

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ БІЗНЕСУ ТА  
ІННОВАЦІЙНОГО РОЗВИТКУ**

**ФАКУЛЬТЕТ МЕНЕДЖМЕНТУ**  
Кафедра економічної кібернетики і математичного моделювання

# **ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ**

Конспект лекцій  
для здобувачів початкового рівня (короткий цикл) вищої освіти  
ОПП «Комп'ютерні науки» спеціальності 122 «Комп'ютерні  
науки» денної форми здобуття вищої освіти



Миколаїв  
2023

УДК 519.6  
Ч-66

Друкується за рішенням науково-методичної комісії факультету менеджменту Миколаївського національного аграрного університету від 08 березня 2023 року, протокол № 7.

**Укладачі:**

- О. В. Шобаніна – д-р екон. наук, професор, професор кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;
- С. І. Тищенко – канд. пед. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;
- І. І. Хилько – старший викладач кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет.
- В. О. Крайній – канд. екон. наук, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

**Рецензенти:**

- І. П. Атаманюк – д-р техн. наук, професор, професор кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет;
- А. В. Швед – д-р техн. наук, доцент кафедри інженерії програмного забезпечення, Чорноморський національний університет ім. Петра Могили.

**Чисельні методи** : конспект лекцій / О. В. Шобаніна, С. І. Тищенко, І. І. Хилько, В. О. Крайній. Миколаїв : МНАУ, 2023. 100 с.

Конспект лекцій призначений для вивчення теоретичних та інструментальних аспектів чисельних методів. Містить навчальні матеріали з основних тем курсу «Чисельні методи», що передбачені освітньо-професійною програмою «Комп'ютерні науки» початкового рівня (короткий цикл) вищої освіти за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки», галузі знань 12 «Інформаційні технології. До кожної теми подаються докладні теоретичні відомості та практичні приклади їх застосування. Даний посібник буде корисним здобувачам та викладачам вищої освіти.

УДК 519.6

© Миколаївський національний аграрний університет, 2023

## ЗМІСТ

Передмова.....	4
Тема 1. Задачі чисельних методів.....	5
Тема 2. Похибка результату чисельного рішення задачі.....	14
Тема 3. Інтерполяція функції.....	27
Тема 4. Апроксимація функції.....	41
Тема 5. Методи розв'язання нелінійних алгебраїчних рівнянь.....	49
Тема 6. Методи розв'язання систем алгебраїчних рівнянь.....	62
Тема 7. Чисельне диференціювання та інтегрування функцій.....	78
Тема 8. Методи розв'язання звичайних диференціальних рівнянь.....	89
Рекомендована література .....	98

## ПЕРЕДМОВА

Курс дисципліни «Чисельні методи» має важливе значення в теоретичній підготовці майбутніх фахівців і є обов'язковою компонентою математичної підготовки здобувачів вищої освіти спеціальності «Комп'ютерні науки».

Його значимість визначається не лише сучасними можливостями застосування методів цифровізації у навчальному процесі університету, але й проникненням чисельних алгоритмів наближеного рішення задач в різноманітних сферах економіки.

Враховуючи те, що застосування методів наближеного чисельного аналізу складні без суттєвої підготовки, майбутньому фахівцю належить глибоко розуміти суть наближених методів та оцінки похибок, знати їх обґрунтування і відповідний математичний інструментарій.

У посібнику розкрито основні теми курсу «Чисельні методи», що передбачені державними освітніми стандартами вищої освіти зі спеціальності «Комп'ютерні науки». Наведено нескладні методи наближень, які найбільш часто застосовуються для рішення різноманітних практичних задач.

Для успішного вивчення здобувачами курсу «Чисельні методи» достатньо знань розділів вищої математики, інформаційних систем та технологій.

Опанування тем дисципліни дозволяє сформувати у здобувачів вищої освіти визначену систему компетентностей та досягти очікуваних результатів навчання.

Посібник складено на основі ряду відомих підручників і посібників, зокрема [2, 9, 13, 14, 16]. Особливістю укладеного посібника є простота викладення теоретичного матеріалу на основі практичної його реалізації.

# ТЕМА 1. ЗАДАЧІ ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ

## План

1. Поняття про прикладну математику та чисельні методи.
2. Сутність чисельних методів. Загальні поняття.
3. Етапи розв'язання практичних задач на комп'ютері.
4. Переваги та недоліки чисельних методів.
5. Характеристики чисельних методів.

### 1.1. Поняття про прикладну математику та чисельні методи

Математика – наука про кількісні співвідношення та просторові форми дійсності, вона являє собою цілісну систему взаємопов'язаних понять, аксіом, теорем, операцій та правил їх виконання. Вона є однією з найдавніших наук і виникла як засіб відображення та перетворення дійсності, як потреба людини в обчисленнях та вимірюваннях.

Як і інші науки, математика ділиться на фундаментальну й прикладну, перша з яких розробляє математичні методи, а друга застосовує їх на практиці.

Розділ математики, що має справу з створенням та обґрунтуванням чисельних алгоритмів для рішення складних задач різних областей науки, називають *прикладною математикою*.

Головна задача прикладної (обчислювальної) математики – фактичне виявлення рішення з необхідною точністю. Цим вона відрізняється від класичної математики, яка основну увагу приділяє дослідженню умов існування та властивостей рішення.

В історії прикладної математики можна умовно виділити 3 періоди.

**Перший період** почався 3-5 тисяч років тому. Він був пов'язаний з веденням конторських книг, обчисленням площ і об'ємів, розрахунками простих механізмів; іншими словами – з нескладними задачами арифметики, алгебри та геометрії. Обчислювальними засобами служили спочатку власні пальці, а потім – рахівниці. Вихідні дані містять мало цифр, і більшість викладок виконано точно, без округлень.

**Другий період** почався з Ньютона. В цей період вирішені завдання астрономії, геодезії і розрахунку механічних конструкцій, що зводяться до звичайного диференціального рівняння, або до алгебраїчних систем з великим числом невідомих. Обчислення виконувались з округленнями; нерідко від результату вимагалась висока точність, тому доводилось зберігати до 8 значущих цифр.

Обчислювальні засоби стали різноманітними: таблиці елементарних функцій, потім арифмометр і логарифмічна лінійка. Швидкість цих засобів була невеликою, і розрахунки зайняли дні, тижні і навіть місяці.

**Третій період** почався приблизно в 40-х роках 20 століття. Військові задачі потребували недоступної для людини швидкості і привели до розробки ЕОМ. Швидкість навіть найпростіших ЕОМ настільки перевищувала швидкість механічних засобів, що стало можливим проводити обчислення великого об'єму. Це дозволило численно вирішувати нові класи задач. Для рішення багатьох задач досі використовують методи, розроблені в «доелектронний» період, але також з'явилося безліч нових чисельних методів.

Розповсюдженим способом рішення є застосування чисельних алгоритмів (чисельні методи). Їх існує велика кількість і спочатку вони не були пов'язані з використанням ЕОМ, а здійснювалися вручну. Поява комп'ютерів зробила дуже зручним і простим (оскільки вони використовуються в пакетах математичних програм) їх застосування.

**Чисельні методи** – це методи наближеного або точного розв'язування задач чистої або прикладної математики, які ґрунтуються на побудові послідовності дій над скінченною множиною чисел. Основні вимоги до чисельних методів, щоб вони були стійкими та збіжними.

Методи обчислень називаються **стійкими**, якщо результати неперервно залежать від вхідних даних задачі, або, якщо похибка округлення, пов'язана з реалізацією методів обчислень на комп'ютерах, залишається обмеженою при заданих межах зміни параметрів методів обчислень.

Методи обчислень називаються **збіжними**, якщо результати прямують до точного розв'язання задачі при прямуванні параметрів методів обчислень до певних граничних значень.

Основне питання теорії методів обчислень: отримання методів обчислень, які задовольняють вимогам високої точності, стійкості та економічності. Складання чисельних методів, що задовольняють цим вимогам, представляє собою складну задачу оптимізації методів обчислень.

## 1.2. Сутність чисельних методів. Загальні поняття

Сучасні чисельні методи націлені на розробку методів розв'язування складних задач математичної фізики і не тільки. Крім цього, є множина задач, пов'язаних зі статистикою, банківською справою, теорією страхування, багато екологічних задач. Все це відноситься до області чисельних методів і так званої обчислювальної математики. Може скластися враження, що до появи комп'ютерів чисельних методів не існувало, але насправді це звісно не так. Чисельні методи існували з тих пір як з'явилися числа, з появою чисел виникли і обчислення.

Для розв'язання математичних задач в основному існує три групи методів:

**Аналітичні методи**, в яких розв'язок задачі подається у вигляді аналітичних виразів. Їх перевагами є: запис розв'язку у загальному вигляді; висока точність і малий об'єм комп'ютерної пам'яті для зберігання розв'язку. Основний недолік – неуніверсальність, бо тільки невелика частина математичних задач може бути розв'язана аналітично.

**Графічні методи**, в яких розв'язок задачі знаходиться візуально. Їх перевагою є наочність. Недоліками графічних методів є: велика трудомісткість; низька точність (залежить від точності побудови графіків); неуніверсальність (графіки можна побудувати тільки для невеликої розмірності та ін.).

**Чисельні методи**, що дозволяють звести розв'язування задачі до виконання скінченного числа арифметичних і логічних дій з числами. При цьому розв'язок визначається як набір чисел, які надалі можуть бути інтерпретовані різним способом (наприклад, подані у вигляді таблиць, графіків, анімації тощо). Їх перевагами є: абсолютна універсальність, бо теоретично можуть бути застосовані для розв'язання будь-яких задач; добре пристосовані для реалізації на комп'ютері. Недоліком є велика

трудомісткість у ході ручного рахунку, що, зазвичай, не є проблемою, оскільки вони призначені для використання на комп'ютері.

Таким чином, чисельні методи є основним апаратом розв'язання математичних задач, а їх значущість тільки збільшуватиметься у міру вдосконалення комп'ютерної техніки.

Чисельні методи бувають двох типів: прямі та ітераційні. В *прямих методах* розв'язок задачі досягається за скінченну кількість кроків методу після виконання останнього кроку, в *ітераційних методах* виконується ряд ітерацій методу до отримання наближеного розв'язку із заданою точністю.

В основному чисельні методи є ітераційними.

*Ітерація* – це повторення сукупності операцій або процедур для покращення наявного (поточного) наближеного розв'язку задачі.

Нехай  $x^*$  – розв'язок задачі, тоді ітераційний метод буде так звану ітераційну послідовність  $\{x^{(k)}\} (k=0,1,2,\dots)$  наближень розв'язку, при цьому  $x^{(k)}$  повинно наближатися до  $x^*$  зі збільшенням  $k$ .

### Алгоритм ітераційного методу

1. Задається початкове наближення розв'язку  $x^{(0)}$  (на основі апріорних знань про задачу).

2. На  $k$ -й ітерації методу ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) буде поточне наближення розв'язку  $x^{(k)}$ . Далі обчислюється наступне наближення  $x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)})$ , де  $\Phi$  і є сукупністю операцій або процедур для покращення наближеного розв'язку задачі, яка є суттю конкретного чисельного методу.

3. Перевіряється критерій зупинення ітерацій, тобто перевіряється: чи є отримане наближення  $x^{(k+1)}$  розв'язку  $x^*$  достатньо близьким (до заданої точності). Якщо цього немає, то відбувається перехід до наступної ітерації, тобто до пункту 2.

Варто зазначити, що вид критерію зупинення ітерацій (тобто припинення обчислень за ітераційним методом) залежить від виду розв'язуваної математичної задачі.



### 1.3. Етапи розв'язання практичних задач на комп'ютері

Математика цікавить науковців не сама по собі, а як засіб розв'язання прикладних задач. Чисельні методи на даний час являються ключовим елементом математичного моделювання економічних, соціальних, фізичних, біологічних та інших об'єктів.

Розглянемо, як розв'язується будь-яка реальна задача. Один із способів розв'язання – експеримент. Отримаємо точну відповідь на запитання, але занадто повільним і дорогим способом. Інший спосіб – математичний аналіз конструкції або явища. Такий аналіз застосовується не для реальних явищ, а для деяких математичних моделей цих явищ.

У процесі рішення будь-якої задачі визначають 4 етапи (Рис. 1.1 1.1).

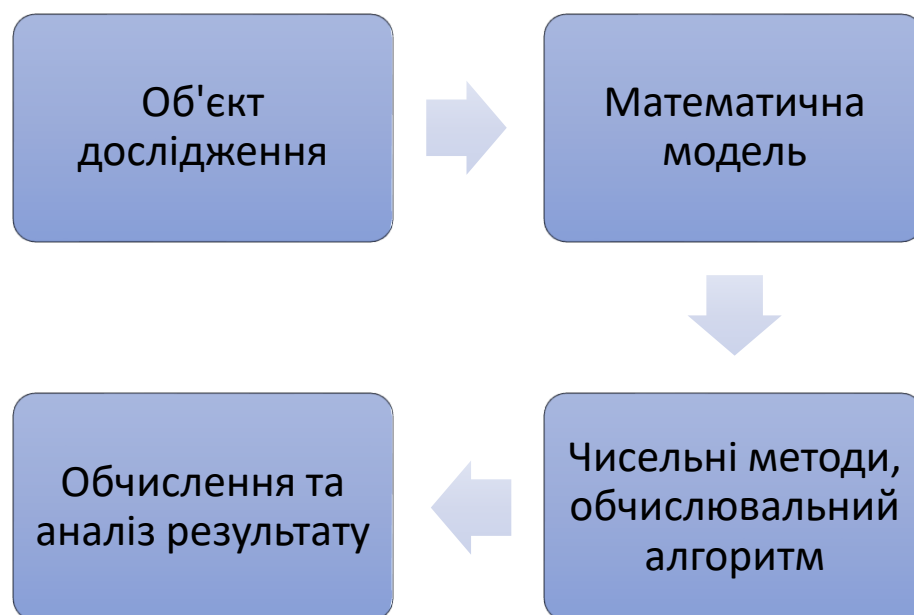


Рис. 1.1. Етапи рішення задачі

Визначення об'єкту дослідження включає точну постановку умов та цілей розв'язування задач. Далі, враховуючи найбільш суттєві властивості реального об'єкту дослідник описує їх за допомогою математичної моделі.

Існує певна послідовність створення методів обчислень, тісно пов'язана з математичним моделюванням. Для створення методів обчислень, які використовуються для рішення

прикладної задачі, як правило, виконують наступну послідовність етапів:

**1. Виконують аналіз предметної галузі дослідження, виділяють основні закономірності, зв'язки між ними і основні величини, які визначають процеси у досліджуваних об'єктах.** В кінці цього етапу формулюється задача дослідження.

**2. Створення математичної моделі об'єкта.**

*Математична модель* – це сукупність рівнянь і нерівностей, які визначають зв'язок між змінними задачі.

Будь-яке досліджуване явище нескінченно складне. Воно пов'язане з іншими явищами природи, які можуть бути не цікавими для задачі, яка розглядається. Математична модель має охоплювати найважливіші для даної задачі сторони явища. Найбільш складна і відповідальна робота при постановці задачі – полягає у виборі зв'язків та характеристик явища, суттєвих для даної задачі.

Якщо математична модель обрана недостатньо ретельно, то які б методи не використовувалися для обчислення – всі висновки будуть недостатньо надійними, а в деяких випадках зовсім неправильними.

**3. Створення методів обчислень, які дають можливість отримати рішення системи рівнянь і нерівностей. Етап математичного дослідження.**

Залежно від складності моделі застосовуються різні математичні підходи. Для більш грубих і нескладних моделей використовуються аналітичні методи. Через грубість моделі фізична точність цього підходу невелика: нерідко такий підхід дозволяє оцінити лише порядки величин. Для більш точних і складних моделей аналітичні розв'язки доводиться отримувати дуже рідко. Звичайно теоретики користуються наближеними математичними методами, які дозволяють отримувати задовільні якісні і кількісні результати. Для найбільш складних і точних моделей основним методом є чисельний.

У всіх випадках математична точність розв'язання має бути в декілька разів вищою, ніж очікувана фізична точність моделі. Шукати вищу математичну точність немає сенсу, так як на загальну точність відповіді це не вплине. Але нижча математична точність неприпустима.

**4. Тестування методу рішення математичної моделі.** Зазвичай виконують на прикладах відомих задач. Якщо рішення співпадають, то математичну модель і метод рішення признають створеними і рекомендують використовувати для моделювання. Інакше повертаються до першого етапу, удосконалюють постановку задачі і повторюють усі етапи до тестування.

**5. Виконання розрахунків, аналіз отриманих результатів, формулювання висновків і рекомендацій.**

#### **1.4. Переваги та недоліки чисельних методів**

Чисельні методи є одним із наймогутніших математичних засобів розв'язання задачі. Найпростіші чисельні методи ми використовуємо усюди, наприклад, добуваючи квадратний корінь на аркуші паперу. Існують задачі, де без достатньо складних методів обчислень не вдалося б отримати відповіді; класичний приклад – відкриття Нептуна за аномаліями руху Урану.

Сучасні чисельні методи і могутні електронні обчислювальні машини (ЕОМ) дали можливість вирішувати такі задачі, про які півстоліття назад люди могли тільки мріяти. Але застосовувати чисельні методи далеко не просто. Цифрові ЕОМ уміють виконувати тільки арифметичні дії і логічні операції. Тому крім розробки математичної моделі, потрібна ще розробка алгоритму, що зводить всі обчислення до послідовності арифметичних і логічних дій. Вибирати модель і алгоритм треба з урахуванням швидкості і об'єму пам'яті ЕОМ: занадто складна модель може виявитися машині не під силу, а дуже проста – не дасть фізичної точності. Сам алгоритм і програма для ЕОМ повинен бути ретельно перевірений. Перевірка алгоритму також складна процедура.

Строге математичне обґрунтування алгоритму рідко буває вичерпним дослідженням. Наприклад, більшість доказів збіжності ітераційних процесів справедливо лише при точному виконанні всіх обчислень; практично ж число десяткових знаків, що зберігаються, рідко становить 5-6 при «обчисленнях вручну» і 10-12 при обчисленнях на ЕОМ. Тому остаточну оцінку методу можна дати тільки після випробування його в практичних розрахунках.

Для складних задач розробка чисельних методів і складання програм для ЕОМ дуже трудомістка і займає від декількох тижнів до декількох років. Вартість комплексу налагоджених програм нерідко порівнянна з вартістю експериментальної фізичної установки. Зате проведення окремого розрахунку по такому комплексу набагато швидше і дешевше, ніж проведення окремого експерименту. Такі комплекси дозволяють підбирати оптимальні параметри досліджуваних конструкцій, що не під силу експерименту.

Проте чисельні методи не всесильні. Вони не заперечують всі інші математичні методи. Починаючи дослідження проблеми, доцільно використовувати найпростіші моделі та аналітичні методи. І лише у випадку чіткого розуміння основних понять явища, треба переходити до повної моделі і до використання складних методів обчислень; навіть в цьому випадку чисельні методи вигідно застосовувати в поєднанні з точними і наближеними аналітичними методами.

## 1.5. Характеристики чисельних методів

Для оцінки чисельних методів, тобто порівняння між собою методів для розв'язання однієї задачі, вводять такі їх основні характеристики:

- трудомісткість;
- порядок методу;
- збіжність;
- швидкість збіжності;
- стійкість до погрішностей обчислень;
- стійкість до погрішностей у відправних даних.

Під *трудомісткістю методу* розуміють кількість і якість обчислень, необхідних для досягнення достатньо близького наближення розв'язку задачі.

Під *порядком методу* розуміють вимоги до знань про функції, що входять у математичне формулювання задачі (наприклад, використання в методі похідних цих функцій):

- метод нульового порядку, якщо він використовує тільки значення цих функцій;
- метод першого порядку, якщо він використовує значення функцій і їх перших похідних;

– метод другого порядку, якщо він використовує значення і функцій та їх перших і других похідних і т. д.

Чисельний метод називається таким, що *збігається*, якщо наближення  $x^{(k)}$  прямує до розв'язку  $x^*$  зі збільшенням  $k$ . Очевидно, що методи, які не збігаються, не цікаві з прикладної точки зору. Тому одним з найважливіших етапів при введенні нового чисельного методу є теоретичне доведення його збіжності, тобто формулювання умов, за яких метод гарантовано збігається.

В основному розрізняють такі швидкості збіжності методів.

1. **Лінійна збіжність.** Говорять, що послідовність  $\{x^{(k)}\} (k = 0, 1, 2, \dots)$  лінійно збігається до розв'язку  $x^*$  (або зі швидкістю геометричної прогресії), якщо існують числа  $q \in (0, 1)$  і  $k_0 > 0$  такі, що

$$\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq q \|x^{(k)} - x^*\| \text{ для всіх } k \geq k_0.$$

Тут норма  $\|x - y\|$  означає відстань між  $x$  і  $y$ .

2. **Надлінійна збіжність.** Говорять, що послідовність  $\{x^{(k)}\} (k = 0, 1, 2, \dots)$  надлінійно збігається до розв'язку  $x^*$ , якщо існує послідовність  $\{q_k\} (k = 0, 1, 2, \dots)$ ,  $q_k \in (0, 1)$  для всіх  $k$ , така, що

$$\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq q_k \|x^{(k)} - x^*\| \text{ і } q_k \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

3. **Квадратична збіжність.** Говорять, що послідовність  $\{x^{(k)}\} (k = 0, 1, 2, \dots)$  квадратично збігається до розв'язку  $x^*$ , якщо існують числа  $C > 0$  і  $k_0 > 0$  такі, що

$$\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq C \|x^{(k)} - x^*\|^2 \text{ для всіх } k \geq k_0.$$

Під *стійкістю до погрешностей обчислень* розуміють те, що застосування чисельного методу приводить до розв'язку задачі на комп'ютері, незважаючи на помилки округлень і обчислень. Для цього в чисельних методах, якщо потрібно, передбачаються додаткові операції, що не змінюють суть методу, але забезпечують його стійкість до помилок обчислень.

Під *стійкістю до погрешностей у відправних даних* розуміють те, що при невеликих погрешностях у відправних даних застосування чисельного методу дозволяє отримати наближений розв'язок задачі з не дуже великою погрешністю. Стійкість до погрешностей у відправних даних досягається, як правило, шляхом модифікації чисельного методу, тобто внесенням змін до суті методу.

