МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА ЕКОНОМІЧНОЇ КІБЕРНЕТИКИ І МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

МОДЕЛІ ЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ

конспект лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти ОПП «Економіка» спеціальності 051 «Економіка» денної форми здобуття вищої освіти

Миколаїв - 2023

УДК 330.3
М74

Друкується за рішенням науково-методичною комісією факультету менеджменту Миколаївського національного університету від 28.04.2023 року протокол № 9.

Укладачі:

О. В. Шебаніна – д-р екон. наук, професор, професор кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

С. І. Тищенко – канд. пед. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

В. О. Крайній – канд. екон. наук, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

О.Ю. Пархоменко – канд. фіз.-мат. наук, доцент,доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

І. І. Хилько – старший викладач кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет.

Рецензенти:

Стройко Т.В. - д-р. екон. наук, професор, професор кафедри економіки та менеджменту, Миколаївський національний університет імені В.О. Сухомлинського

Борчик Є. Ю. - канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет

ЗМІСТ

ВСТУП

Загальна потреба у реалізації досягнень науково-технічного прогресу найтіснішим чином пов'язана з використанням економіко-математичних методів та засобів обчислювальної техніки при розв'язанні задач із різноманітних сфер людської діяльності. Винятково важливе значення має використання цих методів у економіці. Здобувачам економічних спеціальностей вузів необхідно як знання можливостей застосування математичного апарату, так і розуміння тих проблем, які виникають при їх використанні. Тому при вивченні курсу основний наголос зроблено на практичну спрямованість його сучасного інструментарію.

Дисципліна «Моделі економічної динаміки» належить до циклу дисциплін професійної підготовки бакалаврів спеціальності «Економіка» освітньо-професійної програми «Економічна кібернетика».

Метою дисципліни є набуття практичних навичок та формування компетентностей із моделювання й аналізу економічних систем і процесів на макро- та мікроекономічному рівнях, а також математичних моделей динаміки розвитку економічних процесів.

Відповідно до освітньо-професійної програми підготовки здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 051 «Економіка», галузі знань 05 «Соціальні та поведінкові науки» визначені компетентності та програмні результати навчання, для формування яких використовується навчальна дисципліна «Моделі економічної динаміки»:

- здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;
- здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях;
- здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації з різних джерел;
- здатність пояснювати економічні та соціальні процеси і явища на основі теоретичних моделей, аналізувати і змістовно інтерпретувати отримані результати;
- здатність застосовувати економіко-математичні методи та моделі для вирішення економічних задач;
- здатність прогнозувати на основі стандартних теоретичних та економетричних моделей соціально-економічні процеси;
- здатність поглиблено аналізувати проблеми і явища в одній або декількох професійних сферах з врахуванням економічних ризиків та можливих соціально-економічних наслідків.

Програмні результати навчання:

- пояснювати моделі соціально-економічних явищ з погляду фундаментальних принципів і знань на основі розуміння основних напрямів розвитку економічної науки;
- застосовувати відповідні економіко-математичні методи та моделі для вирішення економічних задач;
- Усвідомлювати основні особливості сучасної світової та національної економіки, інституційної структури, напрямів соціальної, економічної та зовнішньоекономічної політики держави;
- вміти абстрактно мислити, застосовувати аналіз та синтез для виявлення ключових характеристик економічних систем різного рівня, а також особливостей поведінки їх суб'єктів;
- демонструвати гнучкість та адаптивність у нових ситуаціях, у роботі із новими об'єктами, та у невизначених умовах;
- показувати навички самостійної роботи, демонструвати критичне, креативне, самокритичне мислення.

Конспект лекцій складено на основі ряду відомих підручників і посібників, зокрема [1, 2, 3, 5, 7]. Автори не претендують на повноту викладу всіх питань, оскільки метою укладення конспекту лекцій є популяризація основних методів прийняття управлінських рішень. Особливістю укладеного конспекту екцій є простота викладу матеріалу на основі практичної його реалізації, що орієнтований на здобувачів, що мають базові знання курсу «Математика для економістів».

Змістовний модуль 1. Теоретичні основи дослідження моделей економічної динаміки

Тема 1. Моделювання динаміки економічних процесів

1.1 ДИНАМІЧНІ СИСТЕМИ ТА ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ

Найбільш загальне визначення динамічної системи наступне: динамічної називається система, параметри якої явно або неявно залежать від часу. Із цього визначення треба, що якщо для поведінки системи визначені функціональні рівняння, то в них включаються в явному виді змінні, стосовні до різних моментів часу.

Розглянемо найважливіші властивості складних динамічних систем.

1. Цілісність (емерджентність).

В системі окремі частини функціонують спільно, становлячи в сукупності процес функціонування системи як цілого. Сукупне функціонування різнорідних взаємозалежних елементів породжує якісно нові функціональні властивості цілого, що не мають аналогів у властивостях його елементів. Це означає принципову незвідність властивостей системи до суми властивостей її елементів.

2. Взаємодія із зовнішнім середовищем.

Система реагує на вплив навколишнього середовища, еволюціонує під цим впливом, але при цьому зберігає якісну визначеність і властивості, що відрізняють її від інших систем.

3. Структура.

При дослідженні системи структура виступає як спосіб опису її організації. В залежності від поставленого завдання дослідження виробляється декомпозиція системи на елементи та вводяться відносини й зв'язки між ними, істотні для розв'язуваної проблеми. Разом з тим декомпозиція системи на елементи й зв'язки визначається внутрішніми властивостями розглянутої системи. Структура динамічна по своїй природі, її еволюція в часі й просторі відбиває процес розвитку систем.

4. Нескінченність пізнання системи.

Під цією властивістю розуміється неможливість повного пізнання системи й всебічного подання кінцевою безліччю описів, тобто кінцевим числом якісних і кількісних характеристик. Тому система може бути представлена нескінченним числом структурних і функціональних варіантів, що відбивають різні аспекти системи.

5. Ієрархічність системи.

Кожний елемент у декомпозиції системи може розглядатися як цілісна система, елементи якої, у свою чергу, можуть бути також представлені як системи. Але з іншого боку, будь-яка система - лише компонентів більше широкої системи.

6. Елемент.

Під елементом розуміється найменша ланка в структурі системи, внутрішня будова якого не розглядається на обраному рівні аналізу. В відповідності із властивістю 5 (ієрархічність системи) будь-який елемент є системою, але на обраному рівні аналізу ця система характеризується тільки цілісними характеристиками.

Цілісність, структура, елемент, нескінченність і ієрархічність становлять ядро системо утворюючих понять загальної теорії систем і є основою системного подання об'єктів і формування концепцій системних досліджень.

Однак для більше докладного вивчення властивостей динамічних економічних систем (ЭС) необхідно розглянути ще ряд найважливіших властивостей і характеристик.

1. Стан системи. Стан системи визначається станами її елементів. Теоретично можливий набір станів дорівнює числу можливих сполучень всіх станів елементів. Однак взаємодія складових частин приводить до обмеження числа реалізованих сполучень. Зміна стану елемента може відбуватися неявно, безупинно й стрибкоподібно.

2. Поведінка системи. Під поводженням системи розуміється закономірний перехід з одного стану в інше, обумовлений властивостями елементів і структурою.

3. Безперервність функціонування. Динамічним системам властива безперервність функціонування. Система існує поки функціонують соціально-економічні й інші процеси в суспільстві, які не можуть бути перервані, інакше система перестане функціонувати. Всі процеси в ЭС, як у живому організмі, взаємозалежні. Функціонування частин визначає характер функціонування цілого, і навпаки. Функціонування системи пов'язане з безперервними змінами, нагромадження яких приводить до розвитку.

4. Розвиток системи. Життєдіяльність складної системи представляє собою постійну зміну фаз функціонування й розвитку що виражається в безперервної функціональній і структурній перебудові системи, її підсистем і елементів.

Еволюція економічних систем визначається одним з найважливіших властивостей складних систем - здатністю до саморозвитку. Центральним джерелом саморозвитку є безперервний процес виникнення й дозволу протиріч. Розвиток, як правило, пов'язане з ускладненням системи, тобто зі збільшенням її внутрішнього різноманіття.

5. Динамічність. Економічна система функціонує й розвивається в часі, вона має передісторію й майбутнє, характеризується певним життєвим циклом, у якому можуть бути виділені певні фази: виникнення, ріст, розвиток, стабілізація, деградація, ліквідація або стимул до зміни.

6. Складність. Економічна система характеризується більшим числом неоднорідних елементів і зв'язків, поліфункціональністю, поліструктурністю, багатокритеріальністю, багатоваріантністю розвитку й властивостями складних систем.

7. Гомеостатичністъ. Гомеостатичність відбиває властивість системи до самозбереження, протидія руйнуючим впливам середовища.

8. Цілеспрямованість. Всім динамічним системам в економіці властива цілеспрямованість, тобто наявність певної мети й прагнення до її досягнення. Розвиток системи зв'язаний саме зі зміною мети.

9. Керованість. Свідома організація цілеспрямованого функціонування системи і її елементів називається керованістю. В процесі життєдіяльності система за допомогою цілеспрямованого керування дозволяє постійно виникаючі в ній протиріччя й реагує на зміну внутрішніх і зовнішніх умов свого існування. В відповідності з умовами, що змінюються, вона міняє свою структуру, коректує мети розвитку і зміст діяльності елементів, тобто відбувається цілеспрямована самоорганізація системи, що на практиці реалізує здатність до саморозвитку. Однієї з основних функцій самоорганізації є збереження в процесі еволюції системи її якісної визначеності.

Властивості керованості проявляються також у таких особливостях, як відносна автономність і функціональна керованість.

Відносна автономність функціонування економічно систем означає, що в результаті дії зворотного зв'язку кожна й складових вихідного сигналу може бути змінена за рахунок зміни вхідного сигналу, причому інші складові залишаються незміненими.

Функціональна керованість економічної системи означає, що підходящим вибором вхідного впливу можна досягти будь-якого вихідного сигналу.

10. Адаптивність. Адаптивність економічної системи визначається двома видами адаптації - пасивної й активної. Пасивна адаптація є внутрішньо властивою характеристикою економічної системи, що має у своєму розпорядженні певними можливостями саморегулювання. Активна адаптація представляє механізм адаптивного керування економічної системи й організацію його ефективного здійснення.

11. Інерційність. Інерційність економічної системи позначається у виникненні запізнювання в системі, симптоматично реагуючої на обурюючі і управляючі впливи. Таки запізнювання враховуються, зокрема, за допомогою лагів, включених у моделі опису систем. Розрізняють внутрішні лаги, або лаги

прийняття рішень, щодо стабілізуючий вплив і зовнішні лаги, що відбивають затриману реакцію системи на відповідний вплив.

12. Стійкість. Система визнається стійкою відносно введеного визначення околиці, якщо при досить малих змінах умов функціонування її поводження значно не змінюється. В рамках теорії систем досліджуються структурна стійкість і стійкість траєкторії поводження системи. Стійкість ЕС забезпечується такими аспектами самоорганізації, як диференціація й лабільність (чутливість). Диференціація — це прагнення системи до структурної й функціональної розмаїтості елементів, що забезпечує не тільки умови виникнення й дозволу протиріч, але й визначає здатність системи швидко пристосовуватися до наявних умов існування. Більше розмаїтості — більше стійкості, і навпаки. Лабільність означає рухливість функцій елементів при збереженні стійкості структури системи в цілому.

13. Стан рівноваги. Стійкість системи пов'язана з її прагненням до стану рівноваги, що припускає таке функціонування елементів системи, при якому забезпечується підвищена ефективність руху до цілей розвитку. В реальних умовах система не може повністю досягти стану рівноваги, хоча й прагне цього. Елементи системи функціонують по-різному в різних умовах, і їхня динамічна взаємодія постійно впливає рух системи. Система прагне рівноваги, на це спрямовані зусилля управління, але, досягаючи його, вона відразу від нього йде. Таким чином, стійка економічна система постійно перебуває в стані динамічної рівноваги, вона безупинно коливається щодо положення рівноваги, що є не тільки її специфічною властивістю, але й умовою безперервного виникнення протиріч як рухомих сил еволюції.

1.2 ФОРМАЛЬНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ

Формально динамічна система в загальному вигляді може бути задана наступним кортежем:

$$M = Б < T, \Phi, X, \Omega, V, Y, G, R >.$$

Властивості динамічної системи задаються наступними аксіомами:

1. Для системи S задано безліч моментів часу T, макрофункція системи Ф, безліч вхідних впливів X, безліч обурень Ω, безліч стані V, безліч значень вихідних величин Y, структура системи G, відношення емерджентності R.

2. Безліч T являє деяке впорядковану підмножину безлічі речових чисел, представляюче собою безліч моментів часу, в яких вивчається система.

3. Макрофункція системи визначається за допомогою двох функцій:

$$S: X \rightarrow Y \; u \; V: X \times Y \rightarrow C,$$

де S – функціональна модель об'єкта; V – функція якості, або оціночна функція; C – безліч оцінок. Макрофункція системи визначається парою $\Phi = (S, V)$.

4. Безліч обурень Ω або безліч невизначеностей, являє собою безліч усіх можливих впливів, котрі позначаються на поведінці системи.

Якщо така безліч Ω не пуста, т. ч. $\Omega \neq 0$, то функціональна модель об'єкта приймає вигляд:

$$S: X \times \Omega \rightarrow Y$$

а оціночна функція

$$V: X \times \Omega \times Y > C.$$

5. Існує перехідна функція стану

$$\varphi = \Phi \times \Phi \times V \times X \rightarrow V,$$

значеннями якої слугує стан $u(t) = \varphi(t, r, u, x) \in V$, в яких виявляється система в момент часу $t \in T$, якщо в початковий момент $\tau < t$ вона знаходилась у стані $u(t) \in V$ і на протязі відрізку $[\tau, \boldsymbol{t}]$ на ній позначався вхідний вплив $x \in X$.

6. Задано вихідне відображення:

$$\eta: T \times V \rightarrow Y,$$

визначаюче вихідні величини: $y(t) = \eta(t, u(t))$.

Пару (τ, u), де $t \in T$, та $u \in V$**,** називають станом або фазовими координатами системи S, а множину $T \times V$ – простором станів системи.

Кінцевий набір станів системи $t_1, t_2 \in T$, заданий перехідною функцією φ і визначений на певному часовому відрізку $[t_1, t_2]$, називається траєкторією поведінки системи на інтервалі $[t_1, t_2]$, при заданих початкових умовах.

Кажучи про рух системи, ми будемо мати на увазі траєкторію поведінки даної системи. Сукупність траєкторії системи, які відповідають її різним (всім можливим) початковим станам, називаються фазовим портретом системи.

7. Структура системи G визначається в термінах теорії графів:

$$G = \left\langle \{S_i\}, \left(S_i, S_j\right) \right\rangle,\ i, j = \overline{1, n},\ i \neq j,$$

де S_i – вершини, (S_i, S_j) – дуги графів.

8. Відношення емерджентності $R: \Phi \rightarrow G$.

Розглянуте поняття динамічної системи дозволяє виробити загальну термінологію, уточнити концептуалізацію й забезпечити єдиний підхід до опису загальних властивостей.

1.3 МАТЕМАТИЧНИЙ АПАРАТ ОПИСУ ДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК СКЛАДНИХ СИСТЕМ

Якщо поведінку системи розглядати як ланцюг послідовних кінцевих змін її станів, то змінні системи, змінюючись у часі, у кожний даний момент будуть характеризуватися певними значеннями. Якщо одне певне значення змінної u_1 у момент часу $\boldsymbol{t_1}$**,** перетворюється в наступне значення $\boldsymbol{u_2}$ у момент часу t_2, то вважається, що відбувся перехід з (u_1, t_1) в (u_2, t_2). Фактор, під дією якого відбувається перехід, називається *оператором*. Змінна, що випробувала вплив оператора , називається *операндом*. Результат переходу — (u_2, t_2) називається образом. Якщо розглядати деяку множину всіх переходів системи зі стану *a* в стан *b*, зі стану *c* у стан *d* і т.д., то така множина переходів для деякої безлічі операндів називається *перетворенням*.

Перетворенням можна дати математичне представлення за допомогою методу, запропонованого У. Ешбі.

Нехай множина станів деякої системи включає стани *a, b, c, d* і на цю безліч операндів діє оператор *P*. Тоді поводження системи можна описати таким чином:

$$P = \begin{cases} \dfrac{abcd}{bdac} \end{cases}.$$

В першому рядку запису перераховані стани системи, або операнди. У другому рядку під кожним операндом перебувають образи, у які система переходить зі стану, записаного у верхньому рядку, під дією оператора ***P***. В цьому прикладі множина елементів другого рядка не містить жодного нового елементу в порівнянні з першим. Перетворення, яке не породжує нові елементи, називається *замкнутим*.

На рис. 1.1 представлений граф переходів з приведеним вище перетворенням.

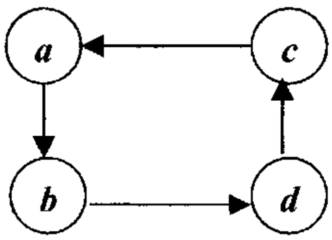


Рис. 1.1. Граф переходів станів системи

В іншому перетворенні – $P = \begin{cases} \dfrac{abcd}{ebca} \end{cases}$ – міститься новий елемент ***e***, отже, перетворення виходить за межі вихідної множини станів системи і називається *не замкнутим*. Перетворення виду $P = \begin{cases} \dfrac{abcd}{bdac} \end{cases}$ є однозначним, взаємно однозначним і замкнутим. Перетворення виду $P = \begin{cases} \dfrac{abcd}{abcd} \end{cases}$ є тотожним.

Існують інші, більш компактні, форми запису операндів. Наприклад, перетворення $P = \begin{cases} \dfrac{1234}{4567} \end{cases}$ можна записати таким чином:

$$\acute{n} \rightarrow n+3 \ (n = 1, 2, 3, 4).$$

Перетворення також можна представити у матричній формі, наприклад, для перетворення виду $P = \begin{cases} \dfrac{abcd}{accb} \end{cases}$ отримуємо матрицю переходів

P	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	0	0	0	1
c	0	1	1	0
d	0	0	0	0

де операнди представлені у заголовку стовпця, а образи – у заголовку строки.

Наведений приклад описує зміну станів системи з детермінованою дією, що описана *однозначним* перетворювачем. Однозначність перетворення означає, що система не може перейти у два або більше стани при заданому вихідному. Таким чином, детермінована динамічна система поводиться так само, як замкнуте однозначне перетворення.

Якщо в систему (або її зовнішнє середовище) входять стохастичні елементи, то переходи зі стану в стан не будуть строго детермінованими. В цьому випадку перетворення повинне відображати не тільки можливі нові стани системи, але й імовірність, з якою ці стани здійсняться. Наприклад, дано перетворення $P :\downarrow \left(\dfrac{a}{c+d} \dfrac{b}{e+k} \dfrac{c}{m\upsilon} \right)$ при ймовірності $\left(\dfrac{3}{4}; \dfrac{1}{4} \right) \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{4} \right)$.

В матричній формі це перетворення матиме наступний вигляд:

$\boldsymbol{P}$	a	b	c
c	3/4	0	0
d	1/4	0	0
e	0	1/2	0
k	0	1/4	0
m	0	1/4	0
υ	0	0	1

Система подій може бути описана за допомогою апарату символічної логіки. Логічні функції заперечення, кон’юнкції, диз'юнкції, імплікації, еквіваленції широко застосовуються при моделюванні автоматичних систем.

Розрізняють три типи, або режими поведінки системи: рівноважний, перехідний і періодичний.

Стан рівноваги системи може розглядатися як певна тотожність перетворень, що відбуваються в ній, що визначають однаковий стан системи в будь-який момент часу. В рівноважній системі кожна частина перебуває в стані рівноваги в умовах, обумовлених іншими її частинами.

Властивість стійкості неутотожнена з рівновагою. Під стійкістю системи розуміється збереження її стану незалежно від зовнішніх обурень.

При вивченні поводження динамічних систем важливим є дослідження характеру перехідних процесів. Перехідний процес – це процес зміни в часі координат динамічної системи при її переході з одного сталого стану в другий під дією прикладеного обурення, що змінює стан, структуру або параметри системи, або внаслідок ненульових початкових умов. Важливими характеристиками динамічної системи є тривалість і характер перехідного процесу.

В безперервних системах, як правило, встановлений режим (тобто режим стійкого функціонування), досягається за нескінченно великий час. В залежності від характеру в безперервних системах розрізняють коливальний і монотонний перехідний процес.

Для дискретних систем перехідний процес можна визначити як послідовність станів, викликаних зовнішнім обурюючим впливом, котру система проходить при постійних умовах, до її повернення в сталий режим функціонування.

До понять рівноваги й стійкості примикає поняття цикл у перетворенні системи.

Циклом називається така послідовність станів системи, при якій повторна зміна перетворень примушує систему проходити повторно цю послідовність. Це можна проілюструвати перетворенням виду (рис. 1.2):

$$P\left\{\frac{a}{c}\frac{b}{h}\frac{c}{b}\frac{d}{h}\frac{e}{a}\frac{f}{c}\frac{g}{e}\frac{h}{g}\right\}$$

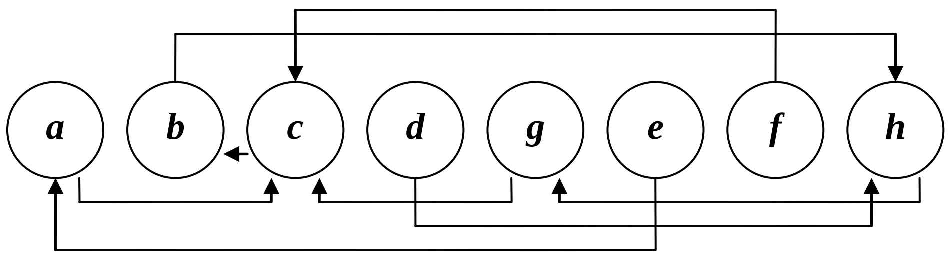


Рис. 1.2. Граф циклічного перетворення

Якщо в початковий момент система знаходилась у стані ***a***, то отримаємо послідовність станів:

$$a\ \underbrace{cbhg}\underbrace{cbhg}\underbrace{cbhg}\ldots$$

Очевидно, виділяється цикл довжиною 4. Перехід *a→з* можна розглядати як перехідний процес до сталого циклічного поводження.

На підставі знань про перетворення, пов'язаних із системою, вивчаються стани рівноваги, перевіряється, чи зміниться стан системи, підданої яким-небудь впливам, чи є стан рівноваги системи досить стійким, і якщо так, то який режим поведінки досліджуваної системи. Якщо задано деякий стан (або стани) і конкретні збурювання, то аналізується, чи повернеться система після зсуву у свою вихідну область. Для безперервних систем розглядається питання, чи є вона стійкою проти всіх збурень усередині певної області значень.

Більш загальним є опис систем за допомогою набору функцій: перехідної, передатної та імпульсної. На відміну від наведеного вище цей спосіб придатний для опису безперервних систем, що складаються з безлічі елементів.

Перехідна функція – це функція, що відбиває реакцію динамічної системи на вхідний сигнал при нульових початкових умовах. Перехідна функція є важливою характеристикою системи, що повністю визначає її динамічні властивості. Знаючи перехідну функцію $h(t)$, можна визначити сигнал $y(t)$ на виході системи при подачі в момент часу $t_0=\mathbf{0}$ на її вхід сигналів $x(t)$:

$$y(t)=x(0)\times h(t)+\int_0^t \frac{dx(\tau)}{d\tau}h(t-\tau)\,d\tau. \qquad (1.1)$$

Передатна функція – це функція, що представляє собою відношення перетворення Лапласа $Y(p)$ вихідної координати $y(t)$ лінійної динамічної системи (або окремої ланки) до перетворення Лапласа $X(p)$ її вхідної координати $x(t)$ при нульових початкових умовах: $W(p) = Y(p)/X(p)$. Передатна функція лінійних фізично реалізованих динамічних систем з постійними параметрами є дрібно-раціональними функціями параметра перетворення Лапласа p.

Передатні функції – зручний опис властивостей лінійної системи автономного управління. Дослідження корінь передатної функції (нулів і полюсів) повністю визначає усі динамічні властивості системи (стійкість та ін.).

Імпульсна функція задає вхідний сигнал, що надійшов у систему. Вона може мати, наприклад, східчастий вид, одиничний вплив і т.п.

Для лінійних динамічних систем імпульсна функція $g(t)$ і передатна функція $w(p)$ пов'язані з перехідною функцією $h(t)$ співвідношеннями:

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}, \quad h(t) = \frac{1}{2p}\int_{c-iw}^{c+iw} \frac{w(p)}{p} e^{pt} dp; \tag{1.2}$$

$$w(p) = \int_{0}^{\infty} \frac{dh}{dt} e^{-pt} dt, \tag{1.3}$$

де c – компонента абсолютної збіжності.

При описі властивостей багатоланкової системи використаються передатні функції її ланок. При цьому використаються наступні типи з'єднань:

1) передатна функція n ланок, що з'єднуються послідовно**;**

2) передатна функція паралельного з'єднання n ланок;

3) передатна функція ланки, охопленої зворотним зв'язком.

Перехідні й передатні функції широко використаються пакетах програм імітаційного моделювання й прогнозування на основі нейронних мереж.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1) Що вивчає економічна динаміка?

2) Яка система називається динамічною? Якими складовими формально описується динамічна система?

3) Що являє собою траєкторія поведінки системи?

4) Які основні якісні характеристики складної системи? Подайте коротке пояснення кожній властивості.

5) У чому різниця поведінки і розвитку системи?

6) Що мається на увазі під рівновагою системи?

7) Які види перетворень використовуються для опису динамічних характеристик систем?

8) У чому різниця стохастичного перетворення від детермінованого?

9) Дайте характеристику трьом режимам поведінки системи: рівноважному, перехідному та періодичному.

10) У чому полягає властивість стійкості системи?

11) Що являє собою перехідна та передатна функції?

Тема 2. Синергетичний підхід до моделювання й аналізу економічних процесів

2.1. СИНЕРГЕТИЧНА ПАРАДИГМА ВИВЧЕННЯ СКЛАДНИХ ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ

Як відомо, в основі системного аналізу лежить принцип системності, а в основі теорій самоорганізації - принцип розвитку. Обидва принципи взаємодоповнюють один одного й у дійсності утворюють єдність, що відбивається в пізнанні, як єдність теорій самоорганізації й системних досліджень, (перші ґрунтуються на методології й теоретичних висновках других). Зворотний процес - асиміляція загальною теорією систем, системним аналізом і системним підходом методологічних знахідок теорій самоорганізації - поки відстає, що цілком з'ясовно, оскільки ці дисципліни акцентують увагу на різних аспектах тих самих об'єктів - систем різних видів.

До теорій самоорганізації відносяться *синергетика, теорія змін і теорія катастроф*.

Синергетика, основні положення якої були сформульовані професором Штутгартського університету Г. Хакеном, являє собою евристичний метод дослідження відкритих систем, що самоорганізуються, підданому кооперативному ефекту, що супроводжується утворенням просторових, тимчасових або функціональних структур; або, коротко, процесів самоорганізації систем різної природи. Вона виникла у відповідь на кризу вичерпаного себе стереотипного, лінійного мислення, основними рисами якого є:

1) уявлення про хаос як винятково деструктивний початок світу;

2) розгляд випадковості як другорядного, побічного фактора;

3) твердження, що світ вважається незалежним від микрофлуктуацій (коливань) нижніх рівнів буття й космічних впливів;

4) погляд на неврівноваженість і нестійкість, як на прикрі неприємності, які повинні бути переборені, тому що грають негативну, руйнівну роль;

5) думка про те, що процеси, що відбуваються у світі, є оборотними в часі, передбачуваними й ретрозначимими на необмежено більші проміжки часу; розвиток лінійно, поступально, безальтернативно (а якщо альтернативи і є, то вони можуть бути тільки випадковими відхиленнями від магістрального плину, підлеглі йому й в остаточному підсумку поглинаються їм);

6) пройдене представляє винятково історичний інтерес, а повернення до старого, якщо воно і є, є діалектичним зняттям попереднього рівня й мають нову основу; світ зв'язаний джорсткими причинно-наслідковими зв'язками; причинні ланцюги носять лінійний характер, а наслідок якщо й не тотожний причині, то пропорційний їй, тобто чим більше вкладено енергії, тим більшим буде результат.

Тобто, фактично мова йде про механістичну картину світу й механіцизмі як методі, що підходить до світу як до гігантського механізму, а до окремих об'єктів і процесів як до деталей цього механізму. На незастосовність механіцизму як універсальної моделі світу вказували ще Д. Дідро й Ф. Шеллинг, в ХХ столітті — С. Н. Булгаков і А. Раппопорт, критикуючи її з філософської точки зору. Природнонаукова критика почалася в XIX столітті, коли термодинаміка поставила під сумнів позачасовий характер механістичної картини світу, доводячи, що якби світ був гігантською машиною, то вона неминуче повинна була б зупинитися, тому що запас корисної енергії рано чи пізно був би вичерпаний, але, незважаючи на це, механістична парадигма залишається до цих пір «крапкою відліку», утворюючи центральне ядро науки в цілому, не кажучи вже про більшість соціальних наук, особливо, економіці, які ще перебувають у повній її владі. Особливо неприйнятним в механіцизмі є розгляд об'єкта як простої «суми» його частин, що неминуче обмежує дослідження рівнем підсистем, а цього недостатньо для пізнання об'єкта. Крім того, «механізми», «машини», у якості яких вивчається об'єкт, є замкнутими, закритими системами, що перебувають у стійкому, рівноважному стані, а подібні системи становлять лише невелику частину світу. Більшість систем є відкритими, як, наприклад, біологічні і соціальні, рідко перебувають у стійкому, рівноважному стані, тому будь-які спроби зрозуміти їх у межах механістичного світогляду приречені на провал.

Приклади, що підпадають у сферу інтересів синергетики, Хакен приводить із найрізноманітніших галузей науки. В фізиці він приділяє особливу увагу утворенню просторових структур у рідинах.

Це, зокрема, виникнення вихрів Тейлора в рідині, укладеної між коаксіальними циліндрами. При досягненні деякої критичної швидкості обертання одного із циліндрів, у рідині утворяться яскраво виражені осциллірующі шари. Інший приклад - конвективна нестійкість Бенара (осередку Бенара). Тут мова йде про виникнення структур, що нагадують бджолині стільники в рідині, налитої в плоску посудину й підігріта знизу. Більшу роль у виникненні синергетики зіграло вивчення Г. Хакеном процесів генерації когерентного випромінювання в лазерах, оскільки цей процес піддається теоретичному аналізу й може перевірятися експериментально.

Найбільш вражаючим прикладом самоорганізації в області хімії є відкрита в 1951 р. Б. П. Білоусовим хімічна коливальна реакція, що одержала назву реакції Білоусова - Жаботинського, або «хімічні годинники». Спеціально підібрані реагенти в цій реакції, утворюючи сильно не рівноважну відкриту систему, взаємодіють таким чином, що кольори розчину періодично міняються із червоного на синій. В подальшому були виявлені й більш складні реакції подібного типу, у яких мінялися не тільки кольори розчину, але виникали різнобарвні просторові структури у вигляді концентричних кілець і спіральних хвиль.

Численні приклади, що мають синергетичний характер, дає сфера техніки. Це руйнування мостів при позакритичному навантаженні, деформації тонких оболонок, у яких виникають шестикутні ячейні структури й ін.

Об'єкти живої природи утворюють величезну безліч високоорганізованих структур. Тому біологія є найважливішою сферою додатка синергетики.

Синергетика, як і інші теорії самоорганізації, намагається заповнити «білі плями», які залишив після себе механіцизм, головне серед яких - практично повна відсутність узагальнень, що стосуються поводження відкритих систем. Вивчаючи закони самоорганізації, самодезорганізації й самоврядування складних систем, вона дає те універсальне знання законів самоорганізації й розвитку систем, у якому давно назріла потреба.

Етимологічно *синергетика* походить від грецького «*синергетикос*» - спільний, узгоджено діючий. НА першому етапі розвитку під синергетикою розуміли область наукових досліджень, метою яких було виявлення загальних закономірностей у процесах утворення, стійкості й руйнування впорядкованих тимчасових і просторових структур у складних не рівноважних системах різної природи: фізичних, хімічних, біологічних, соціальних і т.д. Тут «спільна, погоджена дія» може бути як наслідком самоорганізації (у результаті розвитку власних нестійкостей у системі), так і наслідком змушеної організації за рахунок зовнішніх впливів.

На сьогодні синергетика розуміється як наука про математичне моделювання переходу систем з одного стійкого стану в інший. Сукупність знань про хаос і порядок, перехідні процеси, фрактали і нелінійності, які називають синергетикою, розуміють і як теорію, і як навчання, і як науку, і як світогляд, що виходять із всіляких образів, фактів, уявлень про хаос, порядок, когерентність, перехідних і кооперативних процесах у природі, суспільстві, духовному світі. Перелік ідей, що формують синергетику як парадигму, містить у собі нелінійність, самоорганізацію, відкритість системи, її неврівноважність.

Існують чотири підходи до сутності поняття синергетика. *Синергетика* - це:

1) *парадигма* — система ідей, принципів, образів, з уявлення яких, можливо, згодом виросте фундаментальна наукова теорія, або загальнонаукова теорія, або навіть світогляд;

2) *ряд частнонаукових теорій* (фізика, хімія, біохімія, біологія, соціологія, психологія й інші науки), поєднаних ідеями нелінійності, відкритості, перехідності, неврівноваженості процесів, що проходять у системах;

3) *загальнонаукова теорія* (яка поки ще складається), тобто як теорія диссипативних структур (у розумінні І. Пригожина), або теорія систем, що самоорганізуються (по Г. Хакену), або теорія перехідних процесів, взаємоперетворення хаосу й порядку й т.п.;

4) *новий світогляд*, що переборює пануюче поки в науці мислення зі сталими незмінними поняттями (платоновська традиція) і стверджуюче мислення, засноване на «встановлюючих», перехідних, нестабільних, фрактальних формах і образах.

Завдання синергетики складається в знаходженні й детальному дослідженні тих базових моделей, які виходять із найбільш типових припущень про властивості окремих елементів, що становлять систему, і законах взаємодії між ними. Оскільки головною відмінною властивістю досліджуваних систем є процеси самоорганізації, що протікають у них, синергетику можна також розглядати як загальну теорію самоорганізації в системах різної природи.

Об'єднуючим початком у синергетиці є об'єкти досліджень - відкриті складні нелінійні системи зі зворотними зв'язками. Зрозуміло, такі системи вивчалися й раніше без використання терміна «синергетика». Загальні труднощі подібних досліджень - виняткова складність і громіздкість точного математичного опису, особливо якщо в системі працюють безліч зворотних зв'язків.

Обґрунтуванням доцільності синергетическых досліджень є встановлений факт, що кооперація багатьох підсистем якої-небудь системи підкоряється тим самим принципам незалежно від природи підсистем. Пізнання цих принципів дозволяє по-новому підійти й до проблеми раціонального керування розвитком складних систем. З точки зору синергетики не можна, наприклад, при керуванні розвитком природної або соціальної системи нав'язувати невластиві їй форми організації. Вивчивши систему, необхідно збільшувати не силу керуючого впливу, а збільшувати погодженість впливу із власними тенденціями системи.

Синергетика, як теорія самоорганізації, виходить із того, що складним системам (до таким варто віднести й соціально-економічні системи) не можна нав'язувати шляхи їхнього розвитку, а скоріше, необхідно зрозуміти, як сприяти їхнім власним тенденціям розвитку, як виводити системи на ці шляхи, зрозуміти закони спільного життя природи й людства, їх коеволюції. Для складних систем існує кілька альтернативних шляхів розвитку, вибір яких залежить від результату боротьби протиборчих сил. З цього зв'язку стає актуальним наукове обґрунтування вибору такого шляху. Виділяються чотири принципи приватних теорій синергетики:

1. *Нелінійність* означає незбереження аддитивности в процесі розвитку уявлених систем. Будь-яке явище розуміється як момент еволюції, як процес розвитку.

2. *Нестійкість* означає незбереження «близькості» станів системи в процесі її еволюції й істотна залежність від зміни значення системоутворюючих параметрів.

3. *Відкритість* означає визнання обміну системи речовиною, енергією, інформацією з навколишнім середовищем і, отже, визнання системи як складаючої елементів, зв'язаних структурою, так і включенної у якості підсистеми елемента в інше ціле.

4. *Підпорядкування* означає, що функціонування й розвиток системи визначаються процесами в її підсистемах при виникненні ієрархії масштабів часу. Це принцип «самоспрощення» системи, тобто зведення її динамічного опису до малого числа параметрів порядку.

Змістовний *блок методології* синергетики містить у собі:

1. *Принцип становлення*, що затверджує, що головна форма буття — не встановлене, а тільки стає, не спокій, а рух, не завершені, вічні, цілісні-стійкі форми, а перехідні, проміжні, тимчасові утворення. Становлення виражається через дві свої крайності — хаос і порядок. Хаос - основа складності, випадковості, утвору - руйнування, конструкції - деконструкції. Порядок - основа простоти, необхідності, закону, краси, гармонії.

2. *Принцип пізнання* означає пізнання (відкриття) буття як становлення. При цьому параметри порядку відіграють двояку роль: повідомляють системі,

як поводитися, і доводять до відома спостерігача дещо про макроскопічний стан системи.

3. *Принцип згоди* (коммуникативності, діалогічності), що означає, що буття як становлення формується й упізнається лише в ході діалогу, комунікативної, доброзичливої взаємодії суб'єктів і встановлення гармонії в результаті діалогу.

4. *Принцип відповідності*, що означає можливість переходу від досинергетичної (класичної, «некласичної» і «постнекласичної») науки до синергетичної (як по інтуїтивних міркуваннях, так і по формальних параметрах).

5. *Принцип додатковості*, що означає незалежність і принципову частковість, неповноту як досинергетичного опису реальності (без синергетичного), так і частковість синергетичного (без досинергетичного); буття з'являється як встановлене (платоновское) і як те, що стає (неплатонистское). Буття - і те, і це.

Роль синергетики як нової наукової картини світу й методології дослідження процесів руху систем ще більше зростає, якщо враховувати її синтетичний, власне кажучи, характер. Г. Хакен, виступаючи на першій в СРСР конференції щодо синергетики, визначив цілі, які вона ставить перед собою, так: перевантажену величезною кількістю деталей інформацію про системи різної природи, досліджуваних сучасною наукою, необхідно стиснути, перетворивши в невелике число законів або концепцій, тому що, по вираженню англійського кібернетика С. Бира, дані перетворилися в новітній різновид забруднення навколишнього середовища - їхній надлишок породив інформаційний голод. Поява концепцій самоорганізації (синергетики, зокрема) можна розглядати як новий важливий етап еволюції науки, що наступила за суперспеціалізацією, що несе нові можливості діалогу наук і нові підходи до їхнього викладання.

Крім розходжень, у синергетики (і інших теорій самоорганізації) і системних досліджень є й загальне. Їх поєднують принципи системності, розвитку, ізоморфізму, типологія систем. Як уже відзначалося вище, синергетика увібрала в себе всі значимі для дослідження процесів самоорганізації теоретичні й методологічні висновки системних досліджень. Співвідношення синергетики й системних досліджень показує табл. 3.1

Таблиця 3.1

Співвідношення системних досліджень і синергетики

Системні дослідження (загальна теорія систем, системний аналіз, системний підхід)	Синергетика
1. Акцент роблять на статиці систем, їх морфологічному й, рідше, функціональному описі	1. Акцентує увагу на процесах росту, розвитку й руйнування систем
2. Надають великого значення впорядкованості, рівновазі	2. Вважає, що хаос відіграє важливу роль у процесах руху систем, причому не тільки деструктивну
3. Вивчають процеси організації систем	3. Досліджує процеси самоорганізації систем
4. Найчастіше зупиняючись на стадії аналізу структури системи, абстрагуються від кооперативних процесів	4. Підкреслює кооперативність процесів, що лежать в основі самоорганізації й розвитку систем
5. Проблема взаємозв'язку розглядається, в основному, як взаємозв'язок компонентів усередині системи	5. Вивчає сукупність внутрішніх і зовнішніх взаємозв'язків системи
6. Джерело руху бачить у самій системі	6. Визнає більшу роль середовища у процесі зміни

2.2. РОЗВИТОК КОНЦЕПЦІЙ САМООРГАНІЗАЦІЇ

Паралельно із синергетичними дослідженнями розвивалася й теорія самоорганізації на основі термодинаміки нерівноважних процесів.

Фундаментальні результати, отримані в дослідженні термодинаміки нерівноважних процесів, зв'язані насамперед з іменем лауреата Нобелівської премії І. Пригожина і його Брюсельською школою.

Навідміну від класичної термодинаміки, що розглядала системи в рівновазі або поблизу неї, Пригожин зосередився на вивченні систем, сильно вилучених від рівноважного стану. Іншим принциповим моментом теорії Пригожина є те, що вона розглядає відкриті системи. Класична термодинаміка вивчала замкнуті системи, але такі складають лише невелику частину фізичного світу. Більшість систем у Всесвіті відкриті: вони обмінюються речовиною, енергією або інформацією з навколишнім середовищем.

До числа яскраво виражених відкритих систем належать біологічні й соціальні системи.

Згідно Пригожина, всі системи містять підсистеми, які безупинно флуктують. В окремих випадках, збурювання або їхні комбінації в результаті позитивного зворотного зв'язку можуть стати настільки сильними, що це приведе до руйнування системи.

В цей переломний момент, названий особливою крапкою, або крапкою біфуркації, принципово неможливо пророчити, у якому напрямку буде проходити подальший розвиток: чи відбудеться хаотизація й катастрофа, або система перейде на новий, більш диференційований і більш високий рівень упорядкованості або організації.

Оскільки таким високо організованим системам для своєї підтримки потрібно розсіювати значну кількість енергії, Пригожин назвав їх диссипативними структурами. Розглядаючи диссипативні структури, Пригожин особливо підкреслює можливість спонтанного виникнення порядку й організації з хаосу в результаті процесу самоорганізації. Типовими диссипативними структурами є структури, що утворяться в результаті реакції Білоусова - Жаботинського.

Використовуючи результати не рівноважної термодинаміки, Пригожин створив теоретичну модель, названу брюсселятором, на честь Брюссельської школи, що адекватно описує процес виникнення цих незвичайних структур.

З робіт Пригожина робиться висновок, що має найважливіше філософське значення, а саме: у станах, далеких від рівноваги, дуже слабкі збурювання (флуктуації) можуть підсилюватися до гігантських масштабів, що руйнують сформовану структуру. Це дає ключ до аналізу процесів якісних змін не тільки в неживій і живій природі, але й, можливо, у соціальній сфері. По вираженню О. Тоффлера, такі слова, як «революція», «економічна криза», «технологічне зрушення» і «зрушення парадигми», здобувають нові відтінки, коли ми починаємо мислити про відповідні поняття в термінах флуктуації, позитивних зворотних зв'язків, диссипативних структур, біфуркацій і інших елементів концептуального лексикона школи Пригожина.

Не менш, якщо не більш важлива проблема, охоплювана термодинамікою не рівноважних процесів - це проблема часу. Переосмислюванню поняття часу присвячена значна частина книги Пригожина й Стенгерс «Порядок з хаосу». Саме через таке переосмислення, вважає Пригожин, можна почати новий діалог людини із природою, відновити цілісний, універсальний погляд на світ.

В класичній, ньютоновскій науці час виступав як простий параметр. Всі процеси, розглянуті ньютоновскою механікою, були оборотними, тобто нічого принципово не змінювалося при заміні знака часу на зворотний. В XIX ст. інтерес науки перемістився з механіки на термодинаміку. Після відкриття другого початку термодинаміки в науку ввійшло поняття необоротності й, відповідно, спрямованості часу. Виявилося, що фізична величина, названа ентропією, поводиться таким чином, що в замкнутих системах при необоротних процесах вона може тільки зростати.

Ентропія виявилася величиною, тісно пов'язаною з поняттям хаосу, що знищує всяку організованість, приводячи елементи системи в стан однорідної, нерозрізненої маси. Таким чином, другий початок термодинаміки говорить про необоротну деградацію систем. Застосування цього закону у Всесвіті в цілому виразилося в появі гіпотези так названої «теплової смерті Всесвіту».

