

# Моделювання в економіці та управління проектами

УДК 519.2:621.658.512

В.М. Бурдейная, М.В. Денисенко, Н.А. Горбенко

*Украинская инженерно-педагогическая академия, Харьков*

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КАЧЕСТВА ПРОЦЕССОВ СИСТЕМЫ МЕНЕДЖМЕНТА КАЧЕСТВА

*В статье проведен анализ подходов для определения закона распределения случайной величины и критериев для проверки гипотез в математической статистике. Предложена чувствительная характеристика для оценивания закона распределения случайных величин. Выведены две оценки чувствительной характеристики, с помощью которых можно проверить распределение случайных величин на адекватность. Разработана методика оценки (идентификации) закона распределения показателей качества процессов, как случайной величины.*

**Ключевые слова:** гипотеза, закон распределения, случайная величина, характеристика, методика.

### Введение

В современных условиях рыночных отношений между предприятиями, важной их характеристикой является способность адаптироваться к внешней среде, что, в значительной степени, зависит от качества управления. Анализ опыта развития ведущих и успешных предприятий стран-лидеров мировой экономики показал, что для достижения поставленных целей в области качества, необходимо разрабатывать, внедрять и сертифицировать систему управления качеством, соответствующую требованиям международных стандартов ISO серии 9000.

**Актуальность исследования та постановка проблемы.** Одной из главных особенностей стандартов ISO серии 9000 является формулирование принципа постоянного улучшения. Стандарт ДСТУ ISO 9000:2007 содержит определение этого принципа и методологию его реализации [1]. В разделе 4.1 ДСТУ ISO 9001:2009 сформулированы требования относительно постоянного улучшения, где указано, что организация должна принимать меры, необходимые для достижения запланированных результатов и постоянного улучшения процессов организации. Кроме того, вопросы измерения, анализа и постоянного улучшения результативности СМК предприятия раскрыты в виде требований 8-го раздела стандарта [1].

Переходя на язык международного стандарта, ДСТУ ISO 9001:2009, процессы должны быть количественно оценены и, при необходимости, должны быть внедрены корректирующие и предупреждающие действия. Оценивание качества процессов не может ограничиваться точечной оценкой, так как цель оценивания - управление. Так как динамические характеристики или процесс рассеяния показате-

лей качества во времени «временной ряд» представляет собой сложную совокупность явлений, определяемые большим количеством факторов и большинство из них может изменяться во времени, то необходимо провести полный и всесторонний анализ данного временного ряда, с целью выявления присутствия или отсутствия любых закономерностей. Ведь известно, что управлять можно только закономерными факторами, а случайные создают меру рассеивания, или ошибку, управления которой, пока, не получается.

**Анализ публикаций.** Можно проанализировать несколько подходов для определения закона распределения. Первый основан на математическом анализе, в основе которого лежит подбор подходящей функции для описания эмпирического распределения. Для определения того, насколько правильно эта функция описывает опытное распределение, используются различные критерии согласия (Мизеса, Пирсона, Колмогорова, и др.) [2, 3]. Другой подход основан на том, что каждому теоретическому закону распределения соответствует вполне определенные условия функционирования процессов. Зная и соблюдая эти условия, можно найти соответствующие им законы распределения.

Эти два подхода не всегда возможно применить, так как для первого подхода необходимо согласие эмпирических распределений с теоретическим и большие объемы статистической информации, что не гарантирует адекватности модели. Так как условия функционирования постоянно меняются, то второй подход требует полной априорной определенности, что практически всегда невозможно.

В [4] для оценки адекватности модели применялась чувствительная « $\lambda$ -характеристика». Известно [5],

что оценка «λ-характеристики» подвержена большим случайным вариациям, особенно к концу испытаний, когда число объектов остается невелико. Поэтому для достоверной оценки «λ-характеристики» необходимо располагать большой выборкой.

