МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ МЕНЕДЖМЕНТУ

Кафедра економічної кібернетики і математичного моделювання

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Конспект лекцій

для здобувачів початкового рівня (короткий цикл) вищої освіти ОПП «Комп'ютерні науки» спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» денної форми здобуття вищої освіти

Миколаїв
2023

УДК 519.2
Т30

Друкується за рішенням науково-методичної комісії факультету менеджменту Миколаївського національного аграрного університету від 08 березня 2023 року, протокол № 7.

Укладачі:

О. В. Шебаніна – д-р екон. наук, професор, професор кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

С. І. Тищенко – канд. пед. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

І. І. Хилько – старший викладач кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет.

В. О. Крайній – канд. екон. наук, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

Рецензенти:

І. П. Атаманюк – д-р техн. наук, професор, професор кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет;

А. В. Швед – д-р техн. наук, доцент кафедри інженерії програмного забезпечення, Чорноморський національний університет ім. Петра Могили.

Т30 **Теорія** ймовірностей та математична статистика : конспект лекцій для здобувачів початкового рівня (короткий цикл) вищої освіти ОПП «Комп'ютерні науки» спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» денної форми здобуття вищої освіти / уклад. О. В. Шебаніна, С. І. Тищенко, І. І. Хилько, В. О. Крайній. Миколаїв : МНАУ, 2023. 60 с.

Конспект лекцій призначений для формування у студентів базових теоретичних знань та практичних навичок розв'язання задач теорії ймовірностей та математичної статистики, оволодіння математичним апаратом, необхідним для освоєння інших загальнонаукових та спеціальних дисциплін. Містить навчальні матеріали з основних тем курсу «Теорія ймовірностей та математична статистика», що передбачені освітньо-професійною програмою «Комп'ютерні науки» початкового рівня (короткого циклу) вищої освіти за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки» галузі знань 12 «Інформаційні технології». До кожної теми подаються докладні теоретичні відомості та практичні приклади їх застосування. Даний конспект лекцій буде корисним здобувачам вищої освіти та викладачам.

УДК 519.2

ЗМІСТ

Передмова 4

ТЕМА 1. Випадкові події, основні поняття і теореми теорії ймовірностей 6

ТЕМА 2. Основні теореми ймовірностей 9

ТЕМА 3. Повторні незалежні випробування 11

ТЕМА 4. Дискретні випадкові величини 14

ТЕМА 5. Неперервні випадкові величини 17

ТЕМА 6. Закони розподілу випадкових величин 21

ТЕМА 7. Ряди розподілу. Середні величини 28

ТЕМА 8. Статистичні гіпотези 37

ТЕМА 9. Дисперсійно-кореляційний метод аналізу 40

Питання для підсумкового контролю знань здобувачів вищої освіти 44

Список використаних джерел 48

Додатки 50

ПЕРЕДМОВА

Теорія ймовірностей та математична статистика займає важливе місце у навчальному процесі, оскільки формує базові знання у сфері застосування ймовірнісно-статистичного апарату, вивчення закономірностей у масових випадкових явищах, визначення їх ймовірнісних характеристик з метою обробки математичних моделей, пов'язаних з подальшою практичною діяльністю фахівців.

Теорія ймовірностей та математична статистика є основою для побудови кількісних моделей керування системами. Розв'язання багатьох практичних задач, що виникають в різних галузях діяльності людини, є неможливим без використання математичних методів. Зокрема, вивчення реальних процесів, в яких необхідно враховувати випадкові фактори, вплив яких неможливо наперед передбачувати, вимагає використання теорії ймовірностей та математичної статистики.

Конспект лекцій призначений для вивчення закономірностей у масових випадкових явищах, визначення їх ймовірнісних характеристик з метою застосування до аналізу економічних явищ та прогнозування.

Метою даного видання є ознайомлення здобувачів вищої освіти (а також усіх зацікавлених фахівців) з основними поняттями комбінаторики, основ теорій ймовірностей, теорії оцінювання невідомих параметрів, перевірки статистичних гіпотез, елементів кореляційно-регресійного аналізу, методами, теоремами та формулами теорії ймовірностей та математичної статистики. У курсі лекцій визначені основні засади математичної статистики, яка використовується під час планування, організації та управління виробництвом, оцінювання якості продукції, системного аналізу економічних структур та технологічних процесів, застосування математичних методів у комп’ютерній інженерії.

Опанування тем дисципліни дозволяє сформувати у здобувачів вищої освіти визначену систему компетентностей та досягти очікуваних результатів навчання.

Конспект лекцій складено на основі ряду відомих підручників і посібників, зокрема [1,2,4,5,6,16].

Загалом вивчення теорії ймовірностей та математична статистика сприятиме розвиненню спеціальних компетентностей у галузі розробки тактичних та оперативних планів управлінської діяльності, здатності до дослідницької та пошукової діяльності ймовірнісними методами у сфері комп’ютерних наук.

ТЕМА 1. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ, ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

План

1. Вихідні поняття теорії ймовірностей
2. Класифікація подій.
3. Класичне, геометричне, статистичне означення ймовірності.
4. Елементи комбінаторики в теорії ймовірностей.

1. Вихідні поняття теорії ймовірностей

Теорія ймовірностей – це розділ математики, що вивчає математичні моделі випадкових явищ реального світу.

Вихідними поняттями теорії ймовірностей є поняття стохастичного випробування (або експерименту), випадкової події та ймовірності випадкової події.