У тому ж XIX ст. з'явилася еволюційна теорія Ч. Дарвіна, що визначає розвиток біологічних видів від простого до складного, від нижчих форм життя до вищих, від недиференційованих структур до диференційованих.

Таким чином, склалися дві прямо протилежні картини: у живій природі - розвиток по висхідній лінії; у неживий - по спадній, до менш організованих структур, і в межі - до повністю дезорганізованого стану.

Це протиріччя було дозволено лише в XX ст. Перед тим було усвідомлено принципове значення відкритості більшості існуючих систем. В частковості, організми, будучи відкритими системами, постійно пропускають через себе потоки речовини й енергії. По вираженню Е. Шредингера, «організм харчується негативною ентропією», або негентропією. Постачальником негентропії на Землю є сонячна енергія. В подальших працях Пригожина було показано, що в той час, як в ізольованих системах ентропія може тільки зростати, у відкриті вона може виникати й переноситися в навколишнє середовище (виробництво й експорт ентропії), у результаті чого ентропія з величини, що характеризує невпинний рух до стану, позбавленому якої-небудь організації, за певних умов стає прародителькою порядку.

Ентропія може вироблятися усередині самої системи, так і надходити в неї ззовні - із середовища. Середовище відіграє більшу роль в энтропійно-негентропійному обміні, що полягає в наступному:

- середовище може бути для системи генератором ентропії (флуктуації, що приводять систему в стан хаосу, можуть виходити із середовища);

- середовище може виступати також фактором порядку, оскільки ті ж флуктуації, підсилюючись, підводять систему до порогу самоорганізації;

- у середовище може вироблятися відтік ентропії із системи; у середовищі можуть перебувати системи, кооперативний обмін ентропією з якими дозволяє підвищити ступінь упорядкованості, але навіть якщо середовище впливає на систему хаотично, а сила флуктуацій недостатньо велика для того, щоб викликати крапку біфуркації, система має можливість перетворювати хаос у порядок, роблячи для цього певну роботу.

Випадки такого перетворення широко відомі. Наприклад, після Другої світової війни американські окупаційні влади проводили в Японії політику, підкріплювану законодавчо, що повинна була назавжди залишити Японію в рядах слаборозвинених країн, проте вона стала одним з факторів, що сприяли японському «економічному чуду». Друге «чудо» виявила в післявоєнний період, лежача в руїнах Німеччина, тоді як країни-переможниці демонстрували куди менші успіхи. То є середовище, забезпечуючи приплив до системи речовини, енергії й інформації, підтримує її не рівноважний стан, сприяє виникненню нестійкості, що служить передумовою розвитку системи.

Вивчення об'єктів космічного масштабу привело до побудови моделей нестаціонарного всесвіту, які пояснюють еволюційний характер її змін і спростовують гіпотезу «теплової смерті».

Таким чином, еволюційність проявляє себе на мікро-, макро- і мегарівні організації матерії.

Г. Хакен вважає, що синергетика «ширше» концепції І. Пригожина, оскільки вона досліджує явища, що відбуваються в крапці нестійкості, і структуру (нову впорядкованість), що виникає за порогом нестійкості. Однак з іншого боку, у певному змісті більше широким, варто визнати підхід І. Пригожина, оскільки в його рамках розглядаються як нерівноважні, необоротні процеси, що протікають у відкритих системах, так і оборотні, що мають місце в закритих системах. В цілому синергетика й теорія змін уже майже невіддільний друг від друга, оскільки, будучи дуже близькими по об'єктам і методам дослідження, вони ввібрали понятійний апарат друг друга. Це особливо характерно для синергетики, тому концепцію Брюссельської школи можна розглядати як синергетичну. Синергетика й теорія змін склали фундамент концепції самоорганізації, на якій вже побудовані багато фізичних, хімічних, біологічних теорій.

Ґрунтуючись на принципах синергетики й термодинаміки не рівноважних процесів, Н. Н. Моісеєв побудував теорію еволюції біосфери як глобальної системи й переходу її в ноосферу через реалізацію принципу коеволюції людини й природи.

При побудові теорії еволюції біосфери Н. Н. Моісеєв у якості базових ключових понять використав дарвінівську тріаду: мінливість, спадковість, відбір. Однак він значно розширив їхній значеннєвий зміст на основі сучасного розуміння. Таке розширення дозволило виробити гнучкі засоби опису всіляких процесів, що дозволяють побачити загальний зміст, властивим будь-яким процесам розвитку. Особлива заслуга Моісеєва складається в поділі механізмів відбору на два принципово різних класи.

Перший клас одержав назву «*адаптаційного механізму*». До нього Моісеєв відносить насамперед дарвінівські механізми природного добору. Подібні механізми зустрічаються також на всіх інших формах руху матерії. Основна їхня особливість полягає в тому, що вони дозволяють у принципі передбачати (з певною точністю) розвиток подій і прогнозувати їх. *Адаптація* — це самонастроювання, що забезпечує системі, що розвивається, стійкість при даних конкретних умовах зовнішнього середовища. Вивчаючи ці умови, можна прогнозувати тенденції в зміні основних параметрів системи, які будуть відбуватися під дією цих механізмів. Інакше кажучи, можливе визначення заздалегідь безлічі станів системи, які будуть забезпечувати її стійкість за даних умов зовнішнього середовища. Стосовно до біологічної форми руху матерії цей механізм давно використовується в людській практиці. Тисячоріччями людина вела спрямований штучний відбір - селекцію рослин і тварин, адаптуючи їх до своїх потреб. Однак при всіх відмінностях мінливість об'єктів селекції не виходила за межі конкретного виду.

Таким чином, ні зовнішні збурювання, ні внутрішні пертурбації не здатні за допомогою адаптаційних механізмів вивести систему за межі того, по вираженню Н. Моісеєва, «каналу еволюції», що заданий природою для розвитку цієї системи. При дії механізмів адаптаційного типу границі цього коридору, установлені об'єктивними законами, досить близький друг до друга й досить доступні для огляду в перспективі. Шлях розвитку в цьому випадку передбачуваний зі значною точністю, обумовленої границями нашого знання.

Однак існує інший клас механізмів розвитку, названий «*біфуркаційним*». Відповідно до нього організація системи має граничні стани, перехід через які веде до різкої якісної зміни процесів, що протікають у ній, до зміни самої організації. Більше того, у цьому випадку перехід від старої організації системи до нового неоднозначний, тобто можлива ціла безліч різних нових форм організацій. Яку саме форму прийме організація після проходження граничного (критичного) стану буде визначатися випадковими факторами. В зв'язку із цим, на думку Моісеєва, пророчити подальший розвиток системи неможливо.

В реальності процес розвитку є єдиним, що сполучає в собі різні механізми. Основні риси єдиного процесу розвитку наступні. Закони природи встановлюють певні границі зміни стану системи, «канали», усередині яких можуть протікати процеси еволюції системи. В свою чергу, безліч випадкових факторів впливає на ці границі, що може привести до їхнього порушення. Якщо параметри й стани системи не виводяться за обмежуючі межі, механізми розвитку носять адаптаційний характер. Границі адаптації можуть бути визначені в тому випадку, якщо відомі закони, що управляють розвитком. Однак під дією яких-небудь причин система може вийти на перетинання «каналів» адаптаційного розвитку. Тоді вступає в дію біфуркаційний механізм. Виникає кілька нових і різних варіантів розвитку. Цих варіантів стільки, скільки «каналів» виходить на «перехрестя». Чим складніше система, тим більша імовірність збільшення числа можливих шляхів її еволюції, дивергенції, а ймовірність появи двох систем, що розвиваються, у тотожних еволюційних каналах практично дорівнює нулю. Тому процес розвитку (самоорганізації) веде до безперервного росту розмаїтості форм.

Біфуркаційний механізм дозволяє пояснити діалектичну суперечливість еволюції, коли поряд з ускладненням, диференціацією, виникненням якісно нових структур у природі й суспільстві можливі деградація, необоротний розпад і зникнення системи.

При побудові теорії еволюції Н. Моісеєв широко використовує мову й основні положення теорії самоорганізації. Додаток теорії самоорганізації до моделювання процесів еволюції дозволило говорити про еволюційно-синергетичну парадигму постнекласичної науки.

Поряд із завданнями, у яких міняються параметри середовища, С. П. Курдюмов і ін. розглянули інший клас нелінійних рівнянь, що описують явища самоорганізації. В цих завданнях варіюється тільки характер початкового впливу на те саме середовище. Зміна характеру початкового впливу означає не зміна його інтенсивності, а зміна просторової конфігурації, топології цього впливу. При цьому в середовищі з'являються різні структури. Ця проблема інтенсивно вивчається також у моделях середовища з «кінцевих автоматів», у відомій грі «Життя» Мейгена й ін. Отже, в одному й тому ж середовищі без зміни його параметрів можуть виникати різні структури, різні шляхи еволюції.

Однак увага школи Пригожина й багатьох інших дослідників спрямована саме на вивчення нестабільного, мінливого світу, що розвивається. В цьому світі без нестійкості немає розвитку. Наприклад, нелінійний позитивний зворотний зв'язок — найважливіший елемент у моделях авто каталітичних процесах, докладно досліджених Пригожиним і групою його співробітників. В таких процесах присутність продукту може збільшити швидкість його власного виробництва.

Школі під керівництвом С. П. Курдюмова вдалося побудувати один тип моделей, поводження яких визначається нелінійно-позитивними зворотніми зв'язками. Це так названі режими із загостренням, тобто режими зверхшвидкого наростання процесів у відкритих нелінійних середовищах, при яких характерні величини необмежено зростають за кінцевий час.

Методологія рішення завдань «на загострення» може дати нові підходи до рішення проблем колапсу - швидкого стиску речовини, хімічної кінетики, метеорології (катастрофічні явища в атмосфері Землі), екології (ріст і вимирання популяцій), нейрофізіології (моделювання поширення сигналів), нейроепідеміології (спалаху інфекційних захворювань), економіці (феномени бурхливого економічного росту або фінансового обвалу).

Безсумнівним успіхом синергетики з'явилося розкриття механізмів розвитку, переходу систем у стан з новою організацією, у нову якість. Таким чином, сформульований як філософське узагальнення діалектичний закон переходу кількісних змін у якісні знайшов не тільки ще одне підтвердження, але й стосовно до приватних наук одержав можливість конкретизуватися в математичній формі для дослідження реальних систем.

Закон переходу кількісних змін у якісні на рівні неживої природи тривалий час ілюструвався рівноважними фазовими переходами, зокрема, зміною агрегатного стану речовини, механізм якого був добре вивчений ще в XIX столітті. Безсумнівним науковим проривом синергетики з'явився математичний опис не рівноважних процесів, що приводять до появи нових структур на всіх рівнях організації матерії.

Однак успіхи в математичному описі явищ самоорганізації, проте, привели частину вчених до філософських висновків, які послужили джерелом полеміки.

Так, І. Пригожин прийшов до висновку, що «нестабільність» у деякому змісті заміняє «детермінізм», а тому наука сьогодні не є детерміністичною. Тільки системи, далекі від рівноваги, системи в стані нестійкості, нестабільності, здатні спонтанно організовувати себе й розвиватися. Стійкість і рівновага - це, навпроти, тупики еволюції.

Аргументоване заперечення позиції І. Пригожина дали Е. Н. Князєва й С. П. Курдюмов. Вони не погоджуються із Пригожиним у тім, що, підкреслюючи й ставлячи в центр проблемного поля одне подання - нестабільність, можна відкидати інше - стабільність, детермінізм. Якби нестійкість була головною властивістю всіх систем миру, тоді все було б хаотичним, що розпадається, не було б можливості не контролювати, не пророкувати майбутній стан. Очевидно, що це далеко не так. Не все у світі нестійке, а є певні класи нестійких систем. Нестійкими системами, тобто такими, для яких існують принципові границі пророкувань і контролю, можна вважати, наприклад, так називані дивні аттрактори. Фазовий портрет дивного аттрактора - це деяка область, по якій відбуваються випадкові блукання. Але навіть системи, описувані дивними аттракторами, тобто хаотизовані, нестійкі системи, не можна вважати абсолютно нестійкими. Оскільки для таких систем можливо аж ніяк не будь-який стан, а лише стан, що попадає в обмежену, детерміновану, область фазового простору. Нестійкість означає випадкові рухи усередині цілком певної області параметрів.

Таким чином, має місце не відсутність детермінізму, а інша, більше складна закономірність, фактично інший тип детермінізму, що представляє діалектичну єдність певного й випадкового.

Інше заперечення щодо позиції Пригожина полягає в тім, що існує лише певна стадія розвитку процесів, на якій нестаціонарні диссипативні структури стають нестійкими. Це узгоджується з усією спостережуваною звичною картиною світу: ми бачимо, що макроструктури природи, біологічні форми, людське тіло й мозок відносно стійкі, тривалий час не руйнуються. Цей квазістаціонарний стан може існувати, згідно С. П. Курдюмову, досить довго, поки система не перейде в режим загострення, при якому почнеться надшвидка зміна.

В світі, що розвивається, стадії стійкості й нестійкості, оформлення структур і їхнього руйнування змінять один одного.

І. Пригожин, а слідом за ним Н. Моісеєв, постійно підкреслюють, що випадковість, флуктуації, малі збурювання можуть грати істотну, визначальну роль для системи поблизу крапок біфуркації.

С. Курдюмов указує, що в процесі самоорганізації малий випадковий вплив, флуктуація не завжди істотні. Необхідною умовою є розвиток процесу із загостренням, в основі механізму якого лежить нелінійний позитивний зворотний зв'язок.

Нестійкість, по Курдюмову, — це імовірнісний характер розпаду складно організованих структур поблизу моменту загострення. Звичайно, якщо працює випадковість, то мають місце блукання, але не які завгодно, а в рамках цілком певного, детермінованого поля можливостей. В результаті з'являється можливість для суб'єкта дослідження, не тільки спостерігати не детерміновані наслідки біфуркацій, викликані дією випадкових факторів, але й закласти нові наукові основи керування складно організованими системами.

При цьому керування губить характер сліпого втручання методом проб і помилок або волюнтаристичного нав'язування небезпечних дій проти власних тенденцій систем і будується на основі того, що взагалі можливе в даному середовищі. Керування починає ґрунтуватися на з'єднанні втручання людини з істотою внутрішніх тенденцій систем, що розвиваються. Тому з'являється в певному змісті вищий тип детермінізму - детермінізм із розумінням неоднозначності майбутнього й з можливістю виходу на бажане майбутнє, детермінізм, що підсилює роль людини.

Універсальний характер синергетичних моделей зробив їх привабливими для спроб моделювання соціальних процесів. В частковості, вже засновник синергетики Г. Хакен застосував її для побудови моделі формування суспільної думки.

Однак багато дослідників відзначають, що до таких спроб варто ставитися обережно, з огляду на фактор свідомого поводження індивідуумів у соціальних системах. Стосовно до соціальних процесів особливо часто сумніву піддається інтерпретація біфуркаційного механізму розвитку як непередбаченого результату дії випадкових, малих факторів. На противагу цьому Курдюмов уводить подання про структури-аттрактори - «притягателях» розвитку.

Якщо система підпадає в поле притягання певного аттрактора, то вона неминуче еволюціонує по цьому відносно стійкому стану, незважаючи на дії випадкових факторів.

Засновник наукової школи соціоприродної історії Е. С. Кульпін підійшов до співвідношення випадкового й закономірного в соціальному розвитку з іншої сторони. Одним із джерел даного наукового напрямку є теорію еволюції біосфери Н. Моісеєва. Однак, полемізуючи з Моісеєвим, Е. С. Кульпін на основі розгляду конкретних історичних прикладів прийшов до висновку про не фатальний характер непередбачуваності, тобто головні параметри нового «каналу еволюції» у суспільстві, на відміну від природи, визначаються аж ніяк не незначними обставинами. Е. С. Кульпін уважає, що для розуміння еволюції біосфери з урахуванням соціальної підсистеми механізм відбору, крім адаптаційного й біфуркаційного, повинен бути доповнений третім, котрий може бути сформульований як принцип превалювання неантагоністичних протиріч над антагоністичними.

Цей принцип Е. С. Кульпін поширює не тільки на людське суспільство, але й виділяє його як ключовий момент морально-ціннісного орієнтира у взаєминах людини й природи в умовах наростання глобальної соціально-екологічної кризи й погрози планетарної антропогенної катастрофи.

Іншим варіантом назви цього правила відбору - «принцип співіснування » підкреслюється спільність, спільність дій, співробітництво, взаємність і т.д. В суспільстві цей принцип проявляється в політику мирного співіснування, відмові від ядерної війни (багато в чому завдяки сценарній моделі «ядерної зими», розробленою групою Н. Моісеєва), кооперації, чесній конкуренції й ін. Тут проявляється один з аспектів синергетики - її кооперативний характер, погодженість дій безлічі елементів, що приводить до емерджентного ефекту. В даному випадку емерджентність проявляється в знаходженні оптимального, збалансованого рішення, можливих компромісів. Синергетичний, кооперативний підхід до прийняття рішень у т.ч. в умовах конфліктних ситуацій, Н. Моісеєв уважає найважливішою умовою переходу до суспільства ноосферного типу, що забезпечує коеволюцію людини й природи.

Саме необхідність установлення якісно нових відносин з навколишнім природним і соціальним середовищем вимагає формування соціально-синергетичного підходу до сучасних суспільних процесів і тенденцій.

2.3. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ САМООРГАНІЗАЦІЇ

Розглянуті вище концепції синергетики й самоорганізації формують загальний понятійний апарат і дозволяють виділити основні принципи синергетичного підходу до моделювання.

Найбільш істотний вплив синергетика зробила на поняття розвитку. Як правило, *розвиток* представляється необоротною, спрямованою, закономірною зміною матерії й свідомості, їхньою універсальною властивістю; у результаті розвитку виникає новий якісний стан об'єкта — його складу або структури. На наш погляд, у даному визначенні є положення, що бідують в істотному коректуванні. По-перше, необоротними є процеси зміни відкритих систем, і хоча таких більшість, все-таки існують і закриті системи, у яких відбуваються оборотні зміни. По-друге, у результаті розвитку змінюється не тільки структура системи, але і її поводження, функціонування. В системних і навіть деяких синергетичних визначеннях розвитку зазначені недоліки присутні, а його достоїнства нерідко не реалізуються.

Все різноманіття поглядів на розвиток можна представити у вигляді чотирьох груп. *Перша група* дослідників зв'язує розвиток з реалізацією нових цілей, цілеспрямованістю змін. Цей підхід реалізує кібернетика, у якій розвитку протиставляється функціонування, що відбувається без зміни мети. В синергетиці передбачається, що цілеспрямованість не є необхідною умовою, а тим більше атрибутом розвитку. *Друга* розглядає його як процес адаптації до навколишнього середовища, що також є лише його умовою — необхідним, але аж ніяк не достатнім. *Третя група* підмінює розвиток його джерелом — протиріччями системи. *Четверта* — ототожнює розвиток однієї з його ліній — прогресом, або ускладненням систем, або однієї з його форм — еволюцією.

Кількісна зміна складу й взаємозв'язків системи виражає поняття *ріст* і його темпи (отже, ріст не слід ототожнювати з розвитком, що характерно для багатьох економістів).

Розвиток може йти як по лінії прогресу, так і регресу, і виражатися в еволюційній або революційній формі.

Революція в теоріях самоорганізації одержала назву *стрибка, фазового переходу або катастрофи*. Важко погодитися з розповсюдженою точкою зору щодо еволюції системи, що ототожнюється або з розвитком, або з ростом системи, або з її прогресом і регресом, іноді й з усім перерахованим одночасно, або зі зміною, диференціацією, а у вузькому змісті - з кількісною зміною. Оскільки еволюція є формою розвитку, а останнє являє собою якісну зміну, було б нелогічно розуміти під еволюцією кількісну, поступову зміну (тим більше що кількісна зміна відбивається поняттям «ріст»), під еволюцією ми будемо мати на увазі поступальну, повільну, плавну, якісну зміну, а під революцією, як це й прийнято,- стрибкоподібну, швидку якісну зміну.

Постає також питання про співвідношення понять «організація», «розвиток» і базового для синергетики поняття «самоорганізація».

Під *самоорганізацією* розуміється процес установлення в системі порядку, що відбувається винятково за рахунок кооперативної дії й зв'язків її компонентів і відповідно до її попередньої історії, що приводить до зміни її просторової, тимчасової або функціональної структури. Фактично, самоорганізація являє собою встановлення організованості, порядку за рахунок погодженої взаємодії компонентів усередині системи при відсутності впливів, що впорядковуються, з боку середовища. Це вимагає уточнення поняття «організація», вірніше, поділу на організацію як взаємодію частин цілого, обумовлену його будовою, що може бути задане як самою системою, так і зовнішнім середовищем, і організацію як підпорядкований вплив середовища, а також організацію як об'єкт такого впливу. В концепціях самоорганізації організація розуміється у двох останніх змістах.

Що стосується співвідношення понять розвитку й самоорганізації, то перше варто визнати більш широким, оскільки воно включає як організований вплив середовища, так і самоорганізацію; як прогресивні процеси (які в основному досліджують концепції самоорганізації), так і регресивні.

Щоб система була самоорганізованою, а отже, мала можливість прогресивно розвиватися, вона повинна задовольняти, принаймні, наступним вимогам:

- система повинна бути відкритою, тобто обмінюватися із середовищем речовиною, енергією або інформацією;

- процеси, що відбуваються в ній, повинні бути кооперативними (корпоративними), тобто дії її компонентів повинні бути погодженими один з одним; система повинна бути динамічної;

- перебувати вдалині від стану рівноваги.

Головну роль тут грає умова відкритості й нерівноважності, бо якщо вона дотримана, інші вимоги виконуються майже автоматично.

Системи і їхні компоненти піддаються флуктуаціям (коливанням, змінам, збурюванням), які в рівноважних, закритих системах гасяться самі по собі. В відкритих системах під впливом зовнішнього середовища внутрішні флуктуації можуть наростати до такої межі, коли система не має сил їх погасити. Фактично внутрішні флуктуації розглядаються в концепціях самоорганізації як нешкідливі, і тільки зовнішні впливи роблять більш-менш значимий вплив. Останнім часом до цього положення вносяться істотні корективи, що стосуються, зокрема, «природного добору» флуктуацій: щоб процеси самоорганізації мали місце, необхідно, щоб одні флуктуації одержували підживлення ззовні й тим самим мали перевагу над іншими флуктуаціями. Проте, і в цьому випадку недооцінюється роль у русі системи флуктуацій внутрішнього походження. Лише теорія катастроф указує на те, що стрибок може бути наслідком одних лише внутрішніх флуктуацій. Якщо в матеріалістичній діалектиці недооцінювалася роль середовища, то в концепціях самоорганізації - роль самої системи (і її підсистем) у її розвитку.

Останнім часом концепції самоорганізації стали відводити внутрішнім флуктуаціям більшу роль, ніж колись. Про це свідчить типологія флуктуацій, відповідно до якої розрізняються *вільні коливання, вимушені й автоколивання*.

До *вільних* відносять коливальні рухи, що поступово загасають у реальній системі (як загасають коливання вільно підвішеного маятника), що досягає, таким чином, стану рівноваги.

Вимушені флуктуації виникають при впливі на систему здійснюючого коливання зовнішньої сили (приміром, людину, що підштовхує маятник), у результаті якого система раніше або пізніше буде флуктуювати із частотою й амплітудою, що нав'язують зовнішнім впливом.

Автоколивання — це незатухаючі, самопідтримуючі коливання, що відбуваються в диссипативних (макроскопічних, відкритих, далеких від рівноваги) системах, тобто системах, що визначаються параметрами, властивостями й природою самої системи. Вмушені коливання й автоколивання характерні для відкритих систем, а вільні - для закритих, прагнучих до рівноваги.

Вплив на систему як зовнішніх, так і внутрішніх флуктуацій різних видів (включаючи резонансні із системою) заснований на дії двох ефектів: *петлі позитивного зворотного зв'язку й кумулятивного ефекту.*

Петля позитивного зворотного зв'язку уможливлює в далеких від рівноваги станах посилення дуже слабких збурювань до гігантських, руйнуючих сформовану структуру, хвиль, що приводять систему до революційної зміни — різкому якісному стрибку. Такий підхід може допомогти глибше розібратися в природі багатьох соціально-економічних процесів, включаючи економічний розвиток, економічні цикли, НТР і т.д. *Кумулятивний ефект* полягає в тім, що незначна причина викликає ланцюг наслідків, кожний з яких більш істотний. Нерідко він безпосередньо пов'язаний з петлею позитивного зворотного зв'язку.

Флуктуації, що впливають на систему, залежно від своєї сили можуть мати зовсім різні для неї наслідки. Якщо флуктуації відкритої системи недостатньо сильні (особливо це стосується флуктуацій керуючого параметра або підсистеми), система відповість на них виникненням сильних тенденцій повернення до старого стану, структурі або поводженню, що розкриває глибинну причину невдач багатьох економічних реформ. Якщо флуктуації дуже сильні, система може зруйнуватися. І, нарешті, третя можливість полягає у формуванні нової диссипативной структури й зміні стану, поводження й/або складу системи.

Кожна з описаних можливостей може реалізуватися в так називаній крапці біфуркації, викликаній флуктуаціями, у якій система випробовує нестійкість.

Множини, що характеризують значення параметрів системи на альтернативних траєкторіях, називаються *аттракторами*. В крапці біфуркації відбувається катастрофа — перехід системи від області притягання одного аттрактора до іншого. В якості аттрактора може виступати й стан рівноваги, і граничний цикл, і дивний аттрактор (хаос). Систему притягає один з аттракторов, і вона в крапці біфуркації може стати хаотичної й зруйнуватися, перейти в стан рівноваги або вибрати шлях формування нової впорядкованості.

Якщо система притягається *станом рівноваги*, вона стає закритою й до чергової крапки біфуркації живе за законами, властивим закритим системам. Якщо хаос, породжений крапкою біфуркації, затягнеться, то стає можливим руйнування системи, внаслідок чого компоненти системи раніше або пізніше включаються складовими частинами в іншу систему й притягаються вже її аттракторами. Якщо, нарешті, як у третьому випадку, система притягається яким-небудь *аттрактором відкритості*, то формується нова диссипативна структура — новий тип динамічного стану системи, за допомогою якого вона пристосовується до мінливих умов навколишнього середовища.

Наступ революційного етапу в розвитку системи — *стрибка* — можливо тільки при досягненні параметрами системи під впливом внутрішніх і/або зовнішніх флуктуацій певних граничних (критичних або біфуркаційних) значень. При цьому, чим складніше система, тим, як правило, у ній більше біфуркаційних значень параметрів, тобто тим ширше набір станів, у яких може виникнути нестійкість. Коли значення параметрів близькі до критичних, система стає особливо чутливою до флуктуацій: досить малих впливів, щоб вона стрибком перейшла в новий стан через область нестійкості. Нажаль, у синергетичних і системних дослідженнях не відзначена ще одна немаловажлива деталь: для стрибка системи в інший стан певних значень параметри повинні досягти не тільки самої системи, але й середовища.

Процеси, що відбуваються в крапці біфуркації, самоорганізації - виникнення порядку з хаосу, породжуваного флуктуаціями, змушують інакше глянути на роль, що виконується хаосом. Ентропія може не тільки зруйнувати систему, але й вивести її на новий рівень самоорганізації, тому що за періодом хаотичної нестійкості потрібний вибір аттрактора, у результаті чого може сформуватися нова диссипативна структура системи, у тому числі й більш впорядкована, ніж структура, що існувала до цього періоду. Таким чином, за певних умов хаос стає джерелом порядку в системі (так само, як і порядок у результаті його консервації неминуче стає джерелом росту ентропії). Періодична зміна порядку й хаосу, їхня безперестанна боротьба один з одним дають системі можливість розвитку, у тому числі й прогресивного.

Таким чином, із проведених досліджень понятійного апарата синергетики виходить:

- у процесі свого розвитку система проходить дві стадії: еволюційну (інакше називану адаптаційної) і революційну (стрибок, катастрофа);

- під час розгортання еволюційного процесу відбувається повільне нагромадження кількісних і якісних змін параметрів системи і її компонентів, відповідно до яких у крапці біфуркації система вибере один із можливих для неї аттракторів. В результаті цього відбудеться якісний стрибок і система сформує нову диссипативну структуру, що відповідає обраному аттрактору, що відбувається в процесі адаптації до змінюючихся умов зовнішнього середовища;

- еволюційний етап розвитку характеризується наявністю механізмів, які придушують сильні флуктуації системи, її компонентів або середовища й повертають її в стійкий стан, властивий їй на цьому етапі. Поступово в системі зростає ентропія, оскільки через накоплені в системі, а також у її компонентах і зовнішнім середовищі змін здатність системи до адаптації падає й наростає нестійкість. Виникає гостре протиріччя між старим і новим у системі, а при досягненні параметрами системи й середовища біфуркаційних значень нестійкість стає максимальною й навіть малі флуктуації приводять систему до катастрофи стрибку;

- на фазі стрибка розвиток здобуває непередбачуваний характер, оскільки він викликається не тільки внутрішніми флуктуаціями, силу й спрямованість яких можна прогнозувати, проаналізувавши історію розвитку й сучасний стан системи, але й зовнішніми, що вкрай ускладнює, а то й унеможливлює прогноз. Іноді висновок про майбутній стан і поводження системи можна зробити, виходячи з «закону маятника» — стрибок може сприяти вибору аттрактора, «протилежного» минулому. Після формування нової диссипативної структури система знову вступає на шлях плавних змін, і цикл повторюється.

2.4. ПОЧАТКОВІ ВІДОМОСТІ ПРО ФРАКТАЛИ

В синергетиці була вперше обґрунтована властивість фрактальності об'єктів світу. Термін *«фрактал»* споконвічно ставився до чистої математики й був запропонований Б. Мандельбротом для позначення нерегулярних, але самоподібних структур. Одне з визначень фрактала, дане Мандельбротом, звучить у такий спосіб: «фракталом називається структура, що складається із частин, які в якімсь змісті подібні до цілого».

Математичний апарат, побудований на основі подань про фрактали і фрактальні множини, дозволяє пояснити або навіть пророчити експериментально спостережувані факти і явища в різних галузях науки (космологія, теорія турбулентності, хімічна кінетика, фізика полімерів). Можливості такого інструмента моделювання складних систем використаються для аналізу процесів у соціально-економічній сфері, зокрема, у дослідженнях поводження різних ринків.

Фракталами називають такі об'єкти, які мають властивість самоподоби, або, як ще говорять, масштабною інваріантістю. Це означає, що малий фрагмент структури такого об'єкта подібний іншому, більшому фрагменту або навіть структурі в цілому, «який людина, такий і соціум», тобто частина зберігає властивості цілого. Виходячи з даного твердження, можна зробити висновок, що рішення всіх соціально-економічних проблем перебуває в самій людині (у її світогляді, ідеалах, нормах поводження, традиціях і т.д.).

Фрактальними є процеси зі зворотним зв'язком, у яких вихідні характеристики функціонально пов'язані із вхідними, причому цей зв'язок є нелінійним. Такі процеси спостерігаються в системах зовсім різної природи, що функціонують на принципах відносин «ресурс-споживач».

Фрактальная природа соціуму обумовлена дискретним розподілом у просторі, як генераторів нових ідей, так і їхніх провідників і споживачів, так і джерел сировини, підприємств по його переробці, так і ринків реалізації продукції. Взаємодія цих дискретно розташованих інгредієнтів «реакції», проте, можливо й приводить до фрактальної просторової картини процесу, часовий зріз якого демонструє нам складний квазиперіодичний характер.

Теорія фракталів — найбільш адекватна системній природі соціальних і економічних процесів, що протікають в умовах нелінійної динаміки безлічі факторів зовнішнього й внутрішнього середовища. Прийняття гіпотези про фрактальній природі суспільства відразу ж накладає певні обмеження на методи його аналізу. Якщо ми хочемо враховувати просторову складову соціальних процесів, то метод їхнього математичного аналізу повинен докорінно змінитися. В силу цього соціум можна розглядати як протяжний просторово-тимчасовий фрактал, де основним носієм активності («пальним матеріалом» середовища) є свідомість людини.

Із усього, що є в сучасних методах аналізу, фрактал як математичний об'єкт найбільш добре пристосований для відбиття явищ, пов'язаних з розвитком і самоорганізацією. Тому при використанні фрактальных подань можна чекати просування в створенні адекватних математичних моделей соціально-економічних систем. В загальних рисах можна прогнозувати створення таких моделей щодо різних аспектів і явищ соціально-економічної системи.

Фрактальність — це міра неправильності, *фрактал* — основна структура як для опису ринку, так і для опису поводження окремих трейдерів.

Фрактальність і цикли — дві сторони однієї «медалі». Просторове відображення процесів має риси фрактальності, тимчасове відображення динаміки фракталів сприймаються як цикли. Або інакше - при реалізації в просторі цикли мають фрактальний вид, а фрактали в часі - хвильовий.

З огляду на дані різних наук, можна припускати, що фрактальність у своїх проявах «нерівномірна» і не безмежна - у процесі фрактального росту структур повинні бути присутніми критичні рівні. В свою чергу, у циклічних проявах повинні бути виявлені критичні періоди, на циклічних реалізаціях позначаються конкретні умови, тому характер, довжина хвиль і т.п. будуть досить мінливі. Реалізація феноменів фрактальності й циклічності здійснюється через конкретні матеріальні носії у взаємодії з конкретним середовищем. Тому випадків фіксації «ідеальних» фракталів і циклів завжди буде небагато. У всіх випадках позначаються фактори передісторії (системної пам'яті різного рівня), ефекти положення (сусідства), віку й т.п. В ряді випадків особливе значення буде мати характерний час реагування об'єктів на зміни факторів середовища.

Поняття «фрактал» нерозривно пов'язане з поняттям хаос. Хаос — це відсутність передбачуваності. Хаос виникає в динамічних системах, коли для двох дуже близьких початкових значень система поводиться зовсім по-різному.

Фрактали визначають структуру хаосу. Фрактали, власне кажучи, є новою мовою, що дає опис форм хаосу, вони дозволяють аналізувати тонку структуру хаосу й навіть виявити в ньому прояв порядку. Тонка структура фрактала може бути наслідком і причиною складного хаотичного поводження.

На фазовій площини такому поводженню відповідає замкнута крива, називана *аттрактором* (від англійського дієслова to attract - притягати) — безліч траєкторій, що характеризують сталий процес. В випадку нелінійного маятника можуть виникнути складні, неперіодичні коливання, коли траєкторія на фазовій площині не замкне за як завгодно довгий час. При цьому поводження детермінованої системи буде зовні нагадувати зовсім випадковий процес — це і є явище динамічного або детермінованого хаосу. Образ хаосу у фазовому просторі — *хаотичний аттрактор* — має дуже складну структуру: це фрактал. В силу незвичайності властивостей його називають також *дивним аттрактором.*

Структура визначає поводження. Фрагментарна, фрактальна природа щоденної реальності залишається за межами нашої свідомості. Щоб використати мислення для сортування явищ і навчитися розуміти зміст що відбувається, ми повинні, насамперед, знайти основну структуру реальності. Структуру, що розкриває порядок, що лежить в основі хаосу.

Існує чотири нелінійні функції, які допомагають нам визначити цей порядок у нашій власній свідомості. Учені, що досліджують хаос, виявили, що гадані хаотичними, що не підкоряються ніяким законам процеси, у дійсності, додержуються схованого порядку. Порядок, що вони відкрили, чотириразовий: всі зовнішні явища діють відповідно до того, що вони називають чотирма аттракторами — силами, які витягають порядок з безладдя. Вони називаються *крапковим аттрактором, циклічним аттрактором, аттрактором торас і дивним аттрактором.* Ці чотири аттрактора формують основну структуру зовнішнього світу, характер поводження й руху ринку.

Крапковий аттрактор — це найпростіший спосіб внести порядок у хаос. Це єдиний стан, до якого прагне система в загальному випадку при нескінченному часі.

Характеристика *циклічного аттрактора* — рух взад-вперед, подібно маятнику або циклічному магніту. Він притягає, потім відштовхує, потім знову притягає й т.д. Такого роду аттрактор характеризує, наприклад, ринок, укладений у коридорі, де ціна рухається нагору й униз у певному діапазоні протягом деякого проміжку часу. Цей аттрактор більш складний, ніж крапковий аттрактор і є основною структурою для більш складного поводження. Одна діяльність автоматично веде до іншої в повторюваному порядку. В природі його можна спостерігати на ряді прикладів, наприклад, у системах «хижак — видобуток», де розмір популяції відповідних хижаків або їхніх жертв збільшується й зменшується у зворотному співвідношенні. На ринку зерна це явище носить річний характер. Один рік, для якого були характерні високі ціни, породжує збільшення посівних площ наступною весною, що, у свою чергу, приводить до низьких цін. Потім фермери зменшують посівні площі, щоб домогтися більше високих цін.

Третій, більше складний, вид аттрактора відомий як *аттрактор торас*. Він починає складну циркуляцію, що повторює себе в міру руху вперед. У порівнянні із циклічним і крапковим аттракторами, аттрактор торас уводить більший ступінь безладності і його моделі більш складні. На цьому рівні, пророкування носять більш точний характер, а моделі мають тенденцію здаватися більш закінченими. Графічно він виглядає як кільце або рогалик. Він утворить спиралевидні кола на ряді різних площин, і іноді повертається сам до себе, завершуючи повний оборот.

Його основна характеристика — це повторювана дія. Він має тенденцію створювати щось начебто безладного гомеостазиса, подібно тому, як популяція комах впливає на популяцію жаб. Подібні явища можна спостерігати в прагненні світових активів до безпеки. Якщо ставка по державних паперах підвищується, вони залучають більше інвесторів. Потім підвищуються ціни на них, що опускає процентну ставку, і робить їх менш привабливими й т.д.

Дивний аттрактор — самоорганізуючий. Це місце народження волі й розуміння, як у дійсності працює ринок. Те, що поверхневий погляд сприймає як абсолютний хаос, у якому не помітно ніякого порядку, має певний порядок, що базується на дивному аттракторі, коли спостереження ведеться із четвертого виміру.

Характеристикою дивного аттрактора виступає чутливість до початкових умов, що іноді називається «ефект метелика». Найменше відхилення від споконвічних умов може привести до величезних розходжень у результаті.

Для того щоб представити все різноманіття фракталів, зручно вдатися до їхньої загальноприйнятої класифікації.

1) Геометричні фрактали.

Фрактали цього класу найнаочніші. В двовимірному випадку їх одержують за допомогою деякої ламаної (або поверхні в тривимірному випадку), названої генератором. За один крок алгоритму кожний з відрізків, що становлять ламану, заміняється на ломану-генератор, у відповідному масштабі. В результаті нескінченного повторення цієї процедури, виходить геометричний фрактал.

Розглянемо один з таких фрактальних об'єктів — триадну криву Коха. Побудова кривої починається з відрізка одиничної довжини *(Рис. 3.1)* — це нульове покоління кривої Коха. Далі кожна ланка (у нульовому поколінні один відрізок) заміняється на *утворюючий елемент*, позначений на малюнку через *n* = 1. В результаті такої заміни виходить наступне покоління кривої Коха.

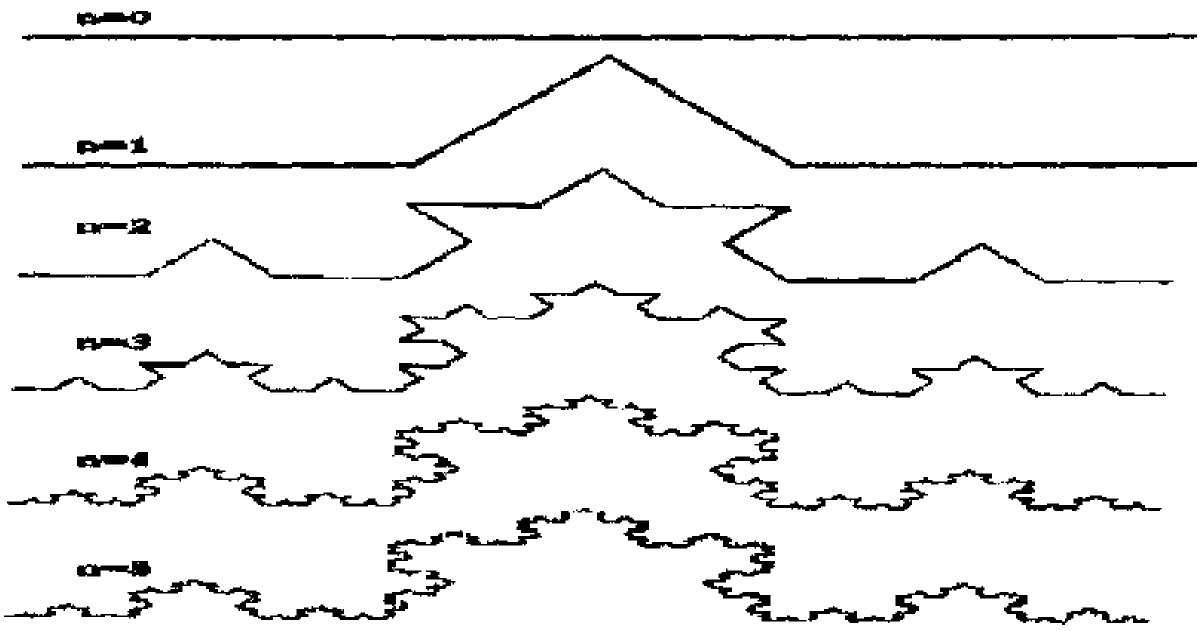


Рис. 3.1. Побудова триадної кривої Коха

В 1-ому поколінні — це крива із чотирьох прямолінійних ланок, кожне довжиною по 1/3. Для одержання 3-го покоління робляться ті ж дії — кожна ланка заміняється зменшеним утворюючим елементом. Отже, для одержання кожного наступного покоління всі ланки попереднього покоління необхідно замінити зменшеним утворюючим елементом. Крива *n*-го покоління при будь-якому кінцевому *n* називається предфракталом. На мал. 3.1 представлені п'ять поколінь кривої. При *n*, що прагне до нескінченності, крива Коха стає фрактальним об'єктом.

Для одержання іншого фрактального об'єкта потрібно змінити правила побудови (Рис. 3.2).

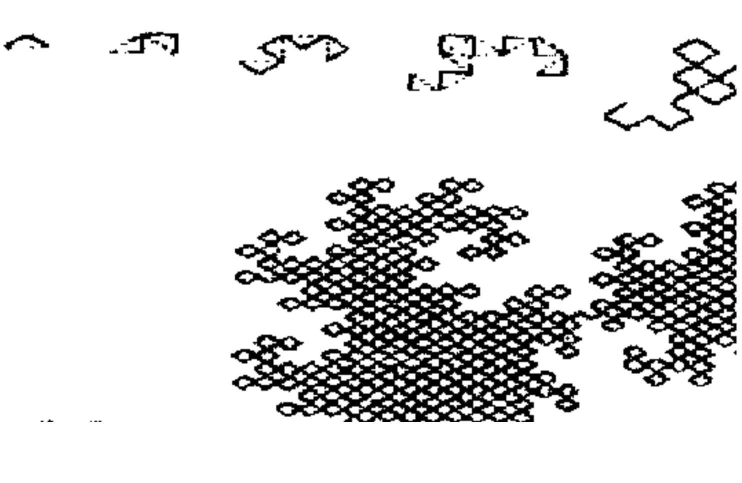


Рис. 3.2. Побудова «дракона» Харпера — Хейтуея

2) Алгебраїчні фрактали.

Це найбільша група фракталів. Одержують їх за допомогою нелінійних процесів у *n*-мірних просторах. Найбільш вивчені двовимірні процеси.