## ТЕМА 2. ПОХИБКА РЕЗУЛЬТАТУ ЧИСЕЛЬНОГО РІШЕННЯ ЗАДАЧІ

### План

1. Джерела і класифікація похибок.
2. Абсолютна і відносна похибки.
3. Значущі цифри. Вірні значущі цифри.
4. Оцінка похибки результату арифметичних дій.
5. Пряма і обернена задачі теорії похибок.

### 2.1. Джерела і класифікація похибок

Застосування теоретичних знань на практиці, часто обумовлює виникнення різноманітних похибок. Вони виникають при одночасній дії багатьох відомих та невідомих причин як об'єктивного, так і суб'єктивного характеру: впливу навколишнього середовища, недосконалості наших органів слуху, зору, реакції на спостереження тощо.

Існує чотири джерела похибок:

1. **Математична модель.** Похибка математичної моделі пов'язана з фізичними допущеннями і тут розглядатися не буде.

2. **Вихідні дані.** Вихідні дані, у більшості випадків, неточні.

Наприклад, це можуть бути експериментально виміряні величини. У прецизійних фізичних вимірюваннях точність сягає порядку  $10^{-12}$ , але вже характерна астрономічна та геодезична точність дорівнює  $10^{-6}$ , а в багатьох фізичних та технічних задачах похибка вимірювання становить 1-10%.

Похибка вихідних даних  $\Delta x$  приводить до, так званої, *неусувної похибки* розв'язання  $\Delta y = A(x + \Delta x) - A(x)$ .

3. **Наближений метод.** Похибка метода пов'язана з тим, що точні оператор і вихідні дані замінюються наближеними.

Наприклад, замінюють інтеграл сумою, похідну різницею, функцію многочленом або будують нескінченний ітераційний процес та переривають його після скінченної кількості операцій. Методи зазвичай будуються так, що в них входить деякий параметр; при прямуванні деякого параметра до певної границі похибка метода прямує до нуля, таким чином цю похибку можна регулювати. Похибку метода доцільно обирати так, щоб вона була 2-5 разів меншою ніж неусувна похибка, так як більша

похибка призведе до зниження точності відповіді, а помітно менша похибка – не вигідна, так як вимагає більшу кількість обчислень.

**4. Округлення при обчисленнях.** Будь-які обчислення виконують з певною кількістю значущих цифр. Це вносить у відповідь похибку округлення, яка накопичується в процесі обчислень. Будь-які обчислення виконуються з кінцевим числом розрядів. Решта розрядів числа відкидається, що і визначає похибка округлення. Чим більше кількість розрядів числа зберігається, тим менше похибка округлення. При виконанні рішення комп'ютером, похибка округлення зазвичай невелика.

## 2.2. Абсолютна і відносна похибки

Найконсервативнішою частиною чисельних методів є алгоритм.

**Алгоритм** – це послідовність дій, які приводять до розв'язку задачі з заданою похибкою за скінченну кількість кроків.

Будь-який алгоритм використовує три типи величин: константи, параметри та змінні.

**Константи** – величини, значення яких не змінюються.

**Параметри** – величини, які зберігають свої значення в процесі розв'язання першого варіанту завдання.

**Змінні** – величини, які змінюють свої значення в процесі розв'язання задачі.

При заданні величин і отриманні рішення задачі виникає похибка, яку необхідно враховувати у процесі рішення і при аналізі результатів. Зазвичай розглядають два види похибок: абсолютні і відносні.

**Абсолютна похибка** визначається, як модуль різниці наближеного і точного значення величини:

$$\Delta x = |x - \tilde{x}|,$$

де  $x$  – точне значення;  $\tilde{x}$  – наближене значення.

**Приклад.** При вимірюванні відрізка використовували лінійку, ціна поділки якої дорівнює 0,5 см. Отримали наближене значення довжини відрізка  $a = 125$  см. Зрозуміло, що при вимірюванні могли помилитися не більше ніж на 0,5 см, тобто

абсолютна похибка вимірювання дорівнює або не перевищує 0,5 см.

**Граничною абсолютною похибкою** називають число  $\Delta > 0$ , таке, що  $\Delta x = |x - \tilde{x}| \leq \Delta$ .

Гранична абсолютна похибка також називається границею похибки. Так, у вище наведеному прикладі  $\Delta = 0,5$  см.

**Відносна похибка** дорівнює відношенню абсолютної похибки до наближеного значення величини  $\varepsilon = \frac{\Delta x}{\tilde{x}}$

**Граничною відносною похибкою** називається число  $\varepsilon$ , таке, що  $\varepsilon \leq \varepsilon$ . За граничну відносну похибку можна взяти відношення граничної абсолютної похибки до абсолютної величини наближеного значення  $\varepsilon' = \frac{\Delta x}{|\tilde{x}|}$

### 2.3. Значущі цифри. Вірні значущі цифри

При обчисленнях часто доводиться мати справу з числами, які мають велику кількість значущих цифр. Незалежно від того, точні ці числа або наближені, частина цифр іноді доцільно відкидати. Мінімальна похибка округлення дає таке правило.

**Правило округлення чисел.** Щоб округлити число до  $n$  значущих цифр, відкидають всі його цифри, які стоять праворуч від  $n$ -ї значущої цифри, або, якщо це потрібно для збереження розрядів чисел, замінюють їх нулями. При цьому:

1) якщо перша (зліва) відкидається цифра менше 5, то все збережені цифри залишаються без зміни;

2) якщо перша відкидається цифра більше 5 або якщо вона дорівнює 5, але серед інших відкидаємих цифр є ненульові, то до останньої збереженої цифри додається одиниця;

3) якщо перша відкидається цифра дорівнює 5 і всі інші, які відкидаються цифри є нулями, то остання збережена цифра залишається незмінною, якщо вона парна, і збільшується на одиницю, якщо вона непарна.

**Приклад.** Округлимо число  $\pi = 3,1415926$ : до сотих  $\pi \approx 3,14$ , до тисячних  $\pi \approx 3,142$ , до десятитисячних  $\pi \approx 3,1416$ ; округлимо до сотих число  $25,31500 \approx 25,32$  число  $25,32500 \approx 25,32$ .



Нехай в результаті округлення числа  $a$  вийшло число  $\bar{a}$ . Воно має похибку  $a - \bar{a}$ , викликану цією операцією. Правило округлення гарантує, що  $|a - \bar{a}|$  не буде перевищувати половини одиниці розряду, де знаходиться остання залишена цифра.

**Приклад.** Округлимо число  $e = 2,7182$  до двох значущих цифр  $\bar{e} \approx 2,72$ . Бачимо, що

$$|e - 2,72| = |-0,0018| \leq 0,002 \leq 0,005,$$

де  $0,005 = \frac{0,01}{2}$  – це і є половина одиниці останнього збереженого розряду (сотих часток).

Потреба заміни цифр нулями для збереження розрядів виникає при округленні цілих чисел. Наприклад, округляючи число 56 998 до трьох значущих цифр, отримаємо в результаті 57 000. Перший з трьох нулів є значущим, інші два зберігають розрядність числа – це нулі округлення. Для того щоб по запису таких чисел можна було дізнатися, який нуль значущий, а який ні, їх записують у вигляді  $m \cdot 10^p$ , залишаючи значущі нулі у мантиї  $m$ . Наведене вище число слід представити як  $570 \cdot 10^2$ .

За допомогою абсолютних похибок визначають так звані вірні значущі цифри наближених чисел. Нехай наближене число записано у вигляді десяткового дробу:  $a = a_n \dots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m}$ :

$$a = a^n 10^n + \dots + a_1 10^1 + a_0 10^0 + a_{-1} 10^{-1} + \dots + a_{-m} 10^{-m}.$$

Значуща цифра наближеного значення  $a$ , що знаходиться в розряді, в якому виконується умова: *абсолютна похибка,  $\Delta_a$  не перевершує половину одиниці цього розряду, називається **вірною***. Значущі цифри розрядів, де не виконується дана умова, називаються *сумнівними*.

Отже, значуща цифра  $a_k$  ( $k = n, \dots, 1, 0, -1, -2, \dots, -m$ ) вірна, якщо  $\Delta_a = 0,5 \cdot 10^k$ . Зрозуміло, що всі значущі цифри, розташовані ліворуч від вірної, також будуть вірними, а розташовані праворуч від сумнівної – сумнівними. Відповідні десяткові розряди також називаємо вірними або сумнівними.

**Приклад.** Для наближеного числа  $x = 72,356$  відома абсолютна похибка  $\Delta_x = 0,04$ . Потрібно визначити його вірні значущі цифри.

Перевіримо цифру 7. Половина одиниці її розряду:  $\frac{10}{2} = 5 \geq 0,04$ . Значить, вона вірна. Цифра 2:  $\frac{1}{2} = 0,5 \geq 0,04$  – теж

вірна. Вірною буде і цифра 3 (перевірте!), а ось цифри 5 і 6 – сумнівні. Дійсно, для 5:  $\frac{0,01}{2}=0,005 < 0,04$ , тобто необхідну умову порушено.

Отриманий результат призводить до думки про те, що цифри наближеного числа  $a$  вірні в усіх тих розрядах, де їм відповідають нулі абсолютної похибки. Однак це судження вірне лише частково, бо остання така цифра може виявитися сумнівною. Чи буде вона вірною, залежить від величини значущих цифр  $\Delta_a$ .

Для виявлення вірних цифр числа  $a$  без перевірки кожної з них «за визначенням» рекомендується наступне правило.

*Абсолютна похибка округляється з надлишком до однієї значущої цифри (позначимо цю цифру літерою  $d$ ). Якщо цифра  $d \leq 5$ , то всі значущі цифри числа  $a$  лівіше того розряду, де знаходиться  $d$ , будуть вірними. В іншому випадку останню (правішу) з цих цифр слід визнати сумнівною.*

**Приклад.** Дано числа  $a, b, c$  і їх абсолютні похибки:

$$a = 2,645; b = 0,81726; c = 3968$$

$$\Delta_a = 0,003; \Delta_b = 0,0052; \Delta_c = 49$$

Бачимо, що цифри 2, 6, 4 числа  $a$  вірні, тому що відповідно розряду тисячних часток цифра  $d=3$  абсолютної похибки  $\Delta_a$  менше 5.

Число  $b$  має тільки одну вірну значущу цифру 8. Дійсно, при округленні з надлишком його абсолютної похибки отримаємо число 0,006, що містить в розряді тисячних часток значущу цифру  $d=6 > 5$ , яка «псує» розряд сотих часток числа  $b$ . У цілого числа  $c$  цифри вірні в розрядах тисяч і сотень: це 3 і 9.

Вірна цифра наближеного числа не зобов'язана буквально співпадати з цифрою відповідного розряду точного числа. Наприклад, нехай  $A = 1,999$  – точне число,  $a = 2,000$  – його наближення. Тоді  $\Delta_a = 0,001$  і, отже, три перші цифри числа  $a$  вірні, хоча ні одна з них не збігається з відповідною цифрою числа  $A$ .

Нерідко буває так, що вихідні числові дані наводяться без оцінки їх похибок, але з відомими вірними цифрами. Виникає задача: знайти абсолютні похибки цих чисел, необхідні для подальшого обліку похибок.

Рішення впливає з визначення вірної цифри. Якщо всі три цифри числа  $a = 4,06$  вірні, це означає, що  $\Delta_a = 0,005$ . Щоб уникнути штучного завищення ступеня точності числа ми не маємо права взяти конкретне  $\Delta_a < 0,005$ , наприклад,  $\Delta_a = 0,004$ , приймаємо  $\Delta_a = 0,005$ .

Звідси впливає правило.

*За абсолютну похибку наближеного числа з відомими вірними значущими цифрами приймається половина одиниці того розряду, де знаходиться остання вірна цифра.*

Звернемо увагу на інформаційну значимість нулів, записаних в кінці числа. Так, якщо відомо, що всі цифри чисел  $3,2$  і  $3,20$  вірні, то ці записи не рівноцінні. За абсолютну похибку першого числа можна взяти  $0,05$ , а другого –  $0,005$ .

Коли в кінці числа виходять вірні значущі нулі округлення, їх слід зберігати. Нехай  $a = -17,2986$ ,  $\Delta_a = 0,002$  і необхідно округлити  $a$  до вірних цифр. Тоді пишемо  $a \approx -17,30$ , але не  $a \approx -17,3$ . Округлення цілого числа  $c$  з останнього прикладу до вірних цифр дає результат:  $c \approx 40 \cdot 10^2$ .

У наближених обчисленнях часто використовується інше визначення вірної значущої цифри.

Якщо абсолютна похибка числа не перевищує одиниці того розряду, де знаходиться значуща цифра, то ця цифра називається **вірною в нестрогому (широкому) розумінні**.

Таким чином, для вірної в нестрогому сенсі цифри  $a$  повинна виконуватися нерівність  $\Delta_a \leq 1 \cdot 10^k$ . Так, у кількості  $5,6307$  з абсолютною похибкою  $0,006$  цифра  $3$  в розряді сотих часток вірна в нестрогому сенсі, бо  $0,006 \leq 10^{-2} = 0,01$ . Зрозуміло, що вірними будуть і попередні цифри  $5$  і  $6$ .

Для відмінності цифру, вірну в сенсі першого визначення, називають вірною в строгому (вузькому) розумінні. Неважко перевірити: вірна в строгому сенсі цифра буде вірною і в нестрогому сенсі, а зворотне твердження не має місця.

Надалі, якщо не обумовлено протилежне, будемо мати на увазі тільки початкове трактування поняття вірної цифри.

При вирішенні завдань наближеними методами перш за все треба забезпечувати необхідну точність результатів. Однак

елементарна обчислювальна культура вимагає не забувати при цьому про економію часу та обсягу роботи незалежно від того, як проводяться розрахунки – вручну за допомогою найпростіших калькуляторів або з використанням потужних комп'ютерних систем автоматизації обчислень.

Ці питання тісно пов'язані з кількістю цифр в представлені числових даних. У багатьох випадках для досягнення необхідної точності немає потреби користуватися всіма наявними ресурсами обчислювальних пристроїв або вписувати всі надані ними цифри результатів. Слід мати на увазі: точність обчислень залежить не від кількості значущих цифр наближених чисел, а від кількості їх вірних значущих цифр.

У той же час зберігати завжди тільки вірні цифри неправильно. По-перше, оцінки похибок зазвичай проводяться з завищенням, тому деякі значущі цифри, які з точки зору теорії повинні вважатися сумнівними, насправді можуть виявитися вірними. По-друге, якщо в процесі обчислень кожен раз округляти до вірних цифр, то похибку заокруглення приведуть до того, що останні цифри стануть невірними.

### **Правило запису наближених чисел**

*В проміжку результати обчислень зазвичай зберігаються одна-дві сумнівні цифри, а остаточні результати округляють зі збереженням не більше однієї сумнівної цифри.*

Перша рекомендація дозволяє уникати накопичення похибок заокруглень в вірних розрядах. Якщо обчислень небагато, достатньо однієї запасної цифри. Навпаки, при великих розрахунках іноді виявляється виправданим збереження в проміжних результатах трьох таких цифр.

У відповідях часто залишають тільки вірні цифри. Це зручно, так як за записом числа одразу видно, які цифри у нього вірні. Однак тут треба врахувати те, що при округленні деяких наближених чисел до вірних цифр остання цифра може виявитись вірною лише в нестрогому сенсі, бо тоді до похибки числа додається похибка округлення.

Взявши, наприклад, число  $a = 3,6159$  з  $\Delta_a = 0,004$ , після округлення до вірних цифр отримаємо  $\bar{a} = 3,62$ .

Тоді

$$\Delta_a^- = \Delta_a + |a - \bar{a}| = 0,004 + 0,0041 = 0,0081.$$

Остання збережена цифра 2 числа  $\bar{a}$  вірна в нестрогому сенсі, інші цифри вірні в строгому сенсі, бо  $\Delta_a^- > 0,005$ , але в той же час  $\Delta_a^- \leq 0,01$  і  $\Delta_a^- \leq 0,05$ .

У подібних випадках заради збереження якості останньої вірної цифри доцільно записувати відповіді з додатковою цифрою. Зайву цифру слід залишати і в тому випадку, коли відомо, що вона могла виявитися сумнівною через завідомо грубі оцінки.

Заміна словесних викладок символічними співвідношеннями в обчислювальній математиці нерідко призводить до ситуацій, коли вибір будь-якого з знаків точного або наближеного рівності не дає можливості дотримати повну строгість і визначеність в позначеннях і записах, причому використання замість них ще якихось знаків, як правило, не покращує становища.

Зазначена проблема особливо актуальна при докладному описі обчислювальних процесів, коли доводиться пов'язувати величини та їх значення, а також різні значення однієї і тієї ж величини. Вона значною мірою може бути знята, якщо в подібних випадках вводити додаткові позначення і уникати багатьох загальноприйнятих символічних записів. Проте зазвичай так не роблять, оскільки вважається, що написане буде правильно зрозуміло з контексту. А для цього, в свою чергу, необхідні спеціальні угоди.

Треба зазначити, що в літературі з наближених обчислень зустрічаються різні варіанти запису знаків « $\approx$ » і « $\approx$ », у тому числі й такі, які призводять до суперечностей між змістом знака і реальним змістом співвідношення. Так, іноді прийнято зв'язувати точне і наближене значення функції знаком рівності, якщо в наближеному значенні всі цифри вірні. Пишеться, наприклад,  $\cos 0,502 = 0,87662$ , хоча зрозуміло, що тут насправді має місце наближена рівність.

Розглянемо правила, яких будемо дотримуватися далі в даному питанні.

Видається природним і методично важливим з точки зору розрізнення понять «точне значення» і «наближене значення» застосовувати знак « $\approx$ » кожен раз, коли точне значення величини

або висловлювання замінюється його наближеним значенням. У наведеному вище прикладі з косинусом, як і в інших аналогічних випадках, далі обов'язково ставимо знак наближеного дорівнює:  $\cos 0,502 \approx 0,87662$ ;  $\sqrt{\pi} \approx \sqrt{3,14} \approx 1,772$ . Другий із знаків « $\approx$ » в останньому співвідношенні пов'язує наближення до  $\sqrt{\pi}$  з його наближеним значенням, але, оскільки у  $\sqrt{3,14}$  існує точне значення, цей знак виправданий.

У той же час, якщо величина за визначенням неоднозначна, то між нею та її значенням, а також між її різними значеннями ставимо знак « $=$ », навіть якщо є переходи до наближення.

Дане правило використовуємо, зокрема, при обчисленні абсолютної і відносної похибок. Ясно, що воно буде іноді приводити до суперечливих співвідношень, однак тут виходимо з того, що, наприклад, абсолютною похибкою  $\Delta_a$  наближення  $a$  до точного числа  $A$  з формально рівним правом можна назвати будь-яке число  $c > 0$ , що задовольняє нерівності  $|A - a| \leq c$ .

Якщо числа  $c$  і  $d$  є можливими значеннями  $\Delta_a$  й  $c \neq d$ , то запис  $\Delta_a = c = d$  слід розуміти як короткий запис двох, не викликаючих сумнівів рівностей:  $\Delta_a = c$  і  $\Delta_a = d$ .

Труднощі виникають і в таких природних умовах, коли величина або вираз позначаються яким-небудь символом, а потім цей символ з'єднується знаком « $\approx$ » з відповідним наближеним значенням. Нехай, наприклад, буквою  $x$  позначено добуток наближених чисел 1,06 і 7,58. Для розрахунків потрібно знайти його з округленням до трьох значущих цифр і оцінити похибку результату. Число  $x = 1,06 \cdot 7,58 = 8,0348$  наближене, його абсолютна похибка позначається через  $\Delta_x$ . Округливши, одержимо  $x \approx 8,03$ . Прийнято в подальшому під  $x$  розуміти число 8,03, а його абсолютну похибку позначати знову через  $\Delta_x$ . Тим самим допускається певна вільність, оскільки фактично  $x \neq 8,03$ . У цьому випадку вважається, що буква  $x$  відноситься не тільки до значення 8,0348 добутку, а й до всіх його наближень.

Зазначену угоду будемо мати на увазі і в подальшому при позначеннях наближених величин.

## 2.4. Оцінка похибки результату арифметичних дій

Для оцінки похибок результату арифметичних дій використовують наступні теореми.

**Теорема 1.** Гранична абсолютна похибка алгебраїчної суми декількох приблизних чисел дорівнює сумі граничних абсолютних похибок цих чисел.

$$\Delta(x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_n) = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2} + \dots + \Delta_{x_n}.$$

**Теорема 2.** Гранична відносна похибка алгебраїчної суми двох приблизних чисел дорівнює

$$\delta(x_1 \pm x_2) = \frac{x_1 \delta_{x_1} + x_2 \delta_{x_2}}{x_1 \pm x_2}.$$

**Зауваження 1.** У теоремі 2 припускається що  $x_1, x_2 > 0$  та  $x_1 \pm x_2 > 0$ .

**Теорема 3.** Гранична відносна похибка добутку декількох приблизних чисел, відмінних від нуля, дорівнює сумі відносних похибок цих чисел.

$$\delta(x_1 x_2 \dots x_n) = \delta_{x_1} + \delta_{x_2} + \dots + \delta_{x_n}.$$

**Теорема 4.** Гранична абсолютна похибка добутку двох чисел дорівнює

$$\Delta(x_1 x_2) = x_2 \Delta x_1 + x_1 \Delta x_2.$$

**Теорема 5.** Гранична відносна похибка частки дорівнює сумі граничних відносних похибок чисельника та знаменника

$$\delta\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \delta_{x_1} + \delta_{x_2}.$$

**Теорема 6.** Гранична абсолютна похибка частки дорівнює

$$\Delta\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \frac{x_2 \Delta x_1 + x_1 \Delta x_2}{x_2^2}.$$

**Теорема 7.** Гранична відносна похибка степені дорівнює

$$\delta(x_1^m) = m \delta_{x_1}, \quad m = 1, 2, \dots$$

**Теорема 8.** Гранична абсолютна похибка степені дорівнює

$$\Delta(x_1^m) = m x_1^{m-1} \Delta_{x_1}, \quad m = 1, 2, \dots$$

**Зауваження 2.** Останні дві формули мають місце і для кореня, у випадку

$$y = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}, \text{ де } m = \frac{1}{n}.$$

Таким чином, у загальному випадку  $m$  – не натуральне, а раціональне.