**Цель статьи.** Важное место в теории оценивания качества (квалиметрии) занимают законы распределения случайных величин и методы решения практических задач с их использованием. К настоящему времени, в промышленности имеется множество исследований, которые показали, что распределение различных показателей качества процессов могут подчиняться различным законам распределения, но наибольшей ложностью является правильно определить тот или иной закон, так как для этого необходимо иметь большой объем статистической информации о показателях качества. Поэтому целью статьи является разработать методику оценки (идентификации) закона распределения показателей качества процессов, как случайной величины.

### Чувствительная характеристика для оценивания распределения

Традиционный подход для определения закона распределения сводится к расчету параметров эмпирического распределения и принятию их в качестве оценок параметров генеральной совокупности с последующей проверкой сходимости эмпирического распределения с предполагаемым теоретическим распределением. Для проверки гипотез в математической статистике существует масса разнообразных критериев. Можно указать такие, как критерий Колмогорова, χ<sup>2</sup> Пирсона, ω<sup>2</sup> Мизеса и др. Использование классических критериев согласия, позволяет решить только задачу противоречит или нет та или иная гипотеза экспериментальной функции распределения. Недостатком такого подхода является то, что непротиворечие не всегда доказывает адекватность. Поэтому для выяснения адекватности модели распределения целесообразно использовать специальные эмпирические характеристики, чувствительные к функции распределения.

Можно предложить еще одну чувствительную к распределению характеристику – μ-характеристику, форма которой установленная по опытным данным, является одним из существенных оснований для выбора того или иного аналитического типа функции распределения. Оценка «μ-характеристики» имеет существенно меньшие случайные флуктуации, чем вычисленная по тем же данным оценка «λ-характеристики». Это объясняется лучшими статистическими свойствами оценок суммы по сравнению с оценками частных. Более того, оценка «μ-характеристики» достаточно чувствительная к правому «хвосту» распределения, что важно для исследований ограниченных справа моделей.

Введем «μ-характеристику». Пусть проводится n испытаний, тогда при значении r ≥ 0 останется примерно n P(R ≥ r) значений, которые примут свои значения больше, чем r, а к значению r+τ – n·P(R ≥ r+τ). Отношение этих количеств дает условную вероятность того, что значения превышают τ, при условии, что эти значения были при r.

$$P(R \geq \tau | r) = \frac{P(R \geq r + \tau)}{P(R \geq r)}. \quad (1)$$

Находим μ(r), интегрируя (1) в [r, ∞]:

$$\mu(r) = \int_0^{\infty} \frac{1-F(r+\tau)}{1-F(r)} d\tau = \frac{1}{1-F(r)} \int_r^{\infty} (1-F(z)) dz. \quad (2)$$

Можно показать, что, если «λ-характеристика» – возрастающая, то ln(1-F(r)) – выпуклая функция, откуда следует:

$$\mu(r) < 1/\lambda(r). \quad (3)$$

Если плотность распределения модели унимодальна (одновременна), то для r справедливо неравенство:

$$\mu(r) > 1/(2\lambda(r)).$$

Из этих двух неравенств следует, что, если λ(r) → ∞, (r → ∞), то μ(r) → 0.

Если продифференцировать выражение (2), то получается дифференциальное уравнение:

$$\mu'(r) = -1 + \lambda(r) \mu(r). \quad (4)$$

Если λ(r) – возрастающая функция, то в силу неравенства (3) λ(r) μ(r) < 1 и, следовательно, из (4) μ'(r) < 0 т.е. μ(r) убывает с ростом r.

При малых r, μ(r) не чувствительна к типу распределения.

