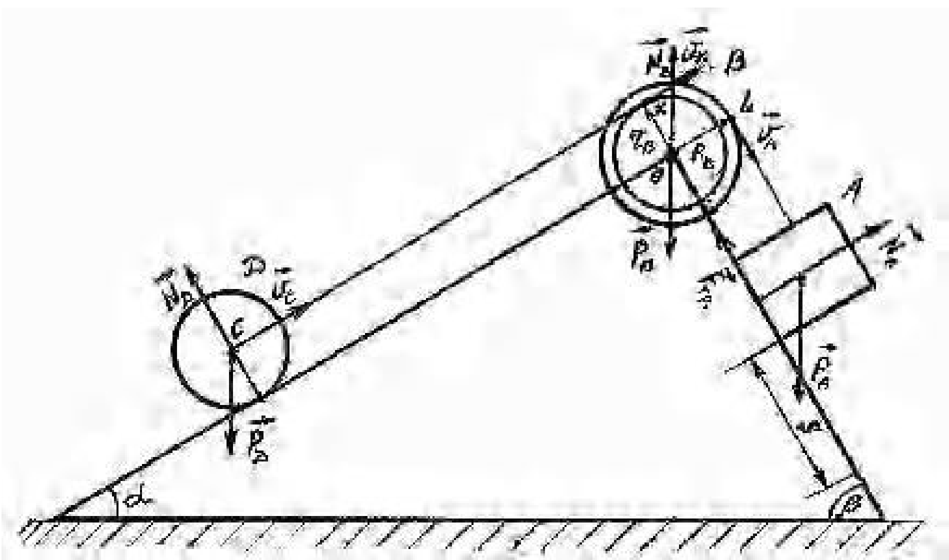


Рис. ДС

Отже, надалі, згідно з формулою (а), треба визначити кінетичну енергію в кінцевому положенні системи і роботу зовнішніх сил при переході системи з початкового в кінцеве положення. Підставляючи одержані дані в (а) знайдемо $V_A\ (S\ )$. Але перед тим як це зробити треба всі змінні величини виразити через задану і шукану величини тобто через V_A і S. Для цього проведемо відповідний попередній кінематичний розрахунок.

Перед усім виразимо швидкості усіх точок системи через швидкість тіла А, яке рухається поступально.

Лінійна швидкість точки L барабана В, що обертається навколо нерухомої осі, $V_L = \omega_B R_B = V_A$. Звідси кутова швидкість блока В: $\omega_B = V_A / R_B$ і $V_K = \omega_B \cdot r_B = 5V_A \cdot 0{,}15 = 0{,}75V_A$. Але нитка КС не розтягується і тому $V_C = V_K = 0{,}75V_A$.

Миттєвий центр швидкостей катка Д знаходиться в точці його дотику до площини. Тому:

$$\omega_Д = \frac{V_k}{R_Д} = \frac{0{,}75V_A}{R_Д} = \frac{0{,}75V_A}{0{,}3} = 2{,}5V_A.$$

Що стосується до переміщень, то відношення між ними завжди такі, які між швидкостями і тому у даному випадку $S_c = 0{,}75S.$ після того як всі змінні величини виражені через V_a і S визначимо ліву і праву частини рівняння (а).

Почнемо з визначення кінематичної енергії системи в кінцевому положенні, яка дорівнює сумі енергій всіх тіл, що складають дану систему:

$$T = T_A + T_B + T_D. \tag{б}$$

Знайдемо кінетичні енергії кожного з тіл зокрема.

1). Тіло А здійснює поступальний рух і тому його кінетична енергія

$$T_A = \frac{m_A V_A^2}{2} = 0{,}5mV_A^2.$$

2). Барабан В обертається навколо нерухомої осі і тому

$$T_B = \frac{I_B \omega_B^2}{2},$$

де I_B - момент інерції барабана відносно осі обертання

$$I_B = m_B i_B^2 . ,$$

де i_n -радіус інерції.