**Зауваження 3.** Якщо  $y = kx$ , де  $k$  – деяка стала, тоді з теорем (3),(4) випливає, що

$$\begin{aligned} \delta(kx) &= \delta_k + \delta_x, \\ \Delta(kx) &= k\Delta_x. \end{aligned}$$

## 2.5. Пряма і обернена задача теорії похибок

**Основна чи пряма** задача теорії похибок полягає в тому, що знаючи похибки початкових даних визначити похибку результату.

Нехай задано неперервно-диференційована функція  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  і нехай відомі абсолютні похибки аргументів функції. Використовуючи формулу Тейлора для функції багатьох змінних, маємо:

$$\begin{aligned} f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) &\approx \\ \approx y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i. & \quad (*) \end{aligned}$$

Звичайно на практиці  $\Delta x_i$  – досить малі, тому їх добутками, квадратами та степенями можна знехтувати. З (\*) маємо:

$$\begin{aligned} |\Delta y| &\approx \left| df(x_1, x_2, \dots, x_n) \right| = \left| f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n) \right| \approx \\ &\approx \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| |\Delta x_i|. \end{aligned}$$

Звідси,

$$|\Delta y| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| |\Delta x_i|. \quad (**)$$

Позначимо через  $\Delta_y$  – граничну абсолютну похибку функції  $y$  і через  $\Delta_{x_i}$  – граничні абсолютні похибки аргументів  $x_i$ .



Знаходимо,

$$\Delta_y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i.$$

Поділивши нерівність (\*\*), на  $y$ , будемо мати оцінку для відносної похибки.

$$\delta y \leq \sum_{i=1}^n \frac{\left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|}{y} |\Delta x_i| = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \ln f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} \right| |\Delta x_i|.$$

Отже, за граничну відносну похибку можна прийняти вираз

$$\delta_y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \ln y}{\partial x_i} \right| \Delta x_i.$$

На практиці важливою є не тільки пряма, а й **обернена** задача: з якою точністю потрібно задати значення аргументів  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$  функція  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , щоб похибка значення функції  $f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  не перевищувала заданої величини  $\varepsilon$ .

Ця задача математично не визначена, тому що одне й те саме значення граничної похибки  $\Delta_y$  функції  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  можна отримати при різних наборах значень граничних абсолютних похибок аргументів  $x_i$ .

Для функції однієї змінної  $y=f(x)$  абсолютну похибку можна наближено обчислити за формулою

$$\Delta(x^*) = \frac{\Delta(y^*)}{|f'(x^*)|}, \quad f'(x^*) \neq 0$$

**Приклад.** Сторона квадрату дорівнює 2м. З якою точністю її потрібно виміряти, щоб похибка знаходження площі не перевищувала  $1\text{см}^2$ ?

**Розв'язання.** Позначимо сторону квадрату через  $x$ ;  $S=x^2$ ,  $S'=2x$ . Тоді за формулою  $\Delta(x^*) = \frac{\Delta(y^*)}{|f'(x^*)|}$ ,  $f'(x^*) \neq 0$  отримаємо

$$\Delta(x^*) = \frac{1}{2 \cdot 200} = \frac{1}{4} 10^{-2} \text{ см.}$$

Для функції декількох змінних  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  задача розв'язується за допомогою наступних рекомендацій:

## 1. Принцип рівних впливів

Згідно з формулою

$$\Delta_y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i,$$

де  $\Delta_y$  – відома.

Припустимо, що усі доданки рівні між собою, тоді

$$\left| \frac{\partial y}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 = \left| \frac{\partial y}{\partial x_2} \right| \Delta x_2 = \dots = \left| \frac{\partial y}{\partial x_n} \right| \Delta x_n = \frac{\Delta_y}{n}.$$

Звідси,

$$\Delta x_i = \frac{\Delta_y}{n \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|}.$$

## 2. Метод урівнення похибок

Припустимо, що

$$\Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \dots = \Delta_{x_n} = \Delta,$$

тоді

$$\Delta_y = \Delta \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|, \quad \Delta = \frac{\Delta_y}{\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|}.$$

3. Здійснюється вибір  $n-1$  значення абсолютних похибок аргументів, а  $\Delta_{x_n}$  визначається з

$$\Delta_y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i,$$

Цей метод використовується у випадках, коли значення різних змінних не вдається виміряти з достатньою точністю.

## ТЕМА 3. ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ФУНКЦІЙ

### План

1. Постановка задачі наближення функції.
2. Інтерполяція функції.
3. Інтерполяція функції за допомогою поліному Лагранжа.
4. Інтерполяція функції за допомогою поліному Ньютона.

### 3.1. Постановка задачі наближення функцій

При розв'язанні багатьох задач доводиться замінювати задану функцію іншою функцією, близькою до заданої.

Така необхідність виникає:

- при обчисленні інтегралів, які не виражаються в елементарних функціях;
- при визначенні значень функції, заданої табличним способом;
- при визначенні значень функцій за межами заданого інтервалу.

Для заміни функції зазвичай вибирають функції такого вигляду, які зручні для розв'язання багатьох задач. Для цього використовують поліноми (многочлени) степеня  $m$ . Ці поліноми можуть містити узагальнені безперервно диференційовані функції.

Нехай задана система безперервних диференційованих функцій:

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x).$$

Використовуючи ці функції можна скласти узагальнений поліном:

$$Q_m(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \dots + a_m\varphi_m(x),$$

де  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$  – коефіцієнти полінома.

Залежно від вигляду узагальнених функцій можна отримати різні поліноми. Якщо узагальнені функції представлені у вигляді степенів незалежної змінної, отримуємо поліном степеня  $m$ :

$$\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x, \varphi_2(x) = x^2, \dots, \varphi_m(x) = x^m,$$

$$Q_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m.$$

Якщо узагальнені функції представлені тригонометричними функціями, то узагальнений поліном буде тригонометричним поліномом:

$$\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = \sin x, \varphi_2(x) = \cos x, \varphi_{2m-1}(x) = \sin mx, \varphi_{2m}(x) = \cos mx$$

$$Q_m(x) = a_0 + a_1 \sin x + a_2 \cos x + \dots + a_{2m-1} \sin mx + a_{2m} \cos mx$$

**Задача про наближення функції узагальненим поліномом** формулюється таким чином: задану функцію  $f(x)$  необхідно замінити узагальненим поліномом  $Q_m(x)$  заданого порядку  $m$  так, щоб він був достатньо близький до заданої функції на інтервалі визначення функції  $f(x)$ .

Залежно від критерію близькості полінома до заданої функції формується 3 види наближення функції:

**Інтерполяція** – заміна заданої функції іншою функцією, яка співпадає із заданою функцією при певних значеннях незалежного аргументу в заданому інтервалі зміни незалежного аргументу.

**Апроксимація** – заміна заданої функції іншою функцією, яка мінімально відрізняється від заданої функції на заданому інтервалі значень  $x$ .

**Екстраполяція** – заміна заданої функції іншою функцією, яка визначає значення заданої функції за межами інтервалу зміни незалежної змінної.

В залежності від способу задання функції, наближення називають точковим або неперервним.

**Точковим** називають наближення, якщо функція задана табличним способом, тобто визначена при кінцевій кількості значень незалежної змінної.

**Неперервним** називають наближення, якщо функція визначена для будь-якого значення незалежної змінної на заданому інтервалі.

### 3.2. Інтерполяція функції

Для інтерполяції функція задається табличним способом в системі  $n$  точок:

Таблиця 3.1

**Функція, задана табличним способом**

$i$	0	1	2	...	$n$
$x_i$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
$y_i$	$y_0$	$y_1$	$y_2$	...	$y_n$

Значення незалежної змінної, для якої визначені значення функції, називаються **точками** або **вузлами інтерполяції**.

**Задача інтерполяції** полягає в наступному: для заданої функції  $f(x)$  визначити поліном, можливо, меншого степеня  $m$ , що набуває у заданих точках  $x_i$  ( $i = \overline{0, n}$ ) ті ж самі значення, що і функція  $f(x)$ .

$$Q_m(x) = f(x_i) \quad (1)$$

Рівність (1) називають **основною умовою інтерполяції** і використовують для визначення коефіцієнтів узагальненого полінома і для перевірки правильності інтерполяції.

Поліном, який відповідає умові (1), називається **інтерполяційним**.

Існує єдиний поліном, степінь якого не перевищує  $n$  і набуває в точках інтерполяції задані значення функції. Тому степінь полінома можна прийняти рівною кількості точок інтерполяції ( $n = m$ ). Коефіцієнти інтерполяційного полінома  $a_i$  ( $i = \overline{0, n}$ ) можна визначити з системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), яку отримують шляхом запису інтерполяційного полінома для кожного вузла інтерполяції  $x$ .

$$Q_m(x) = a_0 + a_1x + a_1x^2 + \dots + a_nx^n \quad (2)$$

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = y_1 \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_nx_2^n = y_2 \\ \dots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = y_n \end{cases} \quad (3)$$

Невідомою величиною СЛАР (3) є  $a_i$ .

Отже, задача зводиться до пошуку коефіцієнтів  $a_i$ .

Система алгебраїчних рівнянь (3) має один розв'язок, якщо головний визначник не дорівнює нулю:

$$\det = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} \neq 0 \quad - \text{визначник Вандермонда}$$

У результаті розв'язання системи (3) визначаються значення коефіцієнтів полінома, залежно від виду функції вони змінюють свої значення.

Після запису інтерполяційного полінома необхідно перевірити виконання основної умови інтерполяції у вузлах інтерполяції. Якщо умова (1) виконується, то отриманий поліном можна використовувати для інтерполяції функції.

Систему рівнянь можна розв'язувати будь-яким відомим методом, зокрема методом оберненої матриці.

### Алгоритм розв'язання СЛАР (3) методом оберненої матриці для інтерполяції функції

1. Записати в матричному виді СЛАР (3).

Позначимо відповідно матриці X, A, Y:

$$X = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}, \quad A = \begin{vmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{vmatrix} - ? \quad Y = \begin{vmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_n \end{vmatrix}$$

Тоді, СЛАР в матричному вигляді матиме вигляд:

$$\boxed{X \cdot A = Y} \quad (3^*)$$

2. Перевірити умову існування рішення СЛАР (3\*):

$$\det(x) \neq 0$$

3. Обчислити матрицю, обернену до матриці  $X$ .

4. Перевірити точність обчислення оберненої матриці, використовуючи умову її визначення:

$$X \cdot X^{-1} = E \text{ (одинична матриця)}$$

5. Обчислити матрицю коефіцієнтів  $A$ :

$$A = X^{-1} \cdot Y$$

6. Підставити отримані коефіцієнти в інтерполяційний поліном (3) і перевірити виконання основної умови інтерполяції.

7. Інтерполювати функцію на заданій системі значень незалежної змінної.

8. Побудувати графіки вихідних даних та поліному інтерполяції.

### 3.3. Інтерполяція функції за допомогою полінома Лагранжа

Інтерполяційний поліном Лагранжа складається за даними таблиці 1, без розв'язання системи рівнянь (3).

**Поліном Лагранжа** записується так:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} \cdot y_i$$

#### Властивості полінома Лагранжа

1. В точках інтерполяції значення полінома дорівнює заданій функції, тобто основна умова інтерполяції (1) завжди виконується.

2. В точках інтерполяції відмінний від нуля тільки один доданок полінома.

3. У раціональних для дробу виразах відсутні різниці, в яких використовуються значення  $i$ -ої точки інтерполяції.

Для запису полінома Лагранжа використовують табличну форму задання функції (табл. 3.1). На основі цієї таблиці записують допоміжну таблицю (табл. 3.2), в якій обчислюють різниці знаменника раціональних для дробу функцій, що входять до полінома Лагранжа.

**Різниці знаменника раціональних для дробу функцій,  
що входять до полінома Лагранжа**

$i$	0	1	...	$n$
0	_____	$x_1 - x_0$	...	$x_n - x_0$
1	$x_0 - x_1$	_____	...	$x_n - x_1$
...	...	...	...	...
$n$	$x_0 - x_n$	$x_1 - x_n$	...	_____

**Властивості таблиці різниць**

1. На головній діагоналі різниці відсутні.
2. Перша величина, що входить в різницю, має індекс стовпця таблиці.
3. Друга величина, що входить в різницю, має індекс рядка таблиці.

**Алгоритм запису полінома Лагранжа**

1. Визначити кількість доданків полінома Лагранжа, яка відповідає кількості точок інтерполяції (використовувати таблицю функції).
2. Скласти таблицю різниць полінома Лагранжа.
3. Записати раціональні для дробу функції, що входять в поліном, за допомогою таблиці функції і таблиці різниць.
4. Записати поліном, використовуючи раціональні для дробу функції і значення заданої функції в точках інтерполяції.
5. Обчислити значення полінома в точках інтерполяції.
6. Перевірити виконання основної умови інтерполяції.
7. Якщо основна умова інтерполяції виконується, обчислити значення функції в заданому інтервалі значень незалежних змінних  $x$  із заданим кроком  $\Delta x$ :

- 1) визначення кроку:  $\Delta x = \frac{b-a}{m-1}$ , де  $m$  – кількість точок,  $x \in [a; b]$ ;
- 2) обчислення  $x_i$ :  $x_i = a + (i-1) \cdot \Delta x$ ,  $x_i \leq b$ ;
- 3)  $y_i = y(x_i)$ .



**Приклад.** Нехай функція задана таблицею 3.3:

Таблиця 3.3

**Функція, задана табличним способом**

$i$	0	1	2	3
$x_i$	0	2	3	5
$y_i$	1	3	2	5

Запишемо інтерполяційний многочлен Лагранжа третього степені, знайдемо наближене значення функції при  $x = 1$ :

$$L_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} y_1 +$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} y_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} y_3.$$

Підставимо значення  $x_i, y_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) з таблиці 3.3 і отримаємо:

$$L_3(x) = \frac{3}{10}x^3 - \frac{13}{6}x^2 + \frac{62}{15}x + 1$$

$$y(1) \approx L_3(1) = 3.267$$

**Компактна форма запису поліному Лагранжа**

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} y_i.$$

Інтерполяційний поліном Лагранжа можна записати компактніше. Для цього введемо позначення:

$$\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})(x-x_n),$$

$$\omega_{n+1}'(x) = (x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n).$$

Дістанемо:

$$L_n(x) = \omega_{n+1}(x) \sum_{i=0}^n \frac{y_i}{(x-x_i)\omega_{n+1}'(x_i)}.$$

Якщо кількість елементів у таблиці  $x_i > 2$  і треба обчислити значення інтерполяційного поліному Лагранжа лише в одній точці  $x \neq x_i$  ( $i=0,1,\dots,n$ ), де  $x_i$  – нерівновіддалені вузли інтерполявання, використаємо наступну схему 1 (табл. 3.4):

Таблиця 3.4

## Нерівновіддалені вузли інтерполювання

$i$	$x_i - x_0$	$x_i - x_1$	$x_i - x_2$	...	$x_i - x_{n-1}$	$x_i - x_n$	$D_i$	$y_i / D_i$
<b>0</b>	<u><math>x - x_0</math></u>	$x_0 - x_1$	$x_0 - x_2$	...	$x_0 - x_{n-1}$	$x_0 - x_n$	$D_0$	$y_0 / D_0$
<b>1</b>	$x_1 - x_0$	<u><math>x - x_1</math></u>	$x_1 - x_2$	...	$x_1 - x_{n-1}$	$x_1 - x_n$	$D_1$	$y_1 / D_1$
<b>2</b>	$x_2 - x_0$	$x_2 - x_1$	<u><math>x - x_2</math></u>	...	$x_2 - x_{n-1}$	$x_2 - x_n$	$D_2$	$y_2 / D_2$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
<b>n</b>	$x_n - x_0$	$x_n - x_1$	$x_n - x_2$	...	$x_n - x_{n-1}$	<u><math>x - x_n</math></u>	$D_n$	$y_n / D_n$

де  $D_0$  – добуток елементів нульового рядка, тобто

$$D_0 = (x - x_0)(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_{n-1})(x_0 - x_n).$$

Аналогічно розраховуються елементи стовпчика  $D_i$ .

Наступним обчислюємо добуток діагональних елементів (підкреслених у таблиці 3.4), який дорівнює значенню  $\omega_{n+1}(x)$  у точці  $x$ , тобто

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n).$$

Знаходимо суму:

$$S = \sum_{i=0}^n \frac{y_i}{D_i}.$$

Значення інтерполяційного багаточлена Лагранжа в точці  $x$  дорівнює:

$$L_n(x) = \omega_{n+1}(x) \cdot S.$$

Якщо ж вузли інтерполювання рівновіддалені, то використовуємо схему 2 (табл. 3.5):

Таблиця 3.5

## Рівновіддалені вузли інтерполювання

$i$	0	1	2	...	$n$	$D_i$	$y_i / D_i$
0	<u><math>t</math></u>	-1	-2	...	$-n$	$D_0$	$y_0 / D_0$
1	1	<u><math>t-1</math></u>	-1	...	$-n+1$	$D_1$	$y_1 / D_1$
2	2	1	<u><math>t-2</math></u>	...	$-n+2$	$D_2$	$y_2 / D_2$
...	...	...	...	...	...	...	...
$n$	$n$	$n-1$	$n-2$	...	<u><math>t-n</math></u>	$D_n$	$y_n / D_n$

Обчислення значення функції для аргументу, якого немає в таблиці, можна спростити. Позначимо  $t = \frac{x - x_0}{h}$ , де  $h$  – відстань між двома сусідніми вузлами інтерполювання,  $D_0$  – добуток елементів нульового рядка, тобто

$$D_0 = t \cdot (-1) \cdot (-2) \dots (-n).$$

Аналогічно розраховуються елементи стовпчика  $D_i$ .

Наступним обчислюємо добуток діагональних елементів (підкреслених у таблиці 3.5), який дорівнює значенню  $\omega_{n+1}(x)$  у точці  $x$ , тобто

$$\omega_{n+1}(t) = t \cdot (t-1) \cdot (t-2) \dots (t-n).$$

Знаходимо суму:

$$S = \sum_{i=0}^n \frac{y_i}{D_i}.$$

Значення інтерполяційного багаточлена Лагранжа в точці  $x$  дорівнює:

$$L_n(x) = \omega_{n+1}(t) \cdot S.$$

### 3.4. Інтерполювання функції за допомогою полінома Ньютона

Інтерполяція полінома Ньютона, як і полінома Лагранжа, не вимагає розв'язання системи рівнянь (3).

Для запису полінома Ньютона також використовують функцію, задану в табличній формі. На основі цієї таблиці визначають основні елементи полінома.

#### Поліном Ньютона з розділеними різницями

Поліном Ньютона має вигляд:

$$N_n(x) = y_n + (x - x_n)u(x_n, x_{n-1}) + (x - x_n)(x - x_{n-1})u(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots + (x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdot \dots \cdot (x - x_1)u(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0),$$

де  $u(x_n, x_{n-1}), \dots, u(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0)$  називаються **розділеними різницями**. Для їх обчислення використовують табличну форму (табл. 3.6).

У таблиці розділених різниць у нульовому стовпці через один рядок записують значення функції в точках інтерполяції. У

другому стовпці записують значення розділених різниць першого порядку. Кожну з цих різниць визначають по двох сусідніх значеннях функції в точках інтерполяції за такою формулою:

$$y(x_k, x_{k-1}) = \frac{y_{k-1} - y_k}{x_{k-1} - x_k}, \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

$$y(x_0, x_1) = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}.$$

Таблиця 3.6

**Розділені різниці**

<i>i</i>	0	1	2	...	<i>n</i>
0	$y_0$			...	
		$y(x_0, x_1)$		...	
1	$y_1$		$y(x_0, x_1, x_2)$	...	
		$y(x_1, x_2)$		...	
2	$y_2$		$y(x_1, x_2, x_3)$	...	
...	...	...	...	...	$y(x_0, x_1, \dots, x_n)$
<i>n</i> -1	$y_{n-1}$		$y(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$	...	
		$y(x_{n-1}, x_n)$		...	
<i>n</i>	$y_n$			...	

Використовуючи розділені різниці першого порядку, обчислюють розділені різниці другого порядку, при цьому використовують сусідні розділені різниці першого порядку:

$$y(x_k, x_{k-1}, x_{k-2}) = \frac{y(x_k, x_{k-1}) - y(x_{k-1}, x_{k-2})}{x_k - x_{k-2}}.$$

Так само обчислюють різниці великих порядків, поки в стовпці таблиці не залишиться тільки одна різниця, після цього процес обчислення розділених різниць завершений.

**Послідовність запису полінома Ньютона**

1. Використовуючи функцію, задану в табличній формі, визначають кількість рядків в таблиці для обчислення розділених різниць.

2. Записують через один рядок значення функції в точках інтерполяції в нульовий стовпець таблиці розділених різниць.

3. Використовуючи нульовий стовпець, обчислюють розділені різниці першого порядку.

4. Використовуючи розділені різниці першого порядку, обчислюють в другому стовпці розділені різниці другого порядку. Аналогічним чином обчислюють всі різниці до  $n$ -го порядку.

5. Записують поліном Ньютона, використовуючи таблицю розділених різниць.

6. Перевіряють виконання основної умови інтерполяції функції. Якщо умова виконується, обчислюють значення функції на заданому інтервалі значень  $x$  із заданим кроком або в заданій кількості точок.

### **Поліном Ньютона зі скінченими границями**

Нехай задано табличну функцію  $y = f(x)$  значеннями

$$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1), \quad \dots, \quad y_n = f(x_n)$$

в рівновіддалених вузлах інтерполяції  $x_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ). Нехай  $h$  – крок таблиці, тобто  $h = x_{i+1} - x_i = \text{const}$  ( $i = 0, 1, \dots, n - 1$ ).

*Скінченою або табличною різницею першого порядку* називається різниця між значеннями функції в сусідніх вузлах інтерполяції. Таким чином,

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = f(x_0 + h) - f(x_0) = \Delta f(x_0);$$

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = f(x_0 + 2h) - f(x_0 + h) = \Delta f(x_1);$$

.....

$$\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1} = f(x_0 + nh) - f(x_0 + (n-1)h) = \Delta f(x_0 + (n-1)h) = \Delta f(x_{n-1}).$$

Прирости скінчених різниць першого порядку називають *скінченими різницями другого порядку*:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0; \quad \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1; \quad \dots; \quad \Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2}.$$

*Скінченні різниці  $k$ -го порядку* утворюються з різниць  $(k-1)$ -го порядку за допомогою рекурентних формул:

$$\Delta^k y_0 = \Delta^{k-1} y_1 - \Delta^{k-1} y_0;$$

$$\Delta^k y_1 = \Delta^{k-1} y_2 - \Delta^{k-1} y_1;$$

$$\dots\dots\dots; \\ \Delta^k y_m = \Delta^{k-1} y_{m+1} - \Delta^{k-1} y_m$$

Вважають, що за означенням  $\Delta^0 y_i = y_i$ .