Виникнення теорії ймовірностей спричинене комбінаторними задачами азартних ігор і обумовлене спробою їх теоретичного обґрунтування, відноситься до XVI-XVП ст. і пов'язане з іменами Дж. Кардано, Б. Паскаля, X. Гюйгенса, П. Ферма. Найістотнішим досягненням цього періоду є відкриття Я. Бернуллі закону великих чисел.

Другий період розвитку теорії ймовірностей відноситься до XVIII-XIX ст. і пов'язаний з іменами Лапласа, Гаусса, Муавра, Пуассона, Буняковського та інших. Проте, як математична наука, теорія ймовірностей сформувалася на межі XIX-XX ст. завдяки працям П. Л. Чебишева, О. М. Ляпунова, А. А. Маркова, Р. Мізеса.

Предметом теорії ймовірностей є вивчення імовірнісних закономірностей масових однорідних випадкових подій.

Послідовність операцій, виконуваних з додержанням певного комплексу умов, називають ***експериментом,*** **(**дослідом, спробою, випробуванням).

Наслідок будь-якого експерименту називають ***подією.***

Експеримент не обов'язково має виконувати людина. Він може здійснюватися незалежно від неї, скажімо комп'ютером. Людина в такому разі є спостерігачем, котрий фіксує наслідок експерименту – подію.

2. Класифікація подій

Події поділяються на *вірогідні(достовірні), неможливі* та *випадкові.*

Якщо в результаті експерименту, здійснюваного з додержанням певного комплексу умов, певна подія обов'язково настає, то вона називається ***вірогідною(достовірною).*** Вірогідна подія позначається символом Ω («омега»).

Подія називається ***неможливою,*** якщо в результаті експерименту, проведеного з додержанням певного комплексу умов, вона не настає ніколи. Неможлива подія позначається символом Ø (порожня множина).

Подія називається ***випадковою,*** якщо за певного комплексу умов у результаті експерименту вона може настати або не настати залежно від дії численних дрібних факторів, урахувати які дослідник не в змозі.

Випадкові події позначають символами $A, B, C, \ldots$ або $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_к; B_1, B_2, \ldots, B_n$.

Отже, випадкові події пов'язані експериментами (випробуваннями), наслідки яких є неоднозначними.

Події A і B називаються ***несумісними,*** якщо поява однієї з них виключає появу іншої в одному і тому ж випробуванні.

Події A і B називаються ***сумісними,*** якщо поява однієї з них не виключає можливості появи іншої в одному і тому ж випробуванні.

Події називаються ***єдиноможливими***, якщо поява в результаті випробування однієї і тільки однієї з них є достовірною подією.

Події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називаються ***рівноможливими,*** якщо за виконання певного комплексу умов у кожної з них є однакова можливість відбутися або не відбутися

3. Класичне, статистичне, геометричне означення ймовірності

Ймовірністю $P(A)$ події A називають відношення числа m елементарних результатів випробування, сприятливих появі цієї події до числа n усіх єдиноможливих та рівноможливих елементарних результатів випробування: $P(A) = \frac{m}{n}$.

Властивості ймовірності:

1. Якщо подія A - достовірна, то $P(A)=1$.
2. Якщо подія A - неможлива, то $P(A)=0$.

3. Якщо подія A - випадкова, то її ймовірність задовольняє нерівність

$$0 < P(A) < 1$$

Використання класичного означення до задач природничо-наукового або економічного характеру не завжди можливо з різних причин. Зокрема, часто неможливо подати результат експерименту як сукупність подій, які мож- на було б вважати рівноможливими. Наприклад, з міркувань симетрії, на яких ґрунтуються міркування про рівноймовірність подій, вивести ймовірність того, що народжена дитина була хлопчиком, неможливо.

З цієї причини поряд з класичним визначенням ймовірності користуються також статистичним визначенням ймовірності, приймаючи за ймовірність події її відносну частоту.

Відносна частота події - це відношення m^* – числа випробувань, в яких відбулася подія A до n^* - загального числа випробувань.

Тобто

$$P(A) = \frac{m^*}{n^*}.$$

Статистичне означення ймовірності. Число, навколо якого групуються відносні частоти події A, за великого числа експериментів називається *ймовірністю події A* і позначається $P(A)$.

Класичне означення ймовірностей використовується лише для експериментів з обмеженим числом рівномірних елементарних подій, тобто коли простір елементарних подій обмежений.

Для математичного опису досліду з нескінченним числом рівноможливих результатів використовують геометричне означення ймовірності

Геометричною називається ймовірність випадкової події А, яка дорівнює відношенню міри g до міри G, тобто

$$P(A) = \frac{mes\,g}{mes\,G},$$

де mes g і mes G – міри (довжини, площі, об'єми) областей g та G.

4. Елементи комбінаторики в теорії ймовірностей

Перестановками із n елементів називаються сукупності n елементів, що відрізняються порядком розташування. Кількість можливих перестановок із n елементів знаходиться за формулою

$$P_n = n!.$$

Добуток перших n натуральних чисел називається ***факторіалом*** і позначається $n!= 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n;\ \ 0! =1.$

Розміщеннями з n елементів по m елементів називаються сукупності, складені з m елементів, вибраних із даних n елементів, які відрізняються порядком, розташування та складом елементів. Кількість можливих розміщень знаходиться за формулою

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Сполученнями із n елементів по m елементів називаються сукупності, складені з m елементів, вибраних з даних n елементів, що відрізняються тільки складом елементів, порядок їх розташування не має значення.

Кількість можливих сполучень знаходиться за формулою

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

ТЕМА 2. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ЙМОВІРНОСТЕЙ

План

1. Сума подій.
2. Теорема додавання ймовірностей несумісних подій
3. Умовна ймовірність
4. Теорема множення ймовірностей незалежних подій

1. Сума подій

Принцип суми. Якщо множина A містить $N(A)=n$ елементів, множина B-$N(B)=m$ елементів, а $A\cap B=\varnothing$, тоді множина $A+B$ $(A\cup B)$ містить $N(A+B)=n+m$ елементів.

