

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОГО ОСНОВАНИЯ ЖЕСТКОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО КАНАЛА С ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Доктор физ.-мат. наук, **Кононов Ю. Н.**, Украина, Славянск, Институт прикладной математики и механики Национальной академии наук Украины

Кандидат физ.-мат. наук, **Лимарь А. А.**, Украина, Николаев, Николаевский национальный аграрный университет

Кандидат тех. наук, **Бобров М. Н.**, Украина, Николаев, Национальный университет кораблестроения

Кандидат тех. наук, **Лабарткава А. В.**, Украина, Николаев, Национальный университет кораблестроения

Abstract. In a linear formulation, the joint natural vibrations of the elastic bottom of a rigid rectangular channel and an ideal incompressible fluid are investigated. The rectangular channel has an elastic bottom in the form of a clamped rectangular plate. It is shown that the frequency equation splits into two equations describing even and odd frequencies and can be written in a single form for these frequencies. An approximate formula for high frequencies is obtained from which it follows that the dependence of the square of the frequency on the bending stiffness and prestressing is linear in nature and the highest frequency value is achieved for the inertia-free plate. The approximate stability conditions for joint vibrations of the elastic bottom and liquid are derived. These conditions are independent of the depth of the liquid and the mass of the plate. In the absence of plate pretension, the exact conditions for the stability of the vibrations of the elastic base and fluid are obtained. It is shown that the approximate value of the critical dimensionless bending stiffness for asymmetric frequencies is underestimated by 0.952 times, and for symmetric ones, by 0.930 times.

Keywords: hydroelasticity, elastic rectangular plate, ideal incompressible fluid, rectangular channel, flat oscillations, stability.

Введение. При транспортировке и хранении жидких грузов в больших резервуарах возникает необходимость в учете упругих и массовых характеристик основания на частотный спектр и устойчивость совместных колебаний основания и жидкости. Наиболее актуальна эта проблема возникает при работе и охлаждении ядерных реакторов. В статье рассмотрена модельная плоская гидроупругая задача о совместных колебаниях упругого основания жесткого прямоугольного канала с идеальной несжимаемой жидкостью. Работа продолжает исследования, начатые в KONONOV, LYMAR (2016), KONONOV, LYMAR (2017) and KONONOV, LYMAR (2016) and KONONOV, LYMAR (2018).

Результаты исследования. Рассмотрены в линейной постановке плоские колебания упругого основания жесткого прямоугольного канала с идеальной несжимаемой жидкостью. Упругое основание представлено в виде заземленной прямоугольной пластины с изгибной жесткостью D и подвержена растягивающим ($T > 0$) или сжимающим ($T < 0$) усилиям интенсивности T в срединной поверхности. Канал шириной b ($b = 2a$) и высотой h заполнен полностью идеальной несжимаемой жидкостью плотности ρ (рис.1).

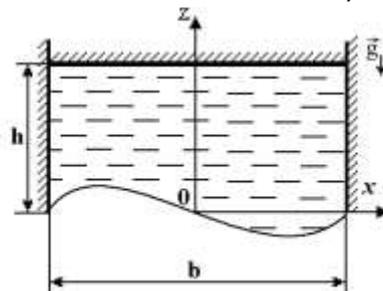


Рис. 1. Жесткий прямоугольный канал с идеальной жидкостью и упругим основанием в виде пластины

Колебания пластины и жидкости удовлетворяют системе интегро-дифференциальных уравнений

$$k_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + D \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - T \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - g \rho W = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \ddot{W}_n}{k_n} \psi_n + Q + P_0, \quad W_n = \frac{1}{N_n^2} \int_{-a}^a W \psi_n dx, \quad (1)$$

и граничным условиям KONONOV, LYMAR (2017):

$$W|_{x=\pm a} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=\pm a} = 0. \quad (2)$$

$$\int_{-a}^a W dx = 0. \quad (3)$$

Здесь $k_0 = \rho_0 h_0$; $W(x, t)$, ρ_0 , h_0 – соответственно нормальный прогиб, плотность и толщина пластины; $a_n = \rho \coth \kappa_n$, $\kappa_n = h k_n$, $\psi_n(x) = \cos k_n(x + a)$; Q – произвольная функция времени; P_0 – заданное внешнее давление на основание; $N_n^2 = \int_{-a}^a \psi_n^2 dx = a$.