### Властивості скінчених різниць

1. Скінченні різниці сталої  $C$  дорівнюють нулю, тобто  $\Delta^k C = 0$ .

2. Сталий множник можна виносити за знак скінченної різниці  $\Delta^k (Cf(x)) = C \cdot \Delta^k f(x)$ .

3. Скінченні різниці алгебраїчної суми функцій дорівнюють алгебраїчній сумі скінчених різниць цих функцій:  $\Delta^k (f(x) \pm g(x)) = \Delta^k f(x) \pm \Delta^k g(x)$ .

4. Скінченні різниці  $m$ -го порядку від скінчених різниць  $k$ -го порядку функції  $f$ , тобто  $\Delta^m (\Delta^k f(x)) = \Delta^{m+k} f(x)$  ( $m, k$  - невід'ємні числа).

### Зв'язок між похідними функції і скінченими різницями.

Якщо функція  $f$  має на відрізку  $[x_0; x_n]$  неперервні похідні до порядку  $n$  включно, то для досить малих  $h$  і для будь-якого натурального  $n$  можна дістати наближену формулу

$$f^{(n)}(x) \approx \frac{\Delta^n f(x)}{h^n}.$$

Таблиця 3.7

**Таблиця скінчених різниць**

$X_i$	$Y_i$	$\Delta Y_i$	$\Delta^2 Y_i$	$\Delta^3 Y_i$	$\Delta^4 Y_i$
$x_0$	$y_0$	$\Delta y_0$	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$
$x_1$	$y_1$	$\Delta y_1$	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	
$x_2$	$y_2$	$\Delta y_2$	$\Delta^2 y_2$		
$x_3$	$y_3$	$\Delta y_3$			
$x_4$	$y_4$				
$\Sigma$		$\sum_{i=0}^3 \Delta y_i$	$\sum_{i=0}^2 \Delta^2 y_i$	$\sum_{i=0}^1 \Delta^3 y_i$	
$S$	$y_4 - y_0$	$\Delta y_3 - \Delta y_0$	$\Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_1 - \Delta^3 y_0$	

Два останні рядки таблиці 3.7 додаткові. Вони необхідні для контролю правильності обчислень.

Однак, не завжди треба обчислювати скінченні різниці усіх порядків. Існує умова зупинення процесу обчислення різниць. Для того щоб його сформулювати наведемо таке означення: якщо всі скінченні різниці 1-го порядку відрізняються одна від одної не більш як на  $2^1$  одиниць нижчого розряду табличних значень функції, то ці різниці називаються практично сталими.

Тоді, якщо різниці 1-го порядку практично стали, то скінченні різниці наступного порядку вважають рівними нулю і не беруть їх до уваги, а інтерполяційний багаточлен у цьому випадку поводить себе як багаточлен 1-го степені.

### Перший інтерполяційний багаточлен Ньютона

Обчислення значень функції для значень аргументу, які знаходяться з початку таблиці, зручно проводити користуючись першим інтерполяційним багаточленом Ньютона:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}).$$

Для практичного використання дану формулу записують в іншому вигляді.

Позначимо:

$$t = \frac{x - x_0}{h},$$

тоді

$$t - 1 = \frac{x - x_1}{h}, \quad t - 2 = \frac{x - x_2}{h}, \quad \dots, \quad t - n + 1 = \frac{x - x_{n-1}}{h}$$

і початкова формула матиме вигляд:

$$P_n(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \dots + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)\dots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0.$$

Формулу  $f(x) \approx P_n(x)$  називається **першою інтерполяційною формулою Ньютона**.

Різницю  $f(x) - P_n(x) = R_n(x; f)$  називають **залишковим членом першої інтерполяційної формули Ньютона**.

### Другий інтерполяційний багаточлен Ньютона

Перший інтерполяційний багаточлен Ньютона практично не вигідний для інтерполявання функції в кінці таблиці. В цьому випадку застосовують другий інтерполяційний багаточлен Ньютона:

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h} (x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2} (x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n} (x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdot \dots \cdot (x - x_1).$$

Рівність  $f(x) \approx P_n(x)$  називають **другою інтерполяційною формулою Ньютона**.

Існує інший запис формули другого інтерполяційного багаточлена Ньютона.

Нехай

$$t = \frac{x - x_n}{h},$$

тоді

$$t + 1 = \frac{x - x_{n-1}}{h}, \quad t + 2 = \frac{x - x_{n-2}}{h}, \quad t + 3 = \frac{x - x_{n-3}}{h} \quad \text{тощо.}$$

Отримуємо:

$$P_n(x) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 y_{n-2} + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!} \Delta^3 y_{n-3} + \frac{t(t+1)(t+2)(t+3)}{4!} \Delta^4 y_{n-4} + \dots$$

Якщо треба обчислити значення функції в точці  $x$ , то за  $x_n$  треба взяти найближче, але більше за  $x$  значення аргументу з таблиці так, щоб  $x \in (x_{n-1}; x_n)$ .



## ТЕМА 4. АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЇ

### План

1. Двопараметрична апроксимація функції.
2. Метод найменших квадратів.
3. Апроксимація функції багатьох змінних.
4. Матричний метод найменших квадратів.

### 4.1. Двопараметрична апроксимація функції

Існує декілька способів апроксимації функцій:

Якщо функція замінюється поліномом першого ступеня, то апроксимація називається *лінійною*. Якщо для заміни використовують поліном вище за перший ступінь або інші нелінійні функції, то апроксимацію називають *нелінійною*.

Двопараметрична апроксимація заданої функції використовується в тих випадках, коли функція  $y = f(x)$  залежить тільки від однієї незалежної змінної.

Розглянемо двопараметричну апроксимацію функції, задану в табличній формі:

Таблиця 4.1

#### Функція, задана в табличній формі

$i$	1	2	...	$n$
$x_i$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
$y_i$	$y_1$	$y_2$	...	$y_n$

Для апроксимації такої функції використовують поліном першого степеня.

$$Q_m(x) = y = a_0 + a_1x + u$$

де,  $a_0, a_1$  – коефіцієнти полінома;  $x$  – незалежна змінна;  $u$  – збурення полінома.

Збурення полінома дорівнює різниці значення заданої функції і регулярної частини полінома в точках апроксимації

$$\tilde{y} = a_0 + a_1x;$$

$\tilde{y}$  – регулярна частина полінома.

Призначення збурення: його використовують для визначення коефіцієнтів полінома і перевірки його адекватності заданої функції. Для апроксимації використовують регулярну частину, а збурення – не використовують.

Для визначення апроксимуючого полінома спочатку необхідно визначити його коефіцієнти. Для цього використовується метод найменших квадратів.

## 4.2. Метод найменших квадратів

Суть методу найменших квадратів полягає в мінімізації цільової функції наступного вигляду:

$$I = \sum_{i=1}^n u_i^2 \rightarrow \min$$

Для мінімізації цільової функції за допомогою вибору значень коефіцієнтів полінома необхідно скласти систему двох рівнянь. Для цього використовують принцип, згідно якому, в точці мінімуму її похідні рівні нулю:

$$\frac{\partial I}{\partial a_0} = 0; \quad \frac{\partial I}{\partial a_1} = 0;$$

Щоб обчислити похідні, потрібно записати цільову функцію в явній залежності від коефіцієнтів полінома:

$$u_i = y_i - a_0 - a_1 x_i.$$

$$I = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial a_0} = \sum_{i=1}^n 2(y_i - a_0 - a_1 x_i)(-1) = 0 \\ \frac{\partial I}{\partial a_1} = \sum_{i=1}^n 2(y_i - a_0 - a_1 x_i)(-x_i) = 0 \end{cases}$$

Використовуючи метод Гауса, рішення отриманої системи рівнянь можна отримати за формулами:

$$a_1 = \frac{\text{cov}(x; y)}{D(x)};$$

$$a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x}; \quad (\bar{x}, \bar{y} \text{ середнє арифметичне});$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad - \text{математичне очікування незалежної змінної};$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad - \text{математичне очікування функції}.$$

$$\text{cov}(x; y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y} \quad - \text{коваріація між } x \text{ і } y;$$

характеризує ступінь відхилення змінних  $x$  і  $y$  від лінійної залежності.

$$\text{cov}(x, y) \in (-\infty; +\infty);$$

$D(x)$  – дисперсія  $x$  – характеризує середню величину відхилень значень  $x$  від математичного очікування  $x$ .

$$D(x) \geq 0 \quad - \text{завжди}.$$

$$D(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x})^2; \quad D(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 - (\bar{y})^2.$$

На другому етапі необхідно виконати перевірку адекватності отриманого полінома заданої функції. Для цього обчислюють коефіцієнт детермінації (коефіцієнт достовірності апроксимації).

$$R^2 = \frac{\text{cov}^2(x; y)}{D(x)D(y)}$$

Коефіцієнт детермінації може приймати значення від 0 до 1:

$$R^2 \in [0; 1];$$

$R^2 = 0$  – поліном не відповідає даній функції;

$R^2 \in [0,95; 1]$  – отриманий поліном адекватний заданій функції;

$R^2 \in (0; 0,95)$  – для висновку про адекватність необхідно виконати додаткову перевірку.

Для цього використовують **критерій Фішера**. Його застосовують в три етапи:

1. Обчислюють F статистику:

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n - m - 1}{m};$$

де  $m$  – кількість незалежних змінних. ( $m=1$  – для нашого випадку).

2. Визначають критичні значення F статистики:  $F_{кр}$ . Для цього використовують спеціальні таблиці або спеціальні функції вбудовані в прикладних програмах. У програмі Excel  $F_{кр}$  можна обчислити за допомогою функції:  $F_{кр} = \text{FRASPOBR}(\alpha, n, n-m-1)$ , де  $\alpha$  – рівень значущості оцінки. Має сенс вірогідності помилки при аналізі адекватності.  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $\alpha \leq 0,05$ . Чим менше, тим краще.

3. Якщо  $F \geq F_{кр}$ , то апроксимуючий поліном адекватний заданій функції з вірогідністю помилки не більш  $\alpha$ . Цей критерій можна використовувати для апроксимації заданої функції.

**Існує другий спосіб застосування критерію Фішера:**

1. Обчислити F статистику.

2. Обчислити критичне значення вірогідності помилки:

$$\alpha_{кр} = \text{FRASP}(F, m, n, n-m-1).$$

3. Порівнюють  $\alpha_{кр}$  з допустимим значенням вірогідності помилки:

$$\alpha_{кр} \leq \alpha_{доп}.$$

Третім завданням апроксимації заданої функції є визначення її значень в інтервалі апроксимації від  $x_{min}$  до  $x_{max}$  із заданим кроком зміни  $x$ .

$$x \in [x_{min}; x_{max}];$$

$$x_{min} = x_1; x_{max} = x_n;$$

$$\Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{k - 1};$$

де  $k$  – кількість точок, в яких обчислюють регулярну частину полінома.

$$x_j = x_{min} + (j - 1) \cdot \Delta x;$$

$$j = 1, 2, \dots, k.$$

Для визначення збурення полінома побудуємо графіки заданої функції і регулярної частини полінома:

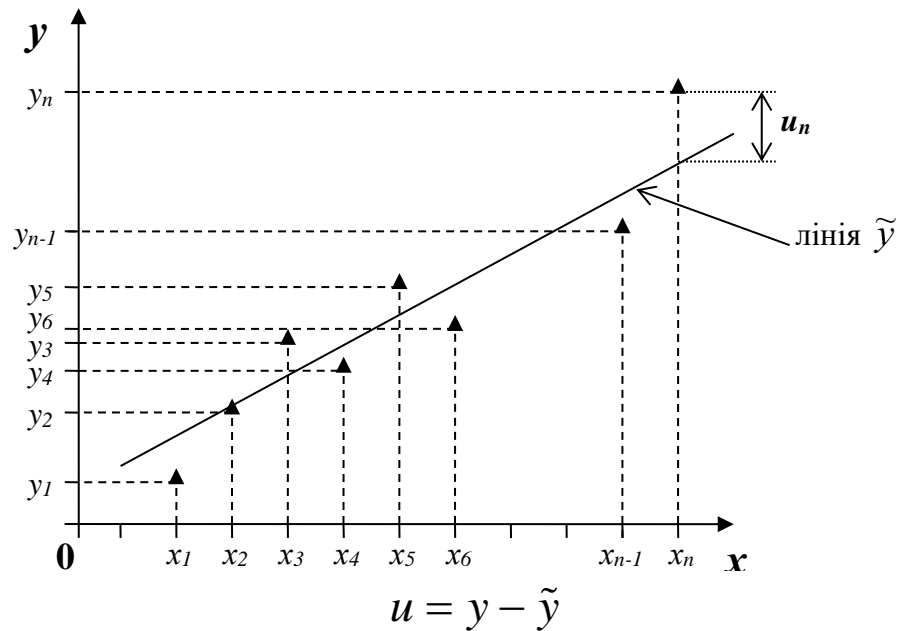


Рис. 4.1. Графіки заданої функції і регулярної частини полінома

### 4.3. Апроксимація функції від багатьох змінних

Функцію  $n$ -змінних  $y = f(x_1 \dots x_n)$  можна апроксимувати лінійним поліномом, який залежить від  $n$  незалежних змінних.

$Q_m(x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_m x_m + u$  – це поліном.

Апроксимація функції може бути задана в табличній формі:

Таблиця 4.2

#### Функція, задана табличним способом

$i$	1	2	...	$n$
$y_i$	$y_1$	$y_2$	...	$y_n$
$x_{1i}$	$x_{11}$	$x_{12}$	...	$x_{1n}$
$x_{2i}$	$x_{21}$	$x_{22}$	...	$x_{2n}$
...	...	...	...	...
$x_{mi}$	$x_{m1}$	$x_{m2}$	...	$x_{mn}$

$m$  – кількість точок, у яких задана функція;

$n$  – кількість незалежних змінних.

$Q_m(x)$  – поліном, що має  $(m+1)$  невідомих коефіцієнтів, які можна визначити використовуючи метод найменших квадратів;  $u$  – збурення.

#### 4.4. Матричний метод найменших квадратів

Для реалізації методу найменших квадратів при апроксимації функції  $t$  незалежних змінних зручно отримати систему рівнянь, використовуючи апроксимуючий поліном і задані значення функції.

Запишемо апроксимуючий поліном для кожної точки, якою задана функція:

$$\begin{cases} y_1 = a_0 + a_1 x_{11} + a_2 x_{21} + \dots + a_m x_{m1} + u_1 \\ y_2 = a_0 + a_1 x_{12} + a_2 x_{22} + \dots + a_m x_{m2} + u_2 \\ \dots \\ y_n = a_0 + a_1 x_{1n} + a_2 x_{2n} + \dots + a_m x_{mn} + u_n \end{cases}$$

Дану систему рівнянь можна записати в матричній формі:

$$Y = X \cdot A + U$$

Матриці цього рівняння мають такий вигляд:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{m1} \\ 1 & x_{12} & \dots & x_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{1n} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Першим завданням побудови апроксимуючого полінома є визначення його коефіцієнтів за допомогою матричного методу найменших квадратів (метод Ейткена). Суть матричного методу найменших квадратів: мінімізація цільових функцій вигляду:

$$I = \sum_{i=1}^n u_i^2 \rightarrow \min$$

Для цього необхідно скласти систему рівнянь наступного вигляду:

$$\frac{\partial I}{\partial a_j} = 0 \quad (j=0,1,2,\dots,m)$$

Обчислення похідних і перетворення отриманої системи рівнянь до матричної форми приводить до наступної системи рівнянь:

$$\frac{\partial I}{\partial a_j} = -2X^T \cdot Y + 2X^T \cdot X \cdot A = 0$$

Виконаємо перетворення системи рівнянь:

$$X^T \cdot X \cdot A = X^T \cdot Y$$

Для рішення останньої системи рівнянь використовуємо метод зворотної матриці:

$$\begin{aligned} (X^T \cdot X)^{-1} \cdot (X^T \cdot X) \cdot A &= (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot Y \\ E \cdot A &= (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot Y \\ A &= (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot Y \end{aligned}$$

### **Алгоритм обчислення матриці А**

1. Записати функцію в табличній формі.
2. На основі заданої функції визначити матриці X і Y.
3. Транспонувати матрицю X.
4. Помножити матриці X і  $X^T$ .
5. Обчислити детермінант отриманої матриці, якщо він відмінний від нуля, то обернена матриця існує.
6. Обчислити обернену матрицю  $(X^T \cdot X)^{-1}$ .
7. Оцінити похибку обчислення оберненої матриці, використовуючи умови:

$$(X^T X)^{-1} (X^T X) = E.$$

8. Помножити обернену матрицю на матрицю  $X^T$ .
9. Отриману матрицю помножити на матрицю Y.

## Перевірка адекватності апроксимованого полінома заданій функції

Перевірка адекватності полінома виконується так само як і для полінома від однієї змінної.

Коефіцієнт детермінації обчислюється за такою формулою:

$$R^2 = 1 - \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i^2}{D(y)}.$$

Збурення полінома для кожної точки функції обчислюється за допомогою регулярної частини полінома та заданого значення функції:

$$u_i = y_i - \tilde{y}_i; \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i; \quad D(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 - \bar{y}^2.$$

Якщо коефіцієнт детермінації  $R^2$  набуває значення у межах  $[0,95; 1]$ , то можемо зробити висновок, що апроксимуючий поліном відповідає заданій функції; у протилежному випадку необхідно виконати додаткову перевірку за допомогою критерію Фішера:

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n - m - 1}{m}.$$

Якщо поліном відповідає заданій функції, то функцію можна апроксимувати використовуючи регулярну частину полінома.



# ТЕМА 5. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

## План

1. Нелінійні рівняння.
2. Відокремлення коренів.
3. Методи уточнення коренів рівняння.
4. Метод половинного ділення.
5. Метод ітерації (метод простої ітерації).
6. Метод пропорційних частин (хорд).
7. Метод Ньютона з параметром.

### 5.1. Нелінійні рівняння

На практиці часто доводиться вирішувати алгебраїчні та трансцендентні рівняння, що може представляти собою самостійну задачу чи є складовою частиною більш складних задач. В обох випадках практична цінність чисельного методу в значній мірі визначається швидкістю та ефективністю отримання розв'язку. Вибір необхідного алгоритму для розв'язку рівнянь залежить від характеру задачі, яка розглядається.

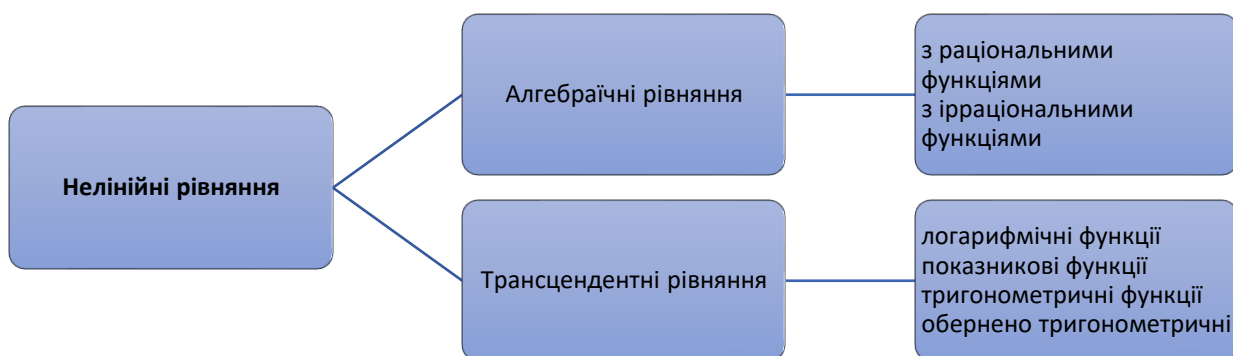


Рис. 5.2. Класифікація нелінійних рівнянь

При вирішенні практичних інженерних задач часто доводиться зустрічатися з розв'язанням рівнянь виду

$$\varphi(x) = g(x), \quad (1)$$

або

$$f(x) = 0, \quad (2)$$

де  $\varphi(x)$ ,  $g(x)$  та  $f(x)=0$  – нелінійні функції, визначенні на деякій числовій множині  $X$ , яка називається областю допустимих значень рівняння.

Рівняння виду (1) або (2) називаються **нелінійними рівняннями**. Всі нелінійні рівняння можна поділити на алгебраїчні та трансцендентні (Рис. 5.2).

Функція називається **алгебраїчною**, якщо для отримання значення функції на заданій множині  $X$  потрібно здійснити арифметичні операції та піднесення до степені з раціональним або ірраціональним показником. Рівняння, які містять алгебраїчні функції називаються **нелінійними алгебраїчними рівняннями**.

До **трансцендентних** функцій відносять всі неалгебраїчні функції:

- показникові  $a^x$ ;
- логарифмічні  $\log_a x$ ,  $\ln x$ ;
- тригонометричні  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $\operatorname{ctg} x$ ;
- обернено тригонометричні  $\operatorname{arcsin} x$ ,  $\operatorname{arccos} x$ ,  $\operatorname{arctg} x$ ,  $\operatorname{arcctg} x$  та ін.

Нелінійні рівняння, які містять трансцендентні функції називаються **нелінійними трансцендентними рівняннями**.

**Розв'язком** нелінійного рівняння на ЕОМ називається вектор  $\bar{X}$ , координати якого  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  при підстановці в початкове рівняння перетворюють його в тотожність.

В нелінійному рівнянні виду

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (3)$$

$i$ -та координата вектора  $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  називається  $i$ -тим коренем рівняння, а  $a_1, a_2, \dots, a_m$  – коефіцієнтами рівняння (3).

Процес розв'язання нелінійних рівнянь вигляду (1) або (2) на ЕОМ розбивається на два етапи:

- 1) відокремлення коренів;
- 2) уточнення коренів.