Отже $T_B = \dfrac{m_B i_B^2 \omega_B^2}{2}.$

3). Кінетична енергія циліндра Д, що здійснює плоскопаралельний рух:

$$T_Д = \frac{m_Д V_C^2}{2} + \frac{I_{CX}\,\omega_Д^2}{2},$$

де $I_{cx} = I_Д$ - момент інерції однорідного суцільного циліндра відносно його центральної осі

$$I_{cx} = m_Д R_Д^2 / 2 .$$

Підставляючи задані маси тіл і визначені з кінематичного розрахунку значення швидкостей V_C ,$\omega_Д$ і ω_B в (б) одержимо значення кінетичної енергії системи через швидкість

$$V_A : T_K = \left(0{,}5m + 0{,}182\,m + 0{,}843m\right)V_A^2 \ ,\ T_K = 1{,}525\,mV_A^2 \quad \text{(в)}.$$

Тепер обчислимо праву частину формули (а). Прикладемо всі зовнішні сили до тіл системи (рис.3.3) і знайдемо суму робіт цих сил на заданому переміщені S:

$$\sum A_i = A_A + A_B + A_Д \ .$$

До тіла А прикладені зовнішні сили ваги і тертя, тобто $A_A = A_p + A_{mp}$,

де $A_P = P_A h = P_A S \sin\beta$,

$A_{mp} = -kP_a S \cos\beta.$

До тіла Д прикладена зовнішня сила ваги $P_Д$: $A_Д = -P_Д S_c \sin\alpha$.

Інші сили, прикладені до системи, роботи не здійснюють і тому $A_B = 0$.

$$\text{Отже } \sum_{i=1}^{n} A_i^a = P_A S \sin\beta - P_Д S_c \sin\alpha - kP_A \cos\beta S .$$

Звідси, враховуючи, що $S_c = 0{,}75S$, дістанемо

$$A = A_p + A_{mp} + A_Д = 0{,}1667\,mS \ . \qquad \text{(г)}$$

Підставимо (в) і (г) до (а) і одержимо що $1{,}525mV_a^2 = 0{,}1667\,mS$,

звідки $V_A = 0{,}33\sqrt{S}$.

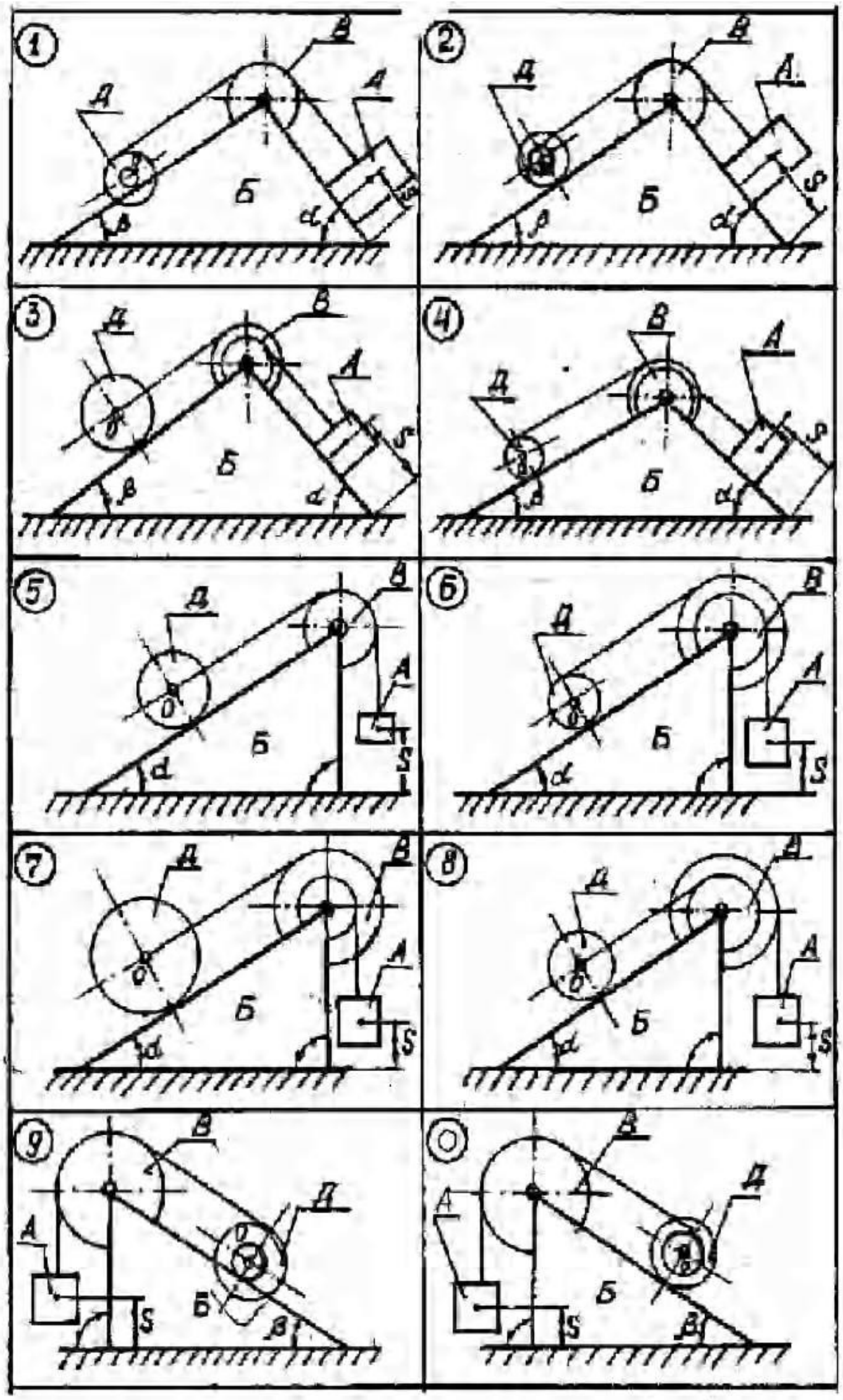
При S=6м маємо $V_A = 0{,}794\,(м/с)$.