Действительно,

$$\begin{aligned} \mu(r) &= \frac{1}{1-F(r)} \int_r^{\infty} [1-F(z)] dz = \frac{\mu(0) - \int_0^r [1-F(z)] dz}{1-F(r)} \approx \\ &\approx \frac{\mu(0) - \int_0^r [1-F(0) - F'(0)z] dz}{1-F(0) - F'(0)r} = \frac{\mu(0) - r + F'(0) \frac{r^2}{2}}{1 - \lambda(0)r} \cong \\ &\cong \frac{(\mu(0) - r)(1 + \lambda(0)r)}{1 - \lambda^2(0)r^2} \cong \mu(0) - [1 - \lambda(0)\mu(0)]r, \\ &\quad (r \leq \mu(0)). \end{aligned}$$

Таким образом, при малых r, μ(r) убывает (0 ≤ λ(0) μ(0) < 1) линейно, независимо от закона распределения. Для нахождения эмпирической оценки μ̃(r) достаточно предложить различные формулы для определения площади под кривой 1 – F(r) на малом отрезке [r<sub>i</sub>; r<sub>i+1</sub>]. Применяя формулу трапеций [4] имеем:

$$\Delta \tilde{S}_i = \int_{r_i}^{r_{i+1}} [1 - \tilde{F}(z)] dz \cong (r_{i+1} - r_i) \left[ 1 - \frac{\tilde{F}(r_i) + \tilde{F}(r_{i+1})}{2} \right], \quad (5)$$

где  $\tilde{F}(r_i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^i n_j$  и  $n_j$  – число значений точки  $r_j$ .

Располагая величинами  $\Delta \tilde{S}_i$  нетрудно вычислить « $\mu$ -характеристику», помня, что  $\tilde{\mu}(0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_{(i)}$  – это среднее значение. Тогда эмпирическая оценка « $\mu$  – характеристики» имеет вид:

$$\tilde{\mu}(r_{(i)}) = \left( \tilde{\mu}(0) - \sum_{i=1}^n \Delta \tilde{S}_i \right) / (1 - \tilde{F}(r_{(i)})). \quad (6)$$

Другой подход к эмпирической оценке « $\mu$ -характеристики» основывается на определении этой характеристики [6]. А именно, если в нашем распоряжении имеются данные порядковых статистик  $r_{(1)}, \dots, r_{(n)}$ , то эмпирическая оценка « $\mu$ -характеристики» получается так. Подсчитываются величины

$$\tau_0^{(j)}(r_i) = \tau_j - r_i \quad (7)$$

для тех значений  $\tau_j$ , которые не меньше, чем  $r_i$ . Пусть таких величин  $N$ . Тогда (с небольшим смещением)

$$\mu(r) \approx \bar{\tau}(r_i) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \tau_0^{(k)}(r_i). \quad (8)$$

Итак, имеются две оценки « $\mu$ -характеристики» (6) и (8), с помощью которых можно проверить распределение на адекватность.

### Методика применения чувствительной характеристики для идентификации закона распределения

Методика применения чувствительной характеристики для идентификации закона распределения заключается в следующем:

1. Проводим измерения показателей качества процессов во времени. Таких измерений должно быть достаточно много и их количество зависит от точности идентификации. Для процессов управления СМК достаточно таких 30 значений.

2. Строим графики теоретической « $\mu$ -характеристики», используя эмпирические значения, для оценки параметров распределений. « $\mu$ -характеристики» определяются по формулам:

– для закона равной вероятности:

$$\mu(x) = \frac{1}{b-x} \left( \frac{b^2 - a^2}{2} - b(x-a) + \frac{x^2 - a^2}{2} \right), \quad a < x < b;$$

– для закона Симпсона:

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{(b-a)^2}{(b-a)^2 - 2(x-a)^2} \left[ \frac{a+b}{2} - (x-a) + \frac{2(x-a)^3}{3(b-a)^2} \right], & a < x \leq \frac{a+b}{2}; \\ \frac{1}{2(b-x)^2} \left[ \frac{(a+b)(b-a)^2}{2} - \frac{2}{3}(b-x)^3 + \frac{1}{12}(b-a)^3 \right], & \frac{a+b}{2} < x \leq b; \end{cases}$$

– для нормального закона распределения:

$$\mu(x) = \int_x^\infty \left( \int_z^\infty e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x-a}{\sigma} \right)^2} dx \right) dz / \int_x^\infty e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x-a}{\sigma} \right)^2} dx.$$

3. Выстраиваем все значения в порядке возрастания, разбиваем величину размаха на  $\sqrt[3]{n}$  тервалов и считаем частоту попадания в каждый интервал.