Таким образом, совместные колебания упругой пластины и жидкости находятся из системы интегро-дифференциальных уравнений (1), граничных условий закрепления пластины (2), условий несжимаемости жидкости (3) и заданных начальных условий.

Собственные совместные колебания упругой пластины и жидкости определяются из следующей краевой задачи:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - p \frac{d^2 w}{dx^2} - q w = \frac{\omega^2}{D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n w_n}{k_n} \psi_n + C, \quad (4)$$

$$w_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a w \psi_n dx, \quad \int_{-a}^a w dx = 0, \quad (5)$$

$$w|_{x=\pm a} = 0, \quad (6)$$

где $p = T/D$, $q = (k_0 \omega^2 + g \rho)/D > 0$, $C = (\tilde{Q} + \tilde{P}_0)/D$.

Решение краевой задачи (4)-(5) имеет вид аналогичный [1]

$$w = \sum_{k=1}^4 \left(w_k^0 - \tilde{w}_k^0 - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n E_{kn}^0}{\omega^2 \tilde{a}_n - k_n \tilde{d}_n} \psi_n \right) A_k^0. \quad (7)$$

Здесь $w_k^0 = \{\sinh p_1 x, \cosh p_1 x, \sin p_2 x, \cos p_2 x\}$, $p_{1,2} = \pm p/2 + \sqrt{p^2/4 + q}$, $\tilde{a}_n = a_n + k_n k_0$, $\tilde{w}_k^0 = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a w_k^0 dx = \left\{ 0, \frac{\sinh \tilde{p}_1}{p_1}, 0, \frac{\sin \tilde{p}_2}{p_2} \right\}$, $E_{kn}^0 = \frac{1}{a} \int_{-a}^a w_k^0 \psi_n dx$, $d_n = (D k_n^2 + T) k_n^2 - g \rho - k_0 \omega^2$, $\tilde{d}_n = (D k_n^2 + T) k_n^2 - g \rho$, $\tilde{p}_i = a p_i$, а A_k^0 – неизвестные константы.

Из граничных условий закрепления пластины (6) имеем четыре линейных однородных уравнений относительно неизвестных A_k^0

$$\sum_{k=1}^4 \left(B_{1k} - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n E_{kn}^0 B_{1n}^* \right) A_k^0 = 0, \quad \sum_{k=1}^4 C_{1k}^0 A_k^0 = 0, \quad (8)$$

$$\sum_{k=1}^4 \left(B_{2k} - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n E_{kn}^0 B_{2n}^* \right) A_k^0 = 0, \quad \sum_{k=1}^4 C_{2k}^0 A_k^0 = 0,$$

где

$$B_{jk} = w_k^0 \Big|_{x=\pm a} - \tilde{w}_k^0, B_{jn}^* = \begin{cases} 1, j=1 \\ (-1)^n, j=2 \end{cases}, C_{jk}^0 = \frac{dw_k^0}{dx} \Big|_{x=\pm a}, \quad (9)$$

$$\alpha_n = \frac{a_n}{\omega^2 a_n - k_n d_n} = \frac{a_n}{\omega^2 \tilde{a}_n - k_n \tilde{d}_n}.$$

Из равенства нулю определителя однородной системы (8) следует частотное уравнение собственных совместных колебаний упругой пластины и жидкости

$$\left\| \|C_{qk}\|_{q,k=1}^4 \right\| = 0 \quad (10)$$

Здесь

$$C_{11} = \sinh \tilde{p}_1 - \omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{2m-1} E_{1,2m-1}^0, C_{12} = \cosh \tilde{p}_1 - \frac{\sinh \tilde{p}_1}{p_1} - \omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{2m} E_{2,2m}^0,$$

$$C_{13} = \sin \tilde{p}_2 - \omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{2m-1} E_{3,2m-1}^0, C_{14} = \cos \tilde{p}_2 - \frac{\sin \tilde{p}_2}{p_2} - \omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{2m} E_{4,2m}^0,$$

$$C_{21} = p_1 \cosh \tilde{p}_1, C_{22} = -p_1 \sinh \tilde{p}_1, C_{23} = p_2 \cos \tilde{p}_2, C_{24} = -p_2 \sin \tilde{p}_2, \quad (11)$$

$$C_{31} = -C_{11}, C_{32} = C_{12}, C_{33} = -C_{13}, C_{34} = C_{14}, C_{41} = C_{21}, C_{42} = -C_{22}, C_{43} = C_{23}, C_{44} = -C_{24}.$$