Випадкові події A і B називають ***залежними,*** якщо поява однієї з них (A або B) впливає на ймовірність появи іншої. У противному разі випадкові події A і B називаються ***незалежними***.

Сумою $A+B$ двох подій А та В називають подію, яка полягає в появі події А або події В, або обох цих подій.

Сумою декількох подій називають подію, яка полягає в появі хоча б однієї з цих подій.

2. Теорема додавання ймовірностей несумісних подій

Теорема додавання ймовірностей несумісних подій. Ймовірність появи однієї з двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій: $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Теорема. Сума ймовірностей подій $A_1, A_2, \dots A_n$, які утворюють повну групу, дорівнює одиниці:

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1.$$

Теорема. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці: $P(A)+P(\overline{A})=1$.

3. Умовна ймовірність

Умовною ймовірністю $P(B/A)$ або $P_A(B)$ називається ймовірність події B за умови, що подія A відбулася.

Теорема. Ймовірність сумісної появи двох випадкових подій A і B дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність другої за умови, що перша подія відбулася.

$$\boldsymbol{P(AB)=P(A)P_A(B)=P(B)P_B(A)(P(A)\rangle 0, P(B)\rangle O).}$$

4. Теорема множення ймовірностей незалежних подій

Теорема множення ймовірностей незалежних подій. Ймовірність одночасної появи двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій: $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$

Для декількох попарно незалежних подій виконується рівність $P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots P(A_n)$.

Ймовірність появи хоча б однієї випадкової події

Нехай у результаті випробування можуть з'явитися n подій незалежних у сукупності.

Теорема. Ймовірність появи хоча б однієї з подій $A_1, A_2, \ldots A_n$ незалежних у сукупності, дорівнює $P(A)=1-P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot\ldots P(\overline{A_n})$,

де $P(\overline{A_1}), P(\overline{A_2}), \ldots, P(\overline{An})$ - ймовірності протилежних подій.

Теорема додавання для сумісних подій. Якщо випадкові події A і B сумісні, то $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$.

Теорема про повну ймовірність. Ймовірність події A, яка може настати за умови появи однієї з незалежних подій $H_1, H_2, \ldots H_n$, що складають повну групу, дорівнює:

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n} P(H_k)\,P_{H_k}(A).$$

Теорема Байєса. Нехай $H_1, H_2, \dots H_n$- події, що складають повну групу. Тоді для будь-якої випадкової події А, що може з'явитися лише за умови появи однієї з подій $H_1, H_2, \dots H_n$, і такої, що $P(A) \neq 0$,виконуються рівності:

$$P_A(H_k) = \frac{P(H_k)P_{H_k}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P_{H_i}(A)}, \qquad (k = \overline{1,n})$$

ТЕМА 3. ПОВТОРНІ НЕЗАЛЕЖНІ ВИПРОБУВАННЯ

План

1. Незалежні випробування.
2. Формула Бернуллі.
3. Теорема Пуассона.
4. Теореми Муавра-Лапласа.

1. Незалежні випробування

Нехай $\boldsymbol{n}$ разів проводиться певне випробування, в якому можна спостерігати появу подій $\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathbf{1}}, \overline{\boldsymbol{A}}_{\mathbf{2}}, \dots \overline{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{n}}$. Випробування називаються ***незалежними***, якщо результати кожного з них не залежать від результатів інших.

З означення випливає, що події $A_i, i = \overline{1, n}$ є незалежними у сукупності, тому $P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$, $\boldsymbol{P(A_i) \geq 0, \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1}$.

Незалежні випробування, що повторюються багато разів, називаються випробуваннями Бернуллі, якщо у кожному з них є лише два можливі наслідки і ймовірності цих наслідків є сталими для всіх випробувань.

Простір елементарних подій кожного окремого випробування Бернуллі складається з двох подій $\Omega = (A, \overline{A})$, (А - «успіх», а $\overline{A}$ – «невдача»), простір елементарних подій n незалежних випробувань Бернуллі містить 2^n подій.

2.Формула Бернуллі

Теорема. Ймовірність того, що у n випробуваннях Бернуллі, у кожному з яких ймовірність появи події дорівнює ***p (0<p<1)***, подія настане k разів і не настане $(n-k)$ разів, дорівнює

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Найвірогідніше число «успіхів» у схемі Бернуллі

Нехай маємо п незалежних випробувань Бернуллі. Тоді ймовірність появи події $\boldsymbol{A}$ kразів у п випробуваннях знаходимо за формулою Бернуллі $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, де $\boldsymbol{p}$ - ймовірність події $\boldsymbol{A}$ у кожному випробуванні.