## 5.2. Відокремлення коренів

Корінь  $\xi$  рівняння  $f(x)=0$ , вважається **відокремленим** на відрізьку  $[a, b]$ , якщо на цьому відрізьку дане рівняння не має інших коренів.

**Відокремити корені** – це означає розбити всю область допустимих значень  $X$  (ОДЗ) на відрізки, в кожному з яких міститься один корінь (Рис. 5.2). Відокремлення коренів можна здійснити двома способами – **графічним** та **аналітичним**.

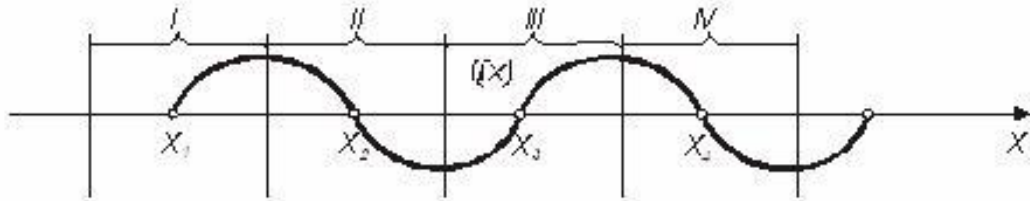


Рис. 5.2. Приклад розбиття ОДЗ на відрізки з одним коренем

**Графічний метод.** Будують графік функції  $y = f(x)$  для рівняння виду  $f(x) = 0$  або представляють рівняння у вигляді  $\varphi(x) = g(x)$  та будують графіки функцій  $y = \varphi(x)$  та  $y = g(x)$ . Значення дійсних коренів рівняння є абсцисами точок перетину графіка функції  $y = f(x)$  з віссю  $Ox$  або абсцисами точок перетину графіків функцій  $y = \varphi(x)$  та  $y = g(x)$ . Відрізки, в яких знаходиться тільки по одному кореню, легко знаходяться наближено.

**Аналітичний метод.** Аналітично корені рівняння  $f(x) = 0$  можна відокремити, використовуючи деякі властивості функцій та однією з розглянутих нижче теорем.

**Теорема 1.** Якщо функція  $f(x)$  неперервна на відріжку  $[a, b]$  і приймає на кінцях цього відріжку значення різних знаків, то всередині відрізка  $[a, b]$  існує хоча б один корінь рівняння  $f(x) = 0$  (Рис. 5.35.3)

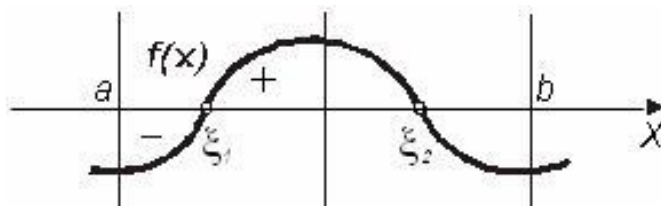


Рис. 5.3. Графічна інтерпретація теореми 1

**Теорема 2.** Якщо функція  $f(x)$  неперервна та монотонна на відріжку  $[a, b]$  і приймає на кінцях відрізка значення різних знаків, то всередині відрізка  $[a, b]$  існує корінь рівняння  $f(x) = 0$ , і цей корінь єдиний (Рис. 5.45.4).

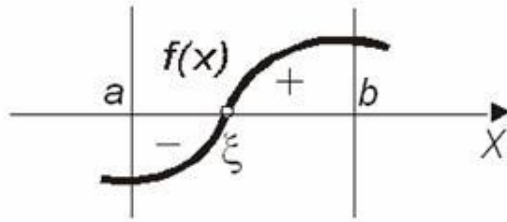


Рис. 5.4. Графічна інтерпретація теореми 2

**Теорема 3.** Якщо функція  $f(x)$  неперервна на відрізку  $[a, b]$  і приймає на кінцях цього відрізка значення різних знаків, а похідна  $f'(x)$  зберігає постійний знак всередині відрізка, то всередині відрізка існує єдиний корінь рівняння  $f(x) = 0$  (Рис. ).

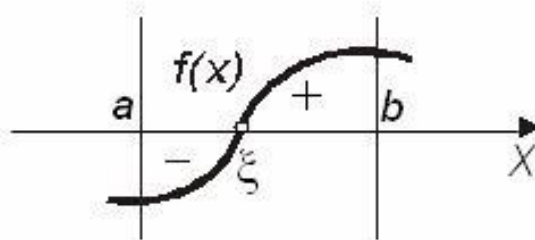


Рис. 5.5. Графічна інтерпретація теореми 3

### Алгоритм відокремлення коренів аналітичним методом

1. Дослідити дане рівняння на монотонність і неперервність, визначити область допустимих та граничних значень.

2. Знайти  $f'(x)$  – першу похідну, прирівняти її до нуля та знайти критичні точки.

3. Скласти таблицю знаків функції  $f(x)$ , використовуючи для  $x$  значення критичних точок, граничних значень з ОДЗ і точок, отриманих на першому кроці при аналізі даного рівняння.

4. Визначити інтервали, на кінцях яких функція приймає значення протилежних знаків. Всередині цих інтервалів існує по одному і тільки одному кореню.

### 5.3. Методи уточнення коренів рівняння

Для уточнення коренів рівняння використовують один з відомих методів. Вибір методів залежить від властивостей функції і лінійного рівняння. Найбільш широке застосування мають наступні методи:

- метод половинного ділення (метод дихотомії);
- метод ітерацій;

- метод пропорційних частин (метод хорд);
- метод Ньютона;
- модифікований метод Ньютона.

Дані методи є ітераційними, тобто, використовуючи ці методи, корінь рівняння визначається як межа деякої послідовності. Рішення повинне бути отримане за кінцеве число ітерацій, яке визначається в процесі рішення.

**Ітерацією** називають один етап уточнення рішення, на якому визначають нове значення наближеного рішення.

Ітераційні методи характеризуються наступними властивостями:

1. Швидкістю збіжності процесу до точного рішення. Ітераційний метод має  $n$ -й порядок збіжності до точного рішення, якщо виконується умова:

$$|x_{k+1} - x^*| \leq C |x_k - x^*|^n$$

$n$  – порядок збіжності методу;

$x^*$  – точне рішення;

$C$  – постійний коефіцієнт, не залежний від  $n$ .

Чим більше порядок збіжності методу, тим меншу кількість ітерацій необхідно виконати для отримання наближеного рішення із заданою похибкою.

2. Кількість математичних операцій, які необхідно виконати для здійснення однієї ітерації. Кількість операцій визначається залежно від вибраного методу і алгоритму його реалізації.

#### 5.4. Метод половинного ділення

Ідея методу половинного ділення (рис. 5.6) полягає в уточненні інтервалу, на якому знаходиться корінь рівняння, при цьому можна надійно оцінити похибку отриманого рішення. Крім того, метод половинного ділення можна використовувати, якщо функція  $f(x)$  має кінцеві розриви в околі кореня рівняння. Метод половинного ділення використовують в тих випадках, коли інші методи не дозволяють отримати рішення, тобто метод половинного ділення – універсальний метод. Метод половинного ділення має швидкість збіжності рівну  $\frac{1}{2}$ .

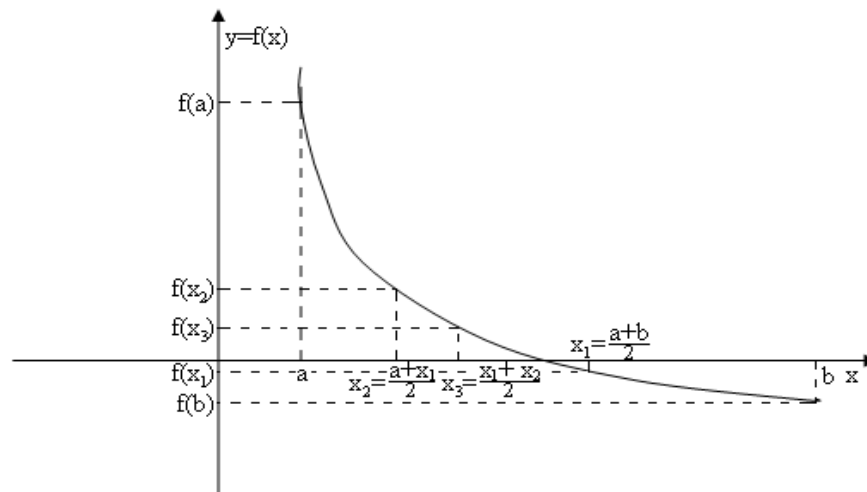


Рис. 5.6. Метод половинного ділення

### Алгоритм методу половинного ділення

1. На межах підінтервалу, на якому знаходиться корінь рівняння, обчислюють функцію рівняння  $f(b)$ .

2. Визначають уточнене значення кореня на першій ітерації

$$x_1 = \frac{a + b}{2}$$

3. Перевіряють виконання умов:

$$f(a) \cdot f(x_1) < 0, \quad (4)$$

$$f(b) \cdot f(x_1) < 0. \quad (5)$$

Якщо виконується умова (4), то залишають новий підінтервал  $x \in [a; x_1]$ . Якщо виконується умова (5), то залишають новий підінтервал  $x \in [x_1; b]$ .

4. Перевіряють умову закінчення ітерацій:

$$|a - x_1| \leq \varepsilon \quad (6)$$

$\varepsilon$  – достатньо мале позитивне число, рівне похибки рішення, що припускається.

Якщо умова **Ошибка! Источник ссылки не найден.** виконується, вважають, що рішення рівняння отримане, і приймають його рівним середньому арифметичному значенню

меж під інтервалів  $x_\varepsilon = \frac{a + x_1}{2}$ , інакше переходять до пункту 2 для подальшого уточнення рішення.

### 5.5. Метод ітерації (метод простої ітерації)

Ідея методу простої ітерації полягає в перетворенні заданого рівняння в еквівалентну форму:

$$f(x) = 0, \quad (4)$$

$$x = \varphi(x) \quad (5)$$

Використовуючи форму рівняння (5), отримують рекурентну формулу наступного вигляду:

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) \quad (96)$$

Метод простій ітерації сходиться за умови

$$\left| \frac{d \varphi(x)}{dx} \right| = n < 1 \quad (107)$$

$n$  – порядок збіжності методу.

З умови (107) виходить, що порядок збіжності методу простої ітерації не перевищує одиниці.

### Алгоритм методу ітерації

1. На заданому інтервалі існування кореня  $x \in [a; b]$  вибирають нульове (початкове) значення наближеного рішення  $x_0$ . Для цього використовують зазвичай наступну формулу:

$$x_0 = \frac{a + b}{2}$$

2. Використовуючи формулу (96), уточнюють рішення  $x_1 = \varphi(x_0)$

3. Перевіряють умову збіжності методу:

$$\left| \frac{d \varphi(x_0)}{dx} \right| < 1 \quad (11)$$

Якщо умова (11) виконується, переходять до наступного кроку, інакше роблять висновок, що метод не сходиться до точного рішення (метод розходиться), і його не можна застосовувати для вирішення рівняння (5)8, еквівалентного рівнянню (4).

4. Перевіряють умову завершення ітерації  $|x_1 - x_0| \leq \varepsilon$ .

Якщо умова виконана, вважають, що рішення з похибкою  $\varepsilon$  отримане, і ітерації припиняють, інакше переходять до пункту 2 для визначення  $x_2: x_2 = \varphi(x_1)$ . Потім цикл повторюється.

### **5.6. Метод пропорційних частин (метод хорд)**

Метод хорд (рис. 5.7) є одним з найбільш поширених методів розв'язання алгебраїчних і трансцендентних рівнянь. В літературі його ще називають методом пропорційних частин, методом лінійного інтерполювання, або методом хибного положення.



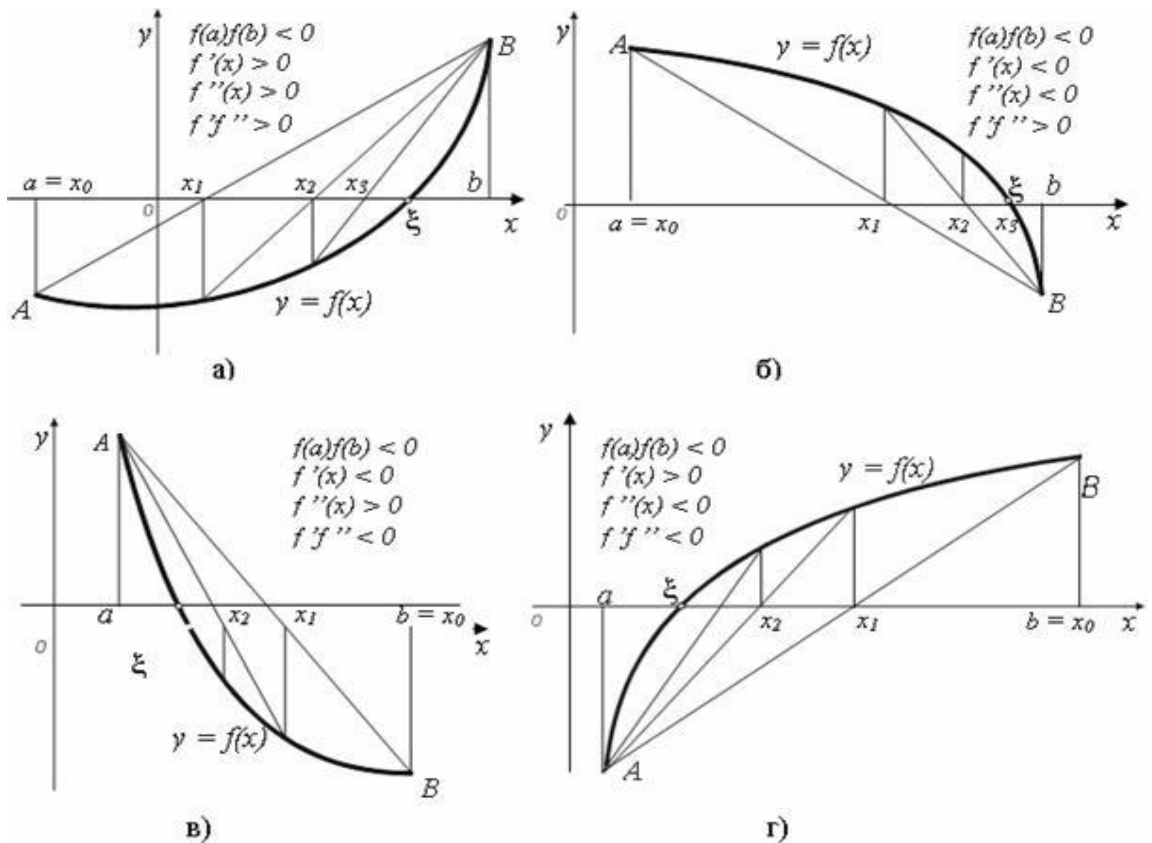


Рис. 5.7. Графічна інтерпретація методу хорд і процедури визначення рухомого кінця хорди

Нехай задано рівняння  $f(x)=0$ , де  $f(x)$  має на інтервалі  $(a; b)$  неперервні похідні першого та другого порядків, які зберігають сталі знаки на  $(a; b)$ . Нехай також корінь рівняння  $f(x)=0$  відокремлений і міститься на відрізку  $[a; b]$ , тобто  $f(a) \cdot f(b) < 0$ .

Ідея методу хорд полягає в тому, що на достатньо малому відрізку  $[a; b]$  дуга кривої  $y = f(x)$  замінюється прямою (лінійне інтерполювання) і абсциса точки перетину хорди з віссю  $Ox$  є наближеним коренем рівняння.

Нехай для визначеності  $f(a) < 0$ ,  $f(b) > 0$ ,  $f'(x) > 0$ ,  $f''(x) > 0$  (Рис. 5.7, а).

На графіку позначені точки  $A$  з координатами  $(a; f(a))$  та  $B$  з координатами  $(b; f(b))$ .

$\xi$  – точний корінь, значення якого необхідно визначити. Візьмемо за початкове наближення шуканого кореня  $\xi$  значення

$x_0 = a$ . Через точки  $A$  і  $B$  проведемо хорду і за перше наближення кореня  $\xi$  візьмемо абсцису  $x_1$  точки перетину хорди з віссю  $Ox$ .

Рівняння хорди, яка проходить через точки  $(a; f(a))$  і  $(b; f(b))$  має вигляд  $\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}$ . Знайдемо значення  $x = x_1$ , для якого  $y = 0$ :

$$x_1 = a - \frac{f(a)(b - a)}{f(b) - f(a)}. \quad (12)$$

Тепер корінь  $\xi$  знаходиться в середині відрізка  $[x_1; b]$ . Наближене значення кореня  $x_1$  можна уточнити якщо застосуємо метод хорд до відрізка  $[x_1; b]$ , тоді нове наближене значення кореня  $x_2$  знаходиться за формулою:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(b - x_1)}{f(b) - f(x_1)}.$$

Аналогічна для всякого  $i+1$ -го наближення до точного значення кореня  $\xi$  даного рівняння використовується формула:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(b - x_i)}{f(b) - f(x_i)}. \quad (13)$$

Процес стягування хордою продовжується багаторазово доти, поки не одержано наближений корінь із заданим ступенем точності

$$|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon, \quad (14)$$

де  $x_{i+1}, x_i$  – наближені значення коренів рівняння  $f(x) = 0$ , відповідно на  $i+1$  та  $i$ -му ітераційному кроці;  $\varepsilon$  – задана точність обчислень.

Слід відмітити, що розглянутий випадок (Рис. 5.7, а) перетину функції  $f(x)$  відрізка  $[a; b]$  не є єдиним. Існує ще три варіанти перетину функції, кожний з яких відрізняється напрямком побудови хорд і відповідно рухомими кінцями відрізка. Наприклад, на Рис. 5.7 а, б рухомий кінець відрізка  $a$ , а на рис. 5.7 в, г рухомий кінець –  $b$  і відповідно формула (12) для нього має вигляд:

$$x_1 = b - \frac{f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)} \quad (15)$$

У загальному випадку нерухомим буде той кінець відрізка ізоляції кореня, в якому знак функції  $f(x)$  збігається із знаком другої похідної, а за початкове наближення  $x_0$  можна взяти точку відрізка  $[a; b]$ , в якій  $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ .

В результаті основну розрахункову формулу методу хорд можна записати так:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - c)}{f(x_n) - f(c)}, \quad (16)$$

де  $(n = 0, 1, 2, 3, \dots)$ ,

$$c = \begin{cases} a, & \text{якщо } f(a) \cdot f''(a) > 0 \\ b, & \text{якщо } f(b) \cdot f''(b) > 0 \end{cases}$$

Послідовні наближення  $x_n$  до кореня  $\xi$  містяться з того боку кореня  $\xi$ , де функція  $f(x)$  має знак, протилежний до знаку її другої похідної  $f''(x)$ . Крім того, кожне наступне наближення ближче до кореня  $\xi$  ніж попереднє наближення.

Нехай  $\bar{\xi} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  ( $a < \bar{\xi} < b$ ). Границя  $\bar{\xi}$  існує, тому що послідовність  $\{x_n\}$  обмежена та монотонна.

Знайдемо границю обох частин формули (16):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( x_n - \frac{f(x_n)(x_n - c)}{f(x_n) - f(c)} \right), \quad \bar{\xi} = \bar{\xi} - \frac{f(\bar{\xi})(\bar{\xi} - c)}{f(\bar{\xi}) - f(c)}.$$

Звідси  $f(\bar{\xi}) = 0$ . Але, корінь  $\bar{\xi}$  – відокремлений, тобто на інтервалі  $(a; b)$   $\bar{\xi}$  – єдиний корінь рівняння  $y = f(x)$ . Таким чином,  $\bar{\xi} = \xi$ . Це означає, що послідовність наближень  $\{x_n\}$  збігається до точного кореня  $\xi$  рівняння  $y = f(x)$ .

Для оцінки похибки наближення можна використати формулу:

$$|\xi - x_{n+1}| < |x_{n+1} - x_n|,$$

де  $\xi$  – точне значення кореня, а  $x_n, x_{n+1}$  – наближення до нього, отриманні на  $n$ -му та  $n+1$ -му кроці. Однак, ця формула

справедлива лише на достатньо малих відрізках. Її застосовують при виконанні умови:

$$\text{де } L = \max_{[a,b]} |f'(x)|, \quad l = \min_{[a,b]} |f'(x)|, \quad L \leq 2l,$$

### 5.7. Метод Ньютона з параметром

Нехай корінь  $\xi$  рівняння  $f(x) = 0$  відокремлений на відрізку  $[a; b]$ , причому  $f'(x)$  і  $f''(x)$  неперервні та зберігають постійні знаки на відрізку  $[a; b]$ .

Для знаходження значення наступного наближення використовують наступну формулу (формула методу Ньютона):

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (17)$$

$n=0,1,2,\dots$

При виборі початкового наближення слід керуватись правилом: за початкове наближення у методі Ньютона необхідно брати таку точку  $x_0 \in [a; b]$ , в якій  $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ .

Якщо дана умова не виконується, тобто  $f(x_0) \cdot f''(x_0) < 0$ , то в цьому випадку можна застосувати метод Ньютона з параметром. Його ідея полягає в тому, що здійснюється вибір нового початкового наближення за допомогою формули:

$$x_{n+1} = x_n - t \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (18)$$

Параметр  $t$  змінюють таким чином, щоб виконувалась нерівність:

$$|f(x_{n+1})| < |f(x_n)|. \quad (19)$$

Покладемо спочатку  $t=1$ . Якщо умова  $|f(x_{n+1})| < |f(x_n)|$  не виконується, то вважають  $t = \frac{t}{2}$  і продовжують обчислення згідно з формулою  $x_{n+1} = x_n - t \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ , поки  $|f(x_{n+1})| < |f(x_n)|$ . В цьому

разі знайдене значення  $x_{n+1}$  приймають за початкове наближення і далі обчислення проводяться за формулою Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

**Зауваження 1.** Якщо похідна  $f'(x)$  мало змінюється на відрізку  $[a; b]$ , то кількість обчислень у методі Ньютона можна зменшити, коли значення  $f'(x_n)$  у точках  $x_n, n=0,1,2,\dots$  замінити значенням  $f'(x_0)$ . Тоді формула Ньютона матиме вигляд:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, \quad n=0,1,2,\dots$$

**Зауваження 2.** З формули  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$  неважко помітити, що чим більше чисельне значення  $f'(x)$  в околі даного кореня, тим менша правка, яку додаватиме до  $n$ -го наближення, щоб отримати  $n+1$ -ше наближення. Тому метод Ньютона використовують тоді, коли в околі даного кореня графік функції має значну крутість. Якщо чисельне значення похідної  $f'(x)$  біля кореня маленьке, то поправки великі і виконувати обчислення кореня методом Ньютона не варто.