Відповідь: швидкість тіла А в залежності від шляху S виражається формулою $V_A = 0{,}33S^{\frac{1}{2}}$ (м/с).

Таблиця ДС

№ схеми	№ варіанта	m_A	m_B	$m_Д$	$m_Б$	R_B	$R_Д$	I_{BX}	$I_{ДX}$	α	β	S	μ
		Кілограми				Метри				градуси		м	
1	00	m	2m	0,15m	4m	0,5	0,3	0,18	0,10	30	60	4,0	0,20
	01	m	m	0,25m	6m	0,4	0,2	0,15	0,12	60	30	3,0	0,30
	02	m	1,5m	0,75m	8m	0,5	0,2	0,17	0,16	60	30	2б0	0,10
2	03	m	0,5m	0,10m	10m	0,4	0,4	0,16	0,15	45	45	2,5	-
	04	m	m	0,25m	5m	0,6	0,3	0,14	0,10	60	30	3,0	0,30
	05	m	2m	0,20m	4m	0,5	0,5	0,15	0,13	30	60	4,0	0,20
3	06	m	0,5m	0,30m	3m	0,6	0,3	0,20	0,14	45	45	2,5	0,15
	07	m	1,5m	0,40m	6m	0,3	0,4	0,18	0,15	30	60	4,5	0,12
	08	m	0,75m	0,10m	7m	0,4	0,3	0,16	0,12	60	30	2,0	0,14
4	09	m	2,5m	0,20m	8m	0,6	0,4	0,12	0,15	45	45	2,5	0,25
	10	m	2m	0,30m	9m	0,4	0,2	0,13	0,14	60	30	3,0	0,32
	11	m	1,5m	0,40m	10m	0,6	0,5	0,15	0,12	30	60	3,5	0,16
5	12	m	m	0,25m	8m	0,5	0,6	0,16	0,10	30	60	4,5	0,18
	13	m	0,5m	0,15m	6m	0,4	0,2	0,17	0,11	45	45	4,0	-
	14	m	0,5m	0,35m	4m	0,5	0,3	0,18	0,13	60	30	5,0	0,20
6	15	m	2m	4,00m	7m	0,4	0,3	0,14	0,15	60	30	3,0	0,26
	16	m	1,5m	6,00m	10m	0,3	0,4	0,15	0,16	30	60	2,0	0,28
	17	m	m	5,00m	9m	0,5	0,3	0,16	0,10	45	45	4,0	0,36
7	18	m	2,5m	0,50m	6m	0,6	0,3	0,12	0,12	60	30	5,0	0,13
	19	m	0,25m	0,25m	4m	0,4	0,2	0,14	0,14	30	60	4,5	0,17
	20	m	0,5m	0,30m	5m	0,5	0,4	0,16	0,15	30	60	4,0	0,21
8	21	m	2m	0,10m	6m	0,5	0,2	0,15	0,12	30	60	2,0	0,20
	22	m	3m	0,15m	8m	0,3	0,1	0,17	0,10	60	30	3,0	0,15
	23	m	2,5m	0,20m	5m	0,4	0,3	0,16	0,15	60	30	4,0	0,17
9	24	m	1,5m	0,50m	9m	0,5	0,1	0,18	0,10	30	60	1,0	0,12
	25	m	m	0,25m	7m	0,4	0,2	0,10	0,12	30	60	2,0	0,10
	26	m	0,5m	0,30m	4m	0,3	0,3	0,14	0,14	45	45	3,0	0,14
10	27	m	1,75m	0,35m	8m	0,4	0,1	0,15	0,11	45	45	2,0	0,15
	28	m	1,25m	0,40m	5m	0,6	0,2	0,16	0,12	30	60	3,0	0,17
	29	m	2m	0,50m	6m	0,3	0,3	0,13	0,14	60	30	2,0	0,20
	30	m	0,75m	0,25m	8m	0,5	0,2	0,13	0,10	30	60	4,0	0,25

