

МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА О КОЛЕБАНИИ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ В ЖИДКОСТИ

Конопов Ю. П.¹, Лимарь А. А.²

¹ «Донецкий национальный университет им. В. Стуса», Винница, Украина

² ННАУ «Николаевский национальный аграрный университет»,

Николаев, Украина

Во многих технологических процессах возникает задача о колебании упругой пластины в жидкости или задача о колебании упругой пластины, разделяющей жидкости разной плотности. Наиболее простой и в то же время сохраняющей основные свойства гидроупругости, с математической точки зрения, является модельная задача о колебании защемленной прямоугольной пластины, разделяющей идеальные несжимаемые жидкости разной плотности в жестком прямоугольном канале. На основании единого Лагранжевого подхода эта задача с учетом свободной поверхности у верхней жидкости, по-видимому, впервые была

рассмотрена в [1]. В данной работе эта задача рассмотрена на основании Эйлера подхода, как с учетом наличия свободной поверхности у верхней жидкости, так и при наличии твердой "крышки" на ней (жесткое верхнее основание).

Собственные совместные колебания упругой пластины и двухслойной жидкости со свободной поверхностью находятся из следующей краевой задачи:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - P \frac{d^2 w}{dx^2} + qw = \frac{\omega^2}{D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^* w_n}{k_n} \psi_n, \quad \int_{-a}^a w dx = 0, \quad w|_{x=\pm a} = 0, \\ \frac{dw}{dx} \Big|_{x=\pm a} = 0. \quad (1)$$

Здесь $P = T/D$, $q = (k_{01}\omega^2 - g\Delta\rho)/D$, $a_n^* = a_n - \bar{b}_n$.

$$k_{01} = \rho_0 \delta_0, \quad \kappa_m = h_1 k_n, \quad a_n = \rho_1 \coth \kappa_{1n} + \rho_2 \coth \kappa_{2n}.$$

$$\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1, \quad \psi_n(x) = \cos k_n(x+a), \quad \bar{b}_n = \frac{2\omega^2 \rho_1}{(\omega^2 - \sigma_n^2) \sinh 2\kappa_{1n}}.$$

$$w_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a w \psi_n dx, \quad k_n = \frac{\pi n}{2a}, \quad \sigma_n^2 = g k_n \tanh \kappa_{1n}, \quad 2a - \text{ширина канала.}$$

Случай $D=0$ и $\bar{b}_n=0$ был рассмотрен в [2].

Собственные совместные колебания упругой пластины и жидкости в прямоугольном канале с жесткими основаниями, т.е. с "крышкой" на свободной поверхности следуют из краевой задачи (1), если положить коэффициент $\bar{b}_n=0$. Это имеет физическое объяснение, т.к. с увеличением глубины заполнения верхней жидкости этот коэффициент стремится к нулю как $e^{-2\kappa_{1n}}$. Таким образом, при $h_1/2a > 1$ влиянием свободной поверхности на частотный спектр можно пренебрегать.

Частотное уравнение собственных совместных колебаний упругой пластинки и жидкости имеет единый вид как для нечетных ($n=2m-1$), так и для четных ($n=2m$) форм колебаний

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{\omega^2 a_n^* - k_n d_n} = 0, \quad (2)$$

$$\text{где } d_n = (Dk_n^2 + T)k_n^2 + g\Delta\rho - k_{01}\omega^2.$$

Проведены численные исследования частотного уравнения для большого числа параметров, рассматриваемой механической системы. Так, например, на

рис. 1-2 для жесткого прямоугольного канала представлены графики зависимости квадрата первой безразмерной симметричной частоты Ω^2 ($\Omega^2 = 32\omega^2 \rho_2 a^5 / D$) от безразмерной величины натяжения γ_0^2 ($\gamma_0^2 = 4Ta^2 / D$) для $\bar{g} = 100$, $\rho_{12} = 0.5$ ($\rho_{12} = \rho_1 / \rho_2$, $\bar{g} = 16ga^4 / D$) (рис.1) и $\bar{g} = 10$, $\rho_{12} = 0$ (рис.2). На всех рисунках $H_1 = H_2 = 1$, а значению $\bar{k}_0 = 0$ ($H_i = h_i / 2a$, $\bar{k}_0 = k_{01} / 2a\rho_2$) отвечает верхний график, $\bar{k}_0 = 0.5$ – средний график и $\bar{k}_0 = 1$. – нижний график (на рис.1 это верно для $\gamma_0^2 < 40$).

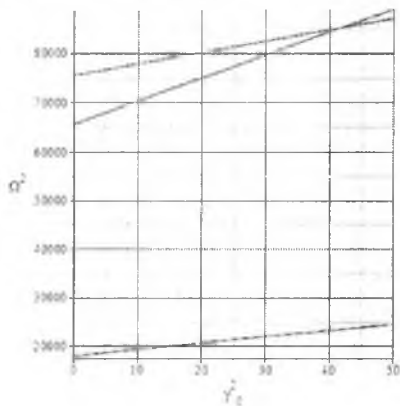


Рисунок 1 – Зависимость квадрата первой безразмерной симметричной частоты от величины γ_0^2 при $\rho_{12} = 0.5$ и $\bar{g} = 100$

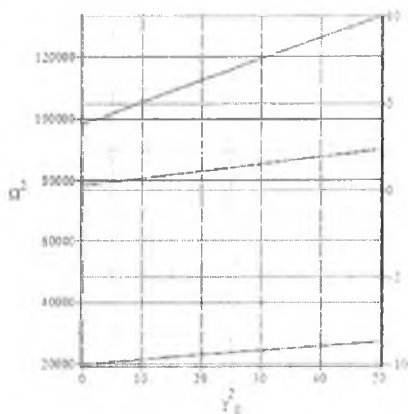


Рисунок 2 – Зависимость квадрата первой безразмерной симметричной частоты от величины γ_0^2 при $\rho_{12} = 0.0$ и $\bar{g} = 1.0$

Графики для симметричных частот качественно не отличаются от графиков для несимметричных частот и, как правило, значения четных частот примерно в пять раз больше соответствующих значений нечетных частот. На основании проведенных аналитических и численных исследований можно сделать следующие общие выводы как для четных, так и для нечетных частот:

1. При увеличении предварительного натяжения пластины или при уменьшении жесткости пластины частоты возрастают. Зависимость квадрата безразмерной частоты от величины γ_0^2 линейная.

2. С уменьшением плотности верхней жидкости частоты возрастают и принимают наибольшее значение при отсутствии верхней жидкости, а с увеличением плотности верхней жидкости частоты убывают и при малой изгибной жесткости и малом натяжении пластины могут обратиться в ноль, что приведет к потере устойчивости плоской формы равновесия пластины.

3. С уменьшением массы пластины частоты возрастают и принимают наибольшее значение при отсутствии массы, т.е. для без инерционных пластин.

Публікація містить результати досліджень, проведених за грантової підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень за конкурсним проєктом Ф71/80-2016

Список литературных источников

1. Ильгамов М.А. Об устойчивости упругой пластины между жидкостями разной плотности / М. А. Ильгамов, Ж. М. Сахабутдинов // Изб. проблемы прикл. механики. Сб. статей к шестидесятилетию акад. Н. Челомея. – М., 1974. – С. 341-346.

2. Кононов Ю. Н. Колебания прямоугольной мембраны, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с жесткими основаниями / Ю. Н. Кононов, А. А. Лимарь // Вісник Донецького ун-ту. Сер.А. Природничі науки. – 2015, №1-2 – С. 97-108.