Теорема. Нехай $(\text{п}+1)\text{р}$– не ціле число, тоді зі зміною k від 0 до п ймовірність $\text{Р}_\text{п}(k)$ спочатку монотонно зростає, а потім монотонно спадає, досягаючи максимуму при $k = k_0 = [(n+1)p]$. Якщо $(\text{п}+1)\text{р} = k_0$ - ціле число, то $P_n(k_0-1) = P_n(k_0)$ і при $k < k_0 - 1$ ймовірність $\text{Р}_\text{п}(k)$ зростає, а при $k > k_0$ спадає. Число k_0, що називається найвірогіднішим числом «успіхів» у схемі Бернуллі, задовольняє нерівності

$$np - q \le k_0 \le np + p\ .$$

3.Теорема Пуассона

Теорема Пуассона. Якщо в схемі Бернуллі кількість випробувань п, $n \to \infty$, а ймовірність $\boldsymbol{p}$ появи події $\boldsymbol{A}$ в одному випробуванні мала $(p \to 0)$, але $np = \lambda$, то ймовірність появи k разів події $\boldsymbol{A}$ у n випробуваннях

$$P_n(k) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ \text{або}\ \lim_{n\to\infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

4.Теореми Муавра-Лапласа

Формула Бернуллі дає можливість обчислити ймовірність того, що подія А з’явиться k раз в n незалежних випробуваннях, якщо ймовірність появи події в кожному випробуванні є сталою. Але користування формулою Бернуллі при великих n призводить до труднощів, пов’язаних з громіздкими обчисленнями. Локальна теорема Муавра–Лапласа дає так звану асимптотичну формулу, яка дає можливість наближено знайти ймовірність $\text{Р}_\text{п}(k)$, якщо число випробувань доволі велике. Зауважимо, що для частинного випадку, коли р=0,5, асимптотична формула була знайдена ще в 1730 році Муавром. У 1783 році Лаплас узагальнив цю формулу для довільного значення р, 0<р<1. Тому цю теорему часто називають теоремою Муавра-Лапласа.

Локальна теорема Муавра-Лапласа. Якщо ймовірність ***p*** появи події ***A*** у кожному випробуванні стала і $0<p<1$, то ймовірність $\mathrm{P_п}(k)$ того, що подія ***A*** з'явиться у п незалежних випробуваннях k разів, наближено дорівнює (тим точніше, чим більше п) значенню функції $y = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \phi(x)$, де $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$.

Функція $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$ називається функцією Гаусса.

Ця функція часто використовується у теорії ймовірностей, тому її значення для додатних значень аргументу наведені у відповідних таблицях.

Основні властивості функції Гаусса

1. Функція визначена на всій числовій осі, тобто для $x \in (-\infty; \infty)$.

2. Функція Гаусса парна, тобто $\phi(-x) = \phi(x)$.

3.$\max_{x} \phi(x) = \phi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

4.$\phi(\mathrm{x}) \to 0$ для $x \to \pm\infty$.

Зауваження. Локальна теорема Муавра-Лапласа дає можливість знайти наближення окремих ймовірностей і дослідити їх поведінку при досить великих значеннях n.

Часто потрібно зайти, при n-незалежних випробувань, в кожному із яких ймовірність появи події A стала і дорівнює p ($0<p<1$), ймовірність того, що подія A відбудеться не менше k_1 і не більшеk_2раз. Цю ймовірність позначають: $P_n(k_1, k_2)$. Отримати точний результат ймовірностей у цьому разі можна за допомогою інтегральної теореми Лапласа.

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа. Якщо ймовірність ***p*** появи події ***A*** в кожному випробуванні стала і $0<p<1$, то ймовірність $P_n(k_1, k_2)$ того, що подія ***A*** настане не менше k_1 і не більше k_2 разів наближено дорівнює визначеному інтегралу

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

де $x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$ і $x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Функція $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{-x^2}{2}} dz$ називається функцією Лапласа. Для неї складено таблиці для x≥0, причому при x >5 вважають $\Phi(x) = 0{,}5$.

Очевидно, $\Phi(x) = \int_0^x \phi(z)\, dz$.

Основні властивості функції Лапласа

1.$\Phi(x)$ - непарна, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

2. $\Phi(0) = 0$.

3. $\Phi(x)$ зростає для $x \in (-\infty; \infty)$.

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = \frac{1}{2}$.

ТЕМА 4. ДИСКРЕТНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

План

1. Поняття дискретної випадкової величини.
2. Числові характеристики дискретних випадкових величин.
3. Властивості математичного сподівання, дисперсії дискретної випадкової величини.

1. Поняття дискретної випадкової величини

Випадковою величиною (ВВ) називається величина, яка в результаті експерименту може набути лише одного можливого числового значення, заздалегідь невідомого і обумовленого випадковими причинами.

Випадковою величиною *X* називають таку величину, яка в результаті випробування прийме лише одне з можливих значень наперед невідоме і залежне від випадкових причин, які попередньо не можутьбути враховані.

Дискретною випадковою величиною (ДВВ) називають таку випадкову величину, яка приймає ізольовані числові значення із усіх можливих.

Для будь-якої випадкової величини недостатньо відомостей про їх можливі значення. Потрібно знати ще ймовірність появи цих значень. Перелік всіх випадкових значень дискретної випадкової величини та їх відповідних ймовірностей називається закон розподілу дискретних випадкових величин. Причому повинна виконуватись рівність

$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$

Закон розподілу дискретних випадкових величин може бути заданий такими способами.

1. Табличний. Цей спосіб полягає в тому, що дається таблиця, в якій за- писані окремі значення випадкової величини *X* та відповідні їм ймовірності.

X	x_1	x_2	.....	x_n
P	p_1	p_2	.....	p_n

Якщо випадкова величина X приймає скінчене число різних значень x_1, x_2, … , x_n, то випадкові величини утворюють повну групу попарно несумісних подій, а отже, сума їх ймовірностей повинна бути рівна 1.

2. Графічний. Під час цього способу функцію задають графіком зазвичай у прямокутній системі координат. На осі абсцис відкладають значення випад- кової величини, а на осі ординат – ймовірності. Якщо на площині *XOY* сполу- чити послідовно точки (x_1, p_1), (x_2, p_2), … , (x_n, p_n), то дістанемо ламану, яку називають **многокутником розподілу випадкової величини *X***. Прикладом цього способу задання закону розподілу є полігон розподілу ймовірностей.