Для оцінки похибки можна використати загальну формулу

$$|\xi - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{l}, \quad (20)$$

де  $l = \min_{[a;b]} |f'(x)|$ . Ця формула справедлива і для метода пропорційних частин.

Для метода Ньютона справедлива також оцінка

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \sqrt{\frac{2l_1}{L_2}} \cdot \varepsilon \quad (21)$$

Якщо на відрізку  $[a; b]$  справедлива нерівність  $L_2 \leq 2l_1$ , то ітераційний процес можна закінчити, коли виконується умова  $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$

## ТЕМА 6. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

### План

1. Загальна теорія систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
2. Метод Гауса з вибором головного елемента.
3. Метод простої ітерації для системи рівнянь.
4. Розв'язання систем нелінійних рівнянь методом Ньютона.

### 6.1. Загальна теорія систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Економісту, інженеру, технологу часто доводиться вирішувати різні алгебраїчні і трансцендентні рівняння та системи рівнянь, що можуть являти собою самостійну задачу (наприклад, аналіз рівноваги сил в жорсткій системі балок, або дослідження умов та параметрів рівноваги хімічної реакції, тощо) або частину більш складних задач. В обох випадках практична цінність чисельного методу в значній мірі визначається швидкістю і ефективністю отримання розв'язку. Розглянемо найбільш відомі чисельні методи і ефективні алгоритми розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

*Системою лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)* називають систему виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3m}x_m = b_3 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases} \quad (*)$$

де  $x_i$ , ( $i = \overline{1, n}$ ) – невідомі;  $b_i$ , ( $i = \overline{1, n}$ ) – вільні члени системи;  $a_{ij}$ , ( $i, j = \overline{1, n}$ ) – коефіцієнти системи.

В матричному вигляді рівняння **Ошибка! Источник ссылки не найден.** прийме вигляд:

$$\bar{A} \times \bar{X} = \bar{B},$$

де  $\bar{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  – вектор невідомих;  $\bar{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  – вектор вільних членів;  $\bar{A} = \{a_{11}, a_{21}, \dots, a_{jn}\}$  – матриця коефіцієнтів СЛАР.

**Розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь (\*)** називають вектор  $\vec{x}$ , координати якого  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  при підстановці у систему, що розв'язується, перетворюють кожне рівняння системи в тотожність.

Кількість невідомих  $m$  в системі називають **порядком** СЛАР. Систему лінійних алгебраїчних рівнянь називають **сумісною**, якщо вона має хоча б один ненульовий розв'язок. В протилежному випадку СЛАР називають **несумісною**.

СЛАР називається **визначеною**, якщо вона має тільки один розв'язок (випадок, коли  $m=n$ ). Систему називають **невизначеною**, якщо вона має безліч розв'язків.

Система називається **виродженою**, якщо головний визначник системи дорівнює нулю. Система називається **невиродженою**, якщо головний визначник системи не дорівнює нулю.

Дві системи називаються **еквівалентними**, якщо ці системи сумісні, визначені і мають однаковий розв'язок.

СЛАР можна розв'язати на ЕОМ чисельними методами, якщо вона сумісна, визначена, невивроджена.

## 6.2. Метод Гауса з вибором головного елемента

Основною ідеєю методу Гауса, є послідовне виключення невідомих, що приводить до побудови еквівалентної системи з трикутною матрицею.

Метод Гауса при вирішенні системи рівнянь можна розділити на два етапи: прямий і зворотний хід. Обчислення невідомих ведеться у зворотній послідовності, тобто від останньої до першої. Необхідною і достатньою умовою виконання методу Гауса має бути наступним: всі провідні елементи  $A_{ii}$  не повинні дорівнювати нулю. У якості головного елемента обирається найбільший коефіцієнт, який розташовують на головній діагоналі, для цього необхідно міняти місцями відповідні рядки чи стовпчики.

При розв'язуванні систем лінійних рівнянь методом Гауса зручніше виконувати елементарні перетворення не над самою системою, а над її розширеною матрицею, тобто матрицею, утвореною приєднанням до основної матриці системи стовпця вільних членів.

**Приклад.** Знайти розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь  $Ax=F$  методом Гауса з вибором головного елемента з точністю  $\varepsilon=0,001$ , де:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 & 1 \\ -3 & 5 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} 24 \\ -7 \\ 16 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

### Розв'язання

Запишемо розширену матрицю, з якою виконуватимемо перетворення. Найбільший коефіцієнт дорівнює 8 та розташований у першому рядку та третьому стовпчику. Його треба розташувати на головній діагоналі:

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 8 & 3 & 1 & 1 & 24 \\ 2 & 5 & -3 & -2 & -7 \\ 4 & -1 & 0 & 3 & 16 \\ -2 & 3 & 5 & 4 & 5 \end{array} \right].$$

Перетворимо у 0 елементи, які розташовані під елементом  $a_{11}$ . Для цього розрахуємо допоміжні коефіцієнти для кожного рядка (2-го, 3-го, 4-го).

Коефіцієнт для другого рядка

$$k_1 = -\frac{a_{21}}{a_{11}} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}.$$

Коефіцієнт для третього рядка

$$k_2 = -\frac{a_{31}}{a_{11}} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}.$$

Коефіцієнт для четвертого рядка

$$k_3 = -\frac{a_{41}}{a_{11}} = -\frac{-2}{8} = \frac{1}{4}.$$



$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 8 & 3 & 1 & 1 & 24 \\ 2 & 5 & -3 & -2 & -7 \\ 4 & -1 & 0 & 3 & 16 \\ -2 & 3 & 5 & 4 & 5 \end{array} \right] \approx$$

$$\approx \left[ \begin{array}{cccc|c} 8 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + 2 & 3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + 5 & 1 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - 3 & 1 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - 2 & 24 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - 7 \\ 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 4 & 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 & 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 0 & 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 & 24 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 16 \\ 8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) - 2 & 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + 3 & 1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + 5 & 1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + 4 & 24 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + 5 \end{array} \right] \approx$$

$$\approx \left[ \begin{array}{cccc|c} 8 & 3 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & \frac{17}{4} & -\frac{13}{4} & -\frac{9}{4} & -13 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 4 \\ 0 & \frac{15}{4} & \frac{21}{4} & \frac{17}{4} & 11 \end{array} \right]$$

Розглянемо коефіцієнти

$$\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

матриці  $A$ , найбільший дорівнює  $\frac{21}{4}$ . Його треба розташувати на головній діагональ –  $a_{22}$ . Для цього міняємо місцями другий та третій стовпчики, а потім міняємо місцями другий та четвертий рядки.

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 8 & 3 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & \frac{3}{17} & -\frac{1}{13} & -\frac{9}{4} & -13 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 4 \\ 0 & \frac{15}{4} & \frac{21}{4} & \frac{17}{4} & 11 \end{array} \right] \approx \left[ \begin{array}{cccc|c} 8 & 3 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & -\frac{13}{4} & \frac{17}{4} & -\frac{9}{4} & -13 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 4 \\ 0 & \frac{21}{4} & \frac{15}{4} & \frac{17}{4} & 11 \end{array} \right] \approx$$

$$\approx \left[ \begin{array}{cccc|c} 8 & 3 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & \frac{21}{4} & \frac{15}{4} & \frac{17}{4} & 11 \\ 0 & -\frac{13}{4} & \frac{17}{4} & -\frac{9}{4} & -13 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 4 \end{array} \right].$$

Перетворимо у 0 елементи, які розташовані під елементом  $a_{22}$ . Для цього розрахуємо допоміжний коефіцієнт для другого рядка.

Коефіцієнт для третього рядка

$$k_4 = -\frac{a_{32}}{a_{22}} = -\frac{-\frac{13}{4}}{\frac{21}{4}} = \frac{13}{21}.$$

Коефіцієнт для четвертого рядка

$$k_5 = -\frac{a_{42}}{a_{22}} = -\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{21}{4}} = \frac{2}{21}.$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 8 & 3 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & \frac{21}{4} & \frac{15}{4} & \frac{17}{4} & 11 \\ 0 & -\frac{13}{4} & \frac{17}{4} & -\frac{9}{4} & -13 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 4 \end{array} \right] \approx \left[ \begin{array}{cccc|c} 8 & 3 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & \frac{21}{4} & \frac{15}{4} & \frac{17}{4} & 11 \\ 0 & 0 & \frac{46}{7} & \frac{8}{21} & -\frac{130}{21} \\ 0 & 0 & -\frac{15}{7} & \frac{61}{21} & \frac{106}{21} \end{array} \right].$$

Розглянемо коефіцієнти  $\begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$  матриці А, найбільший

дорівнює  $\frac{46}{7}$ . Цей елемент вже розташований на головній діагональ –  $a_{33}$ . Перетворимо у 0 елементи, які розташовані під елементом  $a_{33}$ .

Коефіцієнт для четвертого рядка

$$k_6 = -\frac{a_{43}}{a_{33}} = -\frac{-\frac{15}{7}}{\frac{46}{7}} = \frac{15}{46}.$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & \frac{21}{4} & \frac{15}{4} & \frac{17}{4} & \frac{11}{4} \\ 0 & 0 & \frac{46}{7} & \frac{8}{21} & -\frac{130}{21} \\ 0 & 0 & -\frac{15}{7} & \frac{61}{21} & \frac{106}{21} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & \frac{21}{4} & \frac{15}{4} & \frac{17}{4} & \frac{11}{4} \\ 0 & 0 & \frac{46}{7} & \frac{8}{21} & -\frac{130}{21} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{209}{69} & \frac{209}{69} \end{bmatrix}.$$

Запишемо цей **прямий хід** у вигляді таблиці:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$f$
1	3	8	1	24
-3	5	2	-2	-7
0	-1	4	3	16
5	3	-2	4	5

 $\approx$ 

$x_3$	$x_2$	$x_1$	$x_4$	$f$
8	3	1	1	24
2	5	-3	-2	-7
4	-1	0	3	16
-2	3	5	4	5

 $\approx$ 
 $\approx$ 

$x_3$	$x_2$	$x_1$	$x_4$	$f$
8	3	1	1	24
0	$\frac{17}{4}$	$-\frac{13}{4}$	$-\frac{9}{4}$	-13
0	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	4
0	$\frac{15}{4}$	$\frac{21}{4}$	$\frac{17}{4}$	11

 $\approx$ 

$x_3$	$x_1$	$x_2$	$x_4$	$f$
8	1	3	1	24
0	$-\frac{13}{4}$	$\frac{17}{4}$	$-\frac{9}{4}$	-13
0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	4
0	$\frac{21}{4}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{17}{4}$	11

$$\approx \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline x_3 & x_1 & x_2 & x_4 & f \\ \hline 8 & 1 & 3 & 1 & 24 \\ 0 & \frac{21}{4} & \frac{15}{4} & \frac{17}{4} & 11 \\ 0 & -\frac{13}{4} & \frac{17}{4} & -\frac{9}{4} & -13 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 4 \\ \hline \end{array} \approx \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline x_3 & x_1 & x_2 & x_4 & f \\ \hline 8 & 1 & 3 & 1 & 24 \\ 0 & \frac{21}{4} & \frac{15}{4} & \frac{17}{4} & 11 \\ 0 & 0 & \frac{46}{7} & \frac{8}{21} & -\frac{130}{21} \\ 0 & 0 & -\frac{15}{7} & \frac{61}{21} & \frac{106}{21} \\ \hline \end{array}$$

$$\approx \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline x_3 & x_1 & x_2 & x_4 & f \\ \hline 8 & 1 & 3 & 1 & 24 \\ 0 & \frac{21}{4} & \frac{15}{4} & \frac{17}{4} & 11 \\ 0 & 0 & \frac{46}{7} & \frac{8}{21} & -\frac{130}{21} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{209}{69} & \frac{209}{69} \\ \hline \end{array}$$

В результаті перетворень отримуємо наступну систему, яку потрібно розв'язати:

$$\begin{cases} 8x_3 + x_1 + 3x_2 + x_4 = 24 \\ \frac{21}{4}x_1 + \frac{15}{4}x_2 + \frac{17}{4}x_4 = 11 \\ \frac{46}{7}x_2 + \frac{8}{21}x_4 = -\frac{130}{21} \\ \frac{209}{69}x_4 = \frac{209}{69} \end{cases}$$

**Обернений хід.** Знаходимо значення невідомих, починаючи з останньої:

$$x_4 = \frac{\frac{209}{69}}{\frac{209}{69}} = 1;$$

$$x_2 = \frac{-\frac{130}{21} - \frac{8}{21} \cdot 1}{\frac{46}{7}} = -1;$$

$$x_1 = \frac{11 - \frac{17}{4} \cdot 1 - \frac{15}{4} \cdot (-1)}{\frac{21}{4}} = 2;$$

$$x_3 = \frac{24 - 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) - 1 \cdot 2}{8} = 3.$$

**Відповідь:**

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 1.$$

### 6.3. Метод простої ітерації для системи рівнянь

Нехай дана система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

Запишемо цю систему у матричному вигляді:  $A \cdot X = B$ ,

де

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Припускаючи, що діагональні елементи  $a_{ii} \neq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), виразимо  $x_1$  через перше рівняння системи,  $x_2$  – через друге рівняння тощо. В результаті одержимо систему, еквівалентну початковій:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n \\ x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1 - \dots - \frac{a_{2n}}{a_{22}} x_n \\ \dots \\ x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1 - \dots - \frac{a_{nn-1}}{a_{nn}} x_{n-1} \end{cases}.$$

Позначимо  $\frac{b_i}{a_{ii}} = \beta_i$ ;  $-\frac{a_{ij}}{a_{ii}} = \alpha_{ij}$ , де  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Тепер система запишеться наступним чином:

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 - \alpha_{12}x_2 - \dots - \alpha_{1n}x_n \\ x_2 = \beta_2 - \alpha_{21}x_1 - \dots - \alpha_{2n}x_n \\ \dots \\ x_n = \beta_n - \alpha_{n1}x_1 - \dots - \alpha_{nn-1}x_{n-1} \end{cases}.$$

Остання система називається *приведеною до нормального вигляду*. Введемо позначення

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}.$$

Запишемо систему у матричній формі:  $X = \beta + \alpha \cdot X$  чи

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Розв'яжемо цю систему методом послідовного наближення. За нульове наближення прийнемо стовпець вільних членів:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \quad - \text{ нульове наближення.}$$

Далі побудуємо матриці-стовпці

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix} \quad - \text{ перше наближення;}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ \vdots \\ x_n^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{bmatrix} \quad \text{— друге наближення т.д.}$$

Кожне  $(k+1)$ -е наближення обчислюють по формулі:

$$X^{(k+1)} = \beta + \alpha \cdot X^{(k)}, \text{ де } k = 0, 1, \dots, n.$$

**Приклад.** Методом простої ітерації з точністю  $\varepsilon = 0,01$  розв'язати систему

$$\begin{cases} 4x_1 + 0,24x_2 - 0,08x_3 = 8 \\ 0,09x_1 + 3x_2 - 0,15x_3 = 9 \\ 0,04x_1 - 0,08x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases}.$$

### Розв'язання

Розглянемо матриці

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0,24 & -0,08 \\ 0,09 & 3 & -0,15 \\ 0,04 & -0,08 & 4 \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

Тоді початкову систему можна записати у вигляді матричного рівняння  $AX = B$ .

Діагональні коефіцієнти  $a_{ii} \neq 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Розв'яжемо перше рівняння початкової системи відносно  $x_1$ , друге відносно  $x_2$  і т.д. Тоді одержимо еквівалентну систему:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 \\ x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3 \\ x_3 = \frac{b_3}{a_{33}} - \frac{a_{31}}{a_{33}}x_1 - \frac{a_{32}}{a_{33}}x_2 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3, \\ x_3 = \beta_3 + \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 \end{cases}$$

де

$$\beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}}; \quad \alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, \text{ при } i \neq j; \quad \alpha_{ij} = 0, \text{ при } i = j.$$

Зведемо систему до нормального вигляду

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 0,06x_2 + 0,02x_3 \\ x_2 = 3 - 0,03x_1 + 0,05x_3 \\ x_3 = 5 - 0,01x_1 + 0,12x_2 \end{cases}.$$

Введемо матриці  $\alpha$  та  $\beta$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}; \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix};$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -0,06 & 0,02 \\ -0,03 & 0 & 0,05 \\ -0,01 & 0,02 & 0 \end{bmatrix}; \quad \beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Систему, зведену до нормального вигляду, запишемо наступним чином:

$$x^{(n+1)} = \beta + \alpha x^{(n)}$$

або в матричній формі

$$\begin{bmatrix} x_1^{(n+1)} \\ x_2^{(n+1)} \\ x_3^{(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0,06 & 0,02 \\ -0,03 & 0 & 0,05 \\ -0,01 & 0,02 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ x_3^{(n)} \end{bmatrix}.$$

Дану систему будемо розв'язувати методом послідовних наближень. За нульове наближення позначимо стовпчик вільних членів  $x^{(0)} = \beta$ . Далі послідовно будемо матриці-стовпці:

$$x^{(1)} = \beta + \alpha x^{(0)} \text{ – перше наближення;}$$

$$x^{(2)} = \beta + \alpha x^{(1)} \text{ – друге наближення;}$$

$$x^{(3)} = \beta + \alpha x^{(2)} \text{ – третє наближення тощо.}$$

На практиці ітераційний процес припиняють, коли

$$\left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| < \varepsilon.$$



Тоді

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Знаходимо перше наближення:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0,06 & 0,02 \\ -0,03 & 0 & 0,05 \\ -0,01 & 0,02 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0,06 & 0,02 \\ -0,03 & 0 & 0,05 \\ -0,01 & 0,02 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,92 \\ 3,19 \\ 5,04 \end{bmatrix}.$$

Знаходимо друге наближення:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0,06 & 0,02 \\ -0,03 & 0 & 0,05 \\ -0,01 & 0,02 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0,06 & 0,02 \\ -0,03 & 0 & 0,05 \\ -0,01 & 0,02 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,92 \\ 3,19 \\ 5,04 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,9094 \\ 3,1944 \\ 5,0446 \end{bmatrix}.$$

Перевіряємо умову припинення ітераційного процесу:

$$|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}| = |1,9094 - 1,92| = 0,0106 > \varepsilon \quad \text{умова} \quad \text{не}$$

виконується.

$$|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}| = |3,1944 - 3,19| = 0,0044 < \varepsilon \quad \text{умова виконується.}$$

$$|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}| = |5,0446 - 5,04| = 0,0046 < \varepsilon \quad \text{умова виконується.}$$

Знаходимо третє наближення:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0,06 & 0,02 \\ -0,03 & 0 & 0,05 \\ -0,01 & 0,02 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0,06 & 0,02 \\ -0,03 & 0 & 0,05 \\ -0,01 & 0,02 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,9094 \\ 3,1944 \\ 5,0446 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,909228 \\ 3,194948 \\ 5,044794 \end{bmatrix}.$$

Перевіряємо умову припинення ітераційного процесу:

$$|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}| = |1,909228 - 1,9094| = 0,00017 < \varepsilon \quad \text{умова виконується.}$$

$$|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}| = |3,194948 - 3,1944| = 0,000548 < \varepsilon \quad \text{умова виконується.}$$

$$|x_3^{(3)} - x_3^{(2)}| = |5,044794 - 5,0446| = 0,000194 < \varepsilon \quad \text{умова виконується.}$$

**Відповідь:**  $x_1 = 1,909228$ ,  $x_2 = 3,194948$ ,  $x_3 = 5,044794$ .

#### 6.4. Розв'язання систем нелінійних рівнянь методом Ньютона

Розглянемо розв'язок системи двох нелінійних рівнянь з двома невідомими методом Ньютона. Нехай дана система

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

де  $f$  і  $\varphi$  – неперервні диференційовані функції. Припустимо, що відомі  $n$ -е наближення невідомих, тоді за більш точні їх значення можна прийняти  $x = x_n + h_n$  та  $y = y_n + k_n$ .

Тоді система запишеться у вигляді

$$\begin{cases} f(x_n + h_n, y_n + k_n) = 0 \\ \varphi(x_n + h_n, y_n + k_n) = 0 \end{cases}$$

Розкладемо функції  $f$  і  $\varphi$  в **ряд Тейлора** за степенями  $h_n$  і  $k_n$  :

$$f(x_n + h_n, y_n + k_n) = f(x_n, y_n) + h_n \cdot f'_x(x_n, y_n) + k_n \cdot f'_y(x_n, y_n) + O_1(h_n, k_n),$$

$$\varphi(x_n + h_n, y_n + k_n) = \varphi(x_n, y_n) + h_n \cdot \varphi'_x(x_n, y_n) + k_n \cdot \varphi'_y(x_n, y_n) + O_2(h_n, k_n).$$

Тут  $O_1(h_n, k_n)$  і  $O_2(h_n, k_n)$  містять члени більш високого порядку меншості, ніж  $h_n$  і  $k_n$ .

Задовольнившись першими трьома членами відносно  $h_n$  і  $k_n$  отримаємо систему

$$\begin{cases} f(x_n, y_n) + h_n \cdot f'_x(x_n, y_n) + k_n \cdot f'_y(x_n, y_n) = 0 \\ \varphi(x_n, y_n) + h_n \cdot \varphi'_x(x_n, y_n) + k_n \cdot \varphi'_y(x_n, y_n) = 0 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} h_n \cdot f'_x(x_n, y_n) + k_n \cdot f'_y(x_n, y_n) = -f(x_n, y_n) \\ h_n \cdot \varphi'_x(x_n, y_n) + k_n \cdot \varphi'_y(x_n, y_n) = -\varphi(x_n, y_n) \end{cases}.$$

Звідки

$$h_n = \frac{\begin{vmatrix} -f(x_n, y_n) & f'_y(x_n, y_n) \\ -\varphi(x_n, y_n) & \varphi'_y(x_n, y_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f'_x(x_n, y_n) & f'_y(x_n, y_n) \\ \varphi'_x(x_n, y_n) & \varphi'_y(x_n, y_n) \end{vmatrix}} = \frac{\Delta h_n}{\Delta_n},$$

$$k_n = \frac{\begin{vmatrix} f'_x(x_n, y_n) & -f(x_n, y_n) \\ \varphi'_x(x_n, y_n) & -\varphi(x_n, y_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f'_x(x_n, y_n) & f'_y(x_n, y_n) \\ \varphi'_x(x_n, y_n) & \varphi'_y(x_n, y_n) \end{vmatrix}} = \frac{\Delta k_n}{\Delta_n}.$$

Таким чином, знаходимо

$$x_{n+1} = x_n + h_n, \quad y_{n+1} = y_n + k_n.$$

Початкові значення  $x_0, y_0$  визначаються наближено, звичайно із графічного методу.