Якщо нелінійна динамічна система володіє декількома стійкими станами, то кожний стійкий стан має деяку область початкових станів, з яких система обов'язково потрапить у розглянуті кінцеві стани. Таким чином, фазовий простір системи розбивається на області притягання аттракторів. Фарбуючи області притягання різними кольорами, можна одержати колірний фазовий портрет цієї системи (ітераційного процесу). Міняючи алгоритм вибору кольору, можна одержати складні фрактальні картини з вигадливими багатобарвними візерунками. Несподіванкою для математиків стала можливість за допомогою примітивних алгоритмів породжувати дуже складні нетривіальні структури.

В якості приклада розглянемо множину Мандельброта (Рис. 3.3 і 3.4). Алгоритм його побудови досить простий і заснований на простому ітеративному вираженні:

$$Z\left[i+1\right]=Z\left[i\right]\times Z\left[i\right]+C;$$

де *Z[i] і C* — комплексні змінні.

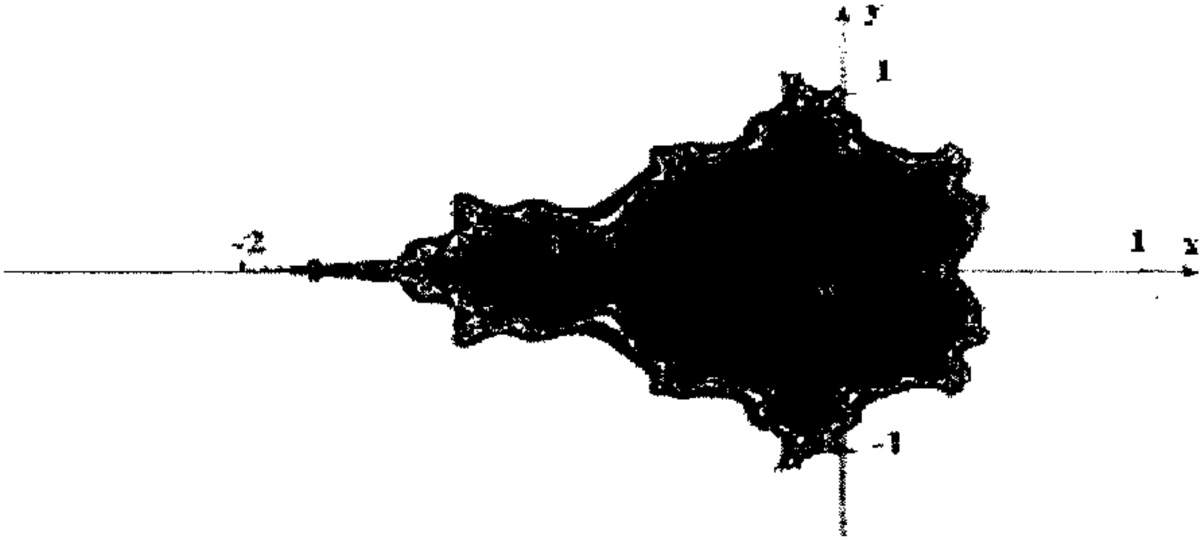


Рис. 3.3. Множина Манделъброта

Ітерації виконуються для кожної стартової крапки *C* прямокутної або квадратної області на комплексній площині.

Ітераційний процес триває доти, поки *Z[i]* не вийде за межі окружності радіуса 2, центр якої лежить у крапці (0,0), (це буде означати, що аттрактор динамічної системи перебуває в нескінченності), або після досить великої кількості ітерацій (наприклад, 200 — 500) *Z[i]* зійдеться до якої-небудь крапки окружності. В залежності від кількості ітерацій, у плині яких *Z[i]* залишалася усередині окружності, можна встановити кольори крапки *C* (якщо *Z[i]* залишається усередині окружності протягом досить великої кількості ітерацій, ітераційний процес припиняється й ця крапка растра офарблюється в чорні кольори).

Описаний алгоритм дає наближення до так називаної множини Мандельброта. Множині Мандельброта належать крапки, які протягом нескінченного числа ітерацій не йдуть у нескінченність (крапки, що мають чорні кольори). Крапки, що належать границі множини (саме там виникають складні структури), ідуть у нескінченність за кінцеве число ітерацій, а крапки, що лежать за межами множини, ідуть у нескінченність через кілька ітерацій (білий фон).

Рис. 3.4. Участок границі множини Мандельброта,
збільшений в 200 разів

3) Стохастичні фрактали.

Ще одним відомим класом фракталів є стохастичні фрактали, які виходять у тому випадку, якщо в ітераційному процесі випадковим образом міняти які-небудь його параметри. При цьому виходять об'єкти дуже схожі на природні - несиметричні дерева, порізані берегові лінії й т.п. Двовимірні стохастичні фрактали використовуються при моделюванні рельєфу місцевості й поверхні моря.

Існують й інші класифікації фракталів, наприклад розподіл фракталів на детерміновані (алгебраїчні й геометричні) і недетерміновані (стохастичні).

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1) Які причини появи синергетики і її часток направлінь?
2) Сформулюйте основні положення синергетики.
3) В чому розходження системного й синергетичного підходів до дослідження складних систем?
4) Дайте характеристику ідей І. Пригожина, Н. Моісеєва, С. Курдюмова, Г. Хакена.

5) В чому розходження й спільність підходів ідей різних шкіл?
6) Охарактеризуйте основні поняття самоорганізації?
7) Які явища називаються фракталами?
8) Для чого застосовуються фрактали в дослідженні складних систем?
9) Який зв'язок між фракталами і хаосом?
10) Які існують види фракталів?
11) Що таке аттрактори і які їхні основні види?

Тема 3. Рівновага та стійкість динамічних систем

3.1. РІВНОВАГА І СТІЙКІСТЬ

Економічна динаміка, що вивчає поводження складних динамічних систем в економіці, не може залишити без уваги такий важливий напрямок, як стійкість і рівновага систем. Теорія стійкості зобов'язана своїм виникненням працям А. Пуанкаре й А. М. Ляпунова. В сучасних теоріях рівновазі в соціально-економічних системах надається особливе значення, пов'язане з поняттям справедливості, відсутністю соціальних потрясінь і т.д. В цьому розділі ми розглянемо спочатку деякі інтуїтивні обґрунтування понять «рівновага» і «стійкість», а потім їхнє формальне подання.

Усяка динамічна система в будь-який момент часу характеризується своїм станом і напрямком руху. Система робить рух або під впливом внутрішніх спонукальних причин, або в результаті впливу на неї зовнішнього середовища. Принципово різними є причини, що обумовлюють її рух як у початковий момент часу, так і в наступні моменти.

С станом системи зв'язане поняття рівноваги. Під *рівновагою* розуміється стан, що зберігається як завгодно довго при відсутності зовнішніх впливів. Таким чином, *рівноважний стан* системи — це такий її стан, з якого система не вийде під дією тільки внутрішніх причин (іншими словами, немає таких внутрішніх сил, які б прагнули й могли змінити стан рівноваги). Очевидний приклад - рівновага на ринку деякого товару, рівновага політичних сил у суспільстві. Напрямок руху системи задається нульовим вектором, тобто рух відсутнє.

Якщо система не перебуває в стані рівноваги, то вона робить ненульовий рух під впливом внутрішніх причин. При цьому можливо, звичайно, і зовнішній вплив на систему, однак першопричиною зміни її стани є саме внутрішні умови її існування. Наприклад, система, що випускає на ринок нову продукцію, не перебуває в стані рівноваги, оскільки всі умови її існування й зусилля саме й спрямовані на зміну існуючого положення. А от виробничо-економічна система, продукція якої перебуває в стадії насиченого попиту, скоріше перебуває в стані рівноваги, оскільки обсяг випуску її не змінюється доти, поки не буде прийняте відповідне рішення. В даному випадку ухвалення рішення про випуск нової продукції або модифікації старої є по відношенню у виробничій системі зовнішнім елементом, генерованим керуючою системою.

Під впливом зовнішніх впливів рівновага може бути порушено, і система перейде в інший стан. В цьому випадку в дію вступає друга характеристика динамічної системи — *поводження.* В залежності від будови системи, властивостей її й складових її елементів поводження може істотно розрізнятися. Принципово різними виявляються два варіанти розвитку подій після того, як на систему зробила деякий вплив, що обурює, зовнішнє середовище: повернення у вихідний стан (можуть бути при нескінченному періоді розгляду) і подальше видалення від вихідного стану. Ці можливості описуються поняттям стійкості.

Під *стійкістю* розуміється здатність системи повертатися в рівноважний стан у випадку, якщо вона була виведена з нього. В такому випадку стан рівноваги називається *стійким.* Другому варіанту відповідає нестійкість стану й системи.

Таким чином, у заданий момент часу система може перебувати в стані рівноваги, і в такому випадку часто говорять про рівноважну систему, або перебувати в стані нерівноваги (нерівновага система). В свою чергу рівновага може бути стійкою і нестійкою і, відповідно, розділяють стійкі й нестійкі системи.

Поняття стійкості застосовується також і стосовно руху системи, а саме - як властивість системи мало відхилятися від заданої траєкторії руху при малих впливах, що обурюють, з боку зовнішнього середовища. В цьому змісті можна говорити про динамічну стійкість.

Нарешті, поводження системи також може бути піддано деяким змінам у часі. Цієї можливості відповідає поняття стаціонарності. *Стаціонарність* є властивістю поводження, процесів, що відбуваються в системі, і означає, що характер (закон) функціонування системи не змінюється згодом. Так, функціонування виробничо-економічної системи можна вважати стаціонарним, якщо технології виробництва не міняються протягом розглянутого періоду. В цьому випадку систему можна описати за допомогою економіко-статистичних моделей. Якщо ж відбувається зміна технологій виробництва, то закон функціонування міняється, наприклад, змінюються величини нормативної продуктивності ресурсів, і попередній закон функціонування виявляється недійсним. В перехідний період систему вже не можна описати за допомогою статистичних моделей, а варто залучати могутніші математичні інструменти.

За аналогією з поняттями рівноваги й стійкості системи часто говорять про *стаціонарні* й *нестаціонарні* системи. В стаціонарній системі всі процеси, що відбуваються, стаціонарні, а в нестаціонарній існує хоча б один нестаціонарний процес.

Отже, варто розрізняти, до якої характеристики системи ставляться різні поняття. Рівновага є властивістю стану, стійкість - властивістю системи, а стаціонарність - властивістю процесів, що відбуваються в системі.

В літературі часто згадується поняття «стабільність». При цьому в різних джерелах під цим поняттям маються на увазі різні властивості. Варто помітити, що в іноземній літературі використається єдиний термін - stability - стійкість, стабільність. Тому існування двох різних термінів у російськомовній (україномовної) літературі пояснюється скоріше витратами перекладу, ніж дійсним розмежуванням цих понять. Виправданням існування цього терміна є те, що він, як правило, використається як якісна, а не кількісна характеристика процесів, що відбуваються в системі, і означає поступальний, еволюційний шлях розвитку системи на противагу революційному, вибуховому.

Складність і відкритість економічних систем пояснюють той факт, що рівновага й стійкість на практиці зустрічаються досить рідко. Однак ці поняття мають важливе значення для економічної теорії й дозволяють досліджувати внутрішні властивості систем.

Варто також помітити, що нелінійність в економічних системах породжує ускладнені варіанти рівноваги й стійкості, про що піде мова в наступних розділах.

3.2. ФОРМАЛЬНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ СТІЙКОСТІ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Для складних систем, зокрема економічних, стійкість означає, що при виникненні збурювання, що злегка виводить систему зі стану рівноваги, система буде прагнути до відновлення колишнього стану, тобто всі її наступні стани будуть перебувати поблизу стану рівноваги (рис. 4.1).

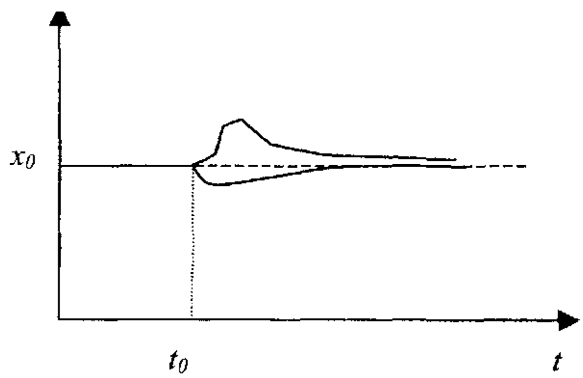


Рис. 4.1. Стійкість для динамічної системи

Формалізація питань стійкості реалізується у вигляді кілька визначень.

Розглянемо систему, описувану диференціальним рівнянням (системою диференціальних рівнянь) виду

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases},$$

(4.1)

Визначення 1. Система (4.1) називається *автономною*, якщо змінна часу не входить у її праву частину безпосередньо. В противному випадку система називається *неавтономною*.

Допустимо, що функція *f(x, t)* має необхідні властивості, щоб система (4.1) мала єдине рішення

$$x(t) = \varphi(t, t_0, x_0), \tag{4.2}$$

*Визначення 2***.** Стан системи x_e називається *станом рівноваги* системи (4.1), якщо

$$f(x_e, t) = 0, \forall t, \tag{4.3}$$

або

$$\varphi(t, t_0, x_e) = x_e. \tag{4.4}$$

Це визначення означає, що система сама по собі (при відсутності зовнішнього впливу) не покине стан рівноваги.

*Визначення 3***.** Стан рівноваги x_e динамічної системи (4.1) називається *стійким по Ляпунову* (стабільним), якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0 : |x_0 - x_e| < \delta \Rightarrow |\varphi(t, t_0, x_0) - x_e| \le \varepsilon, \forall t \ge t_0 \tag{4.5}$$

Це визначення означає, що завжди можна вибрати таке початкове положення системи $\boldsymbol{x_0}$**,** що відрізняється від стану рівноваги менш, ніж на 8, що всі крапки траєкторії системи будуть перебувати від стану рівноваги не далі ε (рис. 4.2).

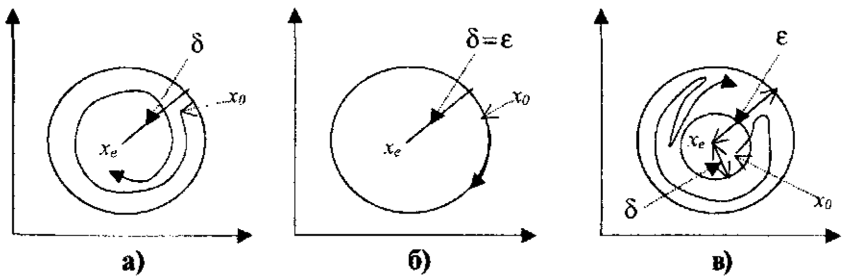


Рис. 4.2. Стійкість по Ляпунову

Визначення 4. Крапка рівноваги x_e динамічної системи (4.1) називається *асимптотично стійкою***,** якщо:

1) вона є стійкою в змісті визначення 3;

2) виконано

$$\forall m > 0 \exists T(m, t_0, x_0) > 0:$$

$$\left|x_0 - x_e\right| \le r(t_0) \Rightarrow \left|\varphi\left(t, t_0, x_0\right) - x_e\right| \le m, \forall t \ge t_0 + T,$$

де $r\ (t_0) > 0$ – константа

Іншими словами

$$\lim_{t \to 0} \varphi(t, t_0, x_0) = x_e, \tag{4.6}$$

Таким чином, до асимптотично стійкої крапки рівноваги сходиться при $t \to \infty$ будь-яка траєкторія, що починається істотно близько до неї (рис. 4.3).

Асимптотична стійка крапка називається *аттрактором* («притягуюча»), а нестабільна — *репеллером* (рис. 4.4).

Число $r(t_0)$ називається *базисом аттрактора*.

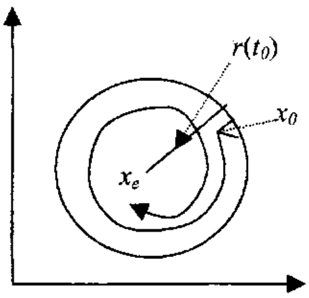


Рис. 4.3. Аттрактор

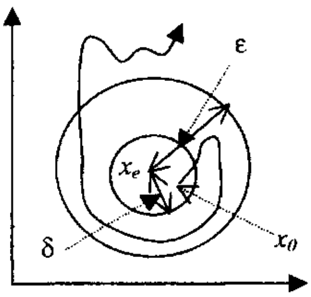


Рис. 4.4. Репеллер

Визначення 5. Стан рівноваги x_e динамічної системи (4.1) називається *в цілому асимптотично стійким***,** якщо

1) воно є стійким;

2) будь-яка траєкторія при t сходиться до x_e, якщо $/x_0 - x_e/ \le r$, де $r > 0$ — постійне, досить велике число (рис. 4.5).

Якщо константи у визначеннях 3, 4, 5 (δ, T, r) не залежать від t_0, то говорять про *однорідну* стійкість.

Для простоти викладу надалі будемо вважати, що система (4.1) має нульове рішення.

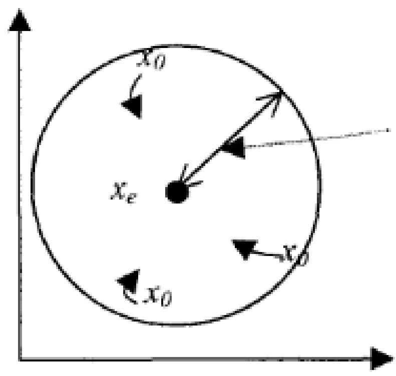


Рис. 4.5. В цілому асимптотично стійкий стан

Теорема Ляпунова про стійкість.

Нехай для системи (4.1) існує така функція V(x), безперервно диференційована в околиці точки x=0, що

1) V(0)=0,

2) V(x)>0, x≠0;

3) в області завдання системи (4.1), тоді рішення x=0 є стійким.

Теорема Ляпунова дозволяє також визначити необхідні умови стійкості параметризованих систем, зокрема, для загальної рівноваги Вальраса.

3.3. КЛАСИФІКАЦІЯ СТАНІВ РІВНОВАГИ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Оскільки повна класифікація станів рівноваги для систем довільного порядку практично нездійсненний, розглянемо тільки системи другого порядку, тобто такі, які описуються двома динамічними параметрами.

Розглянемо автономну систему другого порядку виду

$$\begin{cases} x = P(x,y) \\ y = Q(x,y) \end{cases}$$

Нехай $M(x_0,y_0)$ – стан рівноваги. Це означає, що

$P(x_0,y_0)= Q(x_0,y_0)=0$

Позначимо

$$\Delta(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} P_x = (x_0, y_0)\, P_y = (x_0, y_0) \\ Q_x = (x_0, y_0)\, Q_y = (x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

$$\sigma = P_x^{'}(x_0, y_0) + Q_y^{'}(x_0, y_0)$$

Стан рівноваги, для якого $\Delta \neq 0$ називається простим.

Розглянемо наступні стани рівноваги:

1) Прості стани рівноваги.

Для стану рівноваги може бути складено характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} P_x^{'} = (x_0, y_0) - \lambda P_y^{'} = (x_0, y_0) \\ Q_x^{'} = (x_0, y_0)\, Q_y^{'} = (x_0, y_0) - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0 \tag{4.7}$$

Нехай λ_1, λ_2 **—** корінь характеристичного рівняння.

Стан рівноваги класифікуються залежно від того, чи є коріння дійсними або комплексними числами, їхньої парності й знака.

2) Вузли.

Якщо λ_1, λ_2 — дійсні числа однакових знаків, тобто $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ або $\Delta > 0$**,** $\sigma^2 - 4\Delta > 0$, то стан рівноваги називається вузлом:

А. *Невироджений вузол****:*** $\lambda_1 \neq \lambda_2$

а) стійкий, якщо $\sigma < 0$ (рис. 4.6а);

б) нестійкий, якщо $\sigma > 0$ (рис. 4.6б);

Б. *Вироджений вузол*: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

а) стійкий, якщо $\lambda < 0$ (рис. 4.7а);

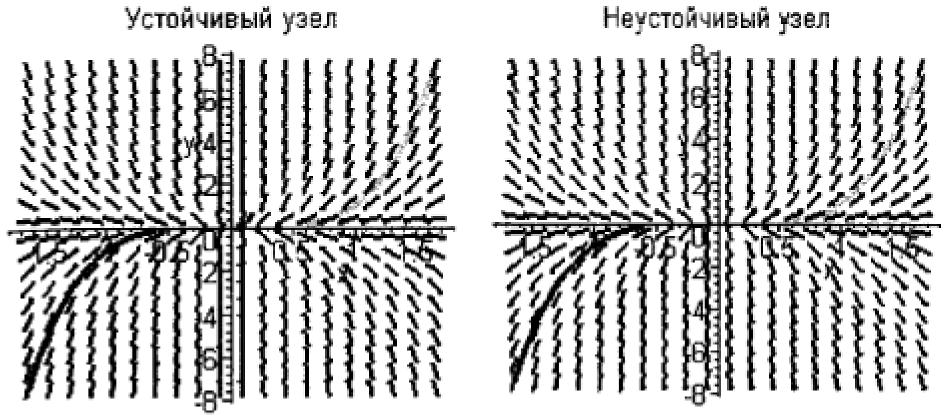
б) нестійкий, якщо $\lambda > 0$ (рис. 4.7б)

В. *Дикритичний вузол****:*** $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ і система може бути приведена до виду

$$\begin{cases} x = \lambda x + \varphi(x, y) \\ y = \lambda y + \psi(x, y) \end{cases}$$

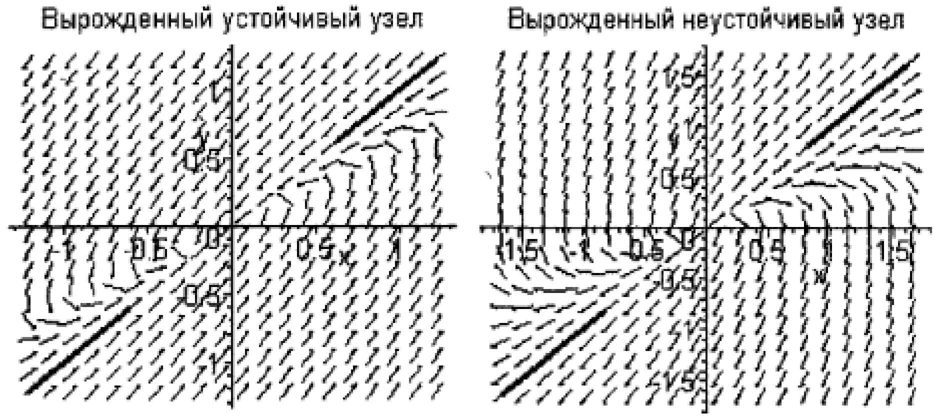
а) стійкий, якщо $\lambda < 0$ (рис. 4.8а);

б) нестійкий, якщо $\lambda > 0$ (рис. 4.8б).



а) б)

Рис. 4.6. Стан рівноваги типу вузол

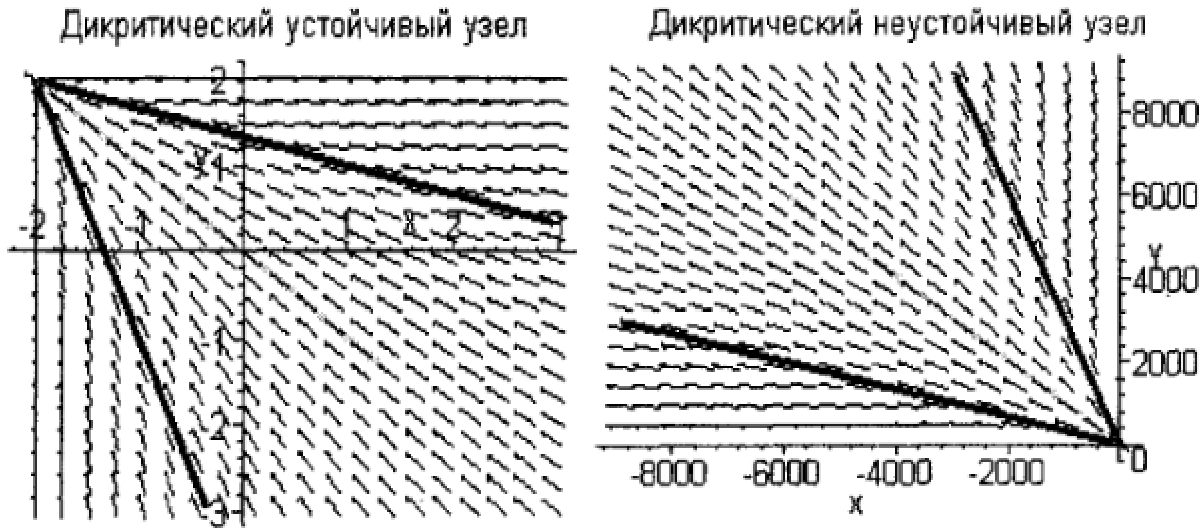


а) б)

Рис. 4.7. Фазовий портрет системи в околиці виродженого вузла

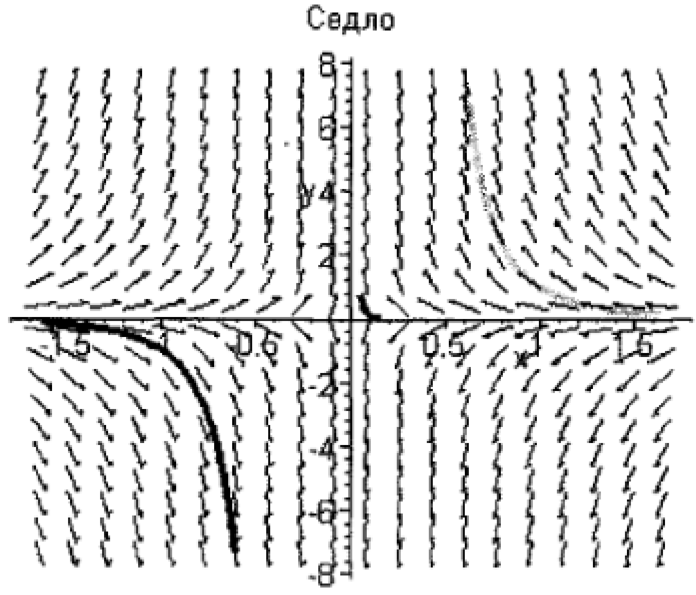
4) *Сідло***.**

Характеристичні корні λ_1, λ_2 - дійсні числа різних знаків, тобто $\lambda_1\lambda_2 < 0$ або $\Delta < 0$, $\sigma^2 - 4\Delta > 0$ (рис. 4.9).



а) б)

4.8. Фазові портрети для дикритичних вузлів



4.9. Сідлова точка

Сепаратрисой сідла називається траєкторія, що прагне до сідла при $t \to \pm\infty$ Всі інші траєкторії, як завгодно близькі до сепаратрисі, при росту (убуванні) t віддаляються від її.

4) *Фокус.*

Характеристичних корінь λ_1, λ_2 — комплексні сполучені числа,тобто $\Delta > 0$, $\sigma^2 - 4\Delta < 0$, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta_i$:

а) стійкий, якщо $\alpha < 0$ ($\sigma < 0$) (рис. 4.10а);

б)   нестійкий, якщо α>0 (σ<0) (рис. 4.10б)

в) центр – стійкий, але не асимптотично, якщо α=0 (рис. 4.1в).

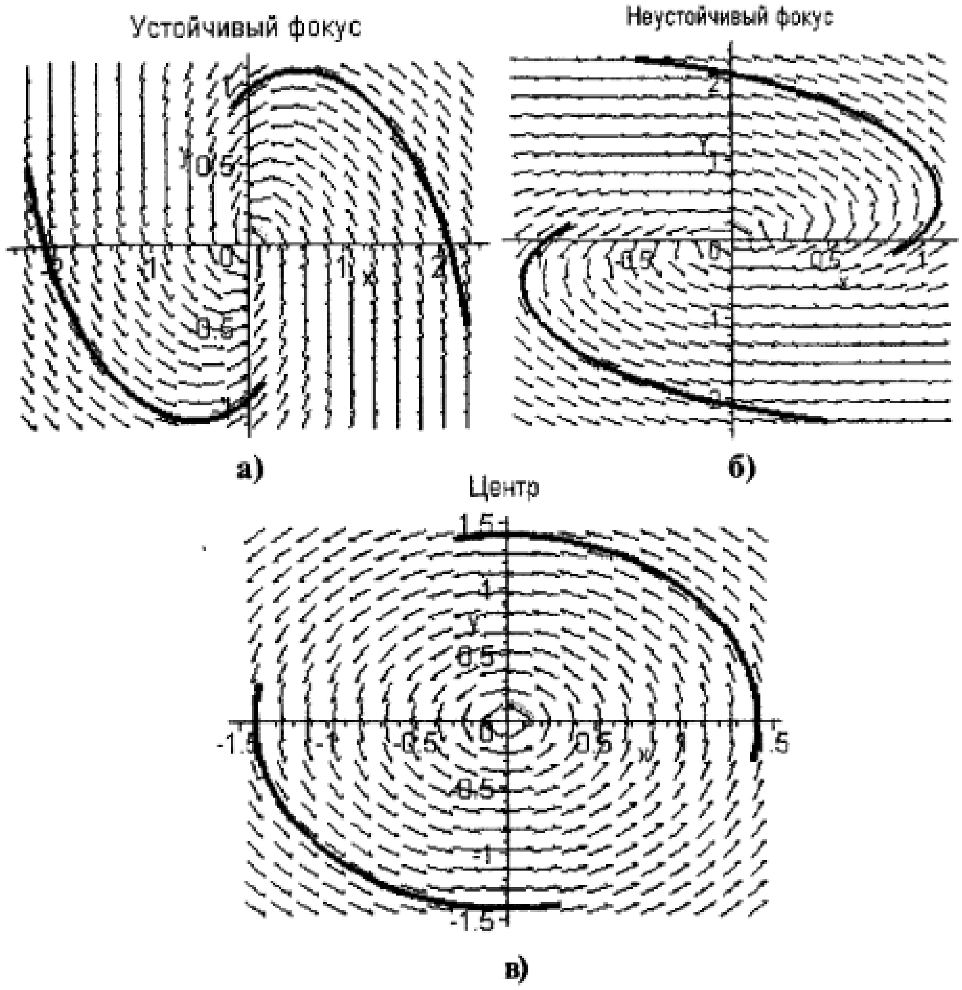


Рис. 4.10. Фазові портрети при комплексних характеристичних коренях

Складні стани рівноваги мають місце у випадку, коли одне або більше характеристичні значення звертаються в нуль. Вони є предметом вивчення теорії катастроф. Ситуації рівноваги є комбінаціями перерахованих вище варіантів і можуть представляти собою сідло-вузол, складне сідло, вони можуть мати кілька областей збіжності та різнобіжності в околиці даної точки і т. д. Тут ми наведемо лише приклади фазових портретів в околицях таких станів рівноваги (рис. 4.11).

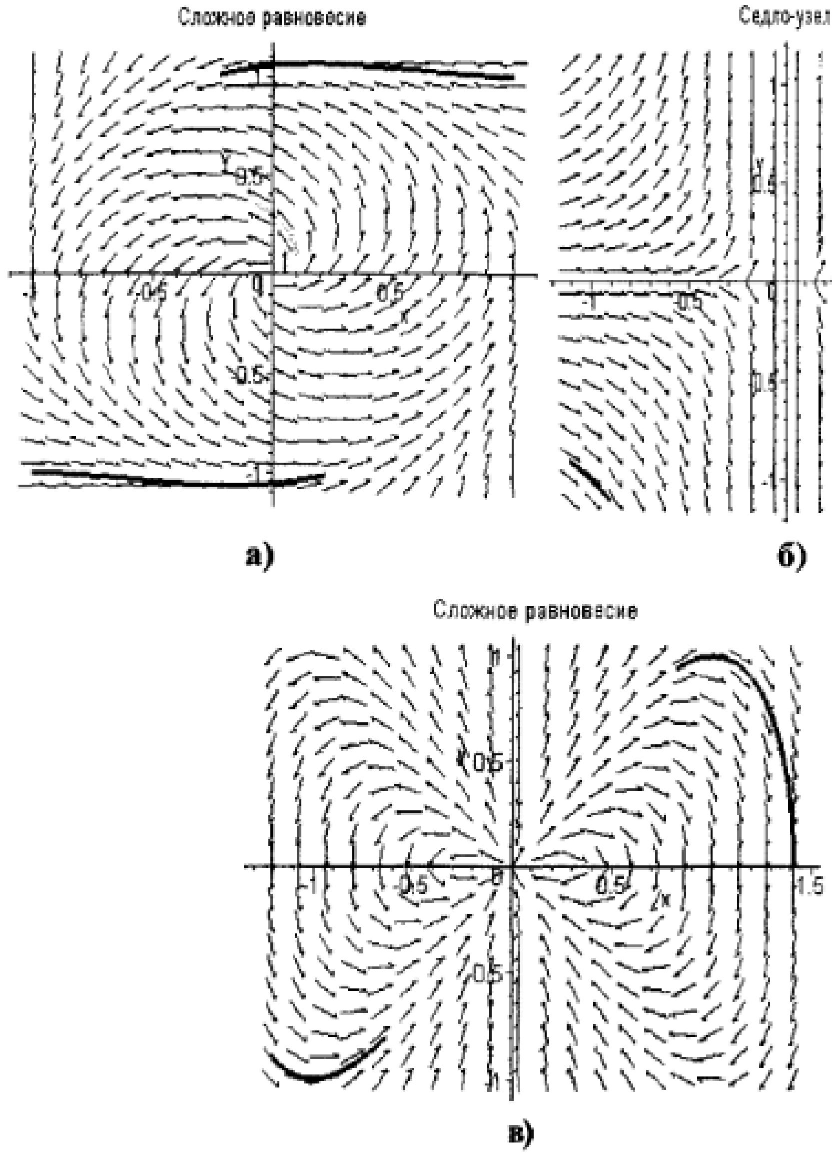


Рис. 4.11. Складні ситуації рівноваги

3.4. СТОХАСТИЧНА СТІЙКІСТЬ

Детерміністична теорія стійкості являє собою один з розділів якісної теорії динамічних систем. Більшість результатів стосується певних якісних або кількісних (але не пов'язаних з дійсним обчисленням рішень) властивостей диференційних рівнянь.

Завдання стохастичної стійкості виникають у теорії керування при розгляді систем, на які впливають зовнішні неконтрольовані, випадкові впливи. Якщо при цьому відома бажана область роботи системи, то завдання оцінки ймовірності знаходження в цій області є досить практичними.

Розглянемо строго марковский процес x_t, з невипадковою початковою умовою x_0 із непустого відкритої безлічі R, що містить початок координат. Нехай P — деяка безліч, що містить R. Тоді виникає кілька завдань:

(1) чи існує така безліч R, що для деяких заданих ρ і P для будь-якого $x \in R$ має місце нерівність:

$$P_x\left\{x_t \in P \text{ ïðè äåÿêîì ó } t < \infty\right\} \le \rho < l$$

(2) В розвиток завдання (1): чи можна для кожних фіксованих P і ρ<1 знайти відповідне R?

(3) Знайти оцінку найбільшого багатьох R при фіксованих P і ρ з завдання (1).

(4) Завдання рівномірної обмеженості: яке значення

$$\min P_{x0}\left\{x_t \in P, \forall t < \infty\right\},$$

якщо P — задана обмежена безліч?

(5) Визначити найменше безліч, що містить всі межі з імовірністю 1 процесу x_t при $t \to \infty$.

(6) Завдання на момент першого виходу: оцінити ймовірність

$$P_x\left\{x_t \notin P \text{ ïðè äåÿêîì ó } t < T\right\}, x \in R.$$

(7) Чи існує кінцевий марковский момент часу τ, такий, що $x_t \to S$ при $t \to \infty$.

(8) Нехай $x = f(x) - p$, де p_t - деякий марковский процес. Чи створить пара (x_t,p_t) поворотний процес, тобто такий, у якого ймовірність виходу з довільної області дорівнює 1?

Розглянемо наступні визначення.

Визначення 1. Стан x = 0 називається стійким з вірогідністю 1, тоді і тільки тоді, коли для будь-яких ρ > 0 і ε > 0 існує таке δ(ρ,ε) > 0, що

$$\left|x_0\right| < \delta(\rho,\varepsilon) \Rightarrow P_x\left\{\sup_{0\le t<\infty}\left|x_t\right| \ge \varepsilon\right\} \le \rho \quad , \tag{4.8}$$

Визначення 2. Система називається стійкою по відношенню до трійки (Q, P, ρ), тоді і тільки тоді, коли

$$x \in Q \Rightarrow P_x\left\{x_t \in P, \forall t < \infty\right\} \ge \rho \quad , \tag{4.9}$$

*Визначення 3***.** Стан *x = 0* у просторі станів називається асимптотично стійкий із імовірністю 1 у тім і тільки тім випадку, коли воно стійко з імовірністю 1 і, крім того, $x_t \to 0$ для всіх x_0 з деякої околиці *R* цієї крапки. Якщо ж *R* є весь простір, то стан асимптотично стійкий у великому.

*Визначення 4***.** При заданому стані *x* процес x_t називається рівномірно обмеженим величиною ε з імовірністю ρ у тому випадку, якщо

$$P_x\left\{\sup_{0\le t<\infty}\left|x_t\right| \ge \varepsilon\right\} \le 1-\rho\,, \tag{4.10}$$

Визначення 5. Стан *x = 0* в просторі станів називається експоненціально стійким з імовірністю 1 в тому і тільки тому випадку, коли воно стійко з імовірністю 1 і при всіх T < ∞

$$P_x\left\{\sup_{T\le t<\infty}\left|x_t\right| \ge \varepsilon\right\} \le Ke^{-\alpha T}\,, \tag{4.11}$$

де $K<\infty$, $\alpha>0$.

Визначення 6. Стан *x = 0* в просторі станів називається нестійким з імовірністю ρ в тому і тільки тому випадку, коли

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{x\to 0} P_x\left\{\sup_{0\le t<\infty}\left|x_t\right| \ge \varepsilon\right\} = \rho \tag{4.12}$$

Визначення 7. Процес називається фінально обмеженим з вірогідністю 1 величиною *m* в тому випадку, коли для кожного *x* з *E* існує таке кінцеве (з ймовірністю 1) випадкове час *τ(x)*, що

$$P_x\left\{\sup_{\tau(x)\le t<\infty}\left|x_t\right| \ge \varepsilon\right\} = 1 \quad , \tag{4.13}$$

або

$$\lim_{T\to\infty} P_x \left\{ \sup_{\tau(x)\le t<\infty} |x_t| \ge \varepsilon \right\} = 0, \tag{4.14}$$

*Визначення 8***.** Позначимо через x_t і x_t' процеси, які відповідають початкових умовам x_0 і x_0' . Процес називається рівно обмеженим з імовірністю 1 в тому випадку, якщо при фіксованій нормеразності $|x\text{-}x'|$

$$P_{xx'} \left\{ \sup_{0\le t<\infty} |x_t - x_t'| \ge \varepsilon \right\} \to 0, \varepsilon \to \infty, \tag{4.15}$$

рівномірно по *x, x′.*

*Визначення 9***.** Процес називається рівномірно стійким з ймовірністю 1 в тому випадку, якщо він задовольняє визначенню 8 і для будь-якого фіксованого $\varepsilon > 0.$

$$P_{xx'} \left\{ \sup_{0\le t<\infty} |x_t - x_t'| \ge \varepsilon \right\} \to 0, |x - x'| \to \infty, \tag{4.16}$$

рівномірно по *x, x′.*

Основним результатом теорії стохастической стійкості є стохастический аналог теореми Ляпунова про стійкість.

Теорема.

Припустимо, що для деякого $m > 0$ виконані умови:

1) функція $V(x)$ ненегативна й безперервна на відкритій безлічі $Qm = \{x: V(x), m\};$

2) x_t — безперервний праворуч строго марковский процес, певний принаймні до деяких $\tau' > \tau_m = inf\{t: x_t \notin Q_m\}$ з імовірністю 1;

3)нехай $\tilde{A}$ — оператор (аналог похідної), певний у такий спосіб:

$$\tilde{A}\int(x) = h(x) \Leftrightarrow \lim_{\delta\to 0} \frac{M_x\left[\int(x_\delta)\right] - \int(x)}{\delta} = h(x),$$

причому межа задовольняє умові $\lim_{\delta\to 0} M_x\left[h(x_\delta)\right] = h(x)$.Позначимо $\tilde{A}_{Qm}$ оператор процесу $x_{t\ \tau m}$;

4) функція $V(x)$ належить області визначення оператора $\tilde{A}_{Qm}$;

5) для будь-якого $\varepsilon > 0$ виконано

$$P_x\left\{\sup_{t\le s<0}\left|x_s - x\right| > \varepsilon\right\} \to 0,$$

при $t\to 0$.

Нехай також $V(0) = 0$ і $x\in Q_m$.

Тоді система стійка стосовно $(Q_r,Q_m,1\text{-}r/m)$ при будь-якому $r=V(x_0) =V(x)\le m$ у змісті визначення 2. Крім того, для майже всіх ω з $B_m = \{\omega; x_t \in Q_m, t<\infty\}$ маємо

$$V(x_{t\tau m}) \to c(\omega) \le m\,.$$

Якщо $V(x) > 0$ при $x \neq 0$, $x\in Q_m$, то початок координат простору станів системи стійко з імовірністю 1.

Дана теорема дозволяє вирішити питання, сформульовані спочатку цього підрозділу.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1) Що означає стійкість системи?
2) В чим розходження понять «рівновага», «стійкість» і «стаціонарність»?
3) Що являє собою рівноважний стан системи?
4) Які виділяються типи стійкості стану системи?
5) Що затверджує теорема Ляпунова про стійкість?
6) Як проводиться класифікація станів рівноваги для систем другого порядку?
7) Що являють собою вузол, сідло, фокус, центр?
8) В чим відмінність поняття стійкості для стохастичних систем?
9) Які випадкові процеси називаються стійкими?

Тема 4. Нестійкість і нелінійність динамічних систем

4.1. БІФУРКАЦІЇ В НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ

В рамках класичного підходу до моделювання економічних систем розглядаються лінійні системи, у яких малим сигналам на вході відповідає мала реакція на виході. Інтерес постнекласичної науки, парадигматика якої багато в чому заставляється термодинамікою нерівновагих процесів, зміщається убік нелінійних систем, більше властивій природі.

«Нелінійність» - фундаментальний концептуальний вузол нової парадигми, яку можна назвати також парадигмою нелінійності. Більше того, у науковому середовищі з'явилося вираження «нелінійне мислення».

В математичному змісті нелінійність означає певний вид рівнянь, що містять шукані величини в ступенях більше одиниці або коефіцієнти, що залежать від властивостей середовища. Нелінійні рівняння можуть мати трохи (більше одного) якісно різних рішень.

Звідси виникає фізичний зміст нелінійності: безлічі рішень нелінійного рівняння відповідає безліч шляхів еволюції системи, описуваної цими рівняннями (нелінійної системи).

Більше того, вивчаючи різні стадії розвитку процесів у відкритому нелінійному середовищі, можна чекати якісна зміна картини процесів, у тому числі переструктурування - ускладнення й деградацію - організації середовища. Причому це відбувається не при зміні параметрів середовища, а як результат саморозвитку процесів у ній.

В світоглядному плані нове осмислення нелінійності відбилося в цілому ряді наукових ідей:

- ідеї багатоваріантності, альтернативності шляхів еволюції;
- ідеї вибору з даних альтернатив;
- ідеї темпу еволюції (швидкості розвитку процесів у середовищі);
- ідеї необоротності еволюції.

Феномен нелінійності можна охарактеризувати наступними особливостями.

1.Завдяки нелінійності має силу найважливіший принцип «розростання малого», або «посилення збурювань». За певних умов нелінійність може підсилювати збурювання, тобто робити мала відмінність більшим, макроскопічним по наслідках.

2.Певні класи нелінійних систем демонструють іншу важливу властивість - граничну чутливість. Нижче порога все зменшується, забувається, не залишає ніяких слідів у природі, науці, культурі, а вище порога, навпроти, багаторазово підсилюється.

3.Нелінійність породжує якась подоба квантового ефекту - дискретність шляхів еволюції нелінійних систем (середовищ). То є, на даному нелінійному середовищі можливий аж ніяк не будь-який шлях еволюції, а лише певний спектр цих шляхів.