3. Аналітичний закон розподілу полягає в тому, що дається математична формула, за якою можна обчислити ймовірності того, що випадкова величина прийме те чи інше значення.

Випадкові величини позначають великими літерами *X, Y, Z.* тощо, а їх можливі значення $x_i, y_i, z_i, i = \overline{1, n}$.

Випадкові величини поділяються на дискретні та неперервні випадкові величини.

Дискретною випадковою величиною (ДВВ) називається така випадкова величина, яка набуває скінченої або зліченої кількості числових значень з певними ймовірностями.

2.Числові характеристики дискретних випадкових величин

Математичним сподіванням ДВВ X називається число, яке дорівнює сумі добутків усіх її можливих значень на відповідні ймовірності і позначається M(X)

$$M(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k\, p_k.$$

Тут *X* - ДВВ, що набуває значення *x,* з ймовірностями $p_k, k = \overline{1, n}$.

Дисперсією ДВВ X називається число, що дорівнює математичному сподіванню квадрата відхилення X від її математичного сподівання і позначається D (X):

$$D(X) = M((X - M(X))^2).$$

Теорема. Дисперсія дискретної випадкової величини X дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата випадкової величини X та квадратом її математичного сподівання: $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$.

Середнім квадратичним відхиленням називають корінь квадратний з дисперсії

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

3.Властивості математичного сподівання, дисперсії дискретної випадкової величини.

Властивості математичного сподівання ДВВ:

1. Математичне сподівання сталої величини дорівнює самій сталій

$$M(C) = C \quad .$$

2. Сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання

$$M(CX) = CM(X).$$

3. Математичне сподівання добутку двох незалежних дискретних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y).$$

4. Математичне сподівання суми двох незалежних дискретних величин дорівнює сумі їх математичних сподівань

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

Властивості дисперсії ДВВ:

1. Дисперсія дискретної випадкової величини X невід'ємна, тобто

$$D(X) \geq 0.$$

2. Дисперсія сталої величини C дорівнює нулю, тобто

$$D(C) = 0.$$

3. Сталий множник можна виносити за знак дисперсії, піднісши його спочатку до квадрату

$$D(CX) = C^2 \cdot D(X) .$$

4. Дисперсія алгебраїчної суми двох незалежних дискретних випадкових X та Y дорівнює сумі їх дисперсій, тобто

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y).$$

ТЕМА 5. НЕПЕРЕРВНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

План

1. Поняття неперервної випадкової величини.
2. Інтегральна функція розподілу.
3. Щільність розподілу.
4. Числові характеристики неперервних випадкових величин.
5. Початкові та центральні моменти.
6. Асиметрія і ексцес.

1. Поняття неперервної випадкової величини

Неперервною випадковою величиною називають таку величину, яканабуває всі свої можливі значення з деякого проміжку.

На відміну від дискретної випадкової величини розподіл неперервної випадкової величини неможливо задати, зазначивши певні значення, яких вона набуває, та відповідні їм ймовірності. Множина можливих значень неперервної випадкової величини незлічення. Тому виникає питання про новий спосіб задання випадкової величини. Він полягає у заданні функції розподілу.

Законом розподілу випадкової величини називають таке співвідношення, яке встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідними їм ймовірностями.

Неперервною випадковою величиною (НВВ) називається випадкова величина, яка може набувати будь-якого значення з деякого скінченого або нескінченного інтервалу.

2. Інтегральна функція розподілу

Інтегральною функцією розподілу або функцією розподілу ймовірностей випадкової величини називається ймовірність того, що випадкова величина X у результаті випробування набуде значення, меншого за значення x, де X - довільне дійсне число.

Функцію аргументу *x,* що визначає ймовірність випадкової події $X < x$ називають ***функцією розподілу ймовірностей:***

$$F(x) < P(X < x).$$

Цю функцію можна тлумачити так: унаслідок експерименту випадкова величина може набути значення, меншого за *x* .

Властивості $F(x)$:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$.

2. $F(x)$ є неспадною функцією, а саме $F(x_2) \geq F(x_1)$, якщо $x_2 \geq x_1$.

Наслідок 2.1. Імовірність того, що випадкова величина X набуде можливого значення $\mathrm{X} = \mathrm{x} \in [\alpha; \beta]$, дорівнює приросту інтегральної функції $F(x)$ на цьому проміжку:

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Наслідок 2.2. Якщо випадкова величина X є неперервною, то ймовірність того, що вона набуде конкретного можливого значення, завжди дорівнює нулю: $P(X = x_i) = 0$.

3. Якщо можливі значення неперервної випадкової величини належать інтервалу $(\alpha; \beta)$, то:

а) $F(x) = 0$ при $x \leq \alpha$;

б) $F(x) = 1$ при $x \geq \beta$.

4. Функція розподілу неперервна зліва.

3. Щільність розподілу

Для неперервних випадкових величин закон розподілу ймовірностей зручно описувати з допомогою щільності ймовірностей, яку позначають $f(x)$.

Щільністю ймовірностей неперервної випадкової величини *X* називається перша похідна від інтегральної функції $F(x)$:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}, \text{ звідки}$$

$$dF(x) = f(x)dx.$$

Властивості $f(x)$:

1. $f(x) \geq 0$. Ця властивість випливає з означення щільності ймовірності як першої похідної від $F(x)$, за умови, що $F(x)$ є неспадною функцією.