4. По формулам (6) и (8) определяем эмпирическое значение « $\mu$ -характеристики» для каждого интервала.

5. Сравниваем эмпирические значения с теоретическими « $\mu$ -характеристиками» для различных законов распределения.

6. Делаем вывод о близости эмпирических значений с теоретической « $\mu$ -характеристикой».

### Вывод

Знание закона распределения позволяет решать практические задачи по малым выборкам, что очень важно, особенно при малом объеме статистической информации. Кроме того, знание закона распределения показателей качества процессов и продукции очень важно, так как это упрощает решение практических задач, связанных с оценкой, прогнозированием и управлением.

Предлагается для идентификации закона распределения использовать чувствительную « $\mu$ -характеристику», так как применяемые критерии согласия не гарантируют адекватности. Данная характеристика позволяет более точно определить закон распределения. Предложена методика применения « $\mu$ -характеристики» позволит ее использовать как промышленности так и при оценивании СМК.

### Список литературы

1. ДСТУ ISO 9001:2009. Системи управління якістю. Вимоги. – К.: Держстандарт України, 2009. – 72 с.
2. Розно М.И. Статистический контроль партий продукции по альтернативному признаку при измененном допуске / М.И. Розно // Надежность и контроль качества. – 1992. – № 2. – С. 44-52.
3. Янковский Б.Е. Информационный способ определения вида закона распределения / Б.Е. Янковский // Надежность и контроль качества. – 1971. – № 2. – С. 71-79.
4. Ламнауэр Н.Ю. Модель поля рассеивания погрешностей геометрической формы и ошибки взаимного расположения поверхностей. / Н.Ю. Ламнауэр, Р.М. Трищ // Вестник НТУ «ХПИ». – Х., 2004. – № 44. – С. 106-110.
5. Герцбах И.Б. Модели отказов. / И.Б. Герцбах, Х.Б. Кордонский. – М.: Советское радио, 1966. – 166 с.
6. Бермант А.Ф. Краткий курс математического анализа для вузов. / А.Ф. Бермант, И.Г. Арманович. – М.: Наука, 1966. – 736 с.

Поступила в редакцию 3.07.2014

Рецензент: д-р техн. наук проф. Р.М. Трищ, Украинская инженерно-педагогическая академия, Харьков.

**ІДЕНТИФІКАЦІЯ ЗАКОНУ РОЗПОДІЛУ ПОКАЗНИКІВ ЯКОСТІ  
ПРОЦЕСІВ СИСТЕМИ ЯКОСТІ МЕНЕДЖМЕНТУ**

В.М. Бурдейна, М.В. Денисенко, Н.В. Горбенко

*У статті проведено аналіз підходів для визначення закону розподілу випадкової величини і критеріїв для перевірки гіпотез у математичній статистиці. Запропоновано чутлива характеристика для оцінювання закону розподілу випадкових величин. Виведені дві оцінки чутливої характеристики, за допомогою яких можна перевірити розподіл випадкових величин на адекватність закону розподілу. Розроблена методика оцінки (ідентифікації) закону розподілу показників якості процесів системи менеджменту якості, як випадкової величини.*

**Ключові слова:** гіпотеза, закон розподілу, випадкова величина, характеристика, методика.

**IDENTIFICATION OF THE DISTRIBUTION OF THE QUALITY INDICATORS  
OF THE PROCESSES OF THE QUALITY MANAGEMENT SYSTEM**

V.M. Burdeina, M.V. Denysenko, N.V. Horbenko

*In the article the analysis of approaches to determine the distribution of the random variable and criteria for testing hypotheses in mathematical statistics. Proposed sensitive characteristics for estimation of the distribution law of random variables. Withdrawn two estimates delicate features, with which you can check the distribution of the random variables on the adequacy. The method (identification) of the law of distribution of parameters of quality of the processes of the quality management system as a random variable.*

**Keywords:** hypothesis, distribution law, random variable, characteristics, methods.