4.Нелінійність означає можливість несподіваних, так званих емерджентних змін напрямку плину процесів. Нелінійність процесів робить принципово ненадійними й недостатніми прогнози.

С нелінійністю, крім того, зв'язане подання про можливості на певних стадіях надшвидкого розвитку процесів. В основі механізму такого розвитку лежить нелінійний позитивний зворотний зв'язок. Негативний зворотний зв'язок дає стабілізуючий афект, змушуючи систему повернутися до стану рівноваги. Позитивний зворотний зв'язок, підсилюючи відхід системи від рівноваги, повинна приводити лише до нестійкості й, здавалося б, до руйнування системи.

Як видно із викладу, використання нелінійних моделей динаміки складних систем починалося в природничих науках (фізику, хімії, біології), але потім захопило й науки, що вивчають життєдіяльність людського суспільства. В сьогодення час спостерігається ріст інтересу економістів до нелінійних моделей, зокрема, адаптації фізичних (досить добре вивчених) моделей до економічних процесів. Свідченням цьому є виникнення такого напрямку, як еконофізика (econophysics), застосування теорії еволюції біологічних організмів до моделювання розвитку макро- і мікроекономічних об'єктів, використання теорії хаосу для керування й стабілізації економічної політики й ін. Далі ми розглянемо методи математичного моделювання, що реалізують принципи синергетики й нелінійності.

Одним з основних результатів нелінійного підходу є визнання можливості різноманітного розвитку систем, наявності біфуркації. Розглянемо кілька прикладів, що пояснюють виникнення й сутність біфуркації.

Приклад 5.1. Розглянемо наступну динамічну систему

$$x = f(x) = r + x^2$$

Випадок 1.

Якщо $r < 0$, ми маємо дві точки рівноваги:

перша точка ($-\sqrt{r}$) - стійка, тому що $f(-\sqrt{r}) = -2\sqrt{r} < 0$;

друга точка ($\sqrt{r}$) — нестійка, тому що $f(\sqrt{r}) = 2\sqrt{r} > 0$.

Це ж показує фазовий графік (рис. 5.1).

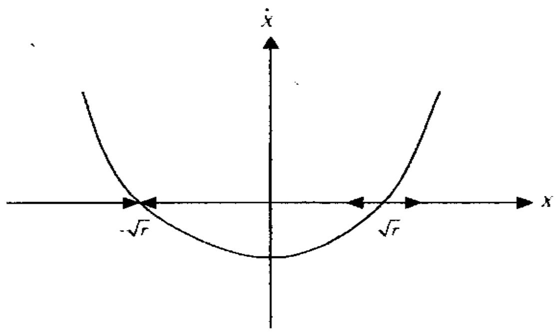


Рис. 5.1. Фазовий графік. Випадок 1.

Випадок 2.

Якщо $r = 0$, ми маємо одну точку рівноваги. В цій крапці $f(0) = 0$, і ми не можемо встановити тип стійкості, використовуючи теорему. Це можна зробити за допомогою фазового графіка. Він зображений на рис. 5.2. Графік показує, що дана крапка *напівстійка*.

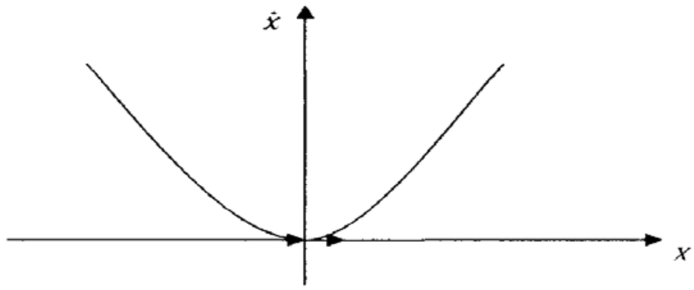


Рис. 5.1. Фазовий графік. Випадок 2**.**

Випадок 3.

Якщо $r > 0$**,** крапок рівноваги немає (рис. 5.3).

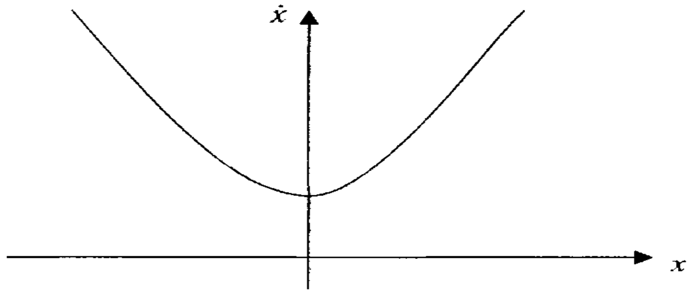


Рис. 5.3. Фазовий графік. Випадок 3.

Зазначимо, що напівстійка точка рівноваги зникає, як тільки r стає позитивним. Тому що характеристики точок рівноваги змінюються зі зміною значень r, ми говоримо, що динамічна система має ***біфуркацію.*** В цьому випадку значення r збільшуються від негативних через нуль до позитивних, і характеристики стаціонарних точок змінюються так, як намальовано вище. Біфуркація відбувається в точці $r = 0$.

Ми можемо проілюструвати біфуркацію, накресливши криву, що показує, як характер стаціонарних точок змінюється із зміною r. Стаціонарні точки визначаються з умови

$$x = 0 \Rightarrow r = -x$$

Отже, область стійкості характеризується графіком параболи $r = -x^2$ (рис.5.4).

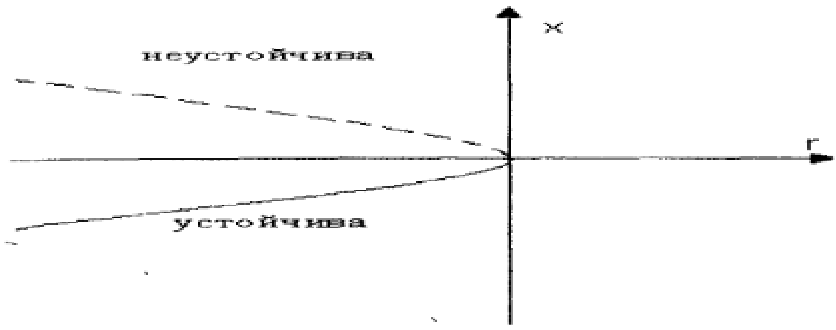


Рис. 5.4. Області стійкості і нестійкості.

Координата x точки на кривій задає положення точки рівноваги для відповідного значення r. Стійкість точки рівноваги показана пунктирною і суцільний лініями. Цей тип біфуркації відомий як біфуркація сідло-вузол. Повертаючись до попередньої теми підрозділу, можемо зазначити, що найменша зміна параметру r від нульового значення зіштовхує систему до існування двох або жодної точки рівноваги.

Приклад 5.2.

Розглянемо наступну динамічну систему

$$x = f(x) = rx + x^3$$

Знову ми маємо три випадки.

Випадок 1.

Якщо $r < 0$, то існує одна точка рівноваги з рівняння

$$f(x) = x(r - x^2) = 0$$

Це точка $x = 0$ і вона стійка, тому що $f(0) = r < 0$ (рис. 5.5).

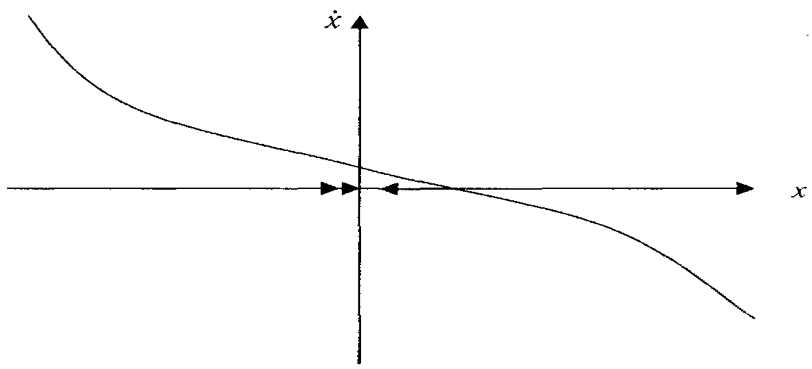


Рис. 5.5. Фазовий графік. Випадок 1.

Випадок 2.

Якщо $r = 0$, одержуємо одну точку рівноваги $x = 0$ з рівняння $f(x)=-x^3 = 0$.

Ще раз ми одержали випадок, коли неможливо встановити тип стійкості, тому що $f'(0) = 0$.

Однак це можна зробити за допомогою фазового графіка, на якому видно, що ця точка стійка (рис. 5.6).

Випадок 3.

Якщо $r > 0$, ми одержуємо три точки рівноваги з рівняння $f(x)= x(r-x^2)= 0$.

Точка $x = 0$ нестійка, тому що $f'(0) = r>0$.

Дві інші точки $x = \pm\sqrt{r}$ стійкі, оскільки $f' = (\pm\sqrt{r})<0$ (рис. 5.7).

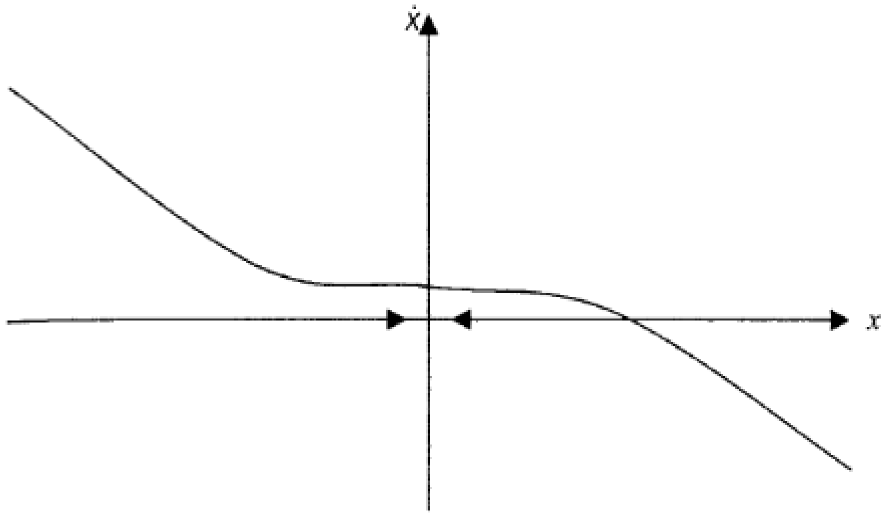


Рис. 5.6. Фазовий графік. Випадок 2.

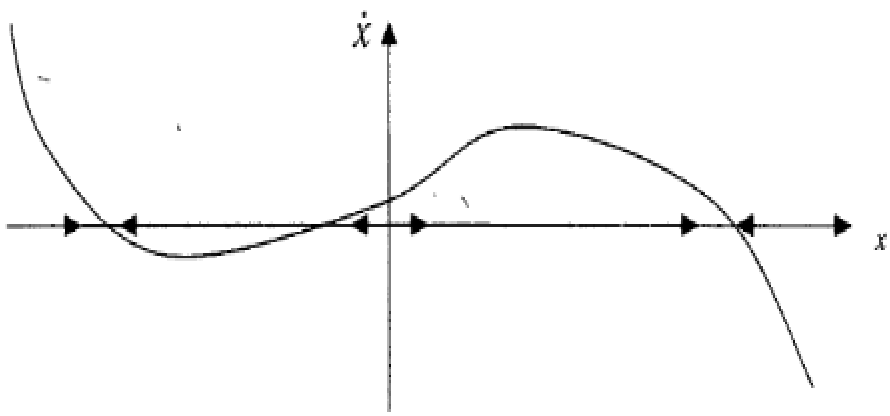


Рис. 5.7. Фазовий графік. Випадок 3.

Цей тип називається біфуркація вила.

4.2. КАТАСТРОФИ – СТРИБКОПОДІБНІ ЗМІНИ СТАНУ В ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ

Як було сказано вище, у динамічних системах можливо не тільки гладке (безперервне) і відносно передбачуване поводження, але й різкі стрибкоподібні зміни. Такими стрибкоподібними змінами у змінних станах динамічної системи займається теорія катастроф. Хоча назва припускає дослідження подій, порівнянних зі стихійними лихами, ця теорія має справу з менш ефектною поведінкою. В рамках даної теорії розглядаються питання як технічного напрямку (перекидання судів), соціологічного (раптові спалахи агресивності, бунти), так і економічного (обвал фондового ринку).

Поводження складної динамічної системи в загальному виді може бути описано сукупністю різних інтегро-диференційних рівнянь. Однак не завжди необхідно напряму визначити повна безліч рішень, а лише потім досліджувати їхньої властивості. У багатьох випадках необхідний лише обмежений обсяг інформації якісного характеру, що дозволяє зробити висновки про поводження системи. Предметом теорії катастроф є вивчення залежності якісної природи рішень від значень параметрів, що є присутнім у заданих рівняннях.

Область дії теорії катастроф обмежена припущеннями, що спрощують, щодо системи рівнянь, що описують поводження системи.

В табл. 5.1 показані послідовні спрощення системи рівнянь, у ній ψ_j — змінні стани системи, t — змінна часу, x_l — просторові координати, c_a — керуючі параметри.

Отже, предметом вивчення теорії катастроф є класифікація станів рівноваги градієнтних систем, які можуть проявлятися як раптові перегони — катастрофи — у поводженні динамічної системи.

Розглянемо прапори катастроф. О наявності катастрофи свідчать спеціальні критичні крапки сімейства потенційних функцій, який описується система або явище. Однак такі крапки часто не можуть бути розпізнані відразу. Наприклад, потенційна функція є занадто складною або точно не відома. Ще гірше, коли система не є градієнтною, і зовсім погано, коли немає навіть мрячних міркувань щодо виду рівняння, що адекватно описує систему. Проте, катастрофи часто зустрічаються в реальних ситуаціях, і, отже, важливо вміти їх вчасно розпізнати. Катастрофи мають відмітні риси - прапори, які дозволяють привернути увагу до даного процесу.

Як тільки зафіксований один із цих прапорів, тобто встановлена ознака, що свідчить про наявність у системі катастрофи, управляючі параметри системи можна змінювати так, щоб виявити й інші прапори, які при відповідних умовах повинні обов'язково виявитися. Встановлення наявності й типу катастрофи у випадку невизначеності в описі системи допомагає визначити:

- спрощену модельну потенційну функцію, що залежить тільки від істотних змінних станів і керуючих параметрів;

- структурно стійку частину потенційної функції, що може підказати, який процес в дійсності має місце;

- тип рівняння для системи й те, яким образом потенційна функція в нього входить;

- непотрібність використання рівнянь взагалі.

1) Модальність.

Система може мати два або більше різних стани в деякій області зміни керуючих параметрів. Наприклад, якщо керуючі параметри системи перебувають у заштрихованій області, то система може перебувати в трьох різних станах (наприклад, катастрофа зборки на рис.. 5.8).

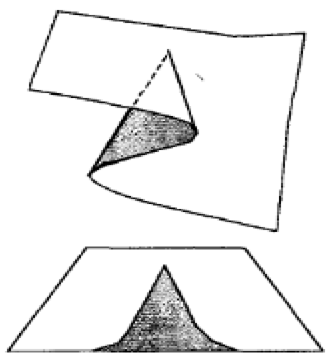


Рис. 5.8. Модальність і недосяжність у катастрофі зборки

2) Недосяжність.

Існує область недосяжних нестійких станів рівноваги, яким не можна прийти, рухаючись із яких-небудь стійких станів. На рис. 5.8 серединний шар є недосяжним.

Таблица 5.1.

Формальная классификация систем

Система	Структурный вид уравнения $F_i = 0$	Упрощающее предположение
1. Общего вида	$F_i\left(\psi_j, c_a, t, \frac{d\psi_j}{dt}, \frac{d^2\psi_j}{dt^2}, \ldots; x_l, \frac{d\psi_j}{dx_l}, \frac{d^2\psi_j}{dx_l^2}, \ldots; \int dx_l, \ldots\right)$	–
2	$F_i\left(\psi_j, c_a, t, \frac{d\psi_j}{dt}, \frac{d^2\psi_j}{dt^2}, \ldots; x_l, \frac{d\psi_j}{dx_l}, \frac{d^2\psi_j}{dx_l^2}, \ldots\right)$	Система уравнений не содержит интегралов и, следовательно, представляет собой систему дифференциальных уравнений в частных производных
3	$F_i\left(\psi_j, c_a, t, \frac{d\psi_j}{dt}, \frac{d^2\psi_j}{dt^2}, \ldots; x_l\right)$	Система уравнений не содержит пространственных производных любого порядка
4	$F_i\left(\psi_j, c_a, t, \frac{d\psi_j}{dt}, \frac{d^2\psi_j}{dt^2}, \ldots\right)$	Система уравнений полностью не зависит от пространственных переменных
5. Динамические	$F_i = \frac{d\psi_j}{dt} - f(\psi_j, c_a, t)$	Система уравнений содержит производные по времени не выше первого порядка, которые входят в функцию каноническим образом
6. Автономные динамические	$F_i = \frac{d\psi_j}{dt} - f(\psi_j, c_a)$	Функции f_i полностью не зависят от времени
7. Градиентные	$F_i = \frac{d\psi_j}{dt} + \frac{\partial V(\psi_j, c_a)}{\partial \psi_j}, \quad \frac{d\psi_j}{dt} = -\frac{\partial V(\psi_j, c_a)}{\partial \psi_j}$	Все функции f_i могут быть заданы антиградиентом некоторой потенциальной функции V
Состояния равновесия градиентной системы	$0 = 0 + \frac{\partial V(\psi_j, c_a)}{\partial \psi_j}$	$\frac{d\psi_j}{dt} = 0$

3) Катастрофічні перегони.

Малі зміни в значеннях керуючих параметрів можуть викликати більші зміни в значеннях змінні стани системи в міру того, як система перескакує з одного локального мінімуму в іншій, перехід з околиці одного локального мінімуму в іншій проявляється у великій зміні значень зміною стану, що відбувається у надшвидкій шкалі.

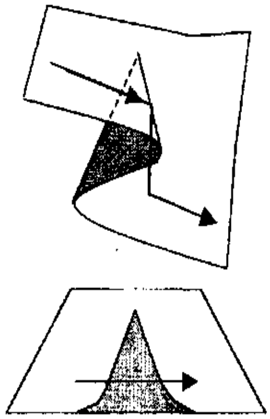


Рис. 5.9. Різкі зміни стану при гладких змінах параметрів

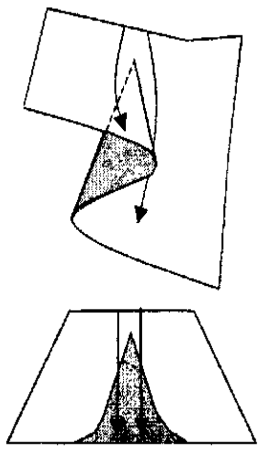


Рис. 5.10. Расходимость

На рис. 5.9 стрибок відбувається, як тільки стан системи переходить із одного шару поверхні катастрофи зборки на іншій.

На рис. 5.10 показано, що траєкторії зміни керуючих параметрів при близьких початкових станах системи приводять до істотного розходження кінцевих станів системи.

4) Розбіжність.

Кінцеві зміни в значенні керуючих параметрів приводять до кінцевих змін у значеннях змінні стани в крапці рівноваги. Звичайно малі зміни у вихідних значеннях керуючих параметрів ведуть лише до невеликої зміни початкових і кінцевих значень змінні стани. Однак при наявності катастрофи малі зміни початкових значень змінні стани можуть привести до більших змін кінцевих значень цих змінних.

5) Гістерезис і необоротність.

Гістерезис має місце, коли процес не є повністю оборотним. Стрибок з локального мінімуму 1 в локальний мінімум 2 може не відбутися при тих же значеннях керуючих змінних, хоча стрибок із крапки 2 у крапку 1 мав місце при русі у зворотну сторону.

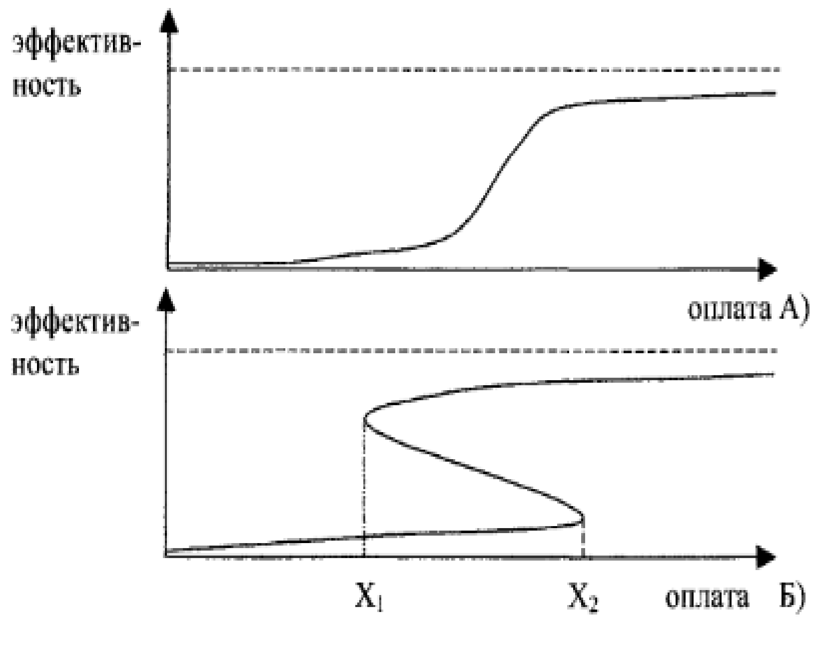


Рис. 5.11 Явище гістерезису

Якщо винагорода мала, на його думку, то працівник не буде занадто старатися. З іншої сторони, у кожного існує межа працездатності, і, як би не підвищувалася винагорода, більшого ефекту досягти не вдасться. Ця ситуація приблизно може бути описана функцією, зображеної на рис. 5.11а. Розглянемо тепер динамічний процес, у якому оплата може підвищуватися й знижуватися (рис. 5.11б). Якщо в початковий момент оплата низька, то ефективність роботи також низька. С підвищенням оплати ефективність росте, але повільно, оскільки, на думку працівника, приріст оплати недостатній для збільшення ефективності роботи. Так буде відбуватися до моменту X_2, коли подальший ріст оплати вимагає переходу на якісно новий рівень ефективності роботи. Відбувається стрибкоподібна зміна ефективності. Якщо, навпроти, у початковий момент часу оплата висока, то ефективність підтримується на високому рівні. В зменшенням оплати відбувається поступове невелике зменшення ефективності (вступає в дію деяка інерція, відповідно до якого людина продовжує працювати у звичному йому режимі). Так відбувається доти, поки оплата не досягає досить низького рівня X_l. В цей момент відбувається різке зниження ефективності, оскільки немає стимулів підтримувати її високий рівень. Фігура, зображена на рис. 5.11б, називається петлею гістерезису.

Строго говорячи, вона не є функцією, оскільки тому самому значенню X може відповідати два (або навіть три) значення Y. Наявність безлічі таких X-$|X_1; X_2|$ і приводить до можливості катастрофічних змін у стані системи. Сама безліч $[X_1;X_2]$ називається біфуркаційною безліччю, тобто таким, для значень параметрів з якого можливі кілька різних станів системи. На рис. 5.12 показане те ж явище в тривимірній системі.

Основними припущеннями теорії катастроф є:

1. Система є динамічної, тобто її стан змінюється в часі.

2. Принцип максимального зволікання: система прагне зберігати свій стан як можна довше.

3. Поточний стан системи залежить від того, яким образом система прийшла в цей стан.

4. Траєкторії системи необоротні, тобто при зміні керуючих параметрів системи в точності протилежним образом система не обов'язково прийде до початкового стану.

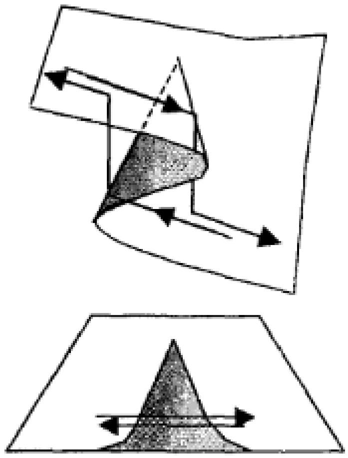


Рис. 5.12. Необоротність у трьохмірній системі

Катастрофою називається різка, стрибкоподібна зміна стану системи при повільній зміні її параметрів (або керуючих змінних).

Повертаючись приміром, можна помітити, що, якщо повернути осі й розглядати оплату як функцію ефективності, то ми маємо справу з поліномом третього ступеня (рис. 5.11а). Цей поліном не має экстремумов, а на мал. 5.11б має два экстремума. Очевидно, що кількість екстремальних крапок буде залежати від коефіцієнтів полінома, тобто параметрів системи.

Розглянемо локальний характер потенційних функцій. Властивості станів рівноваги залежать від виду й властивостей потенційної функції, який описується поводження системи. Раніше розглядалася класифікація станів рівноваги у двовимірних системах, де виявилися можливими 8 різних варіантів рівноваги. Якщо ж змінні стани системи більше, те повна класифікація станів рівноваги виявляється досить скрутною. Теорія катастроф дозволяє провести таку класифікацію для досить широкого класу нелінійних систем.

Розглянемо, які перетворення можливі для потенційних функцій в околиці стану рівноваги. Ці перетворення дозволяють спростити функцію й привести її к локально простому виду й виділити катастрофи.

Введемо поняття *канонічної форми*. Якщо в деякому стані градієнт системи відрізняється від нуля, то згідно теореми про неявну функції можливе таке перетворення координат, що потенційна функція приймає лінійний вигляд:

$$\nabla V \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = y_1(x_1,...,x_n), \\ y_2 = y_2(x_1,...,x_n), \\ ... \\ y_n = y_n(x_1,...,x_n), \end{cases} \Rightarrow V = y_1 + Const \tag{5.1}$$

Введемо поняття *морсовської форми.* Якщо розглянута система знаходиться в стані рівноваги, то градієнт функції дорівнює нулю, тому застосувати теорему про неявну функції неможливо і канонічне уявлення не має місця. Тип рівноваги виділяється власними значеннями матриці стійкості. $V_{ij} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}$ Якщо визначник V_{ij} відрізняється від нуля, то теорема Морса гарантує існування такої гладкої заміни змінних, що потенційна функція може бути представлена квадратичною формою

$$\left.\begin{aligned} &\nabla V = 0 \\ &\det\left(\frac{\partial V^2}{\partial x_i \partial x_j}\right) \neq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow V = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 = -\overline{y_1^2} - ... - \overline{y_i^2} + \overline{y_{i+1}^2} + ... + \overline{y_n^2} = M_i^n(\overline{y}) \tag{5.2}$$

де λ_i — власні числа матриці стійкості, обчисленої в точці рівноваги.

Функцію $M_i^n(y)$ називають *морсовским i-сідлом*. Стійкими є тільки 0-сідла.

*Визначення***.** Критичні точки, у яких $detV_{ij}= 0$, називаються *ізольованими, невиродженими,* або *морсовськими.*

Розглянемо поняття форми Тома.

*Визначення***.** Критичні точки, у яких $detV_{ij}\neq 0$, називаються *неізольованими, виродженими,* або *неморсовскими*. Точки *(x, c)* у просторі змінні стани й параметрів функції, для яких $detV_{ij}=0$ називається *множиною сингулярності.*

Як треба з виду розглянутих рівнянь, безліч точок рівноваги (поверхня рівноваги) задається співвідношенням

$$M = \left\{(x,a) \in R^n \otimes R^k : \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = 0\right\} \tag{5.3}$$

Проекція безлічі сингулярності на параметричний простір називається біфуркаціонною безліччю:

$$B = \left\{ a \in R^k : V_{xx} = 0 \right\} \tag{5.4}$$

Якщо потенційна функція залежить від одного або більше керуючих параметрів, то матриця стійкості V_{ij} і її власні значення також залежать від цих параметрів. В цьому випадку цілком можливо, що при деяких значеннях керуючих параметрів одне або кілька власних значень матриці стійкості можуть звернутися в нуль. Тоді й $detV_{ij}= 0$, і умови застосування леми Морсу не виконуються, отже, подання у вигляді квадратичної форми виявляється неможливо. Однак можна знайти деяке розщеплення, що дозволяє відокремити координати, що відповідають нульовим власним значенням, й інші:

$$V(x,c) = Cat(l,k) + \sum_{j=l-1}^{n} \lambda_j(c) y_j^2, \tag{5.5}$$

або, при деяких додаткових умовах,

$$V(x,c) = Cat(l,k) + \sum_{j=l+1}^{n} \lambda_j(c) y_j^2, \tag{5.6}$$

де *Cat (l,k)* – функція катастрофи.

$$Cat(l,k) = CG(1) + Pert(l,k). \tag{5.7}$$

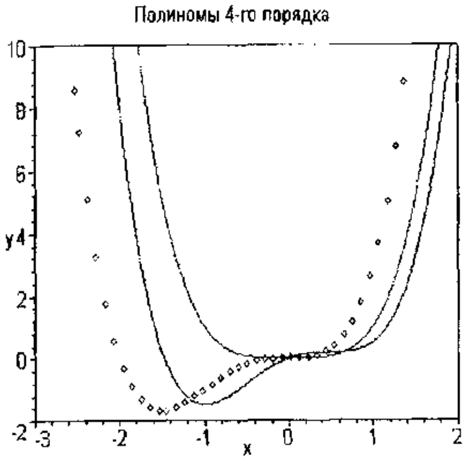
Cat (l,k) – паросток катастрофи, *Pert(l,k)* – обурення, *l* - кількість нульових власних значень матриці стійкості.

Параметри потенційної функції визначають також кількість і характер її екстремумів. Це наочно видно, якщо розглянути поліноміальні функції виду

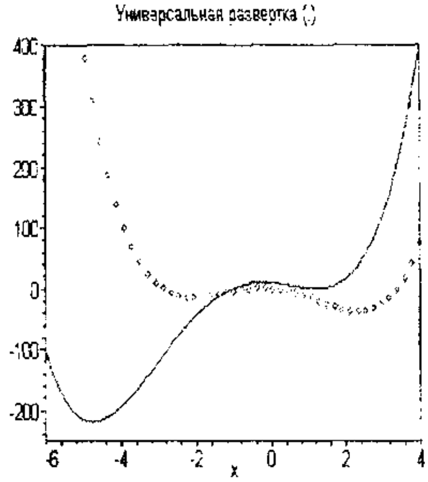
$$V(x,a) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n, \tag{5.8}$$

де деякі *a*, можливо, дорівнюють нулю.

Для заданого *n* графік многочлена має різну форму, при різних рівних нулю параметрах. На рис. 5.13 наведено графіки полінома 4-го порядку.



а)



б)

Рис. 5.13. Зміни кількості та характеру екстремумів

Визначення. Функція виду (5.8) з деякими *а*, можливо, рівними нулю називається *структурно стабільної*, якщо кількість і характер экстремумів цієї функції не міняється, коли деякі із цих a_i міняють значення. Ця структурно стабільна форма полінома для заданого ступеня *n* називається *універсальним розгорненням* для x^n. Кількість відмінних від нуля параметрів, які необхідні, щоб стабілізувати x^n, називається *домірністю розгорнення*.

Наприклад, функція $f(x)=x^4$ не є структурно стабільною, оскільки $f(x)=x_4+a_1x^3$ має додатковий экстремум. На мал. 5.13 наведений графік універсального розгорнення для x^4 і повного поліному 4-го ступеня виду (5.8). Універсальним розгорненням для x^4 є $h(x)=x^4 + a_2x^2 + a_3x$.

Універсальні розгорнення поліномів і являють собою функції катастроф у розкладанні потенційної функції рівнянь, що описують систему.

Опис і характеристика елементарних катастроф Тома при одному або двум нульовим власним значенням із числом параметрів не більше 5 даний у табл. 5.2.

Таблиця 5.2

Елементарні катастрофи

Тип катастрофи	Кількість керуючих параметрів	Паросток катастрофи	Збурювання
Складка	1	x^3	a_1x
Збірка	2	$\pm x^4$	$a_1x^2 + a_2x$
Ластівчин хвіст	3	x^5	$a_1x^3 + a_2x^2 + a^3x$
Метелик	4	$\pm x^6$	$a_1x^4 + a_2x^3+a_3x^2+a_4x$
Вігвам	5	x^7	$a_1x^5 + a_2x^4 + a_3x^3+ a_4x^2 + a_5x$
D_{-4}	3	$x^2y - y^3$	$a_1x + a_2y + a_3y^2$
D_{+4}	3	$x^2y + y^3$	$a_1x + a_2y + a_3y^2$
D_5	4	$x^2y + y^4$	$a_1y^2 + a_2x^2 + a_3y + a_4x$
D_{-6}	5	$x^2y - y^5$	$a_1y^3 + a_2y^2 + a_3x^2+ a_4y + a_5x$
D_{+6}	5	$x^2y + y^5$	$a_1y^3 + a_2y^2+ a_3x^2 + a_4y + a_5x$
$E_{\pm 6}$	5	$x^3\pm y^4$	$a_1xy^2 + a_2y^2 + a_3xy + a_4y + a_5x$

Приклад 5.3. Припустимо, що потенційна функція залежить від десяти змінних стану й трьох керуючих параметрів. Нехай крапка (x_0, c_0) - неморсовська критична крапка, у якій матриця стійкості має два нульових власних значення (дефект 2), три негативних і п'ять позитивних власних значення. Визначимо локальний характер цієї функції.

Згідно розкладенню Тома маємо:

$$V = Cat(l,k) + fM(y_3,...,y_{10}).$$

Оскільки $l=2$, $k=3$, з табл. 5.2 знаходимо, що має місце катастрофа виду $D_{\pm 4}$, тобто

$$V = (x^2 y \pm y^2) + (a_1 x + a_2 y + a_3 y^2) + \sum \lambda_i(c) y_j^2.$$

Розглянемо питання щодо геометрії складки і збірки.

Приклад 5.4. Розглянемо катастрофу складки: $V(x,a)=x^3 + ax$.

Дана функція при $a < 0$ має дві критичні крапки, при $a=0$ - одну двічі виражену критичну крапку, а при $a > 0$ не має ні однієї критичної крапки (Рис 5.14). Її поверхня рівноваги М: $3x^2+a=0$ існує лише при від'ємних значеннях параметра.

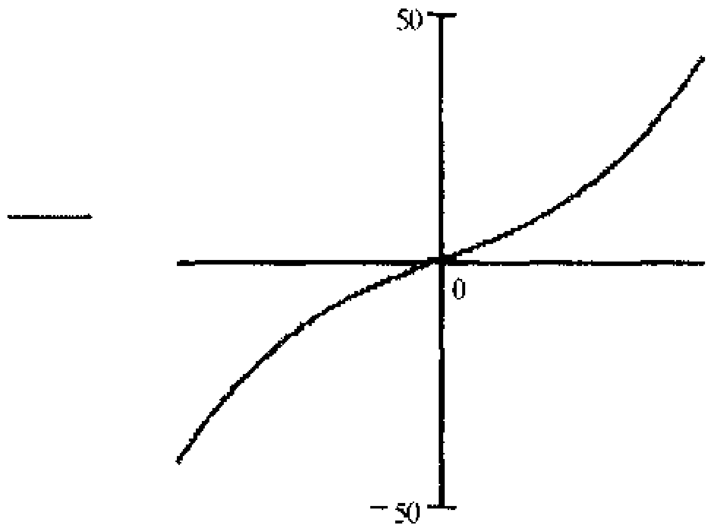


Рис. 5.14. Потенційна функція для катастрофи складки

Множина сингулярності визначається співвідношенням $6x=0$, отже, вона складається з єдиної крапки $x=0$. Біфуркація (роздвоєння) поводження відбувається при $a=0$. При негативних значеннях параметра існують галузі стійкої й хиткої рівноваги. Критичні крапки функції визначаються зі співвідношення (рис. 5.15):

$$\nabla F = x^2 + a = 0.$$

$$x = -\sqrt{-a}, \frac{d^2V}{dx^2} = -2|a|^{1/2};$$

$$x = +\sqrt{-a}, \frac{d^2V}{dx^2} = +2|a|^{1/2}.$$

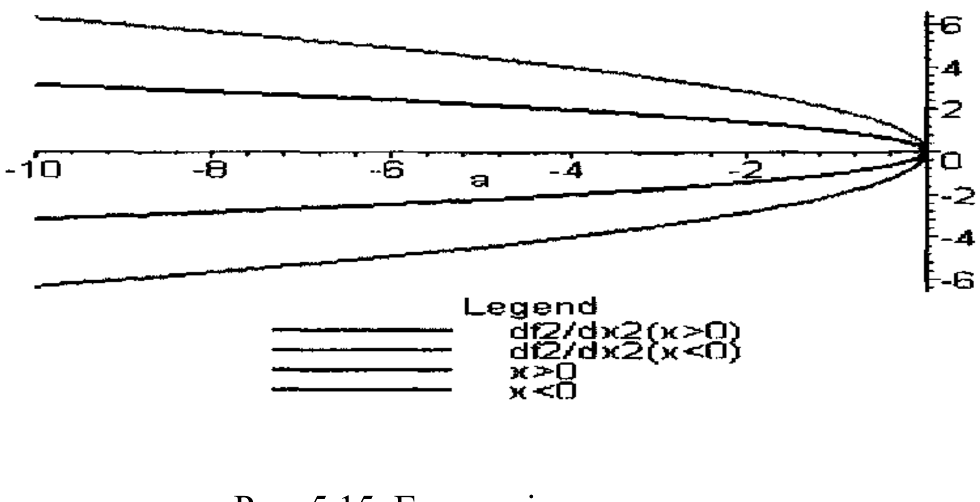


Рис. 5.15. Геометрія складки

Приклад 5.5. Розглянемо катастрофу збірки (крапка повернення). Вона задається потенційною функцією виду

$$V(x,a) = \frac{1}{4}x^4 + a_1x^2 + a_2x.$$

Будь-яка крапка простору параметрів *(a_1, a_2)* за винятком крапок сепаратриси забезпечує існування однієї або трьох ізольованих критичних крапок. На мал. 5.16 представлені графіки функції при різних сполученнях параметрів. Усередині області, що має форму збірки, $V(x, a_1, a_2)$ має три ізольовані критичні крапки, а поза цією областю — усього одну; на границі функція має одну ізольовану критичну крапку й одну двічі виражену, а на початку координат — одну тричі виражену критичну крапку.

Поверхня рівноваги визначається співвідношенням:

$$M: x^3 + 2a_1x + a_2 = 0.$$

Множина сингулярності: $S: 3x^2+2a_1=0$.

Виключивши із рівнянь для M і S змінну x, одержуємо біфуркаційну множину:

$$B: 32a_1^3 + 27a_2^2 = 0.$$

На рис. 5.17 показана поверхня рівноваги й біфуркаційна множина катастрофи збірки.

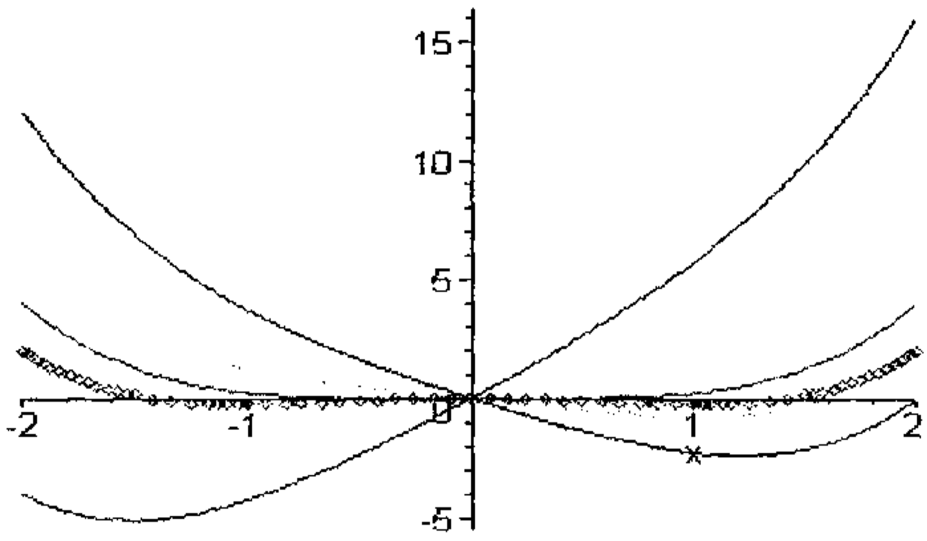


Рис. 5.16. Поведінка потенційної функції катастрофи збірки

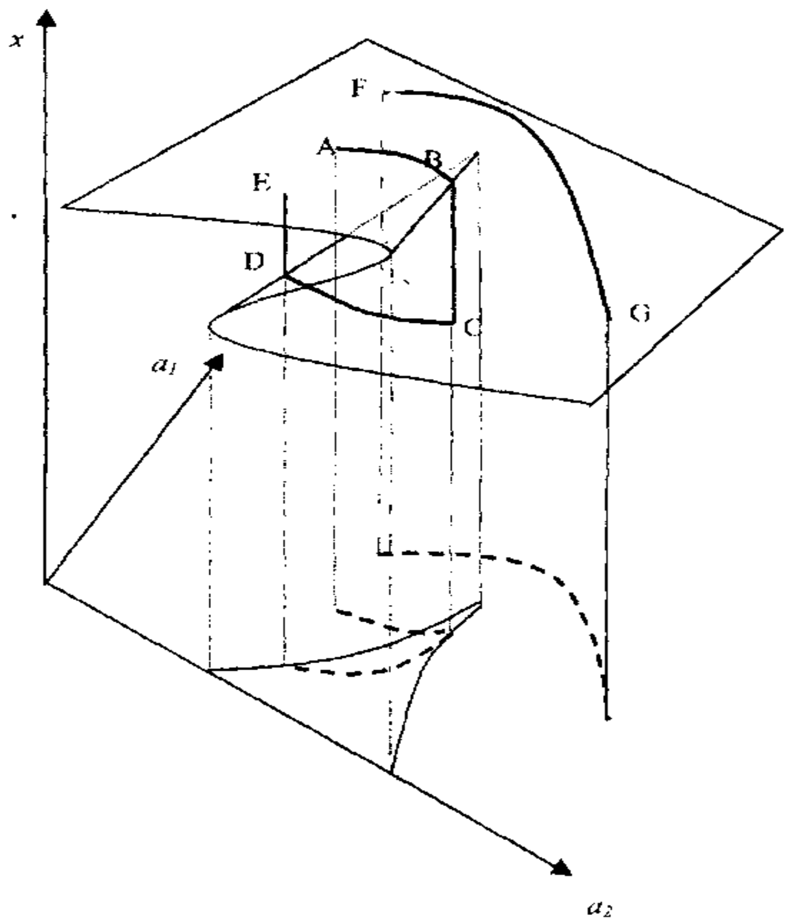


Рис. 5.17. Катастрофа збірки

Як видно з малюнка, система, що починає свій рух з точки A, буде як можна довше рухатися по верхній частині поверхні, поки не досягне множини сингулярності в крапці B. Потім система робить різкий стрибок униз у крапку C і далі буде рухатися по нижній частині поверхні. Якщо система починає свій рух на нижній частині, то вона перетне біфуркацвйну множини у крапці D і зробить різкий стрибок на верхню частину поверхні. Можливо й інше поводження системи, що не включає різких переходів. Наприклад, по траєкторії FG, якщо один з параметрів системи також може швидко змінюватися.

Економічні додатки теорії катастроф багато в чому опираються на геометричні аспекти, в основному для опису економічного поводження застосовується саме катастрофа зборки. Інші елементарні катастрофи проілюструвати складно, оскільки в них необхідне закріплення одного або декількох параметрів.

Теорія катастроф застосовується для вивчення багатьох проблем, включаючи крах фондових бірж, поводження уряду, макромоделі, структурні аспекти припущення Вальраса й ін.

4.3. ХАОС І КЕРУВАННЯ ДИНАМІЧНИМИ ЕКОНОМІЧНИМИ СИСТЕМАМИ

Протягом останніх десятиліть спостерігається підвищення інтересу до нелінійних динамічних моделей у всіх наукових областях (математика, хімія, фізика й т.д.). Відкриття того, що прості нелінійні моделі можуть демонструвати складну й хаотичну динаміку, підштовхнуло також деяких економістів до того, щоб зацікавитися цією областю. Фактично в літературі є багато прикладів нелінійних економічних моделей, які демонструють хаотичну динаміку. Однак у літературі немає стандартного визначення хаосу. Тому можна лише перелічити типові характерні риси цього явища.