2. Умова нормування неперервної випадкової величини X:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)d\,x = 1.$$

3. Імовірність попадання неперервної випадкової величини в інтервалі $[\alpha; \beta]$ обчислюється за формулою:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_a^b f(x)dx.$$

4.Функція розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини має вигляд $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

4.Числові характеристики неперервних випадкових величин

Числові характеристики НВВ:

1. Якщо неперервна випадкова величина набуває можливих значень з відрізку $[a; b]$, має щільність $f(x)$, то її ***математичне сподівання*** знаходиться за формулою: $M(X) = \int_a^b xf(x)dx$.

Зауваження. Якщо можливі значення X належать R, то$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ за умови, що невласний інтеграл у данній рівності абсолютно збіжний**.**

2. Дисперсія неперервної випадкової величини визначається за формулою: $D(X) = M((X - M(X))^2)$.

3. Середнє квадратичне відхилення неперервної випадкової величини визначається та обчислюється за формулою:

$$\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{D(X)}}.$$

5. Початкові та центральні моменти

Узагальненими числовими характеристиками випадкових величин є початкові та центральні моменти.

Початковим моментом *k-го* порядку випадкової величини *X* називають математичне сподівання величини X^k*:*

$\nu_k = M(X^k)$ $(k = 1,2,3,\dots)$.

Коли $k = 1, \nu_1 = M(X)$; коли $k = 2$, $\nu_2 = M(X^2)$ і т.д.

Для дискретної випадкової величини X : $\nu_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i$;

для неперервної : $\nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx$.

Центральним моментом *k-го* порядку називається математичне сподівання від $(X - M(X))^k$:

$\mu_k = M(X - M(X))^k \ (k = 1,2,3,..)$

Коли $k = 1$, $\mu_1 = M(X - M(X)) = 0$;

коли $k = 2$, $\mu_2 = M(X - M(X))^2 = D(X)$;

коли $k = 3$, $\mu_3 = M(X - M(X))^3$;

коли $k = 4$, $\mu_4 = M(X - M(X))^4$.

Для дискретної випадкової величини:

$\mu_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^k p_i$;

для неперервної $\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^k f(x)dx$.

6. Асиметрія і ексцес

Третій центральний момент характеризує асиметрію закону розподілу випадкової величини. Якщо $\mu_3 = 0$, то випадкова величина X симетрично розподілена відносно *M(X)*. Оскільки μ_3 має розмірність випадкової величини в кубі, то вводять безрозмірну величину — коефіцієнт асиметрії:

$$As = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

Центральний момент четвертого порядку використовується для визначення ексцесу, що характеризує плосковершинність, або гостровершинність щільності ймовірності $f(x)$. Ексцес обислюється за формулою: $Es = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$.

Зауважимо, що число 3 віднімається ось чому. Для центрального розподілу, так званого нормального закону, виконується рівність: $\frac{\mu_4}{\sigma^4} = 3$. Отже, $Es = 0$.

ТЕМА 6. ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

План

1. Біноміальний закон розподілу ймовірностей.
2. Пуассонівський закон розподілу ймовірностей.
3. Геометричний закон розподілу ймовірностей.
4. Рівномірний закон розподілу ймовірностей.
5. Гіпергеометричний закон розподілу ймовірностей.
6. Нормальний закон розподілу ймовірностей.
7. Експоненціальний закон розподілу ймовірностей.
8. Розподіл χ^2

1.Біноміальний закон розподілу ймовірностей

Цілочислова випадкова величина X має біноміальний закон розподілу, якщо ймовірність її можливих значень обчислюється за формулою Бернуллі:

$P_k = P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$.

У табличній формі цей закон набирає такого вигляду:

$X = x_k = k$	0	1	2	3	…	n
$P_k = P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	$C_n^3 p^3 q^{n-3}$	…	p^n

При перевірці виконання умови нормування використовується формула біному Ньютона, тому закон розподілу називають ***біноміальним***:

$$\sum_{k=0}^{n} P_k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (q + p)^n = 1.$$

Імовірнісна твірна функція для біноміального закону

$$A(X) = (q + px)^n.$$

Числові характеристики для біноміального закону:

1. $M(X) = np$.
2. $D(X) = npq$.
3. $\sigma(X) = \sqrt{npq}$.

2. Пуассонівський закон розподілу ймовірностей

Цілочислова випадкова величина X має пуассонівський закон розподілу, якщо ймовірності її можливих значень

$P_k = P(X = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$, $k = 0, 1, 2 ,3, \ldots, n$, тобто обчислюється за формулою Пуассона, де $a = np$. У табличній формі цей закон розподілу буде такий:

$X = k$	0	1	2	3	…	n
$P = P(X = k) = \frac{a^k}{k!}$	e^{-a}	ae^{-a}	$\frac{1}{2!}a^2e^{-a}$	$\frac{1}{3!}a^3e^{-a}$	…	$\frac{1}{n!}a^ne^{-a}$

$\sum P_k = \sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}e^{-a} = e^{-a}\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!} = e^{-a}e^{a} = e^0 = 1$.

Умова нормування виконується.

Імовірнісна твірна функція для пуассонівського закону

$$A(X) = e^{a(x-1)}.$$

Числові характеристики для пуассонівського закону:

1.$M(X) = a = np$.

2.$D(X) = a$.

3.$\sigma(X) = \sqrt{a}$.

3.Геометричний закон розподілу ймовірностей

Цілочислова випадкова величина X має геометричний закон розподілу, якщо ймовірності її можливих значень $P_k = P(X = k) = pq^{k-1}$ **,** $\boldsymbol{k = 1, 2, 3, \ldots, n}$**.**

Тут p — імовірність появи випадкової події в кожній спробі — є величиною сталою, $q = 1 - p$.