Воспользовавшись разложением функций w_k^0 в ряд по полной и ортогональной системе собственных функций $\psi_n(x)$, коэффициенты $C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}$ можно упростить и представить в виде

$$C_{11} = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m-1} E_{1,2m-1}^0, C_{12} = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m} E_{2,2m}^0, C_{13} = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m-1} E_{3,2m-1}^0, C_{14} = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m} E_{4,2m}^0,$$

где
$$\beta_n = 1 - \omega^2 \alpha_n = -\frac{k_n d_n}{\omega^2 \tilde{a}_n - k_n \tilde{d}_n}.$$

В этом случае определитель уравнения (11) приводится к блочному виду с двумя нулевыми блоками и уравнение (11) распадается на два уравнения, описывающих несимметричные и симметричные частоты. После упрощения частотное уравнение (11) примет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{\omega^2 \tilde{a}_n - k_n \tilde{d}_n} = 0 \quad (12)$$

При вырождении пластины в мембрану в коэффициенте \tilde{d}_n следует положить $D = 0$.

Таким образом, частотное уравнение (11) распалось на два уравнения, описывающих нечетные ($n = 2m - 1$) и четные ($n = 2m$) частоты и может быть записана в единой форме (12) для этих частот. Следует отметить, что такого упрощения удалось достигнуть за счет разложения функции w_k^0 в ряд по полной и ортогональной системе собственных функций $\psi_n(x)$. Собственные формы колебаний пластины определяются из формулы (7) с учетом уравнений (8) и соотношений (9).

Левая часть уравнения (12) является монотонно возрастающей функцией параметра ω^2 на интервале $(k_n \tilde{d}_n / \tilde{a}_n, k_{n+1} \tilde{d}_{n+1} / \tilde{a}_{n+1})$ ($n = 1, 2, \dots$), принимающая на нем значения от $-\infty$ до ∞ .

Следовательно, между двумя последовательными значениями $k_n \tilde{d}_n / \tilde{a}_n$ лежит только один корень уравнения (12). Этим заранее определяются интервалы, в которых находятся собственные частоты. С увеличением числа членов ряда будут уточняться предыдущие корни и появляться новые. Квадраты высоких частот ($n \gg 1$) будут мало отличаться от величины

$$\omega_n^2 = k_n \left[\left(D k_n^2 + T \right) k_n^2 - g \rho \right] / \left(\rho \coth k_n + k_n k_0 \right).$$
 Из этого равенства следует, что $D k_n^2 + T > g \rho / k_n^2$, зависимость ω_n^2 от D и T носит линейный характер и наибольшее значение квадрата частоты ω_n^2

будет достигаться при $k_0 = 0$, т. е. для безынерционной пластины. Квадраты частот ω_n^2 слабо зависят от глубины заполнения жидкости h и будут убывать только при существенном ее уменьшении.

Таким образом, рассматриваемая задача имеет бесконечный дискретный спектр собственных значений ω_l^2 , являющихся корнями уравнения (12), а соответствующие им собственные функции $w_l(x)$ образуют полную ортогональную систему функций на отрезке $[-a, a]$.

Однако, рассматриваемая задача имеет ряд физических особенностей. Для того, чтобы не было разрыва сплошности (образования кавитации) давление внутри жидкости должно быть неотрицательно. Для этого внешнее давление на нижнее упругое основание P_0 должно удовлетворять неравенству $P_0 \geq g(\rho h + k_0)$. Это неравенство не учитывает величин изгибной жесткости D и натяжения T . Естественно, что за счет увеличения этих величин всегда можно добиться положительности давления внутри жидкости. Критические значения натяжения будут найдены из условий устойчивости совместных колебаний пластины и жидкости.

Частотное уравнение (12) можно получить из уравнений работ [1-2], если в них формально положить плотность нижней жидкости равной нулю ($\rho_2 = 0$).