Нелінійність. Якщо процес лінійний, він не може бути хаотичним.

Детермінізм. В основі явища хаосу лежать детерміновані, а не імовірнісні, правила, яким слідує кожний майбутній стан системи.

Чутливість до початкових умов. Мала зміна в початковому стані системи може привести до радикально відмінного поводження й іншого кінцевого стану. Ця властивість передбачає дві траєкторії, що починаються в двух різних, але близьких крапках, і з часом розбігаються экспоненціально. Ця критична залежність від початкових умов, і те, що експериментальні початкові умови ніколи не відомі повністю, роблять ці системи внутрішньо непередбаченими.

Стійка нерегулярність. Схований порядок, що включає велику або нескінченну кількість нестійких періодичних проявів, характеризує хаотичне явище. Цей схований порядок формує інфраструктуру системи: хаотичний (дивний) аттрактор. Динаміка в хаотичному аттракторі - ергодична. Передбачається, що протягом своєї еволюції система виявляється в невеликій околиці кожної крапки на кожній з нестійких періодичних траєкторій, що перебувають у межах хаотичного аттрактора. Довгостроковий прогноз, але не керування, неможливо через чутливість до початкових умов, які можуть бути відомі тільки з кінцевим ступенем точності.

Незважаючи на труднощі керування хаотичними системами, багато дослідників займаються пошуком методів і засобів керування ними. Керування нелінійними системами може в дійсності виявитися легше, ніж керування лінійними, оскільки можливо лише за допомогою невеликого поштовху викликати велику зміну в системі (за рахунок чутливості до початкових умов). Фактично, керовані хаотичні системи мають перевагу гнучкості: кожна з множин різних траєкторій може бути стабілізована невеликим керуванням, і можливо перемкнути систему з однієї періодичної траєкторії на іншу за допомогою дуже невеликої корекції її параметрів, без різкої зміни конфігурації системи або створення додаткових перешкод. Отже, це багатство можливого поводження (нескінченних нестійких траєкторій) у хаотичних системах може бути використане для розширення подань про динамічну систему таким чином, яка неможлива, якщо еволюція системи не є хаотичною. Це означає (якщо ми хочемо розглянути економічні додатки хаосу), що невеликі зміни в економічній політиці можуть мати більші наслідки для суспільного добробуту. Отже, і в економіці керування динамічною періодичною системою є важливим завданням завдяки природі, що змінюється в часі, економічних коефіцієнтів. В частковості, керування динамічними системами й переклад їх від хаотичного й непередбаченого до періодичного й передбачуваного поводження є інтенсивною областю дослідження протягом останніх років.

Розглянемо засоби виявлення й стабілізації нестійких періодичних траєкторій (НПТ).

Траєкторії, які граничать із нестійкою періодичною траєкторією, розходяться від неї і є нестійкими. Через нестійкість динамічної системи їх нелегко виявити. Хоча періодичні орбіти відкривають підхід до розуміння хаотичної динаміки, довелося прикласти багато зусиль, щоб розробити методи виявлення цих траєкторій, незважаючи на їхню нестабільність як у тимчасових рядах, так і в досліджуваних системах, і відрізнити їх від стохастичного поводження.

Аналіз повторень.

В економіці є численні роботи - як теоретичні, так і емпіричні - щодо виявлення складного й/або хаотичного поводження. Беручи до уваги, що стандартні методи, наприклад спектральний аналіз або функції автокореляції, не можуть розрізнити, чи був сгенерований часовий ряд детермінованим або стохастичним механізмом, цих складних засобів виявляється недостатньо, щоб забезпечувати надійні результати. Фактично, тест виміру кореляції, метричний підхід, розроблений Grassberqer і Procaccia, широко використається в природничих науках, і звичайно разом зі зв'язаними процедурами, наприклад обчисленням показника Ляпунова, але його додаток до економічних даних було проблематичним. Реалізація цих алгоритмів зв'язана зі специфічними вимогами як, наприклад, розширена множина даних, які не завжди доступні в експерименті, стаціонарність досліджуваних даних, тоді як багато тимчасових рядів нелінійні або не поводяться як гауссові.

Таким чином, додатки метричного підходу до порівняно невеликих зашумленних даних, які типові в економіці, досить сумнівні. Щоб уникнути цих труднощів метричного підходу, був розроблений новий метод для виявлення детермінованого хаосу, названого топологічним (MindUn et al., 1990, 1991;-Tuffllaroeta.).

Топологічний метод має кілька важливих переваг перед метричним методом:

1. Може застосовуватися до порівняно невеликого набору даних, які, наприклад, типові в економіці й фінансах.

2. Стійкий до шуму.

3. Так як топологічний аналіз підтримує тимчасове впорядкування даних, він здатний забезпечити додаткову інформацію про основну систему, що генерує хаотичне поводження.

4. Можлива реконструкція дивного аттрактора.

Крім того, виявлення інваріантів топологічним методом дозволяє визначати моделі, що пояснюють дані, а послідовна топологічна класифікація хаотичних множин є перспективним кроком у розробці моделей, що пророкують поводження нелінійних систем.

Аналіз повторень являє приклад топологічного методу й може представити корисну методологію виявлення нестаціонарного хаотичного поводження й біфукації в тимчасових рядах.

Спочатку цей метод використовувався для виявлення повернень (циклів) і нестаціонарності тимчасових рядів, потім аналіз повторень був застосований до дослідження хаотичних систем, оскільки повернення в поводженні - одна з найбільш важливих характеристик хаотичних систем.

За допомогою *графіка повторень* (ГП) можливо виявити кореляцію в даних, що неможливо виявити у вихідному тимчасовому ряді. Цей метод не вимагає яких-небудь припущень про стаціонарність тимчасового ряду, припущень про основні рівняння руху й розподіленого поводження. Він досить нечутливий до шуму, а графік повторень для динамічної системи зберігає інваріанти її динаміки. Він виявляється особливо корисним для випадків, у яких обмежена доступність даних і може бути порівняна за ефективністю із класичними методами аналізу хаотичних даних, особливо через свою здатність виявляти біфукацію. Аналіз повторень особливо придатний для дослідження економічних тимчасових рядів, для яких характерні шуми, недолік даних, і які представляють результати діяльності багатомірних систем.

Графік повторень — це двовимірне подання траєкторії. Він формується двовимірною $M \times M$ матрицею, де M — кількість входжень векторів $Y(i)$, отриманих при затримці вхідного сигналу. В матриці величина елемента з координатами (i,j) — це евклідова відстань між векторами $Y(i)$ і $Y(j)$. В цій матриці горизонтальна вісь представляє індекс часу $Y(i)$, а вертикальна — зрушення за часом $Y(j)$. В елементі масиву (i,j) крапка проставляється, якщо $Y(i)$ досить близько до $Y(j)$; близькість між $Y(i)$ і $Y(j)$ виражається співвідношенням

$$\|Y(i) - Y(j)\| \le d,$$

де d — задане число.

Є два типи графіків повторень: граничний (також відомий як матриця повторення) і безпороговий. Граничні графіки ГП симетричні щодо основної діагоналі. Крапки в цьому масиві розфарбовані відповідно до відстані між векторами. Звичайно темні кольори показують більші відстані, а світлі - короткі. Якщо текстура в межах такого блоку гомогенна, можна прийняти гіпотезу про стаціонарність даного сигналу протягом відповідного періоду часу; нестаціонарні системи викликають зміни в розподілі крапок повторення на графіку, які відбиваються більш світлими областями.

Аналіз повторень використовується також для виявлення нестійких періодичних траєкторій у хаотичних тимчасових рядах. Bradley і Mantilla (2001) наводять приклад додатка ГП для послідовного аналізу хаотичного тимчасового ряду. Повторювані образи формують блоки в графіку. Ці блоки відбивають інтервали часу, коли траєкторія рухається уздовж або біля відповідного НПТ.

Метод графіка повторень не придбав значної популярності, оскільки його графічний результат нелегко інтерпретувати. Zbilut J. P запропонував метод статистичної квантифікації ГП - квантфикаційний аналіз повторень (КАЛ). Він визначає міру діагональних сегментів у графіках повторення. Ці міри є показниками повторення, детермінізму, середньої довжини діагональних структур, ентропії й напрямку.

Для того щоб виявити НПТ, ми повинні створити графік повторень для траєкторії хаотичного аттрактора, проаналізувати структуру повторень, використати також квантифікацію ГП і інформацію, витягнуту з повторень, щоб індексувати траєкторію й знайти відповідні значення змінних станів.

Крім того, ГП являє собою корисний спосіб порівняння двох хаотичних систем. Наприклад, якщо ГП для двох траєкторій мають різну побудову блоків, вони не можуть відповідати одній і тій же системі, навпроти, ідентична блокова структура ГП визначає ідентичну динаміку. Аналіз повторень є корисним засобом для визначення нестійких періодичних траєкторій у хаотичних тимчасових рядах даних і біфуркаційного поводження, а також для встановлення виду динаміки системи.

Розглянемо основи теорії Флоке (Floquet).

Для виявлення нестійкого й хаотичного поводження систем, для яких відома нелінійна динамічна модель, використається теорія Флоке, що розширює теорію стійкості Ляпунова.

Керування системою, періодичною в часі, є складним завданням через мінливу в часі природу коефіцієнтів. Основна проблема полягає в тому, що власні значення, що змінюються в часі, періодичної матриці не визначають стійкість системи, і стандартні методи теорії керування не можуть застосовуватися безпосередньо.

Отже, один з можливих методів рішення таких проблем складається в створенні еквівалентних, інваріантних у часі систем, придатних для застосування стандартних методів. Система, інваріантного часу, може бути отримана при використанні перетворення Ляпунова - Флоке (L-F). Теорія Флоке відома зараз як теорія Флоке - Ляпунова, що перетворює лінійну частину періодичного квазилінійного рівняння в інваріантну в часі форму, що зберігає вихідні динамічні характеристики системи.

Стійкість системи визначається власними векторами матриці переходу, тому якщо речовинна частина всіх множників Флоке негативна, рішення стійке, тоді як позитивні показники вказують на нестабільність.

Пропоновані методи повинні забезпечити корисний інструментарій для спрощення лінійних і нелінійних періодичних систем. Так як методи аналізу й керування для змінюючихся в часі систем, розроблені досить добре, тепер стане можливим використати ці методи й для періодичних у часі систем.

Цей метод широко використається для оцінки стійкості систем малої розмірності з періодичними коефіцієнтами. Для систем, які характеризуються більшим числом ступенів волі, пропонується новий метод, що включає аналіз Флоке для оцінки домінуючих власних значень матриці переходу, використовуючи алгоритм Арнольді (Arnoldi), без явного обчислення цієї матриці. Цей метод значно більш ефективний в обчислювальному відношенні, ніж класичний і ідеально підходить для систем з більшим числом ступенів волі.

Теорія Флоке може бути використана для аналізу біфуркації поводження, що забезпечує засіб вивчення динамічних механізмів, які можуть змінити структурну стійкість системи, коли деякий параметр повільно змінюється згодом.

Розглянемо систему лінійних, однорідних диференціальних рівнянь із періодичними коефіцієнтами:

$$x = G(t)x\,,$$

де $G(t)$ — дійсна $m\times m$ матрична функція, $t \in R$;

x — вектор-стовпець розмірності m;

$G(t)$ - періодична функція з мінімальним періодом T.

Розглянемо довільну множину m рішень системи (1) лінійно незалежних для будь-якого t R:

$$x_1(t), x_2(t),..., x_m(t).$$

Матриця $X(t)$, складена зі стовпців $x_1(t),x_2(t),\ldots,x_m(t)$, називається *фундаментальною матрицею.*

Якщо $X=E$, де E — одинична mm матриця, то $X(t)$ називається *головною фундаментальною матрицею.*

Матриця

$$F = X(T) \tag{5.10}$$

називається матрицею *переходу Флоке*, або *монодромною матрицею*.

Власні значення матриці F називаються *характеристичними множниками* системи (5.9), або *мультиплікаторами системи*.

Властивості мультиплікаторів системи ґрунтуються на наступній теоремі:

Число 1 є мультиплікатором системи (5.9) у тому і тільки у тому випадку, якщо існує таке рішення x(t), не дорівнює тотожно нулю на всій дійсній осі, що

$$x(t+T) = \lambda x(t), t \in R \tag{5.11}$$

З теореми, зокрема, слідує, що

1) система (1) має періодичне рішення в тому і тільки в тому випадку, якщо 1 є її мультиплікатором;

2) всі рішення системи є періодичними, якщо матриця переходу Флоке дорівнює одиничній: $\Phi(T) = E$.

Типи біфуркації визначені залежно від способу, яким мультиплікатори Флоке залишають одиничне коло. Принципово різними є три випадки:

а) якщо мультиплікатор Флоке залишає одиничне коло через +1, ми одержуємо транскритичну, симетрично розривну біфуркацію або циклічну складку;

б) якщо мультиплікатор Флоке проходить через -1, відбувається подвоєння періоду біфуркації (перекинена біфуркація);

в) якщо комплексно сполучені мультиплікатори Флоке залишають одиничне коло уздовж уявної осі, то має місце вторинна біфуркація Хопфа (Hopf).

Обчислення матриці переходу Флоке зіставляє всі стани системи в цей момент із тими ж станами на один період пізніше. Розмір цієї матриці переходу дорівнює загальному числу станів системи.

Аналіз характеристичних множників дозволяє визначити стійкість рішень системи (5.9). Найближчі до уявної осі з будь-якої сторони власні значення відіграють важливу роль і називаються провідними власними значеннями. Фактично, якщо всі характеристичні множники розташовані в одиничному колі на комплексній площині, то всі рішення прагнуть до нуля. Якщо який-небудь із характеристичних множників перебуває за межами одиничного кола, то існує необмежене рішення. Якщо всі множники перебувають усередині або на одиничному колі, то умови стійкості визначаються розходженням між алгебраїчною й геометричною кратністю множників, розташованих на одиничному колі. Алгебраїчна кратність власного значення - це його кратність як рішення характеристичного рівняння, а геометрична кратність - це розмірність підпростору, обумовленого лінійно незалежними власними векторами, що відповідають даному власному значенню. Геометрична кратність власного значення завжди не більше його алгебраїчної кратності.

Теорія Флоке активно використається для дослідження моделей економічної динаміки, зокрема, моделі Хикса й ін.

Розглянемо тепер *можливості об'єднання* описаних вище двох інструментів в області аналізу тимчасових рядів.

Основна ідея такого об'єднання була висловлена Auerbach et al. Ціль полягала в тому, щоб:

а) витягати всі періодичні траєкторії в експериментальному хаотичному тимчасовому ряді й обчислити їхню стійкість за допомогою показника Ляпунова;

б) ця інформація може бути використана для того, щоб описати важливі властивості загальних хаотичних множин. Передбачалося, що тимчасові ряди досить великі, щоб можна було виділити нестійкі періодичні орбіти з множини хаотичних спостережень порядку *n*, залежно від обсягу доступних даних. Після локалізації періодичних орбіт методами, схожими на графік повторень, для обчислення власних значень і власних векторів для кожної крапки періодичного циклу використовувалася матриця Якобі.

Об’єднання аналізу повторень і теорії Флоке дозволяє перебороти деякий недолік цього методу.

Фактично, для даного тимчасового ряду ми могли б використати аналіз повторень, щоб виявити хаотичне поводження, зокрема, локалізувати нестійкі орбіти й біфуркацію. Як сказано вище, виявлення періодичних орбіт в експериментальних даних - центральний момент в області керування хаосом. Крім того, нестійкі періодичні орбіти, що входять до складу хаотичного аттрактора, є основними для розуміння хаотичної динаміки. Нестійкість, характерна для цих траєкторій, ускладнює їхнє виявлення. Інструментальні засоби розпізнавання НПТ у тимчасових рядах до тепер не розроблені.

Використовуючи графік повторень, ми можемо виділити періодичні траєкторії з даного тимчасового ряду, і тепер необхідно обчислити їхню стійкість. Це важливий момент, оскільки властивості стійкості НПТ визначають, яким чином траєкторії переміщаються уздовж і біля аттрактора. Питання стійкості може бути вирішений з використанням теорії Флоке. Обчислюючи власні значення й власні вектори матриці, ми можемо визначити стійкість періодичної орбіти.

Однією із цікавих проблем є *керування хаосом*.

Термін «керування хаосом» був уведений E. Ott, C. Grebogi і J. Yorke в опублікованій ними в журналі Physical Review Letters (1990 р.) статті «Керування хаосом». Ключовим елементом цієї статті була демонстрація того, що значимої зміни в поводженні хаотичної системи можна досягти за допомогою невеликої, дрібної корекції параметрів системи й, зокрема, ця корекція може бути зроблена без впливу на властивості системи. Після виходу цієї статті керування хаотичними системами привернуло підвищену увагу дослідників з інших областей.

В цілому методи керування хаосом можуть бути розділені на два основних класи:

1) замкнутий цикл, або методи зворотного зв'язку;

2) відкритий цикл, або методи без зворотного зв'язку, де дія залежать від інформації про стан. Ідея цього методу в тому, щоб змінювати поводження нелінійних систем, додаючи правильно обрану вхідну функцію.

Далі можна розділити методи на дискретні й безперервні в часі, а також методи, у яких впливи додаються до параметрів і до динамічних змінних відповідно.

Розглянемо *методи замкнутого циклу* (зі зворотним зв'язком).

Цей клас включає ті методи, які вибирають вплив, заснований на знанні про стан системи, і орієнтовані на керування заданою динамікою. Серед них ми можемо розглянути так названий випадково пропорційний зворотний зв'язок (OGY) і метод, запропонований Pyragas, у якому застосовується затриманий зворотний зв'язок з однієї зі змінні системи. Всі ці методи є модельно незалежними в тому розумінні, що знання про систему, необхідне для вибору впливу, може бути отримане за допомогою простого спостереження за системою протягом деякого прийнятного часу навчання.

Метод OGY ґрунтується на визначенні періодичної траєкторії й застосуванні невеликих впливів до параметрів системи, щоб стабілізувати нестійкі стани або нестійкі періодичні траєкторії. Хоча ці впливи додаються тільки тоді, коли система близька до бажаної періодичної траєкторії й доступний єдиний часовий ряд, використання його для стабілізації загальної стійкої періодичної траєкторії (НПТ) вимагає наявності точної інформації про цільову траєкторію. Отже, цей метод неадекватний для нестаціонарних систем або завдань вибору мети. Цей метод вимагає, крім того, спочатку більших змін параметрів і обмежений при стабілізації нестійких періодичних фіксованих крапок сідла. Хоча метод OGY добре зрозумілий з теоретичної точки зору, експериментальна реалізація його серйозно обмежується тим, що всі величини, необхідні для обчислення значень параметрів керування системою, безпосередньо не задаються в експериментальній послідовності даних, і щоб виконувати керування, необхідно застосувати складний аналіз даних.

В протилежність методу OGY метод керування хаосом, запропонований Pyragas, може легко бути застосований до експериментальних систем, де рівняння руху невідомі. Основна ідея методу Pyragas складається в простому використанні затриманого стану як елемента зворотного зв'язку. Перевага цього методу в тому, що він не вимагає повної інформації про цільовий НПТ; але в ньому використовується постійна затримка часу в блоці зворотного зв'язку.

Розглянемо *методи відкритого циклу* (без зворотного зв'язку).

Цей клас включає ті стратегії, у яких розглядаються ефекти зовнішніх впливів (незалежно від знань про фактичний динамічний стан) на еволюцію системи. Періодичні або стохастичні впливи розглядаються як причина корінних змін у динаміці хаотичної системи, що призводять, в остаточному підсумку, до стабілізації деякого періодичного поводження. Ці підходи, проте, у загальному випадку обмежені тим, що їхня дія не є цілеспрямованою, тобто кінцевий періодичний стан не може бути визначений керуючою системою. Критичні моменти для всіх таких методів керування хаосом наступні:

а) припущення про те, що хаос істотно залежний від малих змін у поточному стані й, отже, стан системи непередбачений в довгому періоді, також передбачає, що поводження системи може бути змінено використанням невеликих збурювань;

б) хаотична множина, у якій перебуває траєкторія хаотичного процесу, може містити в собі багато нестійких періодичних траєкторій, так що, на відміну від лінійної системи, у якій заданий параметр припускає тільки один тип руху у нелінійній системі одночасно можливо багато різних напрямків еволюції;

в) через ергодичність траєкторія відвідує околицю кожної з періодичних траєкторій (орбіт), що формують аттрактор.

Керування хаотичними системами має на увазі стабілізацію нестійких періодичних траєкторій. Основна ідея складається чекаючи природного підходу хаотичної траєкторії до бажаного періодичного поводження, і коли траєкторія наближається до цієї бажаної періодичної траєкторії, вставленої в аттрактор, необхідно зробити невеликі впливи для стабілізації такої орбіти. Цей підхід використає ідею про те, що критична чутливість хаотичної системи до зміни у своїх початкових умовах може бути, фактично, дуже бажаною в практичних експериментальних ситуаціях.

Представимо *різні економічні додатки теорії хаосу*.

Історично економісти використовували лінійні рівняння, щоб моделювати економічні явища, оскільки з ними досить легко працювати й вони звичайно дають єдине рішення. У міру того, як математичні й статистичні інструментальні засоби, використовувані економістами, ставали більш складними, стало неможливо ігнорувати той факт, що багато важливих і цікавих явищ не піддаються такій лінійній обробці. Отже, керування, принаймні, деякими економічними процесами стає однієї з найбільш важливих і значних завдань, що зустрічаються економістам. Важливі явища, для яких лінійні моделі не підходять, включають депресії й періоди підйому, спалаху цін на фондовій біржі й відповідні крахи, стійкі зсуви валютного курсу, регулярні й нерегулярні ділові цикли. Отже, фахівці в економічній теорії звертаються до дослідження нелінійної динаміки й, по можливості, інструментів теорії хаосу, щоб моделювати ці й інші явища.

Фактично недавно з'явилися деякі додатки хаосу в методах керування економічними системами, що розглядають розпізнавання й керування циклічними явищами й оцінку складної динаміки як засобу, наприклад, виявлення ділового циклу, сезонних змін у метеорології й варіації популяцій в екології. Приклади додатків: Holyst et al. розробили прикладний метод Ott Greboqi-Yorke для моделювання поводження двох конкуруючих фірм; Kopel показав, використовуючи просту модель ринкової динаміки, що розвивається, як хаотичне поводження може управлятися невеликою зміною параметра, що доступний ЛПР, і як фірми можуть поліпшити своє функціонування, використовуючи метод цільового керування. Xu et al. розробив метод виявлення траєкторій типу НПТ у хаотичному тимчасовому ряді моделі ділового циклу Kaldor. Kaas довів, що в межах макроекономічної нерівновагої моделі, стійкі й прості адаптивні політики не здатні стабілізувати ефективні стійкі стани й приводять до періодичних або нерегулярних коливань для більших множин параметрів керування. Додаток методів керування до хаотичних динамічних систем показує, що уряд може, у принципі, стабілізувати хитку рівновагу Вальраса протягом короткого часу, змінюючи податкові показники або державні витрати.

Лінійні моделі виявляються в корені невірними, вводячи в оману, перекошуючи розуміння економіки, а іноді спотворюючи наступні ради політекономістів. В цьому контексті хаос являє собою радикальну зміну перспективи розвитку економічної науки, оскільки не тільки здатний пояснювати нерегулярне динамічне поводження, що характеризує економічні явища, але також забезпечує корисний засіб для стабілізації нелінійних динамічних систем. Дійсно, багато нелінійних динамічних систем, навіть якщо вони показують дуже нерегулярне поводження, фактично піддаються стабілізації, чим істотно відрізняються від системи з нерегулярністю, що залежить винятково від стохастичних збурювань. Хаотичні системи показують безперервну залежність від параметрів, а керування ними полягає в невеликих змінах у цих параметрах, які ведуть до змін у динамічних властивостях моделі. Деякі із цих параметрів представляють правила економічної теорії, як, наприклад, ставка оподатковування, темп фінансового росту (приріст) або державні витрати, і встановлюються фахівцями в цій області. Отже, уряд має значний вплив на динамічні результати.

Використовуючи такі фундаментальні характеристики хаотичних систем, як чутливість до початкових умов і наявність нестійких траєкторій, уряд може домогтися результатів лише невеликим втручанням. Отже, фахівці в політиці, які хочуть домогтися найкращого результату в рості зайнятості, рості добробуту, не можуть використати економічні моделі, засновані на лінійності й припущенні простоти традиційних економічних моделей. Втручання політики, навпроти, повинне бути засноване на міркуваннях про те, що економіка є складною системою. Звичайно, це передбачає використання типових інструментальних засобів дослідження складних систем.

З цієї точки зору аналіз повторень і теорія Флоке являють собою корисні інструменти аналізу й керування складною системою. Крім того, в аналізі тимчасових рядів запропонована методологія, комбіноване використання цих інструментальних засобів дозволяє переборювати труднощі прикладного використання традиційних інструментів, а також деяких більш відомих складних способів, як, наприклад, показник Ляпунова. Фактично, наприклад, аналіз повторень виявляється особливо корисним для випадків, у яких обмежений доступ до даних, для виявлення нестійких періодичних траєкторій, оскільки він зберігає незмінність динаміки. Теорія Флоке забезпечує засіб вивчення динамічних механізмів, які можуть змінити структурну стійкість системи, коли деякий параметр повільно змінюється згодом. Тоді як інші методи можуть бути використані для тих систем, де періодичні коефіцієнти можуть бути виражені залежно від невеликого параметра, техніка перетворення Ляпунова - Флоке не має такого обмеження, і, отже, вона може бути застосована й до загальної періодичної системи.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1) Що мається на увазі під біфуркацією?
2) Чим пояснюється наявність біфуркації в поводженні системи?
3) Які системи вивчаються в теорії катастроф?
4) Які явища в поводженні системи можуть вказувати на наявність катастрофи?

5) Яким чином може бути представлена потенційна функція системи при наявності катастрофи?

6) Що являє собою функція катастрофи?

7) Які типи катастроф існують у двовимірному випадку?

8) В чому проявляється катастрофа типу складка? збірка?

9) В чому відмінність хаотичного поводження від випадкового?

10) Що є джерелом хаотичного поводження системи?

11) Які методи застосовуються для виявлення хаотичного поводження?

12) Які методи можна застосовувати для управління хаотичними системами? В чому їхні переваги й недоліки?

Змістовний модуль 2. Приклади динамічних моделей в економіці й соціальному розвитку

Тема 5. Лінійні динамічні моделі

5.1. МОДЕЛЬ ХАРРОДА - ДОМАРА

В якості приклада моделі з безперервним часом, представленої лінійним диференціальним рівнянням, розглянемо модель макроекономічної динаміки, запропонованої Харродом і Домаром. Модель описує динаміку доходу $Y(t)$, що розглядається як сума споживання $C(t)$ і інвестицій $I(t)$. Економіка вважається закритою, тому чистий експорт дорівнює нулю, а державні витрати в моделі не виділяються. Основна передумова моделі росту - формула взаємозв'язку між інвестиціями й швидкістю росту доходу. Передбачається, що швидкість росту доходу пропорційна інвестиціям:

$$I(t) = B \cdot \frac{dY}{Dt},$$

де B — *коефіцієнт капіталоємності приросту доходу,* або коефіцієнт приросту; капіталоємності (відповідно, зворотна йому величина $1/B$ називається *приросною капіталовіддачею).* Тим самим у модель фактично включаються наступні передумови:

■ інвестиційний лаг дорівнює нулю: інвестиції миттєво переходять у приріст капіталу. Формально це означає, що $\Delta K(t) = I(t)$, де $\Delta K(t)$ — безперервна функція приросту капіталу в часі;

■ вибуття капіталу відсутній;

виробнича функція в моделі лінійна; це слідує із пропорційності приросту доходу приросту капіталу:

Лінійна виробнича функція

$$Y(t) = a \cdot L(t) + b \cdot K(t) + c,$$

де $b = 1/B$, має цю властивість у тому випадку, якщо або $a = 0$, або 1(г) = const;

■ витрати праці постійні в часі або випуск не залежить від витрат праці, оскільки праця не є дефіцитним ресурсом;

■ модель не враховує технічного прогресу.

Перераховані передумови, звичайно, істотно огрубляють опис динаміки реальних макроекономічних процесів, роблять скрутним застосування даної моделі, наприклад для безпосереднього розрахунку або прогнозу величини сукупного випуску або доходу. Однак дана модель і не призначена для цього. В той же час її відносна простота дозволяє більш глибоко вивчити взаємозв'язок динаміки інвестицій і росту випуску, одержати точні формули траєкторій розглянутих параметрів при зроблених передумовах.

В розглянутої моделі передбачається, що динаміка обсягу споживання $C(t)$ задається екзогенно. Цей показник може вважатися постійним у часі, рости із заданим постійним темпом або мати яку-небудь іншу динаміку (у перших двох випадках більш просто одержати рішення моделі).

Найпростіший варіант моделі виходить, якщо вважати $C(t) = 0$. Цей випадок зовсім нереалістичний із практичної точки зору, однак у ньому всі ресурси направляються на інвестиції, у результаті чого можуть бути визначені максимальні технічно можливі темпи росту. В цьому випадку одержуємо:

$$Y(t)=C(t)+I(t)=0+B\frac{dY(t)}{dt}=BY(t).$$

Це - лінійне однорідне диференціальне рівняння, і його рішення має вигляд

$$Y(t)=Y(0)\cdot e^{(1/B)t}$$

(що легко перевірити диференціюванням).

Безперервний темп приросту в цьому випадку дорівнює $1/B$. Це максимально можливий технологічний темп приросту.

Нехай тепер $C(t) = C$ постійно в часі. Одержуємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння $Y(t) = BY(t) + C$, приватним рішенням якого є $Y(t) = C$. Складаючи його із загальним рішенням однорідного рівняння $Y(t) = A*e^{(1/B)t}$, одержуємо його загальне рішення $Y(t) = A*e^{(1/B)t}$, звідки, підставивши $t = 0$, маємо

$$A=Y(0)-C=I(0) \text{ и } Y(t)=(Y(0)-C)e^{(1/B)t}+C.$$

Неперевивний темп приросту доходу $g(t)=\frac{Y'(t)}{Y(t)}$ в цьому рішенні дорівнює $g(t)=\frac{1}{B}\cdot\left[1-\frac{C}{Y(t)}\right].$

Він складає $\frac{1}{B}\cdot\left[1-\frac{C(0)}{Y(0)}\right]$ у початковий момент часу (при $t = 0$) і, зростаючи, прагне до $\frac{1}{\text{B}}$ при $t \to \infty$, що зрозуміло, оскільки доход росте, а постійний обсяг споживання становить всі меншу його частку.

Величина $\alpha(t)=\left[1-\frac{C}{Y(t)}\right]$ - норма нагромадження в момент часу t, і темп приросту доходу виявляється пропорційним цією величині, як і показнику природної капіталовіддачі $\frac{1}{\text{B}}$.

Отже, за інших рівних умов ріст норми нагромадження пропорційно збільшує темпи приросту доходу. В той же час це знижує рівень поточного споживання, і для дозволу проблеми узгодження конкурентних цілей збільшення темпів росту й рівня поточного добробуту в модель звичайно включають елементи оптимізації. В цьому випадку вирішується оптимізаційне завдання на максимум загального обсягу споживання за кінцевий або нескінченний період часу. Для відбиття переваги більше раннього одержання результату в модель включається тимчасове дисконтування, при якому більше ранній результат ураховується в критерії з більшим «вагою».

Нарешті, розглянемо варіант моделі з показником споживання *C(t)*, зростаючим з постійним темпом: $C(t) = C(0)\, e^{rt}$. Диференціальне рівняння цієї моделі має вигляд: $Y(t) = BY'(t) + C(0) \cdot e^{rt}$.

Рішення цього рівняння таке:

$$Y(t) = \left[Y(0) - \frac{C(0)}{1 - Br}\right] \cdot e^{(1/B)t} + \left[\frac{C(0)}{1 - Br}\right] \cdot e^{rt}.$$

З аналізу формули ясно, що темп приросту споживання $\boldsymbol{r}$ не повинен бути більше максимально можливого загального темпу приросту $\frac{1}{\text{B}}$, тому що інакше споживання буде займати все більшу й вкінці кінців - гнітючу частину доходу, що зведе до нуля спочатку інвестиції, а потім і дохід. Ясно це з формули рішення моделі, оскільки у випадку $r > \frac{1}{\text{B}}$. коефіцієнт $\frac{1}{1-\text{B}}$ негативний, а e^{rt} росте швидше, ніж $e^{(1/B)t}$, отже, другий доданок при цих умовах негативно й через якийсь час «переважить» перше.

В рішенні розглянутої моделі росту при $r < \frac{1}{\text{B}}$ — багато залежить від співвідношення між r і $p_0 = \frac{\alpha}{\text{B}}$ (у чисельнику $\alpha_0 = 1 - \frac{C(0)}{Y(0)}$ – норма нагромадження в початковий момент часу $t = 0$).

Якщо $\boldsymbol{r} = p_0$, то темп приросту доходу дорівнює темпу приросту споживання, і рішенням є

$$Y(t) = Y(0) \cdot e^{(\alpha_0/B)t}.$$

Норма нагромадження $\alpha(t)$ у цьому випадку постійна в часі й дорівнює α_0, а темп приросту доходу пропорційний нормі нагромадження й обернено пропорційний приросній капіталоємності. Саме ця модифікація моделі економічного росту, у якій норма нагромадження постійна, *називається моделлю Харрода — Домара.*

Якщо в розглянутій моделі росту $\frac{1}{\text{B}} > r > p_0$ то необхідний темп приросту споживання виявляється занадто високим для економіки. В цьому випадку коефіцієнт негативний, і оскільки $\frac{1}{\text{B}} > \boldsymbol{r}$, перший негативний доданок у рішенні «перевищує» в остаточному підсумку друге. Тому темп приросту доходу падає й стає з деякого моменту негативним. Через якийсь час сам доход стає рівним нулю, після чого модель губить економічний зміст. Це аналогічно случаю $r \geq \frac{1}{\text{B}}$, хоча в цьому випадку вже справа не в тім, що потрібний темп приросту споживання в принципі недосяжний за тривалий період. В цієї ситуації занадто низкою виявляється початкова норма нагромадження α_0.

Якщо r < p_0, то норма нагромадження, а разом з нею й темп приросту доходу ростуть, причому останній у межі наближається до $\frac{1}{B}$.

Однак у цьому випадку відбувається нагромадження заради нагромадження, тому що споживання росте заданим темпом *r,* а темп приросту доходу вдається збільшити за рахунок більше швидкого росту інвестицій. Норма нагромадження α_0 перевищує *Br,* і якщо виходити із завдання максимізації обсягу споживання, те ця норма занадто висока. Більше високий її рівень вимагає збільшення інвестицій *I*(0) за рахунок скорочення споживання *C(0)* у початковий момент, що при фіксованому темпі приросту споживання *r* обумовлює більше низький його рівень на всій траєкторії. В той же час потрібний темп приросту споживання $r < \frac{1}{B}$ — можна підтримувати, як показано вище, $\alpha_0 = Br$.

Таким чином, якщо потрібно підтримувати постійний темп приросту споживання *r,* не перевищуючого технологічного темпу, то для максимізації обсягу споживання за будь-який період потрібно встановити початкову норму нагромадження $\alpha_0 = Br$.

Більше складним є питання про те, який рівень темпу *r* більше кращий. Більша його величина дозволяє забезпечити великий обсяг споживання за тривалий період, але це відбувається за рахунок скорочення споживання на початковому етапі. Таким чином, для вибору значення r, якщо воно передбачається постійним, потрібна інформація про міжчасові переваги особи, що приймає рішення.

Приклад. Розглянемо варіанти траєкторій основних макроекономічних показників у моделі Харрода - Домара при різних умовах темпу споживання.

Нехай динаміка споживання $C(t) = C(0) \cdot e^{rt}$, а динаміка ВВП:

Початкові умови *Y(0) = 1000* і *C(0)* = 200. Тоді

$$Y(t) = [Y(0) - \frac{C(0)}{1-Br}] \cdot e^{\frac{1}{B}t} + [\frac{C(0)}{1-Br}] \cdot e^{rt}$$

Норма споживання

$$\alpha_0 = 1 - \frac{C(0)}{Y(0)} = 1 - \frac{200}{1000} = 1 - 0{,}2 = 0{,}8 .$$

Коефіцієнт приросної капіталоємності *B*=2.

Варіант а) — темп приросту споживання *r* = 0,75.

Траєкторія ВВП при заданих умовах

$$Y(t)=[1000-\frac{200}{1-\frac{3}{2}}]\cdot e^{\frac{1}{2}t}+\frac{200}{1-\frac{3}{2}}\cdot e^{\frac{3}{4}t}.$$

Знайдемо момент часу, коли $Y(t)$ = 0. Вирішуючи дане рівняння, одержимо $1400e^{1/2t}$ =$400e^{3/4t}$ або $e^{1/4t}$ =3,5, де t =5,01105. Знайдемо момент часу, коли випуск продукції буде максимальним, тобто $Y(t)$ = 0. Вирішуючи дане рівняння одержимо,

Y'(t) = $1400*1/2*e^{1/2t} – 400*3/4*e^{3/4t}$ = 0,або $700e^{1/2t}$ = $300e^{3/4t}$. Таким чином, можна визначити момент часу, при якому рівень ВВП буде максимальним, $e^{1/4t}$ = 2,333, або t = 3,389.Рівняння, відображаючи динаміку інвестицій *I(t) = B Y'(t)* = $2(700e^{1/2t} – 300e^{3/4t})$.

Момент часу, при якому інвестиції будуть рівні 0, тобто $I(t)$ = 0, дорівнює t = 3,389. Траєкторії основних показників наведені на *мал. 6.1.*

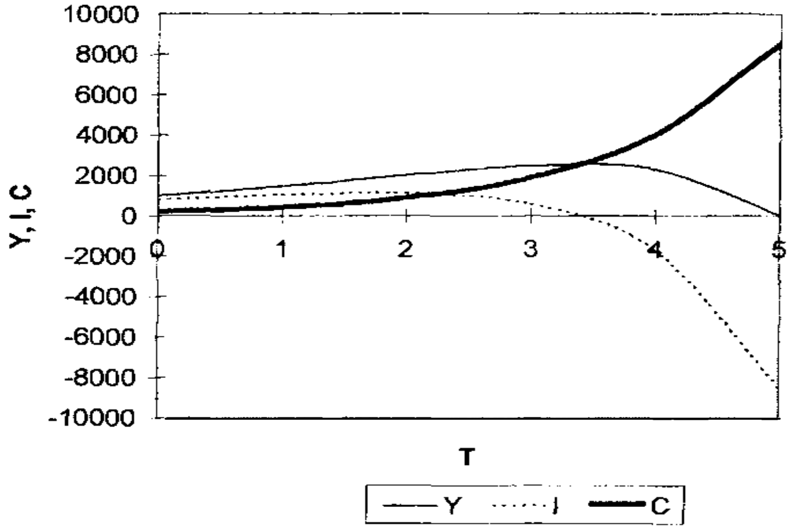


***Рис. 6.1. Траектории функций выпуска продукции, инвестиций и потребления при значении темпа прироста потребления r = 0,**75*

***Варіант б)* —** темп приросту споживання r = 0,45.

Таким чином, виконується умова $\frac{\alpha}{B} < r < \frac{1}{B}$. Траєкторія ВВП при заданих умовах $Y(t) = [1000 - \frac{200}{1-2\cdot 0.45}] \cdot e^{0.5t} + \frac{200}{1-2\cdot 0.45} \cdot e^{0.45t}$.

Знайдемо момент часу, коли $Y(t)$ = 0, тобто

$[1000 - \frac{200}{0,1}] \cdot e^{0.5t} + \frac{200}{0,1} \cdot e^{0.45t} = 0$, або $1000 \cdot 0,5e^{0,5t} + 2000e^{0.45t} = 0$. Тоді $e^{0,05t}$ = 2 і t = 13,86 ≈ 14. Знайдемо момент часу, коли випуск продукції буде максимальним, тобто $Y'(t)$ = 0.

Тоді $Y'(t)$ =$-1000\cdot 0,5e^{0,5t} + 2000\cdot 0,45e^{0.45t} = 0$, або $-500\cdot e^{0,5t} + 900\cdot e^{0.45t}$ = 0. В цьому випадку $e^{0,05t}$ = 1,8 або t = 11,75 ≈ 12.

Траєкторії основних показників наведені *на мал. 6.2.* Як видно з малюнка й результатів розрахунку, період «існування» даної економічної системи при нових умовах збільшився, однак темп приросту споживання усе ще високий у порівнянні з оптимальним.

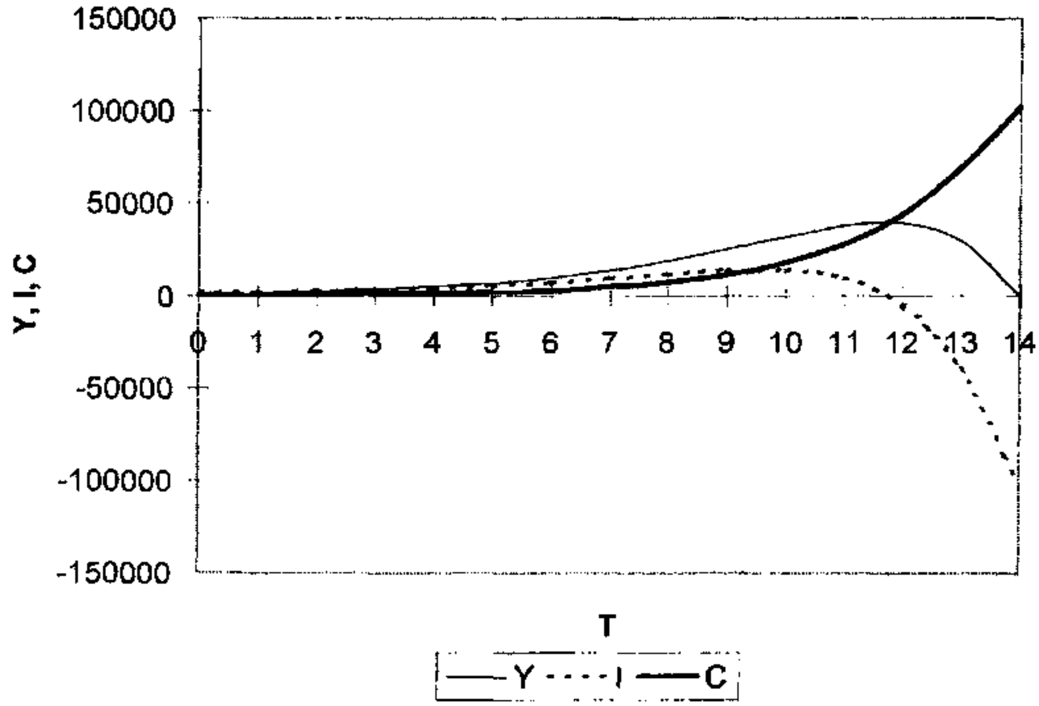


Рис. 6.2. Траектории функций выпуска продукции, инвестиций и потребления при значении темпа прироста потребления r = 0,45

Варіант в) — темп приросту споживання $r = 0,4$.

Таким чином, темп приросту споживання збігається з оптимальним, тобто $r = \frac{\alpha}{B} = 0,4$ ($\alpha = 0,8$; $B = 2$) Траєкторія випускаємої продукції буде відображена моделлю $Y'(t) = 1000 \cdot e^{0,4t}$. Динаміка інвестицій — відповідно $I(t) = B \cdot Y'(t) = 2 \cdot 1000 \cdot 0,4e^{0,4t}$, а рівняння споживання буде виглядати як $C(t) = C(0) \cdot e^{rt} = 200e^{0.4t}$. Траєкторії основних показників наведені на *мал. 6.3.*

Оскільки функції випуску, інвестицій і споживання безперервні часі, то становить інтерес порівняння накопичення (сумарних) за певний період часу показників $Y^{н}$, 1 $C^{н}$ (значення певних інтегралів для представлених варіантів моделі *а — в)*.