У табличній формі геометричний закон розподілу такий:

$X = X_k = k$	1	2	3	4	...
$P_k = P(X = k) = pq^{k-1}$	p	pq	pq^2	pq^3	...

При перевірці умови нормування використовується формула суми нескінченної геометричної прогресії, тому й закон розподілу називають геометричним:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_k = p + pq + pq^2 + pq^3 + \ldots = p(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots) = p\frac{1}{1-q} = p\frac{1}{p} = 1.$$

Імовірнісна твірна функція для геометричного закону

$$A(X) = \frac{px}{1-qx}.$$

Числові характеристики для геометричного закону:

1. $M(X) = \frac{1}{p}$.
2. $D(X) = \frac{q}{p^2}$.
3. $\sigma(X) = \frac{\sqrt{q}}{p}$.

Серед дискретних випадкових величин лише геометричному закону притаманна властивість відсутності післядії. Це означає, що ймовірність появи випадкової події в k-му експерименті не залежить від того, скільки їх з'явилося до k-го, і завжди дорівнює p.

4. Рівномірний закон розподілу ймовірностей

Цілочислова випадкова величина X має рівномірний закон розподілу, якщо ймовірності її можливих значень обчислюються за формулою:

$$P_k = P(X = k) = \frac{1}{n}.$$

У табличній формі запису рівномірний закон розподілу має вигляд:

$X = x_k = k$	1	2	3	...	n
$P_k = P(X = k) = \frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$

Умова нормування $\sum_{k=1}^{n} p_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1$ виконується.

Імовірнісна твірна функція для цього закону

$$A(X) = \frac{1}{n}\frac{1-x^n}{1-x}.$$

***Числові характеристики рівномірного закону*:**

1. $M(X) = \frac{n+1}{2}$.
2. $D(X) = \frac{n^2-1}{12}$.
3. $\sigma(X) = \frac{\sqrt{n^2-1}}{2\sqrt{3}}$.

5.Гіпергеометричний закон розподілу ймовірностей

Цілочислова випадкова величина X має гіпергеометричний закон розподілу, якщо ймовірність її можливих значень обчислюється за формулою

$$P_k = P(X = k) = \frac{C_{n_1}^k C_{n-n_1}^{m-k}}{C_n^m}.$$

У табличній формі запису цей закон розподілу подається так:

$X = x_k = k$	0	1	2	...	m
$P_k = P(X = k) = \frac{C_{n_1}^k C_{n-}^{m-}}{C_n^m}$	$\frac{C_{n-n_1}^m}{C_n^m}$	$\frac{C_{n_1}^1 C_{n-n_1}^{m-1}}{C_n^m}$	$\frac{C_{n_2}^2 C_{n-n_2}^{m-2}}{C_n^m}$		$\frac{C_{n-n_1}^m}{C_n^m}$

При цьому $m \le n$.

Умова нормування $\sum_{k=0}^{m} P_k = \frac{1}{C_n^m}\sum_{k=0}^{m} C_{n_1}^k C_{n-n_1}^{m-k} = 1$.

Залежно від умови задачі найменше значення може становити $m = 0, 1, 2, 3, ..., m - 1$.

Числові характеристики гіпергеометричного закону:

1.$M(X) = \frac{1}{C_n^m}\sum_{k=0}^{m} k C_{n_1}^k\, C_{n-n_1}^{m-k}$.

2.$D(X) = \frac{1}{C_n^m}\sum_{k=0}^{m} k^2\, C_{n_1}^k C_{n-n_1}^{m-k} - M^2(X)$.

3.$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{C_n^m}\sum_{k=0}^{m} k^2\, C_{n_1}^m C_{n-n_1}^{m-k} - M^2(X)}$.

6. Нормальний закон розподілу

Випадкова величина X має нормальний закон розподілу ймовірностей, якщо

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty,$$

де $a = M(X)$, $\sigma = \sigma(X)$. Отже, нормальний закон визначається звідси параметрами a і σ і називається загальним.

Тоді

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Якщо $a = 0$ і $\sigma = 1$, то нормальний закон називають ***нормованим.***

У цьому разі

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty < x < \infty$,

тобто $f(x) = \varphi(x)$ є функцією Гаусса,

$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$

Графіки $f(x)$, $F(x)$ для загального нормального закону залежно від параметрів a і σ зображені на рис. 1 і 2.

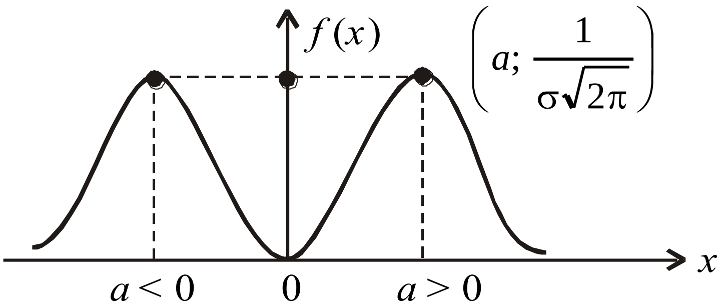


Рис. 1

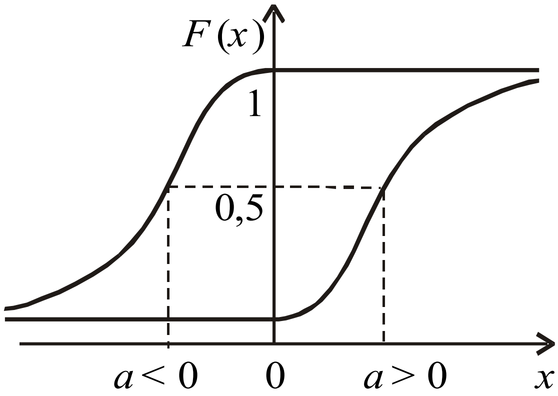
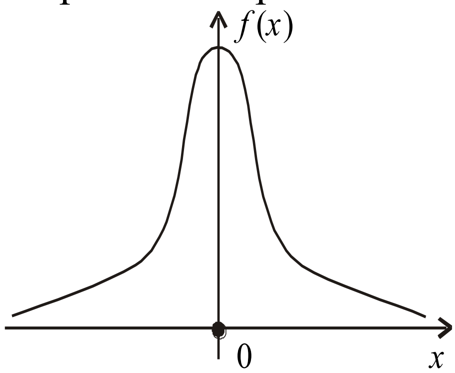


Рис. 2

Для нормального закону Mo = Me = a.