**Приклад.** Знайти розв'язок системи нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} F(x, y) = x^2 y + 4xy - 2x + 3 = 0 \\ G(x, y) = y^3 - 2x^2 + y - 1 = 0 \end{cases}$$

методом Ньютона з початковим наближенням  $x_0 = 1$  та  $y_0 = 0,5$  з точністю  $\varepsilon = 0,01$ .

### Розв'язання

Знайдемо частинні похідні за  $x$  та за  $y$  для системи нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} F(x, y) = x^2 y + 4xy - 2x + 3 = 0 \\ G(x, y) = y^3 - 2x^2 + y - 1 = 0 \end{cases}.$$

Частинні похідні за  $x$  та за  $y$ :

$$\begin{aligned} f'_x &= 2xy + 4y - 2, & f'_y &= x^2 + 4x, \\ g'_x &= -4x, & g'_y &= 3y^2 + 1. \end{aligned}$$

За методом Ньютона нові значення знаходяться

$$x_{n+1} = x_n + h_n \quad \text{та} \quad y_{n+1} = y_n + k_n,$$

де

$$h_n = \frac{\begin{vmatrix} -f(x_n, y_n) & f'_y(x_n, y_n) \\ -g(x_n, y_n) & g'_y(x_n, y_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f'_x(x_n, y_n) & f'_y(x_n, y_n) \\ g'_x(x_n, y_n) & g'_y(x_n, y_n) \end{vmatrix}} = \frac{\Delta h_n}{\Delta_n},$$

та

$$k_n = \frac{\begin{vmatrix} f'_x(x_n, y_n) & -f(x_n, y_n) \\ g'_x(x_n, y_n) & -g(x_n, y_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f'_x(x_n, y_n) & f'_y(x_n, y_n) \\ g'_x(x_n, y_n) & g'_y(x_n, y_n) \end{vmatrix}} = \frac{\Delta k_n}{\Delta_n}.$$

Обчислення зручно проводити у розрахунковій таблиці (табл. 6.1).

Таблиця 6.1

Розрахункова таблиця методу Ньютона

$N$	0	1	2	3
$x$	1	0,536232	0,584172	0,584989
$y$	0,5	0,797101	0,92592	0,916033
$f(x, y)$	-0,5	0,447014	-0,01595	
$g(x, y)$	-2,375	-0,27153	0,037223	
$f'_x(x, y)$	-3	-4,33354	-4,62189	
$g'_x(x, y)$	-4	-2,14493	-2,33669	
$f'_y(x, y)$	-3	-1,85738	-1,99543	
$g'_y(x, y)$	1,75	2,906112	3,571982	
$\Delta$	-17,25	-16,578	-21,172	
$\Delta h$	8	-0,79473	-0,0173	
$\Delta k$	-5,125	-2,13551	0,209312	
$h$	-0,46377	0,04794	0,000817	
$k$	0,297101	0,128818	-0,00989	

Перевіримо критерій зупинення процесу ітерацій  $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$  та  $|y_{n+1} - y_n| < \varepsilon$ :

$$|x_3 - x_2| = |0,584959 - 0,584172| = 0,000817 < \varepsilon,$$

$$|y_3 - y_2| = |0,916033 - 0,92592| = 0,00989 < \varepsilon.$$

Умова виконується одночасно для  $x$  та для  $y$ .

**Відповідь:**  $x = x_3 = 0,584989$  та  $y = y_3 = 0,916033$ .

# ТЕМА 7. ЧИСЕЛЬНЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ТА ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ

## План

1. Чисельне диференціювання функцій.
2. Чисельне інтегрування функцій.
3. Метод прямокутників.
4. Метод трапецій.
5. Метод Сімпсона.

### 7.1. Чисельне диференціювання функцій

У тих випадках, коли функція задана в табличній формі, неможливо використовувати правила диференціювання функції, розроблені для аналітичного способу завдання функції. Тому застосовують наближені методи обчислення похідних.

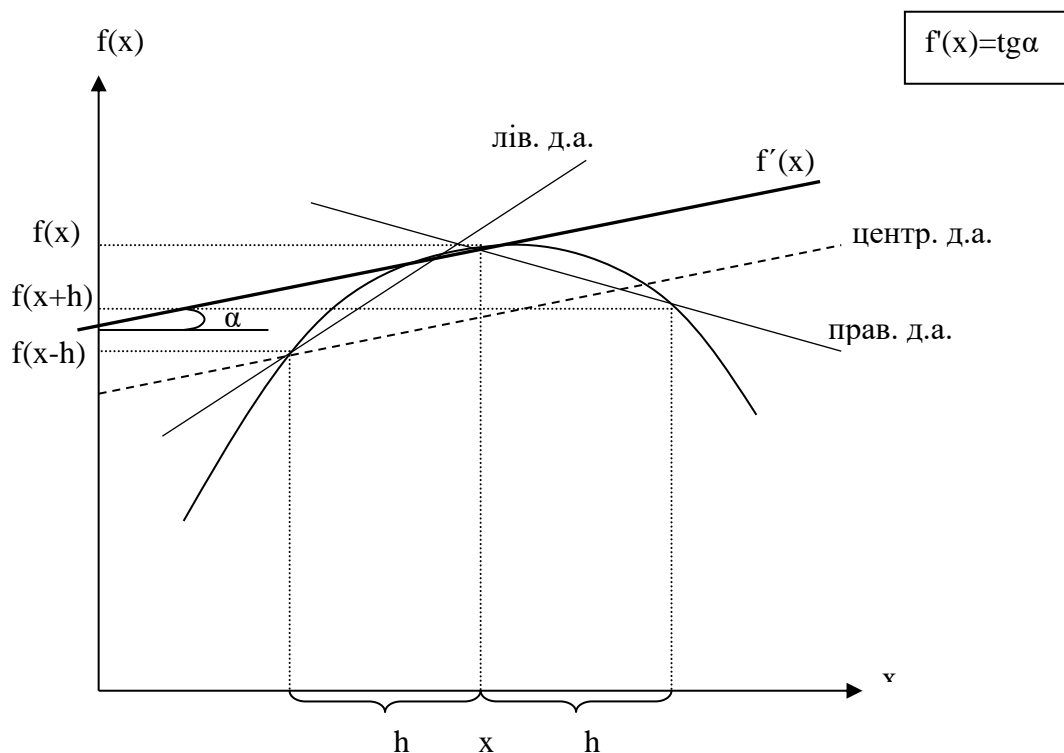


Рис. 7.1. Дискретні аналоги похідної

Основною ідеєю чисельного визначення похідних є заміна похідної її дискретним аналогом.

**Дискретним аналогом похідної** називаються відношення приросту функції до приросту аргументу. На відміну від класичного визначення похідної, операція граничного переходу не застосовується.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{– класичний}$$

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{– дискретний}$$

Наближення дискретного аналога до похідної функції здійснюється за допомогою задання на скільки можливо малого приросту аргументу.

Дискретний аналог похідної можна обчислити різними способами. Нехай  $f(x)$  – диференціальна функція,  $h$  – малий додатній приріст змінної  $x$  по степеням  $h$ .

**З надлишком:**

$$f(x+h) = f(x) + h \cdot f'(x) + \frac{h^2}{2!} \cdot f''(x) + \frac{h^3}{3!} \cdot f'''(x) + \frac{h^4}{4!} \cdot f^{IV}(x) + \dots \quad (1)$$

**З нестачею:**

$$f(x-h) = f(x) - h \cdot f'(x) + \frac{h^2}{2!} \cdot f''(x) - \frac{h^3}{3!} \cdot f'''(x) + \frac{h^4}{4!} \cdot f^{IV}(x) - \dots \quad (2)$$

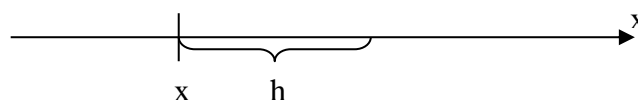
Обмежуючись першими трьома членами у ряді (1) визначили першу похідну функції.

$$f(x+h) = f(x) + h \cdot f'(x) + \frac{h^2}{2!} \cdot f''(x)$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h^2}{2!} \cdot f''(x)$$

Як дискретний аналог використовують перший доданок, а другий дозволяє оцінити порядок похибки обчислення похідної щодо приросту  $h$ .

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



Такий дискретний аналог називається **правим дискретним аналогом**.

Порядок похибки при обчисленні похідної визначається степенем  $h$  при другій похідній. Таким чином, правий дискретний аналог має перший порядок точності по приросту  $h$ . Якщо крок зменшується в 2 рази, похибка зменшується приблизно в 2 рази.

Використовуючи ряд (2) можна отримати лівий дискретний аналог.

$$f(x-h) \approx f(x) - h \cdot f'(x) + \frac{h^2}{2!} \cdot f''(x)$$

$$f(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \frac{h}{2!} \cdot f''(x)$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

Такий дискретний аналог називають *лівим дискретним аналогом*. Лівий дискретний аналог має перший порядок точності щодо зміни  $h$ .

Віднімемо вираз (2) від виразу (1):

$$f(x+h) - f(x-h) = 2 \cdot h \cdot f'(x) + 2 \cdot \frac{h^3}{3!} \cdot f'''(x) + \dots$$

Визначимо I похідну:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2 \cdot h} - \frac{h^3}{3!} \cdot f'''(x) \quad (3)$$

Для обчислення похідної використовують перший доданок:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2 \cdot h}$$

Він називається *центральним дискретним аналогом*. Другий доданок у виразі (3) визначає порядок точності центрального дискретного аналога. З нього виходить, що центральний дискретний аналог має другий порядок точності по величині  $h$ . Для обчислення другої похідної від заданої функції складемо вирази (1) і (2):

$$f(x+h) + f(x-h) = 2 \cdot f(x) + 2 \cdot \frac{h^2}{2!} \cdot f''(x) + 2 \cdot \frac{h^4}{4!} \cdot f^{IV}(x) + \dots$$

$$f(x+h) + f(x-h) \approx 2 \cdot f(x) + 2 \cdot \frac{h^2}{2!} \cdot f''(x) + 2 \cdot \frac{h^4}{4!} \cdot f^{IV}(x) \quad (4)$$



З (4) визначимо другу похідну:

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) + f(x-h) + f(x)}{h^2} - \frac{h^2}{12} \cdot f^{IV}(x) \quad (5)$$

Перший доданок використовують як дискретний аналог другої похідної:

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) + f(x-h) + f(x)}{h^2}$$

За степенем  $h$  другого доданку у виразі (5) визначають порядок точності дискретного аналога другої похідної.

Нехай задана функція має наступний вигляд (рис. 7.1). Необхідно обчислити дискретний аналог похідної в околі точки  $x$ . По геометричному смислу похідної  $f'(x) = \operatorname{tg} \angle \alpha$  нахилу дотичної до лінії функції в заданій точці.

## 7.2. Чисельне інтегрування функцій

Нехай необхідно обчислити визначений інтеграл від функції  $f(x)$ :

$$F = \int_a^b f(x) dx$$

Основним завданням чисельного інтегрування є заміна визначеного інтеграла частинною сумою без виконання операцій граничного переходу:

$$F = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\max(\Delta x) \rightarrow 0} \sum_{x=a}^b f(x) \Delta x$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{x=a}^b f(x) \Delta x$$

Залежно від способу обчислення кінцевої суми використовують різні методи:

- метод прямокутників;
- метод трапеції;
- метод Сімпсона.

### 7.3. Метод прямокутників

**Метод прямокутників** полягає у обчисленні інтеграла за теоремою про середнє значення, коли підінтегральна функція обчислюється при значенні  $x$  по середині інтервалу інтегрування і множиться на інтервал інтегрування (рис. 7.2).

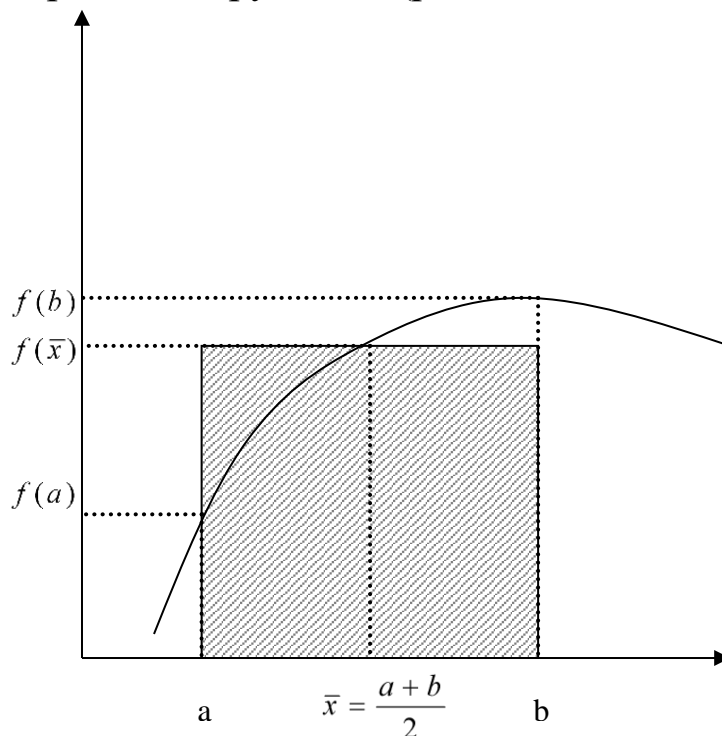


Рис. 7.2. Метод прямокутників

Відповідно, маємо:

$$F = \int_a^b f(x)dx = (b-a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + R$$

$R$  – похибка інтегрування.

Похибка інтегрування обчислюється за допомогою інтегральної формули:

$$R = \frac{(b-a)^2}{24} \cdot \int_a^b f''(x)dx$$

Похибку інтегрування можна істотно зменшити, якщо розділити інтервал інтегрування на  $n$  підінтервалів, межі яких визначаються значеннями змінних інтегрування:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_n = b$$

Довжина підінтервалу інтегрування називається кроком інтегрування:

$$h_i = x_i - x_{i-1}$$

Тоді інтеграл можна представити як суму інтегралів на кожному інтервалі:

$$F = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n h_i \cdot f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) + R$$

Похибка інтегрування в цьому випадку на кожному підінтервалі визначається за формулою:

$$R_i = \frac{h_i^2}{24} \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(x)dx$$

Якщо крок інтегрування сталий, тоді похибка інтегрування визначається за формулою:

$$R = \frac{h^2}{24} \cdot \int_a^b f''(x)dx \quad h - const \quad (6)$$

Оцінка похибки за формулою (6) часто буває завданням ще більш складним, ніж обчислення інтеграла. Тому величину похибки інтегрування визначають за допомогою мажорантної оцінки:

$$R \leq \frac{h^2}{24} \cdot M_2 \cdot (b - a) \quad (7)$$

$M_2$  – визначається за формулою:

$$M_2 = \max_{x \in [a; b]} |f''(x)| \quad (8)$$

Мажорантну оцінку (7) похибки інтегрування можна використовувати для оцінки похибки при заданому кроці інтегрування, проте в більшості випадків похибка обчислення інтеграла буває задана, тому мажорантну оцінку (7) використовують для обчислення кроку інтегрування:

$$h \leq \sqrt{\frac{24 \cdot R}{M_2 \cdot (b - a)}} \quad (9)$$

З формули (6) виходить, що похибка інтегрування пропорційна квадрату кроку інтегрування, це означає, що метод прямокутників є методом другого порядку точності відносно  $h$ .

### Алгоритм методу прямокутників

1. Обчислити другу похідну підінтегральної функції.
2. Задати  $n$  підінтервалів на інтервалі інтегрування  $[a;b]$ .
3. Обчислити попередній крок інтегрування:

$$h_p = \frac{b-a}{n_p-1}$$

4. Обчислити значення  $x$  в граничних точках підінтервалів:

$$x_i = a + i \cdot h_p, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

5. Обчислити підінтегральну функцію на межах підінтервалів інтегрування.

6. Якщо друга похідна обчислюється аналітично, визначити її значення на межах підінтервалів. Інакше скористатися формулою обчислення другої похідної за допомогою дискретного аналога:

$$f''(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - 2 \cdot f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2}$$

7. За формулою (8) обчислюваний максимум модуля дорівнює другій похідній.

8. За заданою похибкою  $R$  визначити крок інтегрування по формулі (9).

9. Визначити кількість підінтервалів:

$$n = 1 + \frac{b-a}{h}$$

10. Знайдене значення  $n$  округлити до найближчого цілого числа, тобто

$$n_0 = \text{целое}(n)$$

11. За величиною  $n_0$  визначити остаточний крок інтегрування:

$$h_{ок.} = \frac{b-a}{n_0-1}$$

12. Обчислити значення  $x$  на межах підінтервалу:

$$x_i = a + i \cdot h_{ок.}$$

13. Обчислити підінтегральну функцію при середніх значеннях  $x$  на кожному підінтервалі:

$$f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)$$

14. Обчислити значення інтеграла за формулою:

$$F = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n h \cdot f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)$$

#### 7.4. Метод трапецій

Ідея **методу трапецій** полягає в заміні підінтегральної функції на інтервалі інтегрування від  $a$  до  $b$  лінійною залежністю, яка співпадає з функцією на межах інтервалу інтегрування (рис.7.3).

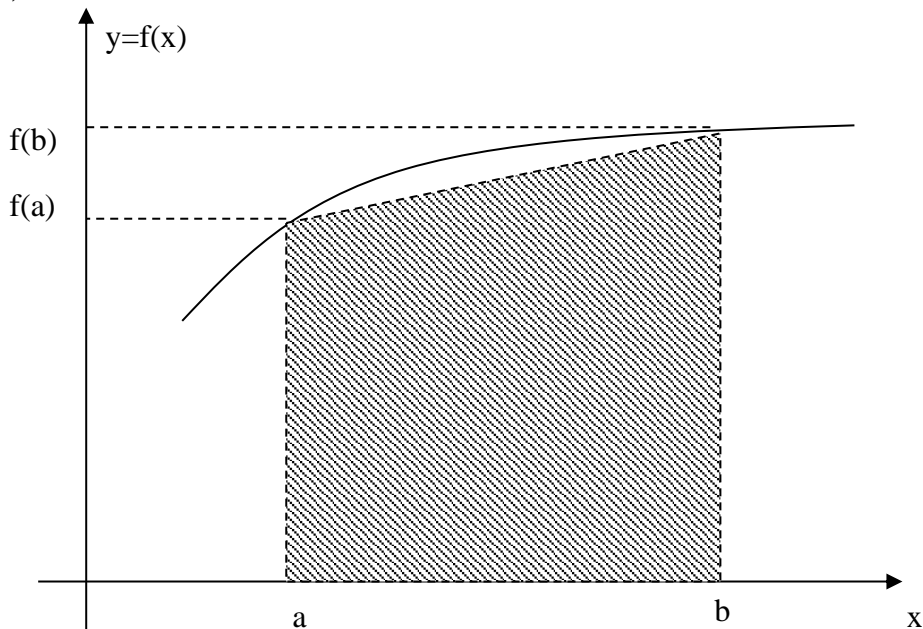


Рис. 7.3. Метод трапецій

В цьому випадку інтеграл можна обчислити за наступною формулою:

$$F = \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}(b-a)[f(b) + f(a)] + R$$

Похибку обчислення інтеграла можна визначити по наступній формулі:

$$R = \frac{h^2}{12} \int_a^b f''(x)dx$$

Оскільки похибка пропорційна другому ступеню кроку інтегрування  $h$ , то метод трапецій має другий порядок точності відносно  $h$ . Щоб зменшити похибку інтегрування весь інтервал інтегрування необхідно розділити на  $n$  підінтервалів при виконанні умов.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_n = b$$

При цьому крок інтегрування

$$h_i = x_i - x_{i-1}$$

В цьому випадку інтеграл рівний сумі інтегралів на кожному підінтервалі, застосовуючи формулу трапецій для кожного підінтервалу, інтеграл можна обчислити за формулою:

$$F = \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n h_i [f(x_i) + f(x_{i-1})] + R$$

Для обчислення похибки можна використовувати мажорантну оцінку по аналогії з методом прямокутників

$$R \leq \frac{h^2}{12} M_2 (b - a) \tag{10}$$

$M_2$  визначається як максимум модуля другої похідної підінтегральної функції на інтервалі  $[a;b]$ .

$$M_2 = \max_{x \in [a;b]} |f''(x)|$$

Використовуючи (10), можна визначити крок інтегрування  $h$ , якщо задана максимально допустима похибка інтегрування.

$$h \leq \sqrt{\frac{12 \cdot R}{M_2 (b - a)}} \tag{11}$$

Алгоритм обчислення визначеного інтеграла по методу трапецій аналогічний алгоритму обчислення визначеного інтеграла по методу прямокутників. На відміну від методу прямокутників, метод трапецій дозволяє обчислити інтеграл з похибкою в 2 рази більшою, при однаковому кроці інтегрування.

## 7.5. Метод Сімпсона

Основна ідея **методу Сімпсона** полягає в інтерполяції підінтегральної функції на інтервалі інтегрування від  $a$  до  $b$  поліномом другого ступеня (рис. 7.4).