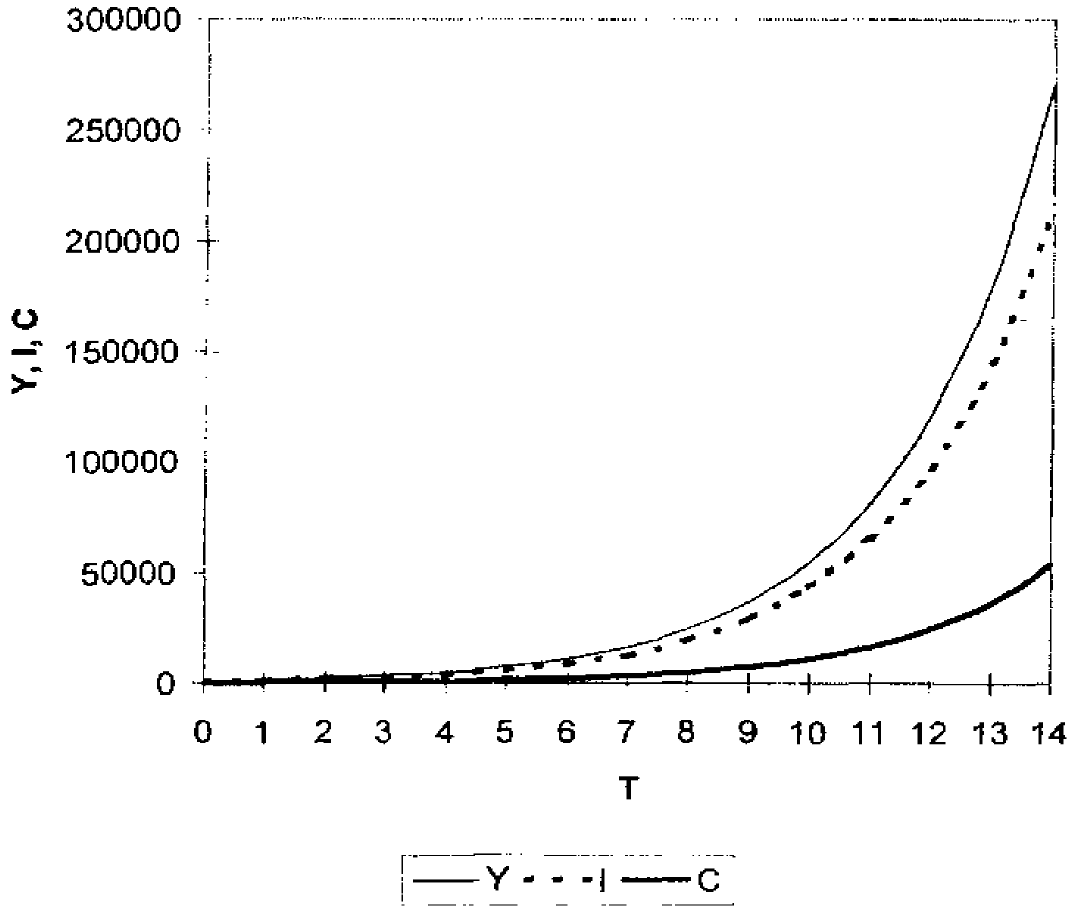


Рис. 6.3. Траєкторії функцій випуску продукції, інвестицій і споживання при значенні темпу приросту споживання r = 0, 4

5.2. ДИНАМІЧНА МОДЕЛЬ В. ЛЕОНТЬЕВА

Динамічна модель Леонтьева є деталізованою моделлю росту валового суспільного продукту й національного доходу. Базою для динамічної моделі В. Леонтьева служить статична модель міжгалузевого балансу в грошовому вираженні, що відбиває виробництво й розподіл валового суспільного продукту в галузевому розрізі, міжгалузеві виробничі зв'язки, використання матеріальних і трудових ресурсів, створення й розподіл національного доходу (НД). Кожна галузь у балансі розглядається двічі - як споживач і як виробник. Це й визначає матричну структуру балансу. В балансі розглядаються як галузі, так і підгалузі. В окремих випадках баланс може включати до декількох сотень позицій.

В основі статичної моделі лежить припущення про взаємозв'язок між нагромадженням і приростом валового продукту.

При побудові динамічної моделі В. Леонтьева, як і для моделі міжгалузевого балансу, робляться наступні припущення:

*1)*у кожній галузі (або підгалузі) є єдина технологія виробництва;

*2)*норми виробничих витрат не залежать від обсягу випускає продукції, що;

*3)*не допускається заміщення у виробництві одних видів продукції іншими.

При цих припущеннях величина міжгалузевого потоку x виявляється пов'язаної з валовою продукцією галузі в такий спосіб

$$x_{ij} = a_{ij} X_j;$$

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}, \tag{6,1}$$

де a_{ij} — *коефіцієнт прямих матеріальних витрат,* за допомогою якого виміряються технологічні зв'язки між галузями.

Коефіцієнт a_{ij} показує, скільки одиниць продукції i-тої галузі безпосередньо затрачається на випуск одиниці валовий продукції j- той галузі. Так, при $i = j$ маємо коефіцієнт витрат власної продукції галузі на одиницю її валового випуску.

Всі коефіцієнти прямих матеріальних затрат створюють квадратну матрицю A_{nxn}.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \left[a_{ij} \right].$$

Статистична модель міжгалузевого балансу в матричної формі має вигляд:

$$X = AX + Y,$$

де A — матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат;

X— вектор-стовпець валових обсягів випуску (ВОП);

Y— вектор-стовпець кінцевого продукту (НД).

В основі динамічної моделі лежить припущення про взаємозв'язок між нагромадженням і приростом валовий продукцією взаємозв'язок реалізується за допомогою матриці капіталоємності приростів виробництва. Крім того, передбачається миттєвість перетворення капіталовкладень у приріст основних фондів і миттєвість віддачі цих фондів в обсяги виробництва (що, загалом кажучи, невірно). Час передбачається безперервним, що й визначає застосування диференціальних рівнянь.

Основне співвідношення моделі має вигляд

$$X(t) = AX(t) + B\frac{dX}{dt} + C(t),$$

де $X(t)$ — вектор обсягів валового випуску продукції по галузях у момент часу t;

$\frac{dX}{dt}$ вектор абсолютних приростов за малу одиницю часу;

A — матриця коефіцієнтів прямих витрат, включаючи витрати на відшкодування вибуття основних фондів;

$AX(t)$ — виробниче споживання, що забезпечує простої виробітки;

B — матриця коефіцієнтів капіталоємності приростів виробництва (b_{ij} — витрати виробничого нагромадження i-го виду продукції на одиницю прироста j-го виду продукції);

$C(t)$ — вектор-стовпець, що характеризує споживання по галузях.

Рівняння моделі (6.4) записано у векторно-матричной формі відносно ВОП.

Щодо участвующих у рівнянні (6.4) величин передбачається виконання наступних умов.

1. Матриця *A* продуктивна й нерозкладна.

Визначення. Нехай $N = \{1,\dots\ n\}$ — безліч всіх галузей. Підмножина галузей $S \epsilon N$ *ізольовано,* якщо $a_{ij} = 0$, при всіх $\boldsymbol{i \epsilon S}$ i $\boldsymbol{j \epsilon S}$. Це означає, що галузі з безлічі $\boldsymbol{S}$ не мають потреби в продукції, виробленої іншими галузями, навіть побічно.

Якщо в безлічі галузей існує ізольована підмножина, то за допомогою перестановок рядків і стовпців матриця $\boldsymbol{A}$ можна привести до виду

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \mathbf{0} & A_3 \end{pmatrix}$$

Визначення. Матриця $\boldsymbol{A}$ називається ***нерозкладної,*** якщо її не можна привести до виду (6.5) тільки перестановкою рядків і стовпців.

Одне з основних властивостей нерозкладних матриць описується ***теоремою Фробениуса — Перону:***

1) Нерозкладна матриця $\boldsymbol{A}$ має позитивне власне число $\boldsymbol{X_A} > 0$, що перевершує по модулі всі інші її власні числа.

2) Власному числу $\boldsymbol{X_A}$ відповідає єдиний (з точністю ненульового множника) цілком позитивний власний вектор x_A

Отже, матриця коефіцієнтів повних витрат строго позитивна: $\boldsymbol{(E - A)^{-1}} > 0$, $\det(B) \neq 0$.

2. Матриці *A* і *B* постійні в часі.

3. Капіталовкладення (інвестиції) виступають єдиним джерелом зростання виробництва. То є, у жодній галузі немає резервних виробничих потужностей.

При таких припущеннях змістовно інтерпретивними в рамках даної моделі можуть бути тільки стану, для яких $\frac{dX}{dt} \geq 0$. Такі стани системи будемо називати ***припустимими.***

Траєкторії, що не виводять систему з області припустимих станів, будемо також називати ***припустимими.***

Використовуючи взаємозв'язок між ВОП і НД у статичній моделі

$$X(t)=(E-A)^{-1}Y(t),$$

Де вектор *Y(t)* характеризує галузеву структуру НД, отримаємо рівняння моделі Леонтьєва відносно НД:

$$Y(t)=B(E-A)^{-1}\frac{dY}{dt}+C(t).$$

Позначимо $B(E - A)^{-1} = B$. Коефіцієнт цієї матриці — $\tilde{b}_{ij}$ характеризує величину виробничого нагромадження продукції i-го виду на одиницю приросту j-го елемента НД, а сама вона називається матрицею коефіцієнтів ***повної приросної капіталоємності.***

Для з'ясування можливостей системи досліджуємо модель (6.6) при різних траєкторіях споживання.

Визначимо технологічні можливості системи, які визначаються параметрами A і B. Для цього покладемо $C(t) = 0$. В цьому випадку (6.6) прийме вид

$$Y(t)=B(E-A)^{-1}\frac{dY}{dt}.$$

Вираження (6.7) є система лінійних однорідних диференціальних рівнянь із постійними коефіцієнтам першого порядку. Загальне рішення цієї системи відповідно до теорії диференціальних рівнянь має вигляд

$$Y(t)=\sum_l d_l K_l e^{\frac{1}{s_l}t},$$

де s_l — власні числа матриці повної приросної капіталоємності;

K_l - відповідні їм власні вектори;

d_l - коефіцієнти, які визначаються з початкової умови $Y(O) =\sum_j d_1K_1$.

Траєкторія, що виходить із $Y(0)$, являє собою комбінацію експонент із різними темпами приросту $(1/s_1)$. Отже, у загальному випадку розвиток по траєкторії $Y(t) = Y_0e^{kt}$, тобто з єдиним для всіх галузей темпом, неможливо, і воно відбувається з постійними структурними змінами. Однак існує певна подібність між рішенням макроекономічної моделі й - рішенням структурної моделі. Ця подібність обумовлена наявністю в матриці коефіцієнтів повної приросної капіталоємності власного числа ***Фробениуса — Перону.***

Внаслідок допущений моделі матриця $\tilde{\mathbf{B}}=B(E-A)^{-1}>0$, отже, у неї існує корінь Фробениуса — Перону, s. Величина цього кореня укладена в межах:

$$\min_j\sum_i\tilde{b}_{ij}\le s\le\max_j\sum_i\tilde{b}_{ij}.$$

Величина $\tilde{\mathbf{b}}_j = \sum\tilde{\mathbf{b}}_{ij}$ $(j = 1,\ldots n)$ називається ***повної приросної капіталоємності j-той галузі.***

Можливі два випадки поводження траєкторії (6.8).

В першому випадку в траєкторії (6.8) домінує (переважає) експонента з показником ступеня, що пов'язаний з коренем Фробениуса — Перону. В цьому випадку згодом темп приросту кожного елемента НД починає наближатися до темпу, обумовленому даної експонентой, тобто $1/s$. Таким чином, на нескінченному періоді часу кожний з елементів НД починає розвиватися з темпом *1/s*. Таким чином, ***технологічний темп приросту*** має вигляд: $\dot{\rho} = \frac{1}{s}$

Структура НД прагне в тому випадку до власного вектора, що відповідає K_s розрахунки зроблені в пакеті Mathcad 8.0).

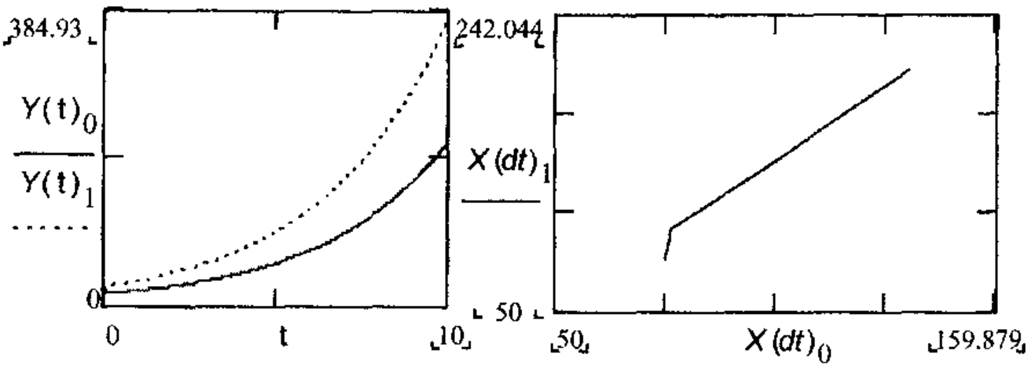


Рис. 6.4. Припустимі траєкторії розвитку

У другому випадку в (6.8) домінує експонента з показником ступеня, відмінним від *1/s*. Це відбувається, коли існує позитивне власне число, відмінне від s. Позначимо домінуючий показник $1/s_0$. В цьому випадку власний вектор, що відповідає s_0, обов'язково має негативні компоненти й, так як $s_0 A_{S_0}$ = $\tilde{\boldsymbol{B}}\,\boldsymbol{K}_{so}$ = $B(E\text{-}A)^{-1}\ K_{So}$,стовпець $(E\text{-}A)^{-1}K_{so}$ також складає від'ємні компоненти.

$$X(t) = \sum_l d_l (E - A)^{-1} K_l e^{\frac{1}{s_l}t} .$$

Враховуючи (6.8), запишемо *X(t)* наступним чином:

В останній рівності в правій частині присутні негативні компоненти, причому зі збільшенням t вони збільшуються по абсолютній величині. Отже, із часом вони з'являться й у лівій частині рівності. Таким чином, траєкторія виходить у неприпустиму зону ***(мал. 6.5).***

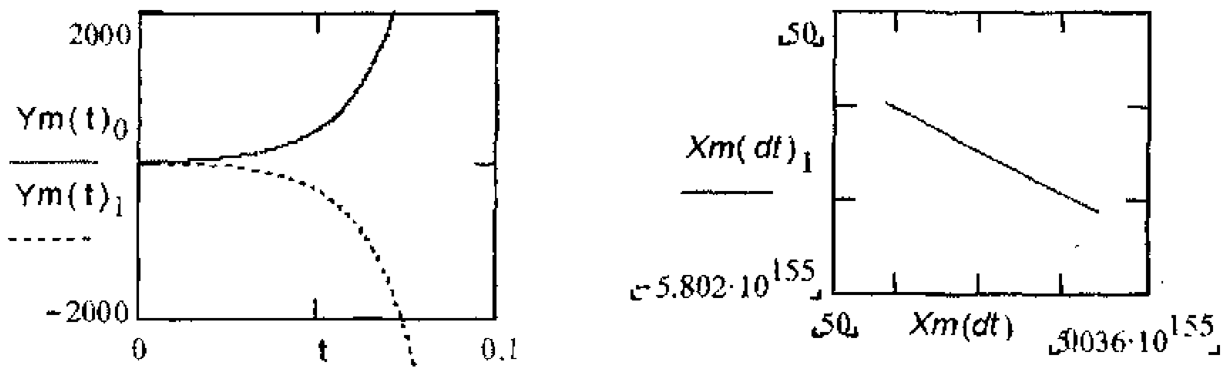


Рис. 6.5. Неприпустимі траєкторії розвитку

Зауваження. Траєкторія системи в першому випадку є припустимої, хоча початковий стан системи може бути й неприпустимим. І, навпаки, у другому випадку, хоча початковий стан системи є припустимим, траєкторія розвитку може виходити за межі припустимої області.

Приклад. Розглянемо умовний приклад для динамічної моделі В. Леонтьева. Нехай економіка агрегирована до двох галузей, відомі матриці прямих матеріальних витрат, прирісної капіталоємності й початковий стан системи:

$$A=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}2\\ 0{,}2 & 0{,}3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}9\\ 0{,}5 & 0{,}4\end{pmatrix},$$

$$X(0)=\begin{pmatrix}50\\ 50\end{pmatrix},\quad Y(0)=\begin{pmatrix}25\\ 15\end{pmatrix}.$$

Визначаємо траєкторію розвитку системи, для цього обчислимо матрицю повної приросної капіталоємноті:

$$(E-A)=\begin{pmatrix} 0,9 & -0,2 \\ -0,2 & 0,7 \end{pmatrix};$$

$$(E-A)^{-1}=\begin{pmatrix} 1,19 & 0,34 \\ 0,34 & 1,53 \end{pmatrix}.$$

$$\tilde{B}=B(E-A)^{-1}=\begin{pmatrix} 1,25 & 1,64 \\ 0,73 & 0,78 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо власні числа цієї матриці, вирішуючи характеристичне рівняння

$$\left|E-\lambda\tilde{B}\right|=\lambda^2-2,03\lambda-0,22 = 0;$$

$$\lambda_1=2,14;\ \lambda_2=-0,10.$$

Потім показники експонент в рішенні рівні

$$\rho=\frac{1}{\lambda_1}=0,47, \quad \frac{1}{\lambda_2}=-9,69.$$

Відповідні власні вектори з точністю до множника рівні

$$K_{s_1}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0,54 \end{pmatrix}, \quad K_{s_2}=\begin{pmatrix} 1 \\ -0,83 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що траєкторія системи є допустимою, оскільки єдиний показник з додатковим показником степені складається із додаткових компонент.

Визначаємо, виходячи із початкових умов, коефіцієнти d_i :

$$d_1K_1+d_2K_2=Y(0)\Leftrightarrow\begin{cases} d_1+d_2=25 \\ 0,54d_1-0,83d_2=15 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} d_1=26,09 \\ d_2=1,09 \end{cases}.$$

Завершально траекторія розвитку системи має вигляд

$$Y(t)=26,09\times\begin{pmatrix} 1 \\ 0,54 \end{pmatrix}e^{0,475t}-1,09\times\begin{pmatrix} 1 \\ -0,83 \end{pmatrix}e^{-9,69t}.$$

Графічно зміна структури ВОП можна представити так, як зображено на рис. 6.4. Нахилена виділена лінія відповідає структурі ВОП при безкінечном t: $(E-Ay^1K_{\lambda_1}$.

Зауваження. Зміна структурних параметрів може привести до якісно іншого розвитку системи, хоча параметри макромоделі збережуться.

Дослідження моделі Леонтьева дозволяє зробити наступний висновок: на відміну від макроекономічної моделі, що при нульовому споживанні завжди має припустиму траєкторію, траєкторія структурної моделі навіть при нульовому споживанні може бути неприпустимої внаслідок певних структурних параметрів.

Нехай тепер екзогенно задана траєкторія споживання $C(t) = C_0e^{rt}$. В цьому випадку рішення системи (6.4) являє собою суму загального рішення однорідної системи (6.8) і частки рішення неоднорідної й має вигляд:

$$Y(t) = \sum_l d_l K_l e^{\frac{1}{s_l}t} + (E - rB(E-A)^{-1})^{-1} C_0 e^{rt},$$

де коефіцієнти d_l визначаються виходячи із початкової умови:

$$Y(0) = \sum_l d_l K_l + (E - rB(E-A)^{-1})^{-1} C_0.$$

Матриця $(E-rB(E-A)^{-1})^{-1}$ представляє собою структурний аналог коефіцієнта скалярної моделі:

$$\frac{1}{1-Br} = \frac{1}{1-\left(\frac{br}{1-a}\right)}.$$

Досліджуємо, чи можливий у моделі при заданій траєкторії споживання ріст без обмеження, інакше кажучи, чи існують обмеження на темп r. (В макроекономічної моделі обмеження було пов'язане з технологічним темпом і початковою нормою нагромадження.).

Нехай у першому доданку домінує темп, що відповідає кореню Фробениуса — Перону: $\acute{p} < \frac{1}{S}$. Нехай $r > 1/s$. Тоді із часом другий доданок (6.5) починає домінувати, тому що перше тяжіє до темпу l/s. Отже, $Y(t)$ усе більшою мірою починає визначатися вектором $(E\text{-}rB(E\text{-}A)^{-1})^{-1}\ C0e^{rt}$.

Позначимо $B^* = rB(E\text{-}A)^{-1}$.

Узагальнююча умова продуктивності, забезпечувана теоремою Фробениуса — Перону, для матриці B^* одержуємо

$$r < \frac{1}{s}. \tag{6.10}$$

В розглянутому випадку B^* непродуктивна. Тому що $З_0 > 0$, то одержуємо, що вектор $(E-B^*)^{-1}C_0$ має від'ємні компоненти. Це значить, що рано або пізно в $Y(t)$ з'являться негативні компоненти й траєкторія вийде в неприпустиму зі змістовної точки зору область.

Таким чином, при наявності екзогенно заданої траєкторії споживання виду C_0e^{rt} у структурній моделі існування припустимої траєкторії визначається співвідношенням (6.10).

Якщо домінує експонента з темпом, що не відповідає темпу Фробеніуса — Перону, то за результатами аналізу при $C(t) = 0$ траєкторія однаково вийде в неприпустиму зі змістовної точки зору область.

Виявимо, чи можливий у структурній моделі такий ріст, при якому всі складові елементи НД ростуть із однаковим темпом аналогічно тому, як це відбувається в макромоделі Харрода - Домара (тобто в моделі розвитку з постійною нормою нагромадження й постійним темпом приросту).

Нехай споживання задане у вигляді $C(t) = C_0e^{rt}$. В моделі (6.6) перший доданок являє собою суму експонент, що ростуть із різними темпами, тому єдиний темп росту можливий тільки у випадку, якщо перший доданок тотожно дорівнює нулю. Це можливо тільки, якщо всі $d = 0$. Запишемо (6.6) у такому виді:

$$\sum_l d_l K_l = Y(0) - (E - r\tilde{B})^{-1} C_0 = 0.$$

Звідси одержуємо систему рівнянні відносно r:

$$(E - r\tilde{B})Y(0) = C_0. \qquad (6.11)$$

В загальному випадку ця система перепевна. Таким чином, якщо відомо початковий заданий стан економіки K_0, C_0 і задані технологічні параметри, те не завжди можливий ріст із постійним темпом всіх галузей. Однак можна задати r_0 і із системи (6.11) визначити C_0 так, щоб розвиток ішов із заданим темпом.

5.3. ЛІНІЙНІ МОДЕЛІ ПОПИТУ ТА ПРОПОЗИЦІЇ

Розглянемо спочатку дискретну модель на прикладі паутинообразной. Нехай ринок якого-небудь окремого товару характеризується наступними функціями попиту та пропозиції: $D = D(P)$, $S = S(P)$.

Для існування рівноваги ціна повинна бути такий, щоб товар на ринку був розпроданий, або $D(P) = S(P)$.

Ціна рівноваги P задається цим рівнянням (яке може мати безліч рішень), а відповідний обсяг покупок-продажів, позначуваний через X - наступним рівнянням:

$$\overline{X} = D(\overline{P}) = S(\overline{P}).$$

Динамічна модель виходить при наявності запізнювання попиту або пропозиції. Найпростіша модель у дискретному аналізі включає незмінне запізнювання або ***відставання*** пропозиції на один інтервал: $\boldsymbol{D_t = D(P_t)}$ і $\boldsymbol{S_t = S(P_{t-1})}$.

Це може трапитися, якщо для виробництва розглянутого товару потрібен певний період часу, обраний за інтервал. Дія моделі таке: при заданому $\boldsymbol{P_{1\ t}}$ попереднього періоду обсяг пропозиції на ринку в поточному періоді буде $\boldsymbol{S(P_{i-1})}$ і величина $\boldsymbol{P_1}$ повинна встановитися так, щоб був куплений весь обсяг запропонованого товару. Іншими словами, $\boldsymbol{P}$ і обсяг покупок-продажів $\boldsymbol{X_t}$ характеризуються рівнянням:

$$X_t = D(P_t) = S(P_{t-1}).$$

Отже, знаючи вихідну ціну $\boldsymbol{P_0}$, за допомогою цих рівнянь ми можемо одержати значення P_1 і $\boldsymbol{X_1}$. Потім, використовуючи наявну ціну $\boldsymbol{P_x}$, з відповідних рівнянь одержимо значення $\boldsymbol{P_2}$ і $\boldsymbol{X_2}$, і т.д. В загальному, зміна $\boldsymbol{P_t}$ характеризується ***різницевим рівнянням*** першого порядку (одноінтервальне відставання):

$$D(P_t) = S(P_{t-1}).$$

Рішення можна проілюструвати діаграмою, представленої на ***мал. 6.6,*** де $\boldsymbol{D}$ і S — відповідно криві попиту та пропозиції, а положення рівноваги (зі значеннями p і X) відповідає крапці їхнього перетинання $\boldsymbol{Q}$. В динамічної моделі $\boldsymbol{D}$ має той же зміст, що й у статичної, але ордината кривій S показує обсяг пропозицій в даний період часу залежно від цін, керуючих ринком у попередній момент часу. Ціна в початковий момент часу дорівнює P_0.

Відповідна крапка $\boldsymbol{Q_0}$ на кривій 5 дає обсяг пропозиції в період 1. Весь цей запропонований обсяг товару розкуповується при ціні $\boldsymbol{P.}$, заданою крапкою $\boldsymbol{Q_1}$ на кривій $\boldsymbol{D}$ з тією же ординатою $\boldsymbol{(X_1)}$, що і $\boldsymbol{Q_0}$. В другий період часу рух виникає спочатку по вертикалі від точки $\boldsymbol{Q_1}$ до точці на кривій ***S,*** дающей $\boldsymbol{X_2}$, а потім по горизонталі – до точки $\boldsymbol{Q_2}$ на кривій $\boldsymbol{D}$. Остання точка характеризує $\boldsymbol{P_2}$ – Продовження цього процесу і дає графік павутини, показаний на мал.. 6.6.

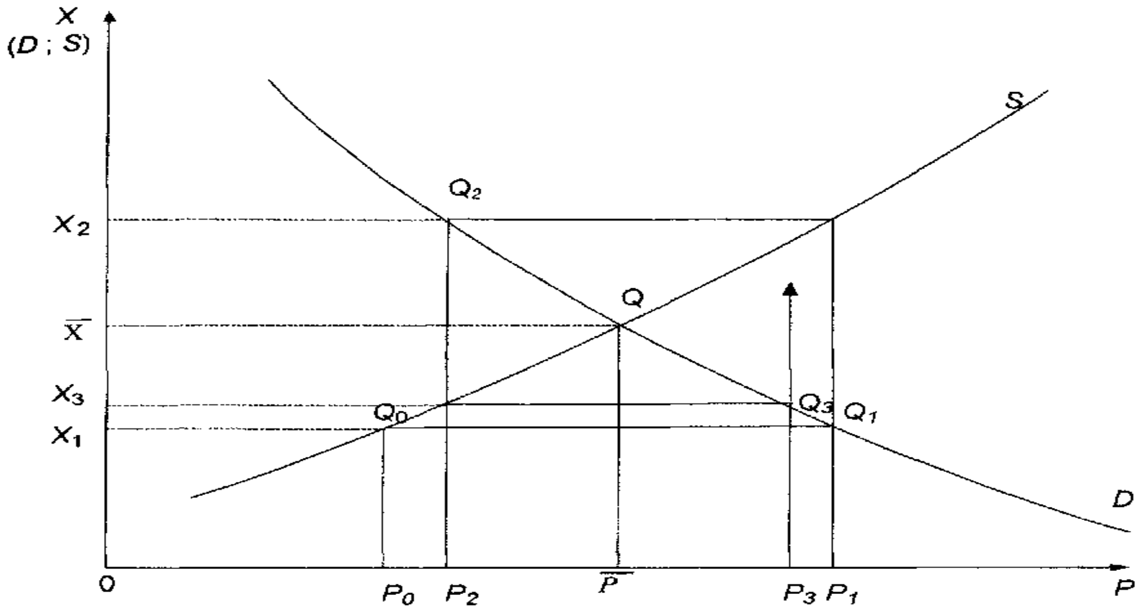


Рис. 6.6. Графічне рішення павутино подібної моделі попиту і пропозиції

Ціни й обсяги (покупок — продажів) у послідовні періоди часу є відповідно координатами крапок Q_1, Q_2, Q_3, Ф$_п$на кривій попиту ***D.*** В розглянутому випадку послідовність крапок прагне до ***Q***. При цьому крапки по черзі розташовуються на лівій і правій стороні від ***Q***. Отже, і значення ціни P_1 прагнуть до Р, розташовуючись по черзі по обох сторони від ***P.*** Точно так само справа й з обсягами покупок-продажів (X_t)**.** Припустимо, що ***D*** іде вниз, а ***S*** **—** нагору. Тоді інтуїтивно ясно, що Рух із загасаючими коливаннями виникне, якщо крива ***D*** у крапці рівноваги ***Q*** опускається до осі абсцис ***OP*** круче (під більшим кутом), чим крива ***S***. Вибуховий коливальний рух виникає у випадку, коли крива ***D*** менш крута стосовно осі ***OP,*** чим S (кут нахилу кривій ***D*** до осі ***OP*** менше кута нахилу ***S*)**. При рівних кутах нахилу ***D*** і ***S*** виникають регулярні коливання, тобто незатухаючі й невибухові.

Рішення можна одержати алгебраїчно для випадку лінійних функцій попиту і пропозиції: $D = a + aP, S = \beta + bP$.

$$\bar{P} = \frac{\alpha - \beta}{b - a}, \bar{X} = \frac{b\alpha - a\beta}{b - a}.$$

Дискретна динамічна модель задається рівнянням:

$$X_t = \alpha + aP_t = \beta + bP_{t-1}.$$

Шукаємо спочатку рішення, що дає рівновагу.

Для цього покладемо $P_t = P$ і $X_t = X$ Лля всіх значень

$$\bar{X} = \alpha + a\bar{P} = \beta + b\bar{P}.$$

Одержуємо ті ж значення ***P*** і ***X,*** що й в (6.12). Отже, якщо в якому-небудь періоді існували ціни й обсяги, що забезпечують рівновагу, то в динамічній моделі (6.13) вони зберігаються й у наступних періодах. Статична рівновага погодиться із цією моделлю. Віднімемо рівняння (6.14) з (6.13) і покладемо $p_t=P_t-P, x_t=X_t-X$. Тоді

$$x_t = ap_t = bp_{t-1}. \qquad (6.15)$$

Рівняння (6.15) аналогічні (6.13), за винятком того, що вони описують відхилення від рівнів рівноваги (тепер уже відомо, що такі існують). Обоє ці рівняння є різницевими рівняннями першого порядку. Покладемо $з = b/a$ і підставимо його в рівняння (6.15), так що різницеве рівняння відносно P_1 буде: $P_t = cp_{t-1}$.

При даному значенні p_0 у момент $t = 0$ рішення легко виходить шляхом ітерації:

$$p_t = p_0c^t, P = \bar{P} + (P_0 - \bar{P})c^t.$$

Об'єми покупок-продаж в кожний період визначається із рівняння (6.15).

Звичайно крива попиту йде вниз (а < 0), а крива пропозиції — нагору (b > 0), тобто $з = b/a < 0$. В цьому випадку покладемо $r = |c| = b/(-a)$, так що r буде позитивно. Тоді $p_t = p_0 (k) r^1$ і послідовні значенняp_t при / = 0, 1, 2, 3,... будуть відповідно р, $-p_0r$, *-Pif' 'P<f'* так що *Pt* приймає по черзі позитивні й негативні значення. Отже, чергуються й знаки P_1, які по черзі будуть розташовуватися вище й нижче ***p.*** Є наступні три можливості:

1)b > (-a) - кут нахилу ***S*** (до ***OP)*** більше, ніж кут нахилу ***D.*** В цьому випадку r > 1, і ряд послідовних значень p_t є нескінченно зростаючим по абсолютній величині. Отже, ***P*** _> ∞, і має місце вибухове коливання (при чергуванні знаків);

2)b = (-a)— кути нахилу ***D*** і ***S*** рівні. В цьому випадку r = 1, і ряд значень p_t буде просто складатися із чергування p_0 і $(-p_0)$. Тому P_1 буде послідовно більше й менше ***P*** на ту саму величину, рівну первісній розбіжності (P_0 - Р), тобто буде мати місце регулярне коливання (із чергуванням знаків).

3)b < (-a) - кут нахилу ***D*** (до ***OP)*** більше, ніж S. В цьому випадку ***r*** < 1, і послідовність ***p*** зменшується по абсолютній величині. Виходить, P_1 ***P*** послідовно ліворуч і праворуч, тобто прагне із загасаючими коливаннями до рівня рівноваги.

В випадку (3), чим більше буде ***-a*** стосовно ***b,*** тобто чим крутіше ***D*** порівняно з ***S,*** тим скоріше будуть загасати коливання й тем швидше P_1 буде прагнути до Р. Початкові збурювання також впливають на амплітуду коливання. Ніж далі P_0 від Р, тим більше буде розмах коливань і тим довший проміжок часу, необхідний для їхнього припинення.

Треба відзначити, що випадок (2) із триваючими й правильними коливаннями настільки рідкий, що його можна вважати майже тривіальним - на базі його не можна побудувати ніякої теорії циклу.

Проведемо аналіз случаючи (3). Незважаючи на можливе заперечення, що складається в тім, що загасаючі коливання «нереальні», можна запропонувати дуже простий розвиток моделі (3) із загасаючими коливаннями, що дозволяє представити рух P_1 із триваючими коливаннями в часі. Для цього замість кривих попиту та пропозиції, незмінних у часі, візьмемо криві, які під впливом зовнішніх сил змінюються в часі або регулярно, або циклічно, або випадково, або як-небудь інакше.

Тоді ще до припинення коливань, показаних на мал. 6.6, яке-небудь зрушення в кривій D або S приведе до збурювання, і коливання з'являться знову. Наприклад, Q_0 могла перебувати в крапці рівноваги або поблизу її до зрушення нагору кривій D до положення, показаному на мал. 6.4. Тоді коливання будуть відбуватися вищеописаним образом, триваючи, скажемо, до крапки Q_3, де коливальний рух буде порушено зрушенням нагору кривій S. Виникне, отже, коливальний рух із ще більшою амплітудою, що поступово припиниться до появи якого-небудь нового збурювання. Для лінійної моделі можливо алгебраїчне тлумачення у випадку паралельного переміщення кривих попиту та пропозиції. Рівняння (6.13) тоді буде мати вигляд:

$$X_t = \alpha_t + aP_t = \beta_t + bP_{t-1},$$

де α_t, β_t характеризують зрушення в момент t = 0, 1, 2, 3,... . Різницевим рівнянням щодо ціни буде:

$$P_t = \frac{b}{a}P_{t-1} + \frac{\beta_t - \alpha_t}{a}. \qquad (6.16)$$

Для рішення рівняння (6.16) необхідно лише визначити різниця P(- a, зрушень у часі попиту та пропозиції.

В безперервної моделі ціна є функція часу $P(t)$. Попит та пропозиція (потоки в одиницю часу) суть також функції часу. Попередня паутиноподібна модель ураховувала запізнювання пропозиції. Цьому буде грубо відповідати передумова про зміну ціни на стороні попиту, а не пропозиції. Тоді одержимо модель, рівносильну моделі з безперервним запізнюванням пропозиції. Це запізнювання має просту показову форму. $D(t)$ залежить від P і d/dt, а $S(t)$ — тільки від P. Модель діє, як і в предьщущем випадку, а саме: у кожний момент ціна P установлюється так, щоб попит повністю поглинав пропозицію, то ***ecrb(t) w(t)*** задовольняли рівнянню:

$$X = D\left(P, \frac{dP}{dt}\right) = S(P).$$

Якщо функції лінійні, то

$$X = \alpha + aP + a_1 \frac{dP}{dt} = \beta + bP.$$
(6.18)

Покладемо $\boldsymbol{P(t)=P}$ і $\boldsymbol{X(t) = X}$ ДДя всіх $\boldsymbol{U}$ те естьдля спільного положення рівноваги обох змінних:

$$x = ap + a_1 \frac{dp}{dt} = bp.$$
(6.19)

Рівняння (6.17) і (6.18) являють собою диференціальні рівняння першого порядку. Покладемо c = $\frac{b-a}{a_1}$. Тоді диференціальне рівняння відносно $\boldsymbol{P(t)}$ буде мати вигляд:

$$\frac{dp}{dt} = cp.$$

Для рішення помітимо, що $\frac{1}{p}\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}\ln p$. Тоді $\frac{d}{dt}\ln p = c$, тобто $\ln p = const + ct$, тобто $p = p_0 e^{ct}$, $P = \bar{P} + (P_0 - \bar{P})e^{ct}$.

6.18) з (6.17) і покладемо $\boldsymbol{p=P\text{-}P}$ і $\boldsymbol{x = X\text{-}X}$ **.** Таккак $\boldsymbol{dp/dt = d/dt,}$ те:

В звичайному випадку, якщо $\boldsymbol{a < 0,}$ а,< $\boldsymbol{0,}$ $\boldsymbol{b}$ > 0, то $\boldsymbol{c < 0,}$ де $\boldsymbol{c} = \frac{b-a}{a_1}$.

Отже, ціна $\boldsymbol{P(t)}$ рухається в часі монотонно до $\bar{P}$ —ціни рівноваги, гак як різниця $p \rightarrow 0$ подібно показової функції $\boldsymbol{e^{-t}}$ **.** Менш звичайний випадок, коли також $\boldsymbol{b < 0.}$ Но якщо тільки $\boldsymbol{\text{-}b<\text{-}a}$, тобто кут нахилу $\boldsymbol{D}$ до осі $\boldsymbol{OP}$ в площині ОРХ більше, чим кут нахилу 5, то приходимо до того ж результату, що й у першому випадку. Диференціальне рівняння цієї моделі має менше рішень, чим відповідне кінцево-різницеве рівняння, наведене вище.

Розглянуті павутиноподібна й безперервна моделі дуже прості й добре відомі. Вони є частково динамічними, тому що встановлюють співвідношення на ринку тільки одного товару й ураховують ціну лише його одного, а не ціни інших товарів і доходи. Проте, вони містять основні формулювання динаміки й дозволяють розкрити деякі найважливіші властивості, загальні для всіх динамічних моделей попиту та пропозиції. Перелічимо ці особливості.

1. ***Модель припускає деякі функціональні співвідношення.***

В даному випадку це — ринковий попит покупців і пропозиція продавців. Кожне з них представляє функцію ціни. Ці функції є власне кажучи побудовами на основі минулого або очікуваного. Ціна або дана покупцям і продавцям ззовні, або передбачається ними. Попит представляється як планована або передбачувана величина покупок, пропозиція — як планована або передбачувана величина продажів, причому всі ці пропозиції пристосовуються до початку проміжку часу $\boldsymbol{t}$**.** Продавці очікують, що ціна буде такий же, як і в попередній період $\boldsymbol{P_{t-1}}$ і відповідно припускають продати $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S\,(P_{t-1},)}$**.** Покупці вважаються лише з фактичною ціною й відповідно до цього планують свої покупки в розмірі $D_t = D(P_t)$.

2. Форма функції також задана. Завдання можемо спростити, розглядаючи окремий випадок при певній формі функції (на приклад, лінійної $D = \alpha + aP$), або ж взявши наближення до даної формі функції (наприклад, лінійну апроксимацію в обмежений області біля крапки рівноваги). Це можна здійснити за допомогою розкладання в ряд Тейлора функції попиту з малої різниці $P - \overline{P}$:

$$D(P) = D(\overline{P}) + D'(\overline{P})(P - \overline{P}) = \alpha + aP.$$

Прийнята в завданні лінійна (або будь-яка інша) форма повинна бути підходящої і являти собою або гарною апроксимацією, або зручне спрощення. Так, коефіцієнт a, позначений вище, може бути або коефіцієнтом при P в лінійній функції попиту, або нахилом прямій попиту в крапці рівноваги. В останньому випадку він може приблизно відбивати малі варіації Р околі Р.

3. Необхідно точно визначити умови, при яких діє модель. Це припускає перехід від ***очікуваних*** і планованих величин на основі минулого до реалізованого ***фактично.*** Необхідно точно визначити специфічну природу зв'язків між ***фактичними*** значеннями змінних і механізм переходу пропонуючи величин у ***фактичні.*** В розглянутої моделі з рухом даного товару на одному ринку фактично сформовані відносини характеризуються рівністю покупок і продажів (X_1, по визначенню). Далі, у розглянутому випадку перехід від очікуваних величин до фактичного здійснюється «методом рівноваги», де ціна і є «рівноважною» змінною. В початку періоду t продавці очікують, що ціна буде P_{t-1} і пропонують для продажу продукцію S_t. Зміна запасів не передбачається (хоча можливо, що товар є швидкопсувним), так що пропозиція повинне бути дорівнює X_1 (продажу = покупкам). В процесі встановлення ринкової рівноваги попит, отже, стає рівним пропозиції (= продажам = покупкам), тому що ціна досягає такого рівня, при якому пропозиція повністю поглинається. Всі економічні очікування реалізуються. Виключення становить лише ціна P_{t-1}, що очікували продавці. Вона не збігається з реалізованою ціною P_t, що управляє ринком у даному періоді.

З допомогою дуже невеликої модифікації цієї дискретної моделі можна зовсім змінити умови її дії, увівши східчасту функцію (метод послідовного порушення рівноваги). В момент $t - 1$ виробники випускають кількість товарів, що відповідає домінуючої в цей момент ціні P_{t-1}. В кінці періоду цю масу товарів здобувають торговці, так що її можна продати протягом наступного періоду t (як S_t). В початку періоду t на основі всіх відомих на той момент даних торговці встановлюють ціни продажів P . Покупці тоді вирішують, скільки вони куплять за цими цінами (D_t). В моделі передбачається, що торговці вгадують завжди правильно й установлюють ціни на такому рівні, при якому вони можуть збути весь запас товарів: $S_t = D_t$ = обсяг покупок-продажів.

В моделі необхідно передбачити й варіювання — як запобіжний захід проти неправильних предугадаваний цін торговцями. Нехай установлена ними ціна P_1 така, що D_1 перевершує кількість продаваних товарів S_1. При наявності торговельних запасів попит (дорівнює покупкам-продажам) можна покрити за рахунок їхнього зменшення. Тоді, що передбачалася пропозиція, S_1 буде менше фактичних продажів і різницю прийде покрити за рахунок запасів. В результаті покупці реалізують свої плани (припущений попит = фактичним покупкам), але продавцям прийде зробити несподівані вилучення запасів. С іншої сторони, якщо відсутні або малі запаси (наприклад, швидкопсувних товарів), те попит не вдасться задовольнити, і його змушене скорочення зажадає обмеження споживання або інших подібних мір. Тоді передбачуваний попит буде урізаний до величини фактичних покупок, і в покупців виникнуть незаплановані заощадження, продавці ж реалізують свої плани. В більшості моделей звичайно приймається, що плани покупок реалізуються (очікуваний попит дорівнює фактичним закупівлям), а можливий «розрив» компенсується вкладеннями. Таке припущення може бути розумним або зручним, але, як показує наведений приклад, воно, звичайно, не є необхідним.