Условия устойчивости совместных колебаний пластины и жидкости можно определить из уравнения (12). Для этого в ряде уравнения (25) следует удержать два члена и из неравенства $\omega^2 > 0$ будет следовать условие устойчивости колебаний пластины и жидкости $\tilde{d}_1 + \tilde{d}_2 > 0$. Это условие для нечетных ($n = 1, 3$) и четных ($n = 2, 4$) частот запишется так:

$$2.05\pi^2 D + Ta^2 > 4g\rho a^4 / 5\pi^2, (n = 1, 3), \quad 3.4\pi^2 D + Ta^2 > 2g\rho a^4 / 5\pi^2, (n = 2, 4). \quad (13)$$

Условия устойчивости (13) не зависят от глубины заполнения жидкости и массы пластины. Из них видно, что для устойчивости несимметричных колебаний нужна в два раза большая величина предварительного натяжения, чем для симметричных, а также то, что при сжатии пластины ($T < 0$) устойчивость совместных колебаний ухудшается.

Для уточнения условий (13) поступим следующим образом KONONOV, LYMAR (2018). В уравнении (12) положим $\omega^2 = 0$ и разрешим полученное уравнение относительно критических значений параметров. При $\omega^2 = 0$ уравнение (12) примет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 / \left[(Dk_n^2 + T)k_n^2 - g\rho \right] = 0. \quad (14)$$

При $T = 0$ ($D \neq 0$) уравнение (14) можно переписать так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 / (n^4 - \alpha^4) = 0, \quad (15)$$

где $\alpha^2 = 16g\rho a^4 / D\pi^4 > 0$.

Числовые ряды $\sum_{n=1}^{\infty} 1 / (n^4 - \alpha^4)$ для нечетных ($n = 2m - 1$) и четных ($n = 2m$) значений n могут быть представлены следующим образом:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^4 - \alpha^4} = \frac{\pi}{8} \frac{\tan \frac{\pi\alpha}{2} - \tanh \frac{\pi\alpha}{2}}{\alpha^3}, \quad (16)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2m)^4 - \alpha^4} = -\frac{1}{8} \frac{\pi\alpha \cot \frac{\pi\alpha}{2} + \pi\alpha \coth \frac{\pi\alpha}{2} - 4}{\alpha^4}. \quad (17)$$

Следует отметить, что при $T \neq 0$ ($\beta^2 = 4Ta^2 / D\pi^2 \geq 0$) числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1 / (n^4 + \beta^2 n^2 - \alpha^4)$ для нечетных и четных значений n имеют очень сложное представление, что затрудняет его дальнейшее использование.

Первый корень уравнения (15) при $n = 2m - 1$, с учетом (16), имеет вид $\frac{\pi\alpha}{2} = 3.926602312$ из которого следует следующее уточненное условие устойчивости

$$D > 0.0042066g\rho a^4. \quad (18)$$

Первый корень уравнения (15) при $n = 2m$, с учетом (17), имеет вид $\pi\alpha/2 = 5.2676575303$ из которого следует уточненное условие устойчивости

$$D > 0.00129876g\rho a^4. \quad (19)$$

Приближенные условия, выписанные из неравенств (13) для $n = 1,3$ и $n = 2,4$ при $T = 0$, запишется соответственно так

$$D > \frac{0.39024439}{\pi^4} g\rho a^4 = 0.00400624g\rho a^4, \quad D > \frac{0.1176471}{\pi^4} g\rho a^4 = 0.0012077626g\rho a^4. \quad (20)$$

Из сравнения точных условий устойчивости (18)-(19) и (20) следует, что, приближенное значение критической безразмерной жесткости для несимметричных частот является заниженным в 0.952 раза, а для симметричных – в 0.930 раз. Следует отметить близость приближенного значения и точного, т.е. учет двух членов ряда дает достаточную для практики точность.