Як вузли інтерполяції використовують значення  $x$  в трьох точках:

$$x_1 = a, \quad x_2 = \frac{a+b}{2}; \quad x_3 = b$$

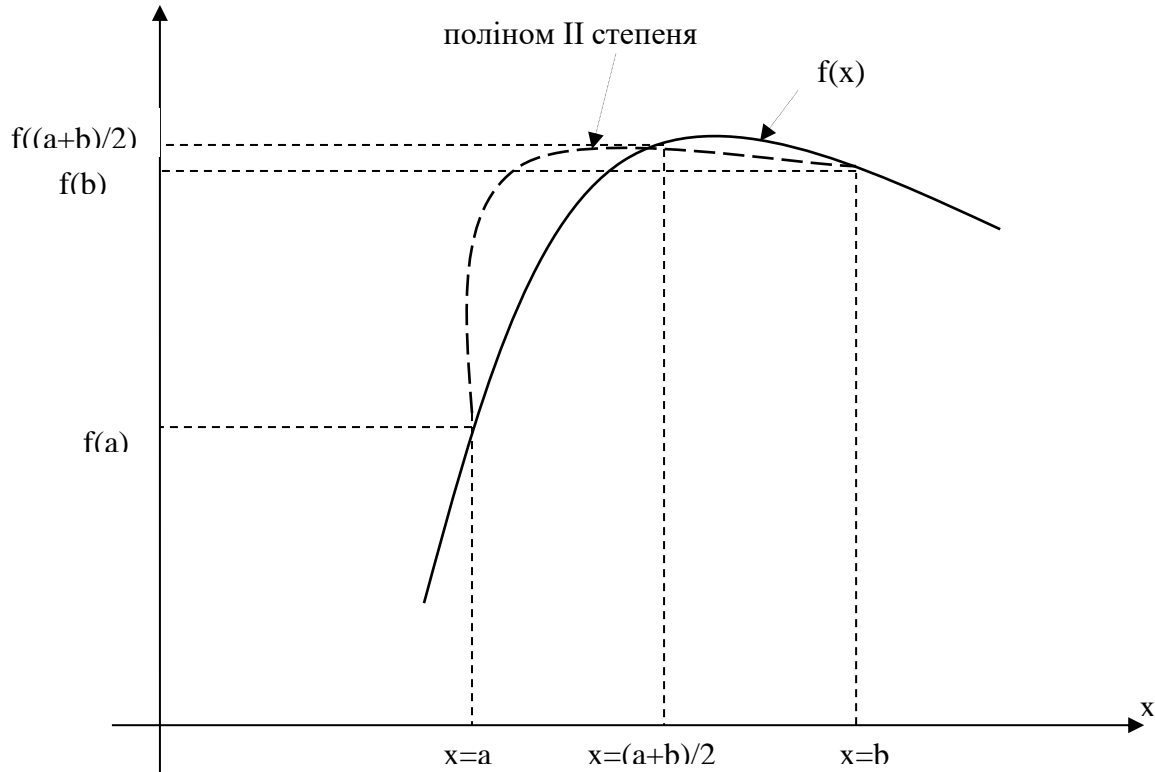


Рис. 7.4. Метод Сімпсона

Для обчислення інтеграла методом Сімпсона використовується формула:

$$F = \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6} [f(a) + 4 \cdot f(\bar{x}) + f(b)] + R \quad (12)$$

Похибку інтегрування можна визначити за формулою:

$$R = \frac{h^4}{180} \int_a^b f^{IV}(x)dx \quad (13)$$

З (13) витікає, що метод Сімпсона має четвертий порядок точності щодо зміни кроку інтегрування (зменшуючи крок в два рази, похибка зменшуватиметься приблизно в 16 разів).

Для визначення похибки необхідно обчислити інтеграл похідної четвертого порядку підінтегральної функції.

Щоб зменшити похибку інтегрування, інтервал інтегрування необхідно розділити на парну кількість підінтервалів. Для кожного підінтервалу можна застосувати формулу Сімпсона (12) в наступному вигляді:

$$F = \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n h_i [f(x_i) + 4 \cdot f(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}) + f(x_{i-1}) + R] \quad (14)$$

$$h_i = x_i - x_{i-1}$$

Для оцінки похибки інтегрування використовують мажорантну оцінку формули (13):

$$R \leq \frac{h^4}{180} \cdot M_4 \cdot (b - a) \quad (15)$$

$$M_4 = \max |f^{IV}(x)| \quad (16)$$

$$x \in [a; b]$$

Якщо задана похибка інтегрування, то використовуючи формулу (15) можна визначити крок інтегрування:

$$h \leq \sqrt[4]{\frac{180 \cdot R}{M_4(b - a)}} \quad (17)$$

Алгоритм методу Сімпсона в основних рисах аналогічний методу прямокутників, але, на відміну від нього, для визначення кроку інтегрування  $h$  необхідно використовувати формулу (17) і обчислювати інтеграл за формулою (14) без урахування похибки  $R$ .



## ТЕМА 8. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

### План

1. Задача Коші для звичайних диференціальних рівнянь.
2. Метод Ейлера.
3. Метод Ейлера-Коші.
4. Метод Рунге-Кутта

### 8.1. Задача Коші для звичайних диференціальних рівнянь

*Задачею Коші* називають сукупність диференціальних рівнянь і початкових умов, що дозволяють виділити з нескінченної кількості рішень диференціального рівняння єдине рішення, яке відповідає вирішуваній задачі.

Кількість початкових умов повинна бути рівна порядку диференціальних рівнянь.

Хай задано диференціальне рівняння:

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0$$

Для отримання єдиного рішення необхідно задати  $(n-1)$  початкову умову.

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0 \\ x = x_0, y = y_0; \\ y' = y'_0; \\ y'' = y''_0; \\ \dots \\ y^{n-1} = y_0^{n-1} \end{array} \right. \quad (1)$$

Будь-яке звичайне диференціальне рівняння  $n$ -го порядку можна перетворити до системи  $n$  звичайних диференціальних рівнянь 1-го порядку шляхом заміни змінних.

Нехай задано диференціальне рівняння 2-го порядку:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$$

Вводимо заміну:

$$z = y' \Rightarrow z' = y''$$

$$\begin{cases} z' + a_1 z + a_2 y = f(x) \\ y' = z \end{cases}$$

З урахуванням можливостей перетворення будь-яке звичайне диференціальне рівняння  $n$ -го порядку приводять до системи диференціальних рівнянь 1-го порядку. Методи чисельного рішення задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь розроблені для рівнянь 1-го порядку.

Існує велика кількість методів чисельного рішення задачі Коші, з них найбільшого поширення набули методи Ейлера, Ейлера-Коші і Рунге-Кутта.

## 8.2. Метод Ейлера

Розглянемо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння 1-го порядку:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ x = x_0, y = y_0 \end{cases} \quad (2)$$

Основна ідея методу Ейлера полягає в приведенні диференціального рівняння до послідовності рівнянь алгебри. У цьому випадку рішення задачі Коші отримують в табличній формі, використовуючи дискретні значення незалежної змінної, що відрізняються один від одного на деякий достатньо малий крок. Тоді значення незалежної змінної на числовій осі визначається по формулі:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x$$

Дискретні значення незалежних змінних називаються *вузлами*.

Щоб привести диференціальне рівняння до послідовності рівнянь алгебри, похідну рівняння замінюють дискретним аналогом для  $i$ -го вузла.

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y_i}{\Delta x} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}$$

Підставляючи дискретний аналог замість похідної в диференціальне рівняння, наближене отримаємо рівняння алгебри в кожному вузлі.

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} = f(x) \quad (3)$$

Для визначення функції  $f(x,y)$  в методі Ейлера використовують значення  $x$  і  $y$  в  $i$ -му вузлі. Тоді рівність (3) приймає вигляд:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} = f(x_i, y_i) \quad (4)$$

Якщо вважати відомими всі величини в  $i$ -му вузлі, тоді невідому величину  $y_{i+1}$  можна визначити по формулі:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x \cdot f(x_i, y_i) \quad (5)$$

Таким чином, для вирішення задачі Коші (2) по методу Ейлера використовуючи формулу (5), необхідно знати  $x$  і  $y$  хоч би в одному вузлі. Для певних початкових значень  $x$  і  $y$  використовують початкові умови задачі Коші.

Тоді алгоритм методу Ейлера складається з послідовності ітераційних кроків.

$$\begin{aligned} x &= x_0, y = y_0 \\ x_1 &= x_0 + \Delta x, y_1 = y_0 + \Delta x \cdot f(x_0, y_0) \\ x_2 &= x_1 + \Delta x, y_2 = y_1 + \Delta x \cdot f(x_1, y_1) \\ &\dots\dots\dots \\ x_{i+1} &= x_i + \Delta x, y_{i+1} = y_i + \Delta x \cdot f(x_i, y_i) \end{aligned}$$

Головним керованим параметром, що впливає на похибку рішення задачі Коші, є крок  $\Delta x$ . Якщо  $\Delta x$  прямує до нуля, дискретний аналог прямує до похідної, а значить, наближене рішення прямує до точного рішення задачі Коші.

Існує зв'язок між заданою похибкою рішення задачі Коші  $\varepsilon$  і величиною кроку  $\Delta x$ .

$$\Delta x_\varepsilon \leq \left| 1 - \frac{y(x, \Delta x) - y(x, \frac{\Delta x}{2})}{\varepsilon} \right|^{\frac{1}{p}} \quad (6)$$

$y(x, \Delta x)$  – наближене рішення, отримане з кроком  $\Delta x$ .

$y(x, \frac{\Delta x}{2})$  – наближене рішення отримане з кроком  $\frac{\Delta x}{2}$ .

$p$  – порядок точності методу рішення задачі Коші щодо зміни кроку  $\Delta x$ .

Метод Ейлера є методом 1-го порядку точності, тобто  $p=1$ .

Щоб використовувати (6), необхідно задати деяке достатньо мале значення  $\Delta x$ , отримати з цим кроком наближене рішення задачі Коші, потім зменшити крок в 2 рази і отримати друге наближене рішення задачі Коші. Потім, використовуючи (6) визначити крок  $\Delta x_\varepsilon$ , яке забезпечує отримання рішення задачі Коші із заданою погрішністю  $\varepsilon$ . Якщо набуто значення  $\Delta x_\varepsilon$  одного порядку з  $\varepsilon$ , тоді виконують рішення задачі Коші з цим кроком, інакше ще раз повторюють вказану процедуру.

### 8.3. Метод Ейлера-Коші

Метод Ейлера-Коші володіє другим порядком точності щодо кроку незалежної змінної, що дозволяє отримувати наближене рішення із заданою погрішністю, використовуючи великий крок зміни незалежній змінній.

**Метод Ейлера-Коші** виконується в два етапи. На першому етапі визначається попереднє значення шуканої функції. На другому етапі уточнюють набуто попередньо значення. Перший крок називається предиктор (прогноз). Другий крок називається *коректор (уточнення)*.

На першому етапі визначається попереднє значення в  $i$ -тій точці незалежної змінної, використовуючи метод Ейлера.

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + \Delta x \cdot f(x_i, y_i) \quad (7)$$

На другому етапі виконують уточнення, використовуючи заміну похідною диференціального рівняння, за допомогою центрального дискретного аналога для цього визначають величину правої частини диференціального рівняння по середині підінтервалу зміни незалежної змінної.

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} = \frac{1}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})] \quad (8)$$

З рівняння (8) можна визначити значення функції  $y$  ( $i+1$ ) вузлі:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} \Delta x [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})] \quad (9)$$

У правій частині формули (9) є невідома величина, яку необхідно заздалегідь визначити. Для визначення  $y_{i+1}$  в правій частині формули (9) використовують попереднє значення  $\tilde{y}_{i+1}$  отримане по формулі Ейлера на етапі предиктора.

Тоді **формула методу Ейлера-Коші** вживана на етапі коректора набуває вигляду:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} \Delta x [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})] \quad (10)$$

Таким чином, на кожному кроці методу Ейлера-Коші виконуються обчислення за допомогою формул (7) і (10). Щоб почати обчислення необхідно використовувати початкові умови задачі Коші.

Похибка методу Ейлера-Коші при однаковому кроці  $\Delta x$  істотно менше, ніж у методу Ейлера. Для визначення остаточного кроку рішення задачі Коші по методу Ейлера-Коші необхідно визначити коефіцієнт зменшення кроку зміни незалежної змінної, використовуючи наступну формулу:

$$K \geq \left| 1 - \frac{y(x, \Delta x) - y\left(x, \frac{\Delta x}{2}\right)}{\varepsilon} \right|^{\frac{1}{p}} \quad (11)$$

де  $P$  – порядок точності методу Ейлера-Коші і в даному випадку  $p = 2$ .

Використовуючи коефіцієнт  $K$ , остаточний крок зміни незалежної змінної визначається по формулі:

$$\Delta x_{ok} = \frac{\Delta x}{2 \cdot K} \quad (12)$$

**Алгоритм рішення задачі Коші по методу Ейлера-Коші**

Розглянемо задачу Коші наступного вигляду:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$$

Необхідно визначити змінну в інтервалі зміни  $[x_0; x_n]$ .

1. Задати попередню кількість інтервалів, на які ділиться інтервал зміни змінної  $x$ . Позначимо його  $n$ .

2. Визначити крок зміни змінної  $x$ :

$$\Delta x = \frac{x_n - x_0}{n}$$

3. Визначити значення незалежної змінної, використовуючи формулу:

$$x_i = x_0 + (i - 1) \cdot \Delta x \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n + 1)$$

4. Використовуючи формулу (7) обчислити попереднє значення на  $(i + 1)$  вузлі:

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + \Delta x \cdot f(x_i, y_i)$$

5. Виконуємо коректування попереднього значення  $y_{i+1}$  по формулі (10):

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} \Delta x [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})]$$

6. Використовуючи етапи 4 і 5 визначають значення шуканої функції у всіх вузлах незалежної змінної  $x$  в інтервалі від  $x_0$  до  $x_n$ .

7. Зменшують початковий крок зміни  $x$  в 2 рази і повторюють рішення задачі Коші, використовуючи пункти 3, 4, 5.

$$\Delta x_1 = \frac{\Delta x}{2}$$

В результаті отримують наближене рішення у  $(x; \frac{\Delta x}{2})$ .

8. Використовуючи формулу (11) визначають коефіцієнт зменшення кроку зміни змінної, а потім по формулі (12) обчислюють остаточний крок рішення задачі Коші –  $\Delta x_{ok}$ .

9. Використовуючи етапи 3, 4, 5, отримують наближене рішення задачі Коші, похибка якого не перевищує задану величину  $\varepsilon$ .

#### 8.4. Метод Рунге-Кутта

Існує сімейство методів Рунге-Кутта, призначених для вирішення задачі Коші. Вони характеризуються різним порядком точності щодо зміни кроку незалежній змінній. Як окремий випадок метод Рунге-Кутта першого і другого порядку точності є методи Ейлера-Коші.

Найбільшого розповсюдження для вирішення завдання Коші отримав метод Рунге-Кутта четвертого порядку точності.

Основна ідея **методу Рунге-Кутта** полягає в інтерполяції функції  $f(x, y)$  в правій частині диференціального рівняння на кожному підінтервалі зміни  $x$  за допомогою інтерполяційних поліномів. Основна послідовність реалізації методу Рунге-Кутта визначається обчисленням правої частини диференціального рівняння на межах підінтервалу і в його середині.

Для початку обчислення необхідно використовувати початкову умову задачі Коші. Величина шуканої функції  $y$  у вузлі зміни  $x$  визначається по формулі:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \quad (13)$$

$\Delta y_i$  – приріст величини  $y$  у  $(i+1)$  вузлі відносно  $i$ -го вузла.

Величину  $\Delta y_i$  визначають по формулі:

$$\Delta y_i = \frac{1}{6} \cdot [k_1^{(i)} + 2 \cdot k_2^{(i)} + 2 \cdot k_3^{(i)} + k_4^{(i)}] \quad (14)$$

Коефіцієнти  $k_1^{(i)}, k_2^{(i)}, k_3^{(i)}, k_4^{(i)}$  визначаються по рекурентних формулах в такій послідовності:

$$k_1^{(i)} = \Delta x \cdot f(x_i; y_i)$$

$$\begin{aligned}
k_2^{(i)} &= \Delta x \cdot f\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}; y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right) \\
k_3^{(i)} &= \Delta x \cdot f\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}; y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right) \\
k_4^{(i)} &= \Delta x \cdot f\left(x_i + \Delta x; y_i + k_3^{(i)}\right)
\end{aligned}
\tag{15}$$

### Алгоритм методу Рунге-Кутта

Розглянемо задачу Коші

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ x = x_0, y = y_0 \end{cases}$$

Необхідно визначити змінну на заданому інтервалі зміни  $x$   
 $x \in [x_0; x_n]$ .

1. Задаємо кількість підінтервалів інтервалу зміни  $x$ .
2. Визначаємо крок зміни змінній  $x$  на кожному підінтервалі:

$$\Delta x = \frac{x_n - x_0}{n}$$

3. Визначаємо значення змінної  $x$  у вузлах зміни  $x$ :

$$x_{i+1} = x_0 + (i - 1) \cdot \Delta x$$

4. Обчислюємо коефіцієнти  $k_1^{(i)}, k_2^{(i)}, k_3^{(i)}, k_4^{(i)}$  за допомогою рекурентних формул (15).

5. Визначаємо прирости  $y$  до  $\Delta y_i$  по формулі (14).

6. Використовуючи формулу (13) обчислюємо змінну  $y$  у  $(i + 1)$  вузлі. Повторюємо послідовність дій в пунктах 4,5,6 для визначення змінної  $y$  у  $(i + 1)$  вузлі.



7. Зменшуємо крок зміни  $x$  в 2 рази:  $\Delta x_1 = \frac{\Delta x}{2}$  і отримуємо

приблизне рішення,  $y\left(x, \frac{\Delta x}{2}\right)$  використовуючи кроку 4, 5, 6.

8. Визначуваний остаточний крок зміни змінної  $x$  по формулах 4, 5 при цьому приймаємо  $p = 4$ .

9. Використовуючи  $\Delta x_{\text{окон}}$  і формули етапів 4, 5, 6 отримуємо остаточне рішення задачі Коші з похибкою, що не перевищує  $\varepsilon$ .

## РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Богач І. В., Краковецький О.Ю., Крилик Л. В. Чисельні методи розв'язання диференціальних рівнянь засобами MathCAD : навчальний посібник. Вінниця : ВНТУ, 2020. 107 с.
2. Волонтир Л. О, Зелінська, О. В., Потапова Н. А., Чіков І. А. Чисельні методи : навчальний посібник. Вінниця : ВНАУ, 2020. 322 с.
3. Голубева К. М., Денисов С. В., Кашпур О. Ф., Ключин Д. А., Риженко А. І. Чисельні методи інтегрування (для студентів факультету комп'ютерних наук та кібернетики, ОП «Інформатика»). Київ : «Видавництво Людмила», 2019. 55 с.
4. Гончаров О. А., Васильєва Л. В., Юнда А. М. Чисельні методи розв'язання прикладних задач : навч. посіб. Суми : Сумський державний університет, 2020. 142 с.
5. Задачин В. М., Конюшенко І. Г. Чисельні методи : навчальний посібник. Харків : Вид. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. 180 с.
6. Коваль С. С., Рилова Н. В. Методичні вказівки щодо виконання лабораторних робіт з навчальної дисципліни «Чисельні методи» для студентів усіх форм навчання зі спеціальності 122 «Комп'ютерні науки». Кременчуг, 2018. 66 с.
7. Колесницький О. К., Арсенюк І. Р., Месюра В. І. Чисельні методи : навчальний посібник. Вінниця : ВНТУ, 2017. 130 с.
8. Крилик Л. В., Богач І. В., Лісовенко А. І. Чисельні методи. Чисельне інтегрування функцій : навчальний посібник. Вінниця : ВНТУ, 2019. 74 с.
9. Лященко М. Я., Головань М. С. Чисельні методи. Київ : Либідь, 1996. 288 с.
10. Мамчук В. І. Числові методи : навчальний посібник. Київ : НАУ, 2015. 388 с.
11. Москвіна С. М. Числові методи : навчальний посібник. Вінниця : ВНТУ, 2013. 326 с.
12. Новожилова О. В. Чисельні методи : методичні рекомендації. ДВНЗ Миколаївський політехнічний коледж, Миколаїв, 2018. 75 с.
13. Прикладна математика : навчальний посібник / [О. В. Шобаніна, В. П. Клочан, І. В. Клочан та ін.]. Миколаїв : МНАУ,

2018. 164 с. URL :  
<https://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/8623>

14. Прикладна математика : метод. реком. з вивчення дисципліни та виконання контрольних завдань для студентів заочної форми навчання спеціальності 1001 Техніка та енергетика аграрного виробництва (6.100101 - Енергетика та електротехнічні системи в агропромисловому комплексі / уклад. О. В. Шобаніна, С. І. Тищенко, М. А. Домаскіна, М. О. Єгорова, І. І. Хилько, А. М. Жорова. Миколаїв : МНАУ, 2016. 56 с. URL :  
<https://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/2364>

15. Ремез. Н. С., Кисельов В. Б., Дичко А. О., Мінаєва Ю. Ю. Чисельні методи розв'язання технічних задач : підручник. Одеса : Видавничий дім «Гельветика», 2022. 186 с.

16. Самойленко О. М. Методи обчислень : навчальний посібник. Миколаїв : МНУ, 2015. 128 с.

17. Сізова Н. Д., Шаповалова О. О. Чисельні методи : лабораторний практикум. Харків : ХНУБА, 2020. 150 с.

18. Степанець О. В. Числові методи : комп'ютерний практикум : навч. посіб. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. 82 с.

19. Третиник В. В., Любашенко Н. Д.. Методи обчислень : навчальний посібник. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019.

20. Фельдман Л. П., Петренко А. І., Дмитрієва О. А. Чисельні методи в інформатиці : підручник. Київ : Видавнича група ВНУ. 2006. 480 с.

21. Чисельні методи в комп'ютерних науках : навчальний посібник. Т. 1 / [В. А. Андруник, В. А. Висоцька, В. В. Пасічник та ін.]. Львів : Новий Світ-2000, 2018. 470 с.

22. Чисельні методи в комп'ютерних науках : навчальний посібник. Т. 2 / [В. А. Андруник, В. А. Висоцька, В. В. Пасічник та ін.]. Львів : Новий Світ-2000, 2018. 536 с.

Навчальне видання

## **ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ**

Конспект лекцій

**Укладачі:**

**Шебаніна** Олена В'ячеславівна  
**Тищенко** Світлана Іванівна  
**Хилько** Іван Іванович  
**Крайній** Володимир Олексійович

Формат 60x84 1/16. Ум. друк. арк. 6,25.  
Наклад 50 прим. Зам. № \_\_\_\_\_

Надруковано у видавничому відділі  
Миколаївського національного аграрного університету  
54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від  
20.02.2013 р.