4. Умова дії моделі, що задовольняє у фактичних ринкових відносинах, записується у вигляді рівняння з відповідної змінної. В даному випадку ціна є рівноважною змінною. Завдання полягає в тім, щоб позбутися від інших змінних (D_1, S_1 і звичайно фактичного значення X_1) і зосередити найбільшу увагу на одній (P_1). Інші змінні (наприклад, X_1) можна знайти, як тільки визначена найважливіша змінна (P_1). Рівняння паутиноподібною моделі є найпростішою формою різницевого рівняння з одноінтервальним запізнюванням (P_1 і P_{t-1} явно входять у рівняння). Шукається рішення цього рівняння. В випадку рівноваги без запізнювання питання зводиться до знаходження одного або декількох значень P, спільних з умовами рівноваги. При наявності запізнювання в кінцево-різницевому рівнянні рішення припускає, що задано й визначені якісь початкові значення або умови, у цьому випадку початкова ціна P_0. Рівняння характеризує дія моделі в кожний проміжок часу, але результат протягом часу, узятого в цілому, залежить від існуючої початкової конфігурації, подібно тому, як опущена в автомат монета приводить його в дію. Модель може «стартувати» лише з когось вихідного положення. Економічно це означає, що зміна ціни в часі можна визначити, лише знаючи початкове порушення рівноваги або відхилення її від положення рівноваги. Той факт, що в даному прикладі потрібно знати лише одне початкове значення, є випадковим. Він являє собою результат існування тільки одноінтервального запізнювання, того, що відповідне кінцево-різницеве рівняння буде першого порядку. При багаторазовому або розподіленому запізнюванні кінцево-різницеве рівняння буде мати більше високий порядок і буде потрібно знати не одне, а кілька початкових значень.

5. ***Рішення різницевих рівнянь у ряді випадків може бути зведене до методики рішення й аналізу диференціальних рівнянь.*** Рішення істотно спрощується рекурсивної моделі. Це значить, що якщо дані всі змінні до $(t - 1)$, то модель забезпечує й одержання одного за іншим значень змінних для інтервалу t. *В* розглянутому випадку при заданих P_{t-1} , виходить спочатку $X_1 = S_1$, а потім P_t.

При дослідженні рішень моделей попиту та пропозиції виникають питання, пов'язані з економічною інтерпретацією. Першим завжди виникає наступне питання: чи існує положення рівноваги, спільне з рівнянням? Відповідь дається підстановкою в рівняння $P_t = \overline{P}$ для всіх t. В даному випадку таке $\overline{P}$ існує, і це є статичний рівень. В інших випадках таке $\overline{P}$ може не існувати. Застосовується й інший штучний прийом: визначивши $\overline{P}$, простежити не зміну первісної величини P_t, а її відхилення від положення рівноваги, $p_t = P_t - \overline{P}$. Це має економічний сенс, тому що інтерес представляє саме відхилення від положення рівноваги. Математично найкращий спосіб такого перемикання зводиться до вирахування рівнянь, що характеризує крапку P, з рівняння, що виражає P_t.

Модель із усією очевидністю показує, що статика й динаміка тісно взаємозалежні. Динамічна модель типу павутинної розглядає рухи навколо положення рівноваги або відхилення від нього. Однак стійке існування положення рівноваги (тобто один раз досягнуте, вона зберігається постійно), спільного з моделлю, зовсім не припускає, що за всяким відхиленням буде випливати повернення у вихідне статичне положення. Рух може віддалятися від вихідного статичного положення або бути спрямованим до якого іншого, відмінному від вихідного. І, навпаки, питання про «стійкість» положення рівноваги в статичному випадку повинен і може розглядатися лише з погляду динамічної моделі. Положення рівноваги стійко, якщо початкове збурювання породжує поворотний динамічний рух до положення рівноваги, а не убік від нього й не до якого-небудь іншого положення.

Безперервна модель має, загалом, ті ж властивості, відрізняючись головним чином в акцентуванні або в деталях. Функції моделі представляють попит та пропозицію залежно від ціни й швидкості зміни останньої. Припущення й плани покупців і продавців представляються безупинно пристосовуються в часі до руху цін. Ці очікування, щоб бути спільними, Повинні являти собою ланки одного ланцюга. Виражаюча співвідношення очікуваних величин попиту та пропозиції модель діє знов-таки по методу наближення до положення рівноваги. Ринкові сили безупинно змінюють ціни так, щоб пропозиція була повністю реалізована. Ціна є змінної, що забезпечує рівновага, що змінюється від одного моменту до іншого для підтримки рівності попиту та пропозиції, будучи загальної для покупок і продажів (потоків у відповідний момент часу). Основне розходження полягає в інтерпретації моделі з погляду рішень покупців і продавців. В дискретному аналізі одиницею часу був обраний інтервал прийняття рішень або переглядів планів, характерною рисою було розходження між очікуваннями (намірами) і їхнім здійсненням (реалізаціями). Все це в загальному зникає в безперервній моделі, тому що передбачається, що прийняття рішень, перегляд їх і пристосування до обстановки, що змінилася, відбувається безупинно. Однак багато властивостей дискретної моделі можна ввести й у безперервну, наприклад запізнювання або зміни запасів.

С математичної точки зору безперервна модель веде до диференціального рівняння щодо який-небудь змінної (у цьому випадку $\boldsymbol{P(t)}$**),** а не до кінцево-різницевого.

5.4. МОДЕЛЬ РИНКОВОЇ РІВНОВАГИ ВАЛЬРАСА

Макроекономічна рівновага на конкурентному ринку, як відомо, визначається крапкою, у якій попит та пропозиція рівні. Розглянемо випадок, коли попит та пропозиції залежать тільки від ціни товару. В початковий момент часу система може не перебувати в стані рівноваги внаслідок двох причин. Або вона була випадковим образом виведена зі стану рівноваги, або вона ніколи в ньому не перебувала. В будь-якому випадку виникає питання, чи прийде система в стан рівноваги і як швидко?

Якщо система не перебуває в стані рівноваги, то можливі два варіанти: або попит перевищує пропозицію, або навпаки — пропозиція перевищує попит. Назвемо різницю між кількістю товару, що покупці збираються придбати за даною ціною, і кількістю товару, що виробники готові продати за даною ціною, ***надлишковим попитом.*** В залежності від ситуації надлишковий попит може бути позитивним або негативним ***(рис. 6.7а).*** С величиною надлишкового попиту зв'язана ***ціна надлишкового попиту —*** це різниця між ціною, що покупці готові заплатити за довільну дану кількість товару, і ціною, здатної викликати збільшення пропозиції до даної кількості товару ***(рис. 6.7б).*** Таким чином, якщо існує позитивний надлишковим попит, те незадоволені покупці зрушують ціну нагору. А якщо виникає позитивна ціна надлишкового попиту, то виробники дійдуть висновку, що вигідно збільшити кількість доставляємої продукції.

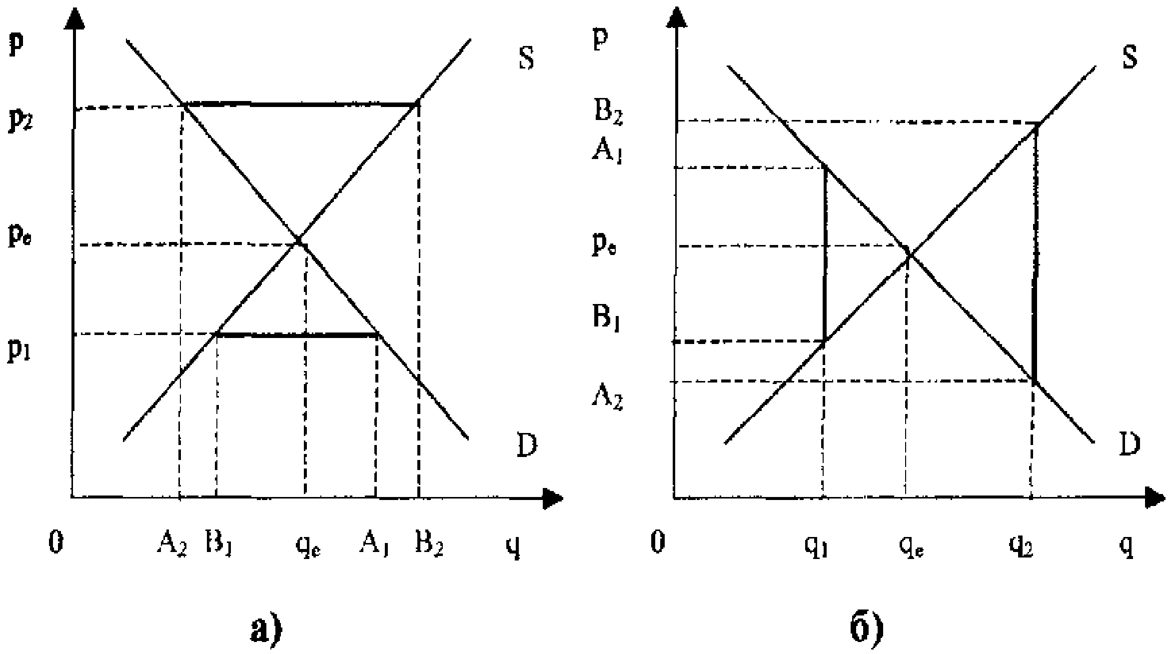


Рис. 6.7. Динаміка ціни при надлишковому попиті

При побудові моделі рівноваги основними є припущення Вальраса й Маршалла. В відповідності із ***припущенням Вальраса*** ціна прагне до збільшення (зменшенню), якщо величина надлишкового попиту позитивна (негативна). По ***припущенню Маршалла*** пропозиція прагне до збільшення (зменшенню), якщо ціна надлишкового попиту позитивна (негативна).

Визначимо стійкість рівноваги. В даному випадку стійкість означає, що економічні стимули зрушують траєкторію зміни ціни в напрямку крапки рівноваги.

Позначимо надлишковий попит

$$E(p) = D(p) - S(p),$$

де $\boldsymbol{D\ (p),\ S\ (p)}$ — функції попиту та пропозиції відповідно;

$\boldsymbol{p}$ — ціна.

Стійкість рівноваги за Вальдесом означає, що збільшує ціни, викликане позитивним збитковим попитом, зменшує його.

$$\frac{dE(p)}{dp} = \frac{d(D(p) - S(p))}{dp} < 0,$$

$$\frac{dD}{dp} - \frac{dS}{dp} < 0.$$

З іншої сторони, якщо слідувати передумовою Маршала, то збільшення кількістю товару, викликане позитивною піною збиткового попиту, зменшує цю ціну. Ціна збиткового попиту є функція, обернена ***E(p)***.

$$E^{-1}(q) = p_D(q) - p_S(q),$$

де $p_D(q)$ – функція, обернена $D\ (p)$,$p_s(q)$ – функція, обернена S (q).

Таким чином, отримуємо, що для ціни збиткового попиту, повинно бути виконано

$$\frac{dE^{-1}(q)}{dq} = \frac{d(p_D(q) - p_S(q))}{dq} < 0;$$

Тогда неравенство (6.22) принимает вид

$$\frac{dD}{dp} = b,\ \frac{dS}{dp} = b_1 \ \Rightarrow \ b - b_1 < 0 \Leftrightarrow b < b_1.$$

В силу свойств похідних взаємно обратних функцій отримуємо

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_D}{dq} &= \left(\frac{dD}{dp}\right)^{-1} \\ \frac{dp_S}{dq} &= \left(\frac{dS}{dp}\right)^{-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\frac{dD}{dp}\right)^{-1} - \left(\frac{dS}{dp}\right)^{-1} < 0.$$

Розглянемо простий випадок лінійних функцій попиту і пропозиції

$$D(p) = a + bp,$$
$$S(p) = a_1 + b_1 p.$$

Таким чином, система прагне деяким чином до стану рівноваги, якщо нахил лінії пропозиції більше нахилу лінії попиту.

Використовуючи припущення Маршалла, одержуємо

$$p_D(q) = \frac{1}{b}(q - a), \quad p_S(q) = \frac{1}{b_1}(q - a_1),$$

отже, для нерівності (6.25) маємо

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{b_1} < 0.$$

Звичайно функція попиту є убутної, тобто $b < 0$, а функція пропозиції — зростаючої, тобто $b_1 > 0$. В такому випадку нерівність (6.26) виконується автоматично. Для нерівності (6.27) одержуємо

$$\left.\begin{aligned} b < 0 \Rightarrow \frac{1}{b} < 0 \\ b_1 < 0 \Rightarrow \frac{1}{b_1} > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{b_1},$$

таким чином, воно також виконується автоматично.

То же має місце й для нерівностей (6.22) і (6.25), оскільки, якщо $D(p)$ — убутна функція, то

$$\frac{dD}{dp} < 0 \Rightarrow \left(\frac{dD}{dp}\right)^{-1} < 0,$$

а якщо $S(p)$ — зростаюча функція, то

$$\frac{dS}{dp} > 0 \Rightarrow \left(\frac{dS}{dp}\right)^{-1} > 0,$$

отже, обоє нерівності з очевидністю виконуються.

Таким чином, припущення Вальраса й Маршалла дають однаковий результат у нормальному випадку.

Розглянемо тепер динаміку поводження ціни, тобто питання про асептичної стійкості. В відповідності із припущенням Вальраса одержуємо

$$\dot{p} = f(D(p) - S(p)),$$

де f — функція надлишкового попиту, має той же знак, що й надлишковий попит, і $f(0) = 0$, тобто нульовий надлишковий попит означає, що система перебуває в рівновазі $f'(0) > 0$, тобто при переході від негативних до позитивних значень функція зростає.

Для рішення диференціального рівняння (6.28) необхідно знати точний вид функцій f, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{S}$. Для спрощення розрахунків проведемо лінеаризація функцій, розкладаючи з у ряд Тейлора до першого ступеня в околиці крапки рівноваги $(\boldsymbol{D} = \boldsymbol{S},\ \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p_e})$ Одержуємо

$$\dot{p} = c(D(p) - S(p)) = c(b(p - p_e) + D_e - b_1(p - p_e) + S_e),$$

де

$$c = f'(0),\ b = \left(\frac{dD}{dp}\right)_{p=p_e},\ b_1 = \left(\frac{dS}{dp}\right)_{p=p_e}.$$

В стані рівноваги $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{S_e}$, тому-що

$$\dot{p} = c(b - b_1)(p - p_e); \tag{6.30}$$

$$\dot{p} - c(b - b_1)p = -c(b - b_1)p_e.$$

Цьому рівнянню відповідає однорідне рівняння

$$\dot{p} - c(b - b_1)p = 0 \tag{6.31}$$

з характеристичним коренем

$$\lambda = c(b - b_1). \tag{6.32}$$

Загальне рішення рівняння (6.31) будемо шукати у вигляді:

Підставляючи вираження (6.34) в рівняння (6.31), отримаємо

$$A'(t)e^{c(b-b_1)t} + A(t)c(b - b_1)e^{c(b-b_1)t} - c(b - b_1)e^{c(b-b_1)t} = -c(b - b_1)p_e,$$

$$A'(t) = -c(b - b_1)p_e e^{-c(b-b_1)t},$$

$$A(t) = p_e e^{-c(b-b_1)t} + C.$$

Отже, для функції ціни $\boldsymbol{p(t)}$ отримуємо

$$p(t)=p_e+Ce^{c(b-b_1)t},$$

$$p(0)=p_0=p_e+Ce^0 \Rightarrow$$

де константу $\boldsymbol{C}$ знаходимо з умови $p(t)=A(t)e^{c(b-b_1)t}$.

$$C=p_0-p_e.$$

Константа *C* дорівнює первісному відхиленню від станів рівноваги.

Таким чином, остаточно маємо

$$p(t)=(p_0-p_e)e^{c(b-b_1)t}+p_e.$$

Рівновага є асимптотичними стійким, якщо при збільшенні $\boldsymbol{t}$ ціна $\boldsymbol{p(t) a p_e}$**.** Це можливо, якщо відхилення $\Delta \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p(t)-p_e}$ □*0,* тобто, з формули (6.37) $(p_0 - p_e)e^{c(b-b_1)t} \rightarrow 0$, можливо тільки, якщо $\boldsymbol{c(b-b_1)} < 0$. Оскільки $\boldsymbol{c = f(0) > 0}$, то одержуємо умову збіжності $\boldsymbol{b - b_1} < 0$, що в точності збігається з умовою (6.26).

Аналогічно для припущення Маршалла маємо диференціальні рівняння

$$\dot{q}=g(p_D(q)-p_S(q)),$$

де g має той же знак, що і її аргумент, $g(0) = 0$, $g'(Q) > 0$.

Далі одержуємо

$$q(t)=Ae^{k\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{b_1}\right)t}+q_e,$$

$$k=g'(0)>0,\quad A=q(0)-q_e.$$

Умова стійкості має той самий вид, що і нерівність (6.27).

Ті ж результати можна отримати і використовуючи теорему Лагранжа стійкістю. Достатньо провірити стійкість рішення однорідного рівняння (6.32). Розглянемо функцію $\boldsymbol{V(p)=p^2}$**.** Для неї маємо

$$V(0)=0;$$

$$V(p)>0,\ p\neq 0;$$

$$V'(p)=2p\cdot p'=p\cdot p\cdot c(b-b_1)=p^2\cdot c(b-b_1).$$

Для того щоб виконувалася третя умова теореми, необхідно, щоб $b - b_1 < 0$, що збігається з умовою (6.26).

Зауваження.

1) В «простих ненормальних» ситуаціях, тобто коли одна з функцій попиту або пропозиції «ненормальна», припущення Вальраса й Маршалла дають суперечливі умови стійкості; а в «зовсім ненормальних» ситуаціях (обидві функції ненормальні) - однакові.

2) Стійкість рівноваги істотно ускладнюється, якщо розглядати запізнювання реакції попиту (або пропозиції) на зміну ціни. Такі процеси описуються павутиноподібною моделлю.

Проведемо ***аналіз стійкості загальної рівноваги Вальраса.*** В загальному випадку функції попиту та пропозиції кожного товару залежать від цін на всі товари, тобто

$$E_j = E_j(p_1,\dots,p_m), \quad j=\overline{1,m}, \tag{6.40}$$

де $\boldsymbol{E}$ — надлишковий попит на товар $\boldsymbol{j}$.

Стан рівноваги означає, що надлишковий попит на всі товари дорівнює нулю. Цьому стану відповідає вектор рівноважних цін $\boldsymbol{p^e}$.

Назвемо стійкість ***недосконалої,*** якщо при зміні ціни товару $\boldsymbol{j}$ всі інші ціни змінюються так, щоб на всіх інших ринках рівновага відновилася.

Умова стійкості означає, що ціна викликає зміну власного надлишкового попиту в протилежному напрямку, тобто

$$\frac{dE_j}{dp} < 0. \tag{6.41}$$

Знайдемо умову недосконалої стійкості. В точці рівноваги маємо

$$dE_j = a_{j1}dp_1 + a_{j2}dp_2 + \dots + a_{jm}dp_m, \quad j=\overline{1,m}, \tag{6.42}$$

де $a_{jk} = \left.\frac{dE_j}{dp_k}\right|_{p^e}$

Припустимо, що ціна товару $\boldsymbol{j}$ змінилася та інші ціни також змінилися відповідно до умови недосконалої стійкості. Тоді одержуємо систему з $\boldsymbol{m}$ рівнянь із $\boldsymbol{m}$ невідомими $\boldsymbol{dp_i}$:

$$\begin{cases} dE_j = a_{j1}dp_1 + .. + a_{jm}dp_m \\ dE_k = a_{j1}dp_1 + ... + a_{jm}dp_m = 0, \ \ k = \overline{1,m}, \ \ k \neq j \end{cases} \quad (6.43)$$

Вирішуючи систему отримаємо

$$dp_j = dE_j \frac{D_{jj}}{D}, \quad (6.44)$$

де $D = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{m1} \\ .... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mm} \end{vmatrix}$ - якобіан функції надлишкового попиту,

D_{jj} – головний мінор *(m – 1)-го* порядку із *D.*

Із (6.44) отримуємо

$$\frac{dE_j}{dp_j} = \frac{D}{D_{jj}}, \quad (6.45)$$

разом з (6.41) одержуємо $\frac{D}{D_{jj}} < 0$ отже, *D* і D_{jj} повинні бути різного знака для всіх $\boldsymbol{j}$.

Назвемо стійкість ***досконалу,*** якщо при зміні ціни одного товару виконується одне із двох умов:

1) всі інші ціни залишаються незмінними;

2) підмножина з ***k*** інших цін відновлює рівновага, а інші (***m*** - ***k*** - **1**) залишаються незмінними.

Стійкість у першому випадку означає, що

$$\begin{cases} dE_j = a_{jj}dp_j \\ dE_k = a_{kj}dp_j, \ \ k = \overline{1,m}, \ \ k \neq j \end{cases} \quad (6.46)$$

звідки одержуємо, що

$$\frac{dE_j}{dp_j} = a_{jj},$$

і, отже,

$$a_{jj} < 0. \quad (6.47)$$

Для визначення умов стійкості в другому випадку припустимо спочатку, що ціна $\boldsymbol{p_j}$ змінюється, а інша ціна $\boldsymbol{p_h}$ змінюється так, щоб відновити рівновага на ринку ***h.*** Тоді одержуємо

$$\begin{cases} dE_j = a_{jj}dp_j + a_{jh}dp_h \\ dE_h = a_{hj}dp_j + a_{hh}dp_h = 0 \end{cases} \quad (6.48)$$

Розв’язуючи (6.48) відносно dp_o**,** получаем

$$dp_j = \frac{\begin{vmatrix} dE_j & a_{jh} \\ 0 & a_{hh} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{jj} & a_{jh} \\ a_{hj} & a_{hh} \end{vmatrix}} = dE_j \frac{a_{hh}}{\begin{vmatrix} a_{jj} & a_{jh} \\ a_{hj} & a_{hh} \end{vmatrix}}.$$

далі,

$$\frac{dE_j}{} = \frac{\begin{vmatrix} a_{jj} & a \\ a_{hj} & a \end{vmatrix}}{}$$

В силу (6.41) и (6.47) отримаєм

$$\begin{vmatrix} a_{jj} & a_{jh} \\ a_{hj} & a_{hh} \end{vmatrix} > 0.$$

Умова (6.51) повинне виконуватися для будь-якої пари (j, k), оскільки в процесі можуть брати участь будь-які два ринки. Таким чином, всі головні мінори другого порядку повинні бути негативними.

Продовжуючи далі, одержимо, що для зробленої стійкості необхідно й досить, щоб всі головні мінори порядку r з визначника D мали знак $(-1)^r$, $r=1, \ldots, m$.

Для з'ясування питання про асимптотичної стійкості розглянемо систему

$$\dot{p}_j = F_j(E_j(p_1, \ldots, p_m)), \quad j = \overline{1,m}, \qquad (6.52)$$

де функції F_j мають той же знак, що й аргумент, і

Проведем лінеарізацію рівнянь в системі в перетині точки рівноваги:

$$(p_j - p_j^e)' = k_j a_{j1}(p_1 - p_1^e) + k_j a_{j2}(p_2 - p_2^e) + \ldots + k_j a_{jm}(p_m - p_m^e),$$
$$j = \overline{1,m}.$$

$$F_j(0) = 0; \quad \left.\frac{dF_j}{dE_j}\right|_{E_j=0} > 0.$$

Де $k_j = \left.\frac{dF_j}{dE_j}\right|_{E_j=0}$, $a_{jk} = \frac{\partial E_j}{\partial p_k}$, p_j^e ціна рівноваги.

$$b_{jk} = k_j a_{jk},$$

Позначимо
$$\bar{p}_j = p_j - p_j^e.$$

Тоді система може бути переписана у вигляді

$$\dot{\bar{p}} = B\bar{p}. \qquad (6.54)$$

Загальне рішення системи (6.54) має вигляд

$$\bar{p}(t) = \sum c_i K_i e^{\lambda_i t}, \qquad (6.55)$$

де λ_i, K_i — відповідно власні числа й власні вектори матриці B.

Асимптотична стійкість означає, що $\lim_{n\to\infty} \quad \bar{p}_j, = 0$ і дійсні частини всіх власних чисел у рішенні (6.55) повинні бути негативними.

В частці випадку двох ринків одержуємо характеристичне рівняння для системи

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0.$$

Умови зробленої стійкості (6.47) і (6.51) у такому випадку є достатніми умовами й асимптотичної стійкості. Однак для моделей більше високої розмірності ці умови не є ні необхідними, ні достатніми, крім особливих випадків: симетрія ($a_{ij} = a_{ji}$); чиста взаємозамінність ($a_{ij} < 0$, $a_{ji} > 0$); вплив, що вирівнює, своєї ціни ($a_{ii} < 0$).

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1) Основні положення моделі Харрода - Домара.
2) Поняття технологічного темпу приросту випуску продукції.Визначення найкращого темпу приросту споживання.
3) Основні припущення моделі В. Леонтьева.
4) Загальний вид рівнянь динамічної моделі В. Леонтьева.
5) Поняття про допустимість стану й траєкторії моделі В. Леонтьева.
6) Рішення моделі В. Леонтьева у випадку відсутності екзогенного споживання й з його обліком.
7) Розходження в поводженні моделі В. Леонтьева при зміні структурних коефіцієнтів моделі.
8) Дискретна й безперервна моделі попиту та пропозиції.
9) Методи рішення дискретної й безперервної моделі попиту та пропозиції.
10) Модель рівноваги Вальраса.

11) Стійкість загальної рівноваги Вальраса.

Тема 6. Нелінійні динамічні моделі

МОДЕЛЬ ЛОТКИ-ВОЛЬТЕРРА ТА АНАЛІЗ СКЛАДОВИХ МОДЕЛІ

Велика кількість нелінійних моделей економічних систем характеризується тим, що динаміка розвитку фазових змінних носить коливальний характер, відмінний від гармонійного. Одним із найбільш відомих прикладів таких систем є модель Лотки-Вольтерра, що описує співіснування двох видів – хижаків та жертв. Це система двох звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, яка описує кінетику чисельності популяції з одним типом хижаків і одним типом жертв. Характерною особливістю рівнянь є те, що їхнім розв’язком є автоколивання. Рівняння вперше запропонував Альфред Джеймс Лотка (1925 р), який використовував її для опису динаміки взаємодіючих біологічних популяцій. Трохи пізніше і незалежно від Лотки аналогічні (і більш складні) моделі були розроблені італійським математиком Віто Вольтерра (1926 р), глибокі дослідження якого в галузі екологічних проблем заклали фундамент математичної теорії біологічних співтовариств або так званої математичної екології.

Нехай існують два біологічних види, які спільно мешкають у деякому ізольованому місці. Навколишнє середовище вважається стаціонарним та забезпечує вид «жертв» усім необхідним для існування. Інший вид «хижаки» також знаходиться в стаціонарних умовах, але живиться лише представниками першого виду (жертвами). Такими простими моделями можна приблизно описувати взаємодію популяцій карасів та щук, зайців та вовків, мікробів та антитіл, лемінгів та песців.

Розглянемо просту модель розвитку популяцій хижаків та жертв. Для спрощення моделі будемо вважати їх чисельності неперервними функціями часу. До обмежень пропонованої моделі також відноситься те, що в ній не враховані просторові параметри взаємодії хижаків та жертв, залежності між величинами вважаються лінійним. Також ця модель не враховує існуючої еволюції видів жертв та хижаків.

Нехай x_1 – кількість осіб першого виду (жертви), x_2 – кількість осіб другого виду (хижаки).

dx_1/dt – швидкість зміни кількості жертв,

dx_2/dt – швидкість зміни кількості хижаків.

Тоді:

$\dfrac{dx_1/dt}{x_1}$ – швидкість зростання кількості жертв у розрахунку на 1 особину,

$\dfrac{dx_2 / dt}{x_2}$ – швидкість зростання кількості хижаків у розрахунку на 1 особину.

Нелінійна динамічна система буде мати такий вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1 / dt}{x_1} = a - bx_2 \\ \dfrac{dx_2 / dt}{x_2} = -c + dx_1 \end{cases} \tag{6.0}$$

де $a, b, c, d > 0$.

a – коефіцієнт, що визначає питому швидкість розмноження жертв;

b – втрати від хижаків;

c – швидкість вимирання хижаків за відсутністю жертв;

d – вдалість полювання хижаків.

У рівняння входять такі процеси: розмноження жертв та їхня гибель в результаті поїдання хижаками, розмноження та вимирання хижаків. Вважається, що розмноження хижаків пропорційне кількості їжі, тобто, кількості потенційних жертв у популяції.

Перше рівняння моделі описує зміну з часом кількості жертв. Зміна кількості dx жертв за час dt буде відбуватися внаслідок трьох причин:

1) оскільки обмежень у кількості ресурсів їжі для жертв немає, то вони будуть необмежено розмножуватися пропорційно кількості відповідно до рівняння $\dfrac{dx_1}{dt} = x_1 a$. Коефіцієнт пропорційності a – узагальнений коефіцієнт, який залежить від умов життя та народжуваності жертв;

2) зменшення кількості жертв буде відбуватися внаслідок вимирання популяції: кількість таких померлих жертв буде пропорційною загальній кількості існуючих жертв (тобто кількість жертв буде зменшуватися внаслідок поїдання хижаками);

3) зміна кількості жертв внаслідок природних причин, залежно від умов навколишнього середовища, народжуваність та смертність жертв за відсутності хижаків.

Друге рівняння моделі описує зміну кількості хижаків. Оскільки хижаки живляться тільки жертвами, то без присутності жертв популяція хижаків буде зменшуватися. Число dy_1 померлих без їжі за час dt хижаків буде пропорційним кількості хижаків: $\dfrac{dx_2}{dt} = -x_2 c$, де коефіцієнт c – показник пропорційності, отриманий аналогічно такому ж показнику для першого рівняння моделі.

Але за присутності жертв хижаки зможуть збільшувати свою популяцію пропорційно і своїй кількості, і кількості жертв.

Система рівнянь Лотки-Вольтерра знаходить застосування не тільки в природі, але дуже часто використовується в економічних системах. Наприклад, модель динаміки розвитку популяції відношення міського населення до країни і відношення середнього доходу міського населення до середнього по країні. Модель виглядає таким чином:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_i(-\alpha_i - \alpha_i + \alpha y_i) \\ \dot{y}_i &= y_i(\beta_i - \beta_i x_i) \end{aligned},$$

де i – зона, що розглядається; x_i – населення; y_i – середній дохід; α і β – динамічні параметри.

Іншим прикладом є конкуренція на фондовій біржі, де існують два види конкуренції: між компаніями, що торгуються на біржі через їх ціну, а також між інвесторами, що полюють за компаніями.

6.1 СУТНІСТЬ ПОНЯТТЯ «ГРАНИЧНИЙ ЦИКЛ», ФАЗОВИЙ ПОРТРЕТ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ ІЗ ГРАНИЧНИМ ЦИКЛОМ

Модель Лотки-Вольтерра нестійка до збурень, оскільки її стаціонарний стан – центр (структурно не стійкий). Існує інший вид моделей, в яких виникають незгасаючі коливання – це моделі, що мають на фазових портретах граничні цикли. Така модель існує для системи конкуруючих видів – це нелінійна модель системи «хижак-жертва» була запропонована Холлінгом та Теннером.

Отже, розглянемо приклад динамічної системи «хижак-жертва», що має ізольований граничний цикл. *Граничний цикл* – це ізольована замкнута траєкторія, до якої прагнуть усі фазові траєкторії системи, що перебувають всередині й зовні неї (рис. 6.1):

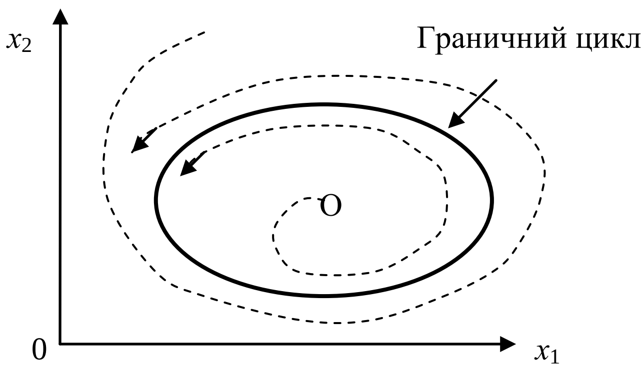


Рисунок 6.1 – Фазовий портрет динамічної системи із граничним циклом

6.2 ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДОВИХ МОДЕЛІ ХОЛЛІНГА-ТЕННЕРА

Із фізичної точки зору, граничним циклам відповідають автоколивальні режими. Граничні цикли можливі тільки в нелінійних системах. При наявності стійкого граничного циклу властивості сталих коливань визначаються тільки системою.

Швидкість зростання популяції жертв dx_1/dt в цій моделі дорівнює сумі трьох величин:

1) швидкості розмноження за відсутності хижаків: rx_1;

2) впливу міжвидової конкуренції за їжу при обмежених ресурсах (для випадку конкуруючих виробників цей вплив обмежених сировинних ресурсів): $r \cdot x_1 \frac{x_1}{k}$;

3) впливу хижаків, у припущенні, що хижак перестає вбивати, коли насичується: $w \cdot x_2 \frac{x_1}{d + x_1}$.

Швидкість зростання популяції хижаків dx_2/dt будується так само, як у моделі Лотки-Вольтерра, в припущенні, що жертви зустрічаються рідко. Якщо для підтримки життя одного хижака потрібно j жертв, то популяція з x_1 жертв зможе забезпечити їжею x_1/j хижаків. Модель зростання популяції хижаків, у якій їх чисельність не може перевищити цю критичну величину, має вигляд:

$$\frac{dx_2}{dt} = x_2 (s - \frac{sj}{x_1} x_2).$$

Отже, маємо модель Холлінга-Теннера:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= r \cdot x_1 \left(1 - \frac{x_1}{k}\right) - w \cdot x_2 \frac{x_1}{d + x_1} \\ \frac{dx_2}{dt} &= s \cdot x_2 (1 - \frac{j}{x_1} x_2) \end{aligned},$$

де $r, s, k, d, j > 0$.

Приклад такої динамічної системи має вигляд (5.1):

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1/dt}{x_1} = \left(r - \dfrac{x_1}{k}\right) - \dfrac{wx_2}{d + x_1} \\ \dfrac{dx_2/dt}{x_2} = s\left(1 - j\dfrac{x_2}{x_1}\right) \end{cases}, \tag{6.1}$$

де x_1 – кількість жертв; x_2 – кількість хижаків, життя яких може бути підтримано популяцією жертв чисельністю x_1 ($x_1 > 0$; $x_2 > 0$ – визначаються природою змінних);

$\dfrac{dx_1 / dt}{x_1}$ – швидкість зростання кількості жертв в розрахунку на 1 особину;

$\dfrac{dx_2 / dt}{x_2}$ – швидкість зростання кількості хижаків в розрахунку на 1 особину;

r – коефіцієнт природного приросту жертв;

k – коефіцієнт, що відображає внутрішньовидову конкуренцію між жертвами;

w, d – коефіцієнти, що відображають насичення апетиту хижаків;

j – кількість жертв, необхідних для підтримки життя одного хижака;

s – коефіцієнт природного приросту хижаків.

6.3 АНАЛІЗ ТИПІВ ОСОБЛИВИХ ТОЧОК ТА ЕТАПИ ПОБУДОВИ ФАЗОВОГО ПОРТРЕТУ МОДЕЛІ ХОЛЛІНГА-ТЕННЕРА

Представимо систему (6.1) у вигляді (6.2):

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1\left(r - \dfrac{x_1}{k}\right) - \dfrac{wx_1x_2}{d + x_1} \\ \dfrac{dx_2}{dt} = sx_2\left(1 - j\dfrac{x_2}{x_1}\right) \end{cases} \tag{6.2}$$

Знайдемо особливі точки системи (5.3):

$$\begin{cases} x_1\left[\left(r - \dfrac{x_1}{k}\right) - \dfrac{wx_2}{d + x_1}\right] = 0 \\ sx_2\left(1 - j\dfrac{x_2}{x_1}\right) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r - \dfrac{x_1}{k} - \dfrac{wx_2}{d + x_1} = 0 \\ 1 - j\dfrac{x_2}{x_1} = 0 \end{cases} \tag{6.3}$$

Виразимо x_2 з першого й другого рівняння системи (6.3), одержимо (6.4):

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{1}{w}(d + x_1)\left(r - \dfrac{x_1}{k}\right) \\ x_2 = \dfrac{1}{j}x_1 \end{cases} \tag{6.4}$$

Зобразимо графічно отримані залежності x_2 від x_1, точка перетину яких дасть нам особливу точку вихідної системи (рис. 6.2).

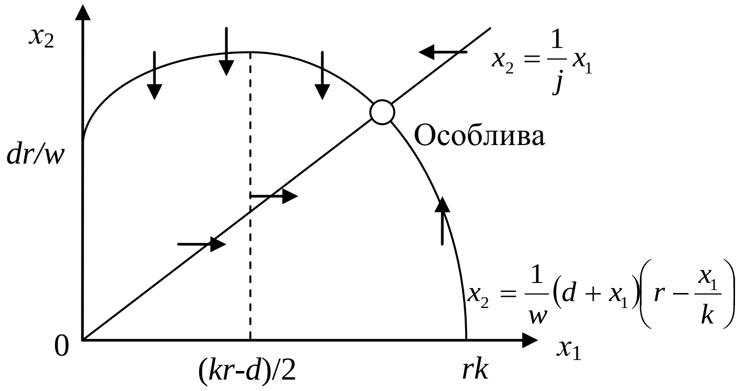


Рисунок 6.2 – Визначення координат особливої точки системи

Зображені на рис. 6.2 лінії, точка перетину яких є особливою точкою, називаються ізоклінами вихідної системи.

Ізокліна – геометричне місце точок фазової площини, в яких фазові траєкторії мають однаковий нахил.

Виконаємо перевірку, чи дійсно точки (rk, 0) та (0, dr/w) є точками перетину ізокліни $x_2 = \frac{1}{w}(d + x_1)\left(r - \frac{x_1}{k}\right)$ з осями координат.

1. Точка (rk, 0):

$x_1 = rk$, тоді $x_2 = \frac{1}{w}(d + rk)\left(r - \frac{rk}{k}\right) = 0$.

2. Точка (0, dr/w):

$x_1 = 0$, тоді $x_2 = \frac{1}{w}(d + 0)\left(r - \frac{0}{k}\right) = \frac{dr}{w}$.

3. Для знаходження точки максимуму рівняння $x_2 = \frac{1}{w}(d + x_1)\left(r - \frac{x_1}{k}\right)$, знайдемо, чому буде дорівнює x_1 за умови $\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = 0$:

$$x_2 = \frac{dr}{w} + \frac{x_1}{w}\left(\frac{rk - d}{k}\right) - \frac{x_1^2}{kw} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial x_2}{\partial x_1} = -2\frac{x_1}{kw} + \frac{1}{w}\left(\frac{rk - d}{k}\right) = 0 \quad \rightarrow$$

$$x_1 = \frac{1}{w}\left(\frac{rk - d}{k}\right)\frac{kw}{2} = \frac{rk - d}{2}$$

4. Знайдемо координати особливої точки. Із системи (6.4) будемо мати:

$$x_1 = \frac{j}{w}(d + x_1)\left(r - \frac{x_1}{k}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{djr}{w} + \frac{jr}{w}x_1 - \frac{dj}{wk}x_1 - \frac{jx_1^2}{wk} - x_1 = 0 \quad \rightarrow$$

$$-jx_1^2 + x_1\left(jrk - dj - wk\right) + djrk = 0$$

Розв'язуючи отримане квадратне рівняння, знаходимо координати особливої точки (6.5):

$$x_1^* = \frac{-(jrk - dj - wk) \pm \sqrt{(jrk - dj - wk)^2 + 4j^2 drk}}{-2j}; \; x_2^* = \frac{x_1^*}{j} \quad (6.5)$$

Лінеаризуємо систему в околі особливої точки:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1\left(r - \frac{x_1}{k}\right) - \frac{wx_1x_2}{d + x_1} \\ f_2(x_1, x_2) = sx_2\left(1 - j\frac{x_2}{x_1}\right) \end{cases}$$, з цієї системи маємо:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = r - \frac{2x_1}{k} - \frac{wx_2(d + x_1) - wx_1x_2}{(d + x_1)^2},$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\frac{wx_1}{d + x_1},$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{sjx_2^2}{x_1^2},$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = s - \frac{2sjx_2}{x_1}.$$

Підставивши знайдені координати особливої точки в отримані вирази, склавши характеристичне рівняння й розрахувавши його корені, одержуємо, що тип особливої точки – нестійкий фокус.

Щоб проаналізувати можливість існування замкнутої траєкторії, розглянемо область, обмежену траєкторією, що починається в точці K та ізокліною, що виходить із цієї точки (рис. 6.3).

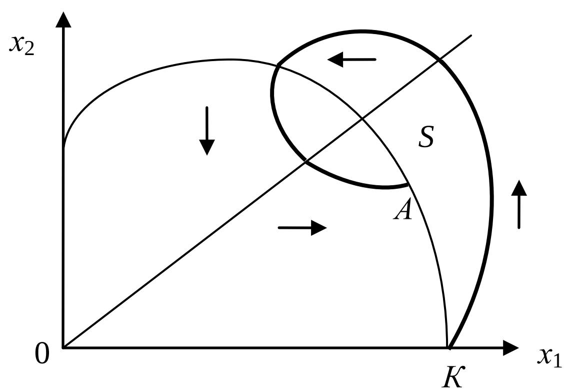


Рисунок 6.3 – Аналіз поводження системи

У випадку, коли особлива точка системи є нестійким фокусом, аналіз поводження траєкторій системи дає такі результати: ті траєкторії, які потрапляють в область *S* через відрізок ізокліни *АК* (інакше вони туди потрапити не можуть), з ростом часу не зможуть покинути цю область, тому що з відрізком траєкторії вони не можуть перетнутися, а з відрізком ізокліни *АК* вони можуть перетнутися лише в напрямку протилежному тому, що має місце.

Отже, всі траєкторії, що попадають всередину області *S* повинні залишатися в ній. Ці траєкторії не можуть притягуватися особливою точкою, що перебуває всередині області, тому що розгляд виконується для нестійкого фокуса. Тому всередині області повинна існувати деяка притягуюча множина. Оскільки, інших особливих точок, крім нестійкого фокуса, всередині області немає, то в області *S* повинен існувати граничний цикл, до якого іззовні будуть прагнути всі траєкторії, що починаються за межами області *S*, а зсередини – всі траєкторії, що починаються в околі особливої точки.

Головна властивість цієї моделі полягає в тому, що врешті решт коливання задаються граничним циклом фазового портрету, який може бути стійким. Він визначає амплітуду коливань, яка встановлюються у стаціонарному режимі роботи системи. При цьому коливання можуть як затухати з часом, так і зростати, наближаючись до стаціонарних коливань.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Назвіть основні положення моделі конкуруючих видів Холлінга-Тенерра.
2. Дайте визначення поняття «граничний цикл».
3. Охарактеризуйте складові моделі Холлінга-Теннера.
4. Проаналізуйте особливі точки моделі Холлінга-Теннера.
5. Назвіть етапи побудови фазового портрету моделі Холлінга-Теннера.
6. Проаналізуйте поводження системи в околі особливих точок.

Тема 7. Статичні виробничі функції. Функції виробничих витрат.

Виробничими функціями називаються економіко-математичні моделі, що зв'язують змінні величини витрат з величинами випуску. Поняття "витрати" і "випуск" мають відношення, як правило, до процесу виробництва продукції; це пояснює походження назви даного типу моделей. Якщо розглядається економіка регіону або країни в цілому, то розробляються агреговані виробничі функції, в яких випуском служить показник сукупного суспільного продукту. Приватними випадками виробничих функцій є ***функції випуску*** (залежність обсягу виробництва від наявності або споживання ресурсів), ***функції витрат*** (зв'язок обсягу продукції та витрат виробництва), ***функції капітальних витрат*** (залежність капітальних вкладень від виробничої потужності створюваних підприємств) та ін.

Широко використовуються мультиплікативні форми подання виробничих функцій. В самому загальному вигляді мультиплікативну виробнича функція записується наступним чином:

$$P = A \cdot X_1^{\alpha} \cdot X_2^{\beta} \cdot \ldots \cdot X_n^{\gamma}. \qquad (7.16)$$

Тут коефіцієнт $\boldsymbol{A}$ визначає розмірність величин і залежить від вибраних одиниць вимірювання витрат і випуску. Співмножники $\boldsymbol{X_i}$ представляють впливають фактори і можуть мати різне економічний зміст в залежності від того, які фактори впливають на величину випуску $\boldsymbol{P}$. Статечні параметри α, β,..., γ показують ту частку в прирості кінцевого продукту, яку вносить кожний з факторів-співмножників; вони називаються ***коефіцієнтами еластичності виробництва щодо витрат*** відповідного ресурсу і показують, на скільки відсотків зростає випуск при збільшенні витрат даного ресурсу на один відсоток.