Рисунок ДС



Контрольні питання:

1. Що розуміється під системою матеріальних тіл?
2. Навести теорему про зміну кінетичної енергії механічної системи.
3. За якими формулами визначається кінетична енергія при поступальному, обертальному і плоскому рухах твердого тіла?
4. За якими формулами визначається робота постійної сили, змінної сили, сили тертя, сили тяжіння, моменту сили.

Література

1. Павловський М. А. Теоретична механіка : підручник. Київ : Техніка, 2002. 512 с.

2. Токар А. М. Теоретична механіка. Динаміка: Методи й задачі : навч. посіб. Київ : Либідь, 2006. 440 с.

3. Пастушенко С. І., Руденко О. Г., Іщенко В. В. Практикум з теоретичної механіки : навч. посіб. у двох частинах. Ч. 1. Статика. Кінематика. Вінниця : Нова Книга, 2006. 384 с.

4. Кузьо І. В. Теоретична механіка : підручник для студентів вищих навчальних технічних закладів. Харків : Фоліо, 2017. 780 с.

5. Булгаков В. М., Яременко В. В., Черниш О. М., Березовий М. Г. Теоретична механіка : підручник. Київ : Центр навчальної літератури, 2017. 640 с.

6. Іванов Г. О. Теоретична механіка. Статика : методичні рекомендації до виконання практичних робіт для до виконання практичних робіт для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «Молодший бакалавр» початкового рівня (короткий цикл) спеціальності 208 «Агроінженерія» денної форми навчання / уклад. Г. О. Іванов, П. М. Полянський, С. М. Степанов, О. В. Баранова. Миколаїв : МНАУ, 2021. 90 с.

7. Іванов Г. О. Теоретична механіка. Статика : методичні рекомендації до вивчення курсу лекцій для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «Бакалавр» спеціальностей 208 «Агроінженерія» та 015 «Професійна освіта (Аграрне виробництво, переробка сільськогосподарської продукції та харчові технології)» денної та заочної форм навчання навчання / уклад. Г. О. Іванов, П. М. Полянський, С. М. Степанов, О. В. Баранова. Миколаїв: МНАУ, 2021. 103 с.

8. Лобас Л. Г., Лобас Людм. Г. Теоретична механіка : підручник для студентів вищих навчальних технічних закладів. Київ : ДЕТУТ, 2008. 406 с.

9. Сивак Р. І., Деревенько А. І. Теоретична механіка. Статика. Кінематика. Динаміка : навч. посібник. Вінниця : ВЦ ВДАУ, 2010. 91 с.

Навчальне видання

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Методичні рекомендації

Укладачі: **Баранова** Олена Володимирівна
Полянський Павло Миколайович
Іванов Геннадій Іванович
Степанов Сергій Миколайович

Формат 60х84 1/16. Ум. друк. арк. 5,7.
Тираж 30 прим. Зам. №

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Г. Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.