Численные исследования показали, что зависимости квадрата безразмерной частоты $\Omega^2 = \frac{\rho b^5}{D} \omega^2$ от безразмерных величин $\gamma_0 = \frac{Tb^2}{D}$, $\tilde{h} = \frac{h}{b}$, $\tilde{k}_0 = \frac{k_0}{\rho b}$ носят линейный характер за исключением \tilde{h} . С увеличением \tilde{h} примерно до 0.5 для несимметричных частот и до 0.25 для симметричных частот существенно возрастают и при $\tilde{h} > 1$ почти постоянны. С уменьшением массы пластины частоты возрастают и принимают наибольшее значение для безынерционной пластин. При нарушении условий устойчивости (13) квадраты частот принимают неположительные значения. С увеличением числа членов в ряде частотного уравнения происходит уточнение предыдущих частот и появление новых. Для получения приемлемой точности достаточно учесть 10-20 членов ряда. При учете 20 членов ряда погрешность в определении частот составляет около 3%. Графики для симметричных частот качественно не отличаются от графиков для несимметричных частот и, как правило, их значения примерно в 3-5 раз больше значений для нечетных частот. Численные исследования подтвердили предварительно сделанные аналитические выводы для высоких частот ($n \gg 1$), которые имеют место и для низших частот.

Выводы. На основании проведенных аналитических и численных исследований можно сделать следующие выводы:

Собственные совместные колебания пластины и жидкости для несимметричных и симметричных частот представлены в единой форме удобной для аналитических и численных исследований.

Получена приближенная формула для высоких частот, из которой следует, что зависимость квадрата частоты от изгибной жесткости и предварительного натяжения носит линейный характер и наибольшее значение частоты достигается для безынерционных пластин.

Выведены приближенные условия устойчивости совместных колебаний пластины и жидкости из которых видно, что они не зависят от глубины заполнения жидкости и массы пластины. Для устойчивости несимметричных колебаний нужна в два раза большая величина предварительного натяжения, чем для симметричных, а также то, что при сжатии пластины ($T < 0$) устойчивость совместных колебаний ухудшается.

При отсутствии предварительного натяжения пластины удалось получить точные условия устойчивости, из которых следует, что приближенное значение критической безразмерной изгибной жесткости для несимметричных частот является заниженным в 0.952 раза, а для симметричных – в 0.930 раз.

Численные исследования показали, что зависимости квадрата безразмерной частоты Ω^2 от безразмерных величин γ_0 , \tilde{k}_0 носят линейный характер.

С увеличением безразмерной глубины заполнения \tilde{h} примерно до 0.5 для несимметричных частот и до 0.25 для симметричных частот существенно возрастают и при $\tilde{h} > 1$ почти постоянны.

С уменьшением массы пластины частоты возрастают и принимают наибольшее значение для безинерционных пластин.

С увеличением числа членов в ряде частотного уравнения происходит уточнение предыдущих частот и появление новых.

Для получения приемлемой точности достаточно учесть 10-20 членов ряда. Графики для симметричных частот качественно не отличаются от графиков для несимметричных частот.

Исследования выполнены в рамках программы фундаментальных исследований Министерства образования и науки, проект № 0119U100042.

ЛИТЕРАТУРА

1. Yu.N. KONONOV, A.A. LYMAR (2016) Stability of elastic plate, dividing the two-layer ideal liquid in the rectangular channel. Book of Abstracts *5th International Conference of Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky*, Kyiv, Ukraine. Vinnytsa 2016 79–80.
2. Yu.N. KONONOV, A.A. LYMAR (2017) On the oscillation of a rectangular plate separating ideal liquids of different densities in a rectangular channel with one elastic base. *Problems of computational mechanics and structural strength. Collection of scientific works* 26 79-96 (in Ukraine).
3. Yu.N. KONONOV, A.A. LYMAR (2017) Oscillations of a rectangular plate separating ideal liquids of different densities in a rectangular channel with elastic bases. *News of the Zaporizhzhya National University. Physics and mathematics* 2017 1 190–204 (in Ukraine).
4. Yu.N. KONONOV, A.A. LYMAR (2017) Oscillations of rectangular plate separating ideal liquids of different density in a rectangular channel with else basis. *International Conference Differential Equations, Mathematical Physics and Applications*, October 17-19, 2017, Cherkasy, Ukraine. Book of Abstracts 31–33.
5. Yu.N. KONONOV, A.A. LYMAR (2018) On the update of the conditions of the stability of vibrations of the plate separating ideal liquids in a rectangular channel with hard foundations, *Intern. Journal of Mechanical Engineering and Information Technology* 06(1) 1755-1760.