Сума коефіцієнтів еластичності $E = \alpha + \beta + \ldots + \gamma$ має важливе значення для характеристики властивостей виробничої функції. Припустимо, що витрати всіх видів ресурсів зростають в $\boldsymbol{k}$ разів. Тоді величина випуску згідно з (7.16) складе

$$P_1 = A \cdot (k \cdot X_1)^{\alpha} \cdot (k \cdot X_2)^{\beta} \cdot \ldots \cdot (k \cdot X_n)^{\gamma} = A \cdot k^E \cdot P.$$

Отже, якщо $\boldsymbol{E} = \alpha + \beta + ... + \gamma = 1$, то при збільшенні витрат в $\boldsymbol{k}$ разів випуск зростає також в $\boldsymbol{k}$ разів; виробнича функція в цьому випадку є лінійно однорідною. При $\boldsymbol{E} > 1$ таке ж збільшення витрат призведе до зростання виробництва більш ніж у $\boldsymbol{k}$ разів, а при $\boldsymbol{E} < 1$ - менш ніж у $\boldsymbol{k}$ разів (так званий ефект масштабу).

В якості прикладу мультиплікативних виробничих функцій можна привести широко відому виробничу функцію Кобба - Дугласа:

$$N = A \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta}, \qquad (7.17)$$

де:

N - національний доход;

A - коефіцієнт розмірності;

L, K - обсяги прикладеного праці та основного капіталу відповідно;

α і β - коефіцієнти еластичності національного доходу з праці ***L*** та капіталу ***K.***

Ця функція застосовувалася американськими дослідниками при аналізі розвитку економіки США в 30-х роках минулого століття.

Ефективність використання ресурсів характеризується двома основними показниками: ***середня (абсолютна) ефективність*** ресурсу

$$\mu_i = \frac{P(X)}{X_i} \qquad (7.18)$$

і гранична ефективність ресурсу

$$\nu_i = \frac{\partial P(X)}{\partial X_i}. \qquad (7.19)$$

Економічний сенс величини m_i очевидний; залежно від типу ресурсу вона характеризує такі показники, як продуктивність праці, фондовіддача та ін Величина v_i показує граничний приріст випуску продукту при збільшенні витрат i-го ресурсу на "малу одиницю" (на 1 руб., на 1 нормо-година і т. д.).

Безліч точок n-вимірного простору факторів виробництва (ресурсів), що задовольняють умові постійності випуску ***P(X) = C,*** називається ***изоквантой.*** Найважливішими властивостями ізоквант є наступні: ізокванти не перетинаються один з одним; більшою величиною випуску відповідає більш віддалена від початку координат ізокванта; якщо всі ресурси абсолютно необхідні для виробництва, то ізокванти не мають спільних точок з координатними гиперплоскостями і з осями координат.

У матеріальному виробництві велике значення набуває поняття ***взаємозамінності ресурсів.*** У теорії виробничих функцій можливості заміщення ресурсів характеризують виробничу функцію з точки зору різних комбінацій затрат ресурсів, що приводять до одного і того ж рівня випуску продукту. Пояснимо це на умовному прикладі. Нехай виробництво певної кількості сільгосппродукції вимагає 10 працівників та 2 т добрив, а при внесенні в грунт тільки 1 т добрив потрібно вже 12 працівників для отримання того ж врожаю. Тут 1 т добрив (перший ресурс) замінюється працею двох працівників (другий ресурс).

Умови еквівалентної взаємозамінності ресурсів в деякій точці $X^0 = (X_1^0, X_2^0, \ldots, X_n^0)$ випливають з рівності $\boldsymbol{dP} = 0$:

$$\sum_{i=1}^{n} \nu_i(X^0) dX_i = 0.$$

Звідси ***гранична норма заміщення*** (еквівалентної замінності) будь-яких двох ресурсів $\boldsymbol{k}$ і $\boldsymbol{l}$ задається формулою

$$\sigma_{kl} = \frac{dX_k}{dX_l} \quad \frac{\nu_k(X^0)}{\nu_l(X^0)}. \qquad (7.20)$$

Гранична норма заміщення як показник виробничої функції характеризує відносну ефективність допускають взаємну заміну факторів виробництва при русі вздовж ізокванти. Наприклад, для функції Кобба - Дугласа гранична норма заміщення витрат праці витратами капіталу, тобто виробничими фондами, має вигляд

$$\sigma_{KL} = \frac{dK}{dL} \quad \frac{\alpha \cdot K}{\beta \cdot L}. \qquad (7.21)$$

Знак мінус у правих частинах формул (7.20) і (7.21) означає, що при фіксованому обсязі виробництва збільшення одного з взаємозамінних ресурсів відповідає зменшення іншої.

Приклад 7.1. Розглянемо приклад виробничої функції Кобба - Дугласа, для якої відомі коефіцієнти еластичності випуску по праці і капіталу: α = 0,3; β = 0,7, а також витрати праці і капіталу: ***L*** = 30 тис. чол.; ***До*** = 490 млн грн. В цих умовах гранична норма заміщення виробничих фондів витратами праці дорівнює

$$\tau_{kl} = \frac{0{,}3 \cdot 490 \text{ млн руб}}{0{,}7 \cdot 30 \text{ тыс. чел.}} = 7 \frac{\text{тыс. руб.}}{\text{чел.}} \qquad (7.22)$$

Таким чином, в цьому умовному прикладі в тих точках двовимірного простору (*L*, ***K***), де ресурси праці і капіталу взаємозамінні, зменшення виробничих фондів на 7 тис. грн. може бути компенсовано збільшенням витрат праці на 1 чол., і навпаки.

З поняттям граничної норми заміщення пов'язане поняття ***еластичності заміщення ресурсів.*** Коефіцієнт еластичності заміщення γ_{kl} характеризує відношення відносної зміни співвідношення витрат ресурсів ***k*** і *l* до відносного зміни граничної норми заміщення цих ресурсів:

$$\gamma_{kl} = \frac{d(X_k / X_l)}{X_k / X_l} : \frac{\partial \sigma_{kl}}{\sigma_{kl}} = \frac{d(X_k / X_l)}{\partial \sigma_{kl}} \cdot \frac{\sigma_{kl} X_l}{X_k}. \qquad (7.23)$$

Цей коефіцієнт показує, на скільки відсотків повинно змінитися ставлення між взаємозамінними ресурсами, щоб гранична норма заміщення цих ресурсів змінилася на 1%. Чим вище еластичність заміни ресурсів, тим в більш широких межах вони можуть замінювати один одного. При безкінечної еластичності $(\gamma_{kl} = \pm\infty)$ не існує кордонів взаємозамінності ресурсів. При нульової еластичності заміщення $(\gamma_{kl} = 0)$ можливість заміни відсутня; в цьому випадку ресурси взаємодоповнюють один одного і обов'язково повинні використовуватися в певному співвідношенні.

Розглянемо на додаток до функції Кобба - Дугласа деякі інші виробничі функції, широко використовувані в якості економетричних моделей. ***Лінійна виробнича функція*** має вигляд

$$P = \sum_{i=1}^{n} A_i \, X_i,$$

$\boldsymbol{A_j}$ **-** оцінювані параметри моделі;

***X_j*, - фактори виробництва, взаємозамінні в будь-яких пропорціях (еластичність заміщення $\gamma_{kl} = +\infty$).

Ізокванти цієї виробничої функції утворюють сімейство паралельних гіперплощин в невизначеному ортанті *n*-вимірного простору факторів.

У багатьох дослідженнях застосовуються виробничі функції з постійною еластичністю заміщення:

$$P = A\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\ X_i^{-\rho}\right)^{-n/\rho} \qquad (7.23)$$

Виробнича функція (7.23) є однорідною функцією ступеня ***n*.** Все еластичності заміщення ресурсів рівні між собою:

$$\gamma_{kl} = \gamma = \frac{1}{1+\rho},$$

внаслідок цього дана функція називається ***функцією з постійною еластичністю заміщення (функцією CES).*** Якщо ρ > 0, еластичність заміщення у менше одиниці; якщо -1 < ρ < 0, величина у більше одиниці; при ρ = 0 функція CES перетворюється в мультиплікативну ступеневу виробничу функцію (7.16).

Двофакторна функція ***CES*** має вигляд

$$P = A\left(\cdot\ K\alpha^{\rho} \quad + L\beta^{-\rho}\right)^{-n/\rho}.$$

При ***n*** = 1 і ρ = 0 ця функція перетворюється у функцію типу функції Кобба - Дугласа (7.17).

Крім виробничих функцій з постійними коефіцієнтами еластичності випуску від ресурсів і постійною еластичністю заміщення ресурсів в економічному аналізі і прогнозуванні застосовуються і функції більш загального виду. В якості прикладу можна навести функцію

$$P = A\cdot L^{\alpha}\cdot K^{\beta}\cdot e^{kz}.$$

Ця функція відрізняється від функції Кобба - Дугласа множником e^{kz}, де ***z*** = ***K/L*** - фондоозброєність (капіталоозброєність) праці, і в ній еластичність заміщення приймає різні значення в залежності від рівня капіталоозброєності праці. У зв'язку з цим дана функція відноситься до типу ***виробничих функцій зі змінною еластичністю заміщення (функції VES).***

Перейдемо до розгляду низки питань практичного використання виробничих функцій в економічному аналізі. Макроекономічні виробничі функції застосовуються як інструмент прогнозування обсягів валової продукції, кінцевого продукту і національного доходу, для аналізу порівняльної ефективності факторів виробництва. Так, важливою умовою зростання виробництва і продуктивності праці є збільшення фондоозброєності праці. Якщо для функції Кобба - Дугласа

$$P = A \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta}$$

задати умова лінійної однорідності а + (3 = 1, то із співвідношення між продуктивністю праці (***P/L***) і фондоозброєністю праці (***K/L***)

$$\frac{P}{L} = A \ L^{\alpha-1} \ K^{\beta} = A\left(\frac{K}{L}\right)^{\beta} \qquad (7.24)$$

випливає, що продуктивність праці зростає повільніше фондоозброєності, так як 0 < р < 1. Цей висновок, як і багато інші результати аналізу на основі виробничих функцій, завжди справедливий для статичних виробничих функцій, не враховують вдосконалення технічних засобів праці і якісних характеристик використовуваних ресурсів, тобто без врахування технічного прогресу. Для оцінки параметрів моделі (7.24) її лінеаризують шляхом логарифмування:

$$\ln(P / L) = \ln A \quad \ln \beta(K / L).$$

Поряд з кількісним збільшенням обсягів використовуваних ресурсів (трудових ресурсів, виробничих фондів і т. д.) найважливішим чинником зростання виробництва служить науково-технічний прогрес, що полягає в удосконаленні технічних засобів і технології, підвищення кваліфікації працюючих, поліпшення організації управління виробництвом. Статичні економетричні моделі, в тому числі і статичні виробничі функції, не враховують фактор технічного прогресу, тому використовуються динамічні макроекономічні виробничі функції, параметри яких визначаються шляхом обробки часових рядів. Технічний прогрес зазвичай відображають у виробничих функціях у вигляді тенденції розвитку виробництва, яка залежить від часу.

Наприклад, функція Кобба-Дугласа з урахуванням фактора технічного прогресу набуває наступний вигляд:

$$P = A \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta} \cdot e^{\lambda t}, \qquad (7.25)$$

У моделі (7.25) множник e^{lt} відображає тенденцію розвитку виробництва, пов'язану з науково-технічним прогресом. У цьому множнику ***t*** - час, а l - темп приросту випуску продукції завдяки технічному прогресу. При практичному використанні моделі (7.25) для оцінки її параметрів проводиться лінеаризація шляхом логарифмування аналогічно моделі (7.24):

$$\ln P = \ln A \quad \ln \alpha L \cdot \quad \ln + \beta \quad t. + \lambda$$

Слід особливо відзначити, що при побудові виробничих функцій, як і для всіх багатофакторних економетричних моделей, дуже важливим моментом є правильний відбір факторів, що впливають X. зокрема, необхідно позбуватися явищ мультиколінеарності факторів і явищ автокореляції всередині кожного з них. Це питання детально описано в пункті 7.1 цієї глави. При оцінці параметрів виробничих функцій на основі статистичних спостережень, включаючи часові ряди, основним методом є метод найменших квадратів.

Розглянемо застосування виробничих функцій для економічного аналізу і прогнозування на умовному прикладі з галузі економіки праці.

Приклад 7.2. Нехай обсяг випуску продукції галузі характеризується виробничою функцією типу функції Кобба - Дугласа:

$$P = A \cdot T^{\alpha} \cdot \Phi^{\beta},$$

де:

P - обсяг випуску продукції (млн грн);

T - чисельність працівників галузі (тис. осіб);

Ф - середньорічна вартість основних виробничих фондів (млн грн).

Припустимо, що параметри цієї виробничої функції відомі і дорівнюють: α = 0,3; β = 0,7; коефіцієнт розмірності ***A*** = 0,6 (тис. грн./чол.)$^{0.3}$. Відома також величина середньорічної вартості основних виробничих фондів *Ф* = 900 млн грн. В цих умовах потрібно:

1) визначити кількість працівників галузі, необхідну для випуску продукції в обсязі 300 млн грн.;

2) з'ясувати, як зміниться випуск продукції при збільшенні чисельності працюючих на ***1%*** і тих же обсягах виробничих фондів;

3) оцінити взаємозамінність матеріальних і трудових ресурсів.

Щоб відповісти на запитання першого завдання, линеаризируем цю виробничу функцію шляхом логарифмування по натуральному основи:

$$\ln P = \ln A \qquad \ln \alpha T \cdot \qquad \ln \beta \varPhi,$$

звідки слід, що

$$\ln T = \frac{\ln P - \ln A - \beta \cdot \ln \varPhi}{\alpha} = \frac{\ln(P / A) - \beta \cdot \ln \varPhi}{\alpha}.$$

Підставляючи вихідні дані, отримаємо

$$\ln T = \frac{\ln(300 / 0,6) - 0,7 \cdot \ln 900}{0,3} = 4,83.$$

Звідси $T = e^{4,83} = 125,2$ (тис. чол.).

Розглянемо друге завдання. Так як α + β = 0,3 + 0,7 = 1, дана виробнича функція є лінійно однорідною; у відповідності з цим коефіцієнти аїр є коефіцієнтами еластичності випуску по праці і фондів відповідно. Отже, збільшення числа працюючих галузі на 1% при незмінному обсязі виробничих фондів призведе до зростання випуску продукції на 0,3%, тобто випуск складе 300,9 млн грн.

Переходячи до третього завдання, розрахуємо граничну норму заміщення виробничих фондів трудовими ресурсами. У відповідності з формулою (7.21)

$$\sigma_{\varPhi T} = \frac{\alpha \cdot \varPhi}{\beta \cdot T} = \frac{0,3 \cdot 900}{0,7 \cdot 125,2} = 3,08 \text{ (тыс. руб. / чел.)};$$

Таким чином, за умови взаємозамінності ресурсів для забезпечення сталості випуску (тобто при русі по ізокванті) зменшення виробничих фондів галузі на 3,08 тис. грн. може бути відшкодовано збільшенням трудових ресурсів на 1 чол., і навпаки.

Тема 8. Моделі економічних змін та їх аналіз

8.1 НЕОКЛАСИЧНА МОДЕЛЬ ЗРОСТАННЯ (МОДЕЛЬ СОЛОУ)

Дана модель ґрунтується на таких припущеннях: економіка розглядається як єдине ціле (без структурних підрозділів), виробляється єдиний універсальний продукт, що може споживатися як у невиробничій сфері, так і у виробничій; споживання продукту у виробничій сфері може розглядатися як інвестування. Ця модель досить адекватно відбиває найважливіші макроекономічні аспекти, у тому числі і процес відтворення.

Стан економіки в моделі Солоу задається п’ятьма змінними: Y – національний дохід (кінцевий продукт), K – обсяг капіталовкладень (виробничих фондів), L – величина витрат праці, I – інвестиції, C – невиробниче споживання. Вважаємо, що ресурси (виробничі та невиробничі) використовуються повністю.

Частина національного доходу – фонд накопичення I – використовується на збільшення капіталу для розширення виробництва (інвестування). Інша частина утворює фонд споживання C і задовольняє суспільні потреби.

Річний кінцевий продукт є функцією виробничих фондів та праці:

$$Y = F(K, L). \tag{7.1}$$

Функція $F(K,L)$ задовольняє вимоги до виробничих функцій та вважається лінійно-однорідною: $(F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L))$, де $\lambda > 0$.

Властивість лінійної однорідності виражає ідею Сея про те, що дохід від виробництва розподіляється пропорційно факторам виробництва, а коефіцієнтами пропорційності служать граничні продуктивності факторів.

Отже, $F(K, L)$ – виробнича функція. Нехай $y=f(k)$ – продуктивність праці:

$$y=f(k) = \frac{F(K,L)}{L} = F(\frac{K}{L},1) = F(k,1), \tag{7.2}$$

де $k = \dfrac{K}{L}$ – фондоозброєність; $f'(k) > 0,\ f''(k) < 0$ (як наслідок з визначення виробничої функції).

Кінцевий продукт Y використовується на невиробниче споживання C та інвестиції I, тобто баланс виробництва і розподілу національного доходу має простий вигляд:

$$Y=I + C,$$

Нехай ρ (ρ = const $0 < \rho < 1$) – норма інвестицій (норма накопичення), тобто: $I = \rho Y$, тоді: $C=(1 - \rho)Y$. Нехай має місце природний приріст трудових ресурсів, тобто: $L' = \alpha L$ $(\alpha = const)$. Розв'язуючи це диференціальне рівняння, одержуємо:

$$L(t) = L_0\, e^{\alpha t},$$

де $L_0 = L(0)$ – трудові ресурси на початку спостереження. Отже, робоча сила є зростаючою із заданим постійним темпом α.

Повинні виконуватися очевидні умови:

$$I \geq 0,\ C \geq 0\ . \tag{7.3}$$

Інвестиції використовуються на відновлення (амортизацію) основних фондів та на їх приріст, тобто:

$$I = \beta K + \frac{dK}{dt},$$

де β – норма амортизації.

Тоді

$$\frac{dK}{dt} = \rho Y - \beta K, \quad K(0) = K_0.$$

Отже, динамічна односекторна модель Солоу (найпростіша модель економічного зростання) задається системою рівнянь:

$$C = (1 - \rho)Y. \tag{7.4}$$

$$Y = F(K, L), \tag{7.5}$$

$$L(t) = L_0\, e^{\alpha t}, \tag{7.6}$$

$$\frac{dK}{dt} = \rho Y - \beta K, \quad K(0) = K_0. \tag{7.7}$$

Похідна функції фондоозброєності k за часом має вигляд:

$$\frac{dk}{dt} = \frac{d(K/L)}{dt} = \frac{K'L - KL'}{L^2} = \frac{\rho Y - \beta K}{L} - \frac{K\alpha}{L} = \rho y - \beta k - \alpha k = \rho y - k(\beta + \alpha).$$

Отже,

$$\frac{dk}{dt} = \rho y - k(\beta + \alpha); \tag{7.8}$$

$$k(0) = k_0 = \frac{K_0}{L_0}.$$

Рівняння (7.8) називається *рівнянням неокласичного зростання*. Поведінка макропоказників моделі Солоу повністю визначається рівнянням (7.8) і динамікою (7.6) трудових ресурсів $L(t) = L_0 e^{\alpha t}$.

Рівняння (7.8) – це диференційне рівняння першого порядку зі змінними, що розділяються, і початковою умовою (задача Коші), тому воно має єдиний розв'язок.

8.2 СПРОЩЕНА МОДЕЛЬ НАЦІОНАЛЬНОЇ ЕКОНОМІКИ

У спрощеній моделі національної економіки основними змінними виступають: національний дохід *W*, споживання *S* і державні витрати *E*. Нехай швидкість зміни національного доходу подається формулою:

$$W' = \alpha \cdot W - \beta \cdot S,\ \alpha < 0,\ \beta < 0,$$

швидкість зміни споживання: $S' = \gamma D$, γ>0, де D – різниця між доходом і споживанням.

Нехай *W* – національний дохід, а сумарне споживання дорівнює *S* + *E*, отже:

$$D = W - S - E.$$

Підстановка в рівняння для S' дає $S' = \gamma(W - S - E)$. Передбачається, що урядові витрати постійні і дорівнюють $E=E_0$.

Тоді спрощену математичну модель національної економіки, що розглядається, можна подати як систему двох диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} W' = \alpha \cdot W - \beta \cdot S \\ S' = \gamma(W - S - E_0) \end{cases}. \tag{7.9}$$

Це лінійна динамічна система, що подається неоднорідною системою лінійних диференціальних рівнянь першого порядку.

Розглянемо поведінку системи в часі.

Точку рівноваги системи знаходимо із системи рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha \cdot W - \beta \cdot S = 0 \\ \gamma(W - S - E_0) = 0 \end{cases}. \tag{7.10}$$

Точка рівноваги системи (стаціонарна точка, точка покою) має координати:

$$W' = \frac{\beta E_0}{\beta - \alpha},\ S' = \frac{\alpha E_0}{\beta - \alpha}.$$

У реальній моделі значення *W*, *S* і E_0 не можуть бути від'ємними, тож $\beta > \alpha$. Матриця коефіцієнтів *A* однорідної системи диференціального рівняння (7.9) має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \gamma & -\gamma \end{pmatrix}.$$

Визначимо слід і детермінант матриці *A*: $Tr(A) = \alpha - \gamma$, $Det(A) = \gamma(\beta - \alpha)$.

Характеристичне рівняння однорідної системи (7.9) має вигляд:

$$\lambda^2 -(\alpha-\gamma)\lambda+\gamma(\beta-\alpha)=0. \qquad (7.11)$$

Корені характеристичного рівняння визначаються за формулою:

$$\lambda_{1,2}=\frac{(\alpha-\gamma)\pm\sqrt{(\alpha-\gamma)^2-4\gamma(\beta-\alpha)}}{2} \qquad (7.12)$$

Оскільки, $\beta > \alpha$, то $det(A) > 0$, отже, точка рівноваги системи не може бути сідлом. Якщо $\alpha > \gamma$, то $Tr(A) > 0$, і економічна система є нестійкою. У випадку $\alpha < \gamma$ економічна система є стабільною. Якщо $\alpha = \gamma$, тоді атрактор є граничним циклом.

8.3 МОДЕЛЬ ВАЛЬРАСА РЕГУЛЮВАННЯ ЦІНИ

Для побудови динамічної моделі приймемо декілька припущень.

Припущення 1. Ціна регулюється при надлишковому попиті відповідно до рівняння:

$$\frac{dp}{dt}=\alpha(D-S),\ \alpha>0, \qquad (7.13)$$

де $D = a + bp$ – функція попиту, $S = mN$ – функція пропозиції, p – ціна, N – кількість фірм у галузі промисловості, α – коефіцієнт швидкості регулювання.

Підставивши вирази для функцій попиту і пропозиції в рівняння (7.13), одержуємо:

$$\frac{dp}{dt}=\alpha(a+bp-mN). \qquad (7.14)$$

Припущення 2. Кількість фірм на ринку задовольняє рівнянню:

$$\frac{dN}{dt}\gamma(p-\bar{c}),\quad \gamma>0, \qquad (7.15)$$

де $\bar{c}$ – фіксовані середні витрати виробництва.

Кількість фірм N збільшується ($N > 0$), якщо ціна перевищує середні витрати (доходи додатні), і зменшується, якщо ціна менше середніх витрат (доходи від’ємні).

Рівняння (7.14) та (7.15) складають систему лінійних диференціальних рівнянь першого порядку моделі Вальраса регулювання ціни**.**

Запишемо модель (7.14-7.15) у матричному вигляді:

$$\begin{bmatrix}\dot{p}\\ \dot{N}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha b & -\alpha m\\ \gamma & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p\\ N\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\alpha a\\ -\gamma c\end{bmatrix},$$

де $A=\begin{bmatrix}\alpha b & -\alpha m\\ \gamma & 0\end{bmatrix}$ – матриця коефіцієнтів системи рівнянь моделі.

Проведемо дослідження динаміки поведінки моделі. Визначник матриці коефіцієнтів системи $det\, A = \alpha m\gamma > 0$. Слід матриці коефіцієнтів $Tr(A) = \alpha b$.

Характеристичне рівняння системи (7.14-7.15):

$$\lambda^2 + \alpha b\lambda - \alpha m\gamma = 0. \qquad (7.16)$$

Корені характеристичного рівняння визначаються за формулою:

$$\lambda_{1.2} = \frac{-\alpha b \pm \sqrt{(\alpha b)^2 - 4\alpha m\gamma}}{2}.$$

Параметр $\alpha > 0$, отже, необхідною і достатньою умовою стабільності моделі є умова $\alpha b<0$. Останнє означає, функція попиту повинна бути спадною. Щоб визначити, чи будуть корені характеристичного рівняння дійсними або комплексними, підрахуємо величину $(TrA - 4det\ A)$ – дискримінант характеристичного рівняння (7.12): $TrA - 4det\, A = (\alpha b)^2 - 4(\alpha m\gamma)$.

У загальному випадку не можна визначитися, чи буде ця величина додатною або від'ємною. Це залежить від чисельних значень параметрів α, b, m, γ. Отже, єдине, що можна сказати про динаміку моделі, що розглядається, – кожний розв'язок системи збігається до стаціонарного тоді і тільки тоді, коли $b<0$. При цьому точка рівноваги системи є стійким вузлом або стійким фокусом залежно від того, чи буде величина $(\alpha b)^2 - 4\alpha m\gamma$ додатною або від'ємною.

8.4 ДИНАМІЧНА КЕЙНСІАНСЬКА МОДЕЛЬ

Розглянемо найпростішу Кейнсіанську модель, у якій національний дохід y реагує на надлишковий попит на товар, тобто надлишок інвестицій I над заощадженнями S, а відсоткова ставка реагує на надлишок попиту на гроші $L(Y,r)$ екзогенно визначеною пропозицією грошей M, тобто:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = h_1(I - S), \\ \dfrac{dr}{dt} = h_2\left[L(y,r) - M\right], \end{cases} \qquad (7.17)$$

де $I = I_0 - \alpha \cdot r$ – функція інвестування;

$S = S_p + S_g = s(y - T) + (T - G)$ – функції заощаджень;

S_p – дорівнює приватним заощадженням, тобто постійній частині $s(0 < s < 1)$ доходу, яким можна варіювати;

S_g – дорівнює державним заощадженням, тобто податок (T) мінус витрати (передбачаються заданими екзогенно);

h_i – дорівнює додатній постійній швидкості регулювання, $h_1 = h_2 = 1$ для простоти;

$L(Y, r)$ – дорівнює діловому попиту (ky) і спекулятивному попиту $(-\beta \cdot r)$;

M – дорівнює экзогенно визначеній пропозиції грошей.

Усі коефіцієнти α, β, k – додатні постійні.

Після підстановки одержуємо неоднорідну автономну систему двох лінійних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -sy - \alpha r + T(1-s) - G + I_0, \\ \dfrac{dr}{dt} = ky - \beta r - M, \end{cases} \tag{7.18}$$

де $A = \begin{bmatrix} -s & -\alpha \\ k & -\beta \end{bmatrix}$ – матриця коефіцієнтів системи рівнянь моделі.

Слід матриці $tr(A) = -(\beta + s) < 0$, отже, модель стійка. Визначник матриці A дорівнює $det(A) = s\beta + \alpha k > 0$.

Динаміка поведінки системи (7.18) визначається загальним розв'язком відповідної однорідної системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -sy - \alpha r, \\ \dfrac{dr}{dt} = ky - \beta r. \end{cases} \tag{7.19}$$

З характеристичного рівняння системи (7.19):

$$\lambda^2 + (s+\beta)\lambda + (s\beta + \alpha k) = 0, \tag{7.20}$$

одержуємо вираз для визначення коренів характеристичного рівняння:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(s+\beta) \pm \sqrt{(s+\beta)^2 - 4(s\beta + \alpha k)}}{2}.$$

Обидва корені характеристичного рівняння однакового знака, обидва від'ємні. Якщо $\Delta = (tr(A))^2 - 4\,det(A) > 0$, $(s-\beta)^2 > 4\alpha k$, маємо два дійсних різних корені рівняння (7.20); якщо $\Delta = 0$, тобто $(s-\beta)^2 = 4\alpha k$, рівняння (7.20) має один кратний корінь; якщо $\Delta < 0$, тобто $(s-\beta)^2 < 4\alpha k$, рівняння (7.20) має комплексні корені. В окремих випадках:

а) $s = p$, тобто коли маргінальна схильність до заощаджень дорівнює коефіцієнту еластичності спекулятивного попиту на гроші, $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{4\alpha k}$, фазовий портрет є стійким фокусом;

б) $\alpha = k$, тобто функція ділового попиту має той же кутовий коефіцієнт, що і функція інвестицій (за абсолютною величиною), $\lambda_{1,2} = -s \pm 2i\alpha$ і фазовим портретом системи знов є стійкий фокус.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яке рівняння має назву рівняння неокласичного зростання?
2. Яка траєкторія має назву стаціонарної в моделі Солоу?
3. Поясніть залежність характеру динаміки поведінки економічної системи, яка задається спрощеною математичною моделлю національної економіки, від значень екзогенних змінних β, α, γ.
4. Поясніть необхідну і достатню умову стабільності моделі Вальраса регулювання ціни.
5. Охарактеризуйте складові динамічної Кейнсіанської моделі.
6. Якими змінними задається стан економіки в моделі Солоу?

Тема 9. Стохастичні моделі економічної динаміки

9.1 ЕФЕКТ МУЛЬТИПЛІКАТОРА. СТІЙКІСТЬ РИНКОВИХ МЕХАНІЗМІВ

Світова економічна криза 1929-1933 рр. визначила виникнення нових наукових досліджень, що не втрачають своєї актуальності й сьогодні, тому що основний їхній зміст – це значення державного регулювання економіки в ринковому господарстві. Саме тоді було започатковано два теоретичних напрямки, які націлені на вирішення цієї проблеми. Один із них спирається на теорію Дж. М. Кейнса та його послідовників і називається кейнсіанським (кейнсіанство), а інший, що обґрунтовує альтернативні кейнсіанству концептуальні рішення, називається неоліберальним (неолібералізм).

Головна ідея доктрини економічної політики Кейнса полягає в тому, що система ринкових економічних відносин не є досконалою й саморегульованою, і що максимально можливу зайнятість і економічне зростання може забезпечити тільки активне втручання держави в економіку. Новаторство економічного навчання Дж. М. Кейнса в методологічному плані проявилося, по-перше, у наданні пріоритету макроекономічного аналізу над мікроекономічним підходом, що зробило його засновником макроекономіки як самостійного розділу економічної теорії, і, по-друге, в обґрунтуванні (виходячи з так званого «психологічного закону») концепції про ефективний попит, тобто потенційно можливий попит, який стимулюється державою. Спираючись на власну, «революційну» для того часу методологію дослідження, Дж. М. Кейнс на відміну від своїх попередників і всупереч економічним поглядам, що панували, говорив про необхідність недопущення за допомогою держави зменшення заробітної плати як основної умови ліквідації безробіття, а також про те, що споживання через психологічно зумовлену схильність людини до заощадження зростає набагато повільніше доходів.

По Кейнсу, психологічна схильність людини зберігати визначену частину доходу стримує збільшення доходу через скорочення обсягу капіталовкладень, від яких залежить перманентне одержання доходу. Величина граничної схильності людини до споживання є постійною і може зумовлювати стійке співвідношення між збільшенням інвестицій і рівнем доходу.

У методології дослідження Дж. М. Кейнса враховується важливий вплив на економічне зростання з боку неекономічних факторів, таких як: держава (яка стимулює споживчий попит на засоби виробництва та нові інвестиції) і психологія людей (що визначає ступінь усвідомлених взаємин суб’єктів, що господарюють). Разом із тим кейнсіанське вчення є певною мірою продовженням основних методологічних принципів неокласичного напрямку економічної думки, оскільки і сам Дж. М. Кейнс, і його послідовники (втім, як і неоліберали), керуючись ідеєю «чистої економічної теорії», виходять із пріоритетного значення в господарській політиці суспільства насамперед економічних факторів, визначаючи їхні кількісні показники і зв'язки між ними, як правило, на базі методів математичного і функціонального аналізу, економіко-математичного моделювання.

У революційній «Загальній теорії» Дж. М. Кейнса чітко простежується думка про недоцільність надмірної заощадливості та накопичення і, навпаки, можливій користі усілякої витрати грошей, оскільки, як вважав учений, у першому випадку гроші придбають неефективну ліквідну (грошову) форму, а в другому – можуть бути спрямовані на збільшення попиту і зайнятості. Він також різко й аргументовано критикував економістів, прихильних до догматичних постулатів «закону ринків» Ж.-Б. Сея й інших суто «економічних» законів, називаючи їх представниками «класичної школи».

Дж. М. Кейнс одержав такий висновок: «Психологія суспільства така, що з ростом сукупного реального доходу збільшується і сукупне споживання, однак не такою мірою як зростає дохід». І в цьому його недвозначна теоретико-методологічна позиція, відповідно якій для виявлення причин неповної зайнятості і неповної реалізації, нерівноважності економіки, а також для обґрунтування методів її зовнішнього (державного) регулювання «психологія суспільства» має не менше значення, ніж «закони економіки».

Тим часом нарощування інвестицій і зумовлене цим зростання національного доходу і зайнятості населення може розглядатися як доцільний економічний ефект. Останній, що одержав в економічній літературі назву *ефекту мультиплікатора*, означає, що «збільшення інвестицій приводить до збільшення національного доходу суспільства, причому на величину більшу, ніж первісний приріст інвестицій». Отриманий коефіцієнт Дж. М. Кейнс назвав «мультиплікатором інвестицій», який характеризує таке: «коли відбувається приріст загальної суми інвестицій, то дохід збільшується на суму, яка в *K* разів перевершує приріст інвестицій». Причина такого положення, полягає в уже згадуваному «психологічному законі», за яким: у міру того, як реальний дохід зростає, суспільство прагне споживати його частину, яка постійно зменшується.

Дж. М. Кейнс дійшов висновку про те, що «принцип мультиплікатора дозволяє дати загальну відповідь на питання про те, яким чином коливання інвестицій, що складають відносно невелику частку національного доходу, здатні викликати такі коливання сукупної зайнятості і доходу, що характеризуються набагато більшою амплітудою». Але, за його переконанням, «хоча в бідному суспільстві розміри мультиплікатора порівняно великі, вплив коливань у розмірах інвестицій на зайнятості виявиться багато сильнішим у багатому суспільстві, тому що можна припустити, що саме в останньому поточні інвестиції складають набагато більшу частку поточної продукції.

Частиною сукупного попиту на блага є попит на інвестиції. Останні поділяються на індуковані й автономні. Інвестиції називаються *індукованими*, якщо причиною їхнього здійснення є стійке збільшення попиту на блага. Якщо при повному завантаженні виробничих потужностей, що використовуються з оптимальною інтенсивністю, зростає попит на блага, то в інтересах підприємців збільшити виробничі потужності.

Автономні інвестиції впроваджуються при фіксованому національному доході, тобто при заданому сукупному попиті на блага, і їхнє збільшення не є наслідком зростання національного доходу. Це, насамперед, інвестиції в нову техніку і підвищення якості продукції.

Щоб визначити обсяг інвестицій, що забезпечує необхідне для задоволення попиту розширення виробничої бази, необхідно знати значення акселератора.

Акселератор – коефіцієнт приросту капіталоємності національного доходу. Акселератор показує, скільки одиниць додаткового капіталу потрібно для виробництва додаткової одиниці продукції:

$$Акс = \frac{\Delta K}{\Delta y}, \tag{9.1}$$

де K – реальний обсяг капіталу, y – реальна величина національного доходу.

Так, при заданому акселераторі для збільшення виробництва з y_0 до y_1 необхідні індуковані інвестиції в розмірі:

$$I^{ін} = Акс(y_1 - y_0). \tag{9.2}$$

Мультиплікатор – коефіцієнт, що характеризує величину збільшення рівноважного національного доходу при збільшенні автономних (незалежних від величини національного доходу) витрат макроекономічних суб’єктів.

Нехай на ринку немає держави і закордону. Тоді рівновага на ринку благ має вигляд:

$$y = \tilde{N}_{0'} \cdot y + I, \tag{9.3}$$

де $\tilde{N}_{\acute{o}}$ – гранична (маргинальна) схильність до споживання.

Нехай також при існуючій ставці відсотка підприємці під впливом технічного прогресу вирішили збільшити обсяг інвестицій на *ΔI*. Щоб при збільшеному попиті на інвестиції на ринку благ збереглася рівновага, пропозиція також повинна збільшитися на деяку величину *Δy*, зумовлену рівнянням:

$$y + \Delta y = \tilde{N}_{\acute{o}}\,(y + \Delta y) + I + \Delta I\,. \tag{9.4}$$

Віднімаючи з (9.4) (9.3), одержимо

$$\Delta y = \frac{1}{1 - C_y}\Delta I\,. \tag{9.5}$$

Співмножник $\frac{1}{1 - C_y}$ називається мультиплікатором автономних витрат. Оскільки $0 < \tilde{N}_{\acute{o}} < 1,$ то мультиплікатор більше одиниці. Отже, зростання автономних витрат збільшує національний дохід більше, ніж на одиницю.

9.2 НАЙПРОСТІША ДИНАМІЧНА МОДЕЛЬ З МУЛЬТИПЛІКАТОРОМ

Нехай, національний дохід Y в момент часу t розподіляється на споживання C та на інвестиції I:

$$Y_t = C_t + I_t. \tag{9.6}$$

Статистичні дослідження вказують, що обсяг споживання прямо пропорційний обсягу національного доходу, з лагом запізнювання в 1 період:

$$C_t = a + bY_{t-1} \quad a \ge 0 \quad 0 < b < 1, \tag{9.7}$$

де b – гранична схильність населення до споживання.

9.3 МОДЕЛЬ ЗРОСТАННЯ НАЦІОНАЛЬНОГО ДОХОДУ: ВИПАДОК АВТОНОМНОГО ІНВЕСТУВАННЯ

Припустимо, що обсяг інвестицій в економіку не залежить від національного доходу і змінюється з I_0 у початковий момент часу до $I_0+\Delta I$ для всіх наступних періодів:

$$I_t = I_0 + \Delta I. \tag{9.8}$$

Підставляючи рівняння (9.7) і (9.8) у (9.6), одержуємо рівняння:

$$Y_t - bY_{t-1} = a + I_0 + \Delta I. \tag{9.9}$$

Розв’язком різницевого рівняння (9.9) є:

$$Y_t = A(b)^t + \frac{a + I_0 + \Delta I}{1 - b}. \tag{9.10}$$

Оскільки $0 < b < 1$, то $\lim\limits_{t \longrightarrow \infty} A(b)^t = 0$, отже, рівноважний національний дохід дорівнює $Y = \frac{a + I_0 + \Delta I}{1 - b}$. У даному випадку $0 < b < 1$ – це умова стабільності функціонування системи.

Як відомо з Кейнсіанської макроекономіки, у замкнутій системі збільшення інвестицій на величину ΔI приводить, відповідно до ефекту мультиплікатора, до збільшення національного доходу на величину:

$$\Delta Y = \frac{1}{1-b}\Delta I. \tag{9.11}$$

У цьому випадку, якщо первісне значення величини рівноважного національного доходу було Y_0, то нове значення точки рівноваги складе:

$$Y_p = Y_0 + \frac{1}{1-b}\Delta I. \tag{9.12}$$

Ця концепція відповідає отриманому рішенню (9.10). Нове рівноважне значення національного доходу $Y_t = \frac{a + I_0 + \Delta I}{1-b}$ та початкове $Y_0 = \frac{a + I_0}{1-b}$ розрізняються на величину $\Delta Y = \frac{1}{1-b}\Delta I$.

Розглянутий випадок припускає, що інвестиції цілком автономні (не залежать від обсягу національного доходу), рівняння (9.8).

9.4 МОДЕЛЬ ЗРОСТАННЯ НАЦІОНАЛЬНОГО ДОХОДУ: ВИПАДОК ЗАЛЕЖНОСТІ ІНВЕСТИЦІЙ ВІД НАЦІОНАЛЬНОГО ДОХОДУ

Нехай, обсяг інвестицій частково залежить від національного доходу (з лагом запізнювання в 1 період), відповідно до граничної схильності до інвестування *h*:

$$I_t = hY_{t-1} + I_0 + \Delta I \quad 0 < h < 1. \tag{9.13}$$

Тоді рівняння (9.11) буде мати вигляд:

$$Y_t - (b+h)Y_{t-1} = a + I_0 + \Delta I. \tag{9.14}$$

Розв'язком різницевого рівняння (9.9) є:

$$Y_t = A(b+h)^t + \frac{a + I_0 + \Delta I}{1-b-h}. \tag{9.15}$$

Система буде прагнути до стану рівноваги $Y_t = \frac{a + I_0 + \Delta I}{1-b-h}$, якщо виконується умова: $b+h<1$. Ця умова стабільності говорить про те, що гранична схильність до інвестування повинна бути меншою за граничну схильність до нагромадження (1-*b*), тобто: $h < 1-b$.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яка суть ефекту мультиплікатора.
2. Що таке акселератор?
3. У чому сутність індукованих інвестицій?

4. У чому сутність автономних інвестицій?
5. Охарактеризуйте найпростішу динамічну модель з мультиплікатором.
6. Назвіть особливості моделі зростання національного доходу (випадок автономного інвестування).
7. Охарактеризуйте систему у випадку залежності інвестицій від національного доходу.
8. Назвіть умову стабільності функціонування системи.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Основна:

1. Кочура Є.В., Косарев В.М. Моделювання макроекономічної динаміки : навч. посіб. Дніпропетровськ : ДУЕП, 2003. 236 с.
2. Лавінський Г.В., Бушуєва І.В., Пшенишнюк О.С., Устенко С.В. Моделювання економічної динаміки : навч. посіб. Київ : ЕКМО, 2003. 128с.
3. Бродський Ю.Б., Молодецька К.В. Моделювання економічної динаміки : підручник. Житомир : ЖНАЕУ, 2016. 132 с.
4. Бродський Ю.Б., Малютіна В.П. Економіко-математичне моделювання : консп. лекцій. Житомир : ЖНАЕУ, 2010. 116 с.
5. Лисенко Ю.Г., Петренко В.Л., Тимохін В.Н., Філіппов А.В. Економічна динаміка : навч. посіб. Донецьк : ДОНГУ, 2010. 176 с.
6. Гладка О. М., Карпович І. М., Сінчук А. М. Моделі економічної динаміки для фахівців з інформаційних технологій : Навчальний посібник. Рівне : РДГУ, 2019. 158 с.
7. Акулов М.Г., Тютюніков І.Є., Куперштейн Л.М., Ткаченко М. І. Моделювання економічної динаміки : навч. посібни / під ред. М.Г. Акулова. Вінниця : ВФЕУ, 2017. 310 с

Додаткова:

1. Бродський Ю.Б., Молодецька К.В., Николюк О.М. Системний аналіз в економіці : навч. посіб. Житомир : ЖНАЕУ, 2014. 174 с.
2. Лаврінський Г.В., Пшенишнюк О.С., Устинко С.В., Шарапов О.Д. Моделювання економічної динаміки : навч. посіб. Київ : Атака, 2006. 276 с.
3. Моделювання економічної динаміки : навч. посіб. / Т.С. Клебанова та ін. Харків : ІНЖЕК, 2004. 244 с.

Навчальне видання

МОДЕЛІ ЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ

Конспект лекцій

Укладачі:

Шебаніна Олена В'ячеславівна
Тищенко Світлана Іванівна
Крайній Володимир Олексійович та ін.

Формат 60х84 1/16. Ум. друк. арк. 10,5
Тираж 50 прим. Зам. № __

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.