Для нормованого нормального закону графіки функцій $f(x)$, $F(x)$ зображено на рис. 3 і 4.



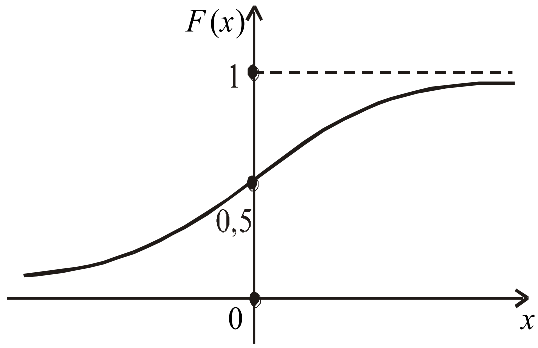


Рис. 3 Рис. 4

Загальний нормальний закон позначають: $N(a; \sigma)$.

Нормований нормальний закон позначають $N(0; 1)$.

Правило трьох сигм для нормального закону

Коли $\delta = 3\sigma$, то маємо:

$$P(|x-a| < 3\sigma) = 2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0{,}49865 = 0{,}9973$$

Практично ця подія при одному експерименті здійсниться, а тому її вважають практично вірогідною. Звідси:

$P(|x-a|>3\sigma)=1-P(|x-a|<3\sigma)=1-0{,}9973=0{,}0027.$

Тобто ймовірність того, що внаслідок проведення експерименту випадкова величина X, яка має закон розподілу $N(a;\sigma)$, не потрапить у проміжок $[a-3\sigma; a+3\sigma]$, дорівнює 0,0027. Це становить 0,27%, тобто практично вважається, що ця подія внаслідок проведення одного експерименту не здійсниться.

7.Експоненціальний закон розподілу

Експоненціальним законом випадкової величини називають гамма-розподіл, в якому $\alpha = 1$.

Для цього закону розподілу:

$$f(x)=\begin{cases}0, x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x}, x>0;\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0, x<0;\\ 1-e^{-\lambda x}, x\geq 0.\end{cases}$$

Числові характеристики для експоненціального закону:

1.$M(X)=\frac{1}{\lambda}$.

2.$D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$.

3.$\sigma(X)=\frac{1}{\lambda}$.

8. Розподіл χ^2 (хі-квадрат)

Якщо кожна із X_i ($i = 1, 2, \dots, k$) незалежних випадкових величин характеризується нормованим законом розподілу ймовірностей $(N(0;1))$, то випадкова величина $X=\sum_{i=1}^{k}X_i^2$матиме розподіл χ^2 із k ступенями свободи, щільність імовірностей якої буде

$$f(x)=\begin{cases}0, x<0;\\ Cx^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, x\geq 0;\end{cases}$$

Функція розподілу ймовірностей

$$F(x)=\begin{cases}0, x\leq 0;\\ \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\displaystyle\int_0^x x^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}dx, x>0.\end{cases}$$

Числові характеристики розподілу χ^2:

1.$M(X)=k.$

2.$M(X^2)=k(k+2).$

3.$D(X)=2k.$

4. $\sigma(X) = \sqrt{2k}$.

Розподіл Стьюдента

Якщо Y має розподіл $N\,(0,\ 1)$, а випадкова величина $X - \frac{\chi}{\sqrt{k}}$, то випадкова величина $Z = \frac{Y}{X}$ характеризуватиметься розподілом Стьюдента зі щільністю ймовірностей

$$f(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\left(1+\frac{z^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}, -\infty < z < \infty.$$

Тоді функція розподілу ймовірностей

$$F(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_{-\infty}^{z}\left(1+\frac{z^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} dz$$

***Числові характеристики розподілу Стьюдента*:**

1. $M(Z) = 0$.
2. $D(Z) = \frac{k}{k-2}$.
3. $\sigma(Z) = \sqrt{\frac{k}{k-2}}$.

Розподіл Фішера—Снедекора

Якщо випадкова величина X має розподіл $\frac{\chi^2}{k_1}$, а Y — $\frac{\chi^2}{k_2}$, де k_1 — число ступенів свободи випадкової величини X, k_2 — число ступенів свободи Y, і при цьому X і Y не корельовані, то $Z = \frac{Y}{X}$ має розподіл Фішера—Снедекора зі щільністю ймовірностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & z < 0; \\ \dfrac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{\frac{k_2}{k_1}} z^{\frac{k_2}{2}-1}\left(1+\frac{k_2}{k_1}z\right)^{-\frac{k_1+k_2}{2}}, & z \geq 0. \end{cases}$$

Функція розподілу ймовірностей

$$F(x) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \dfrac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{\frac{k_2}{k_1}} \int_0^z z^{\frac{k_2}{2}-1}\left(1+\frac{k_2}{k_1}z\right)^{-\frac{k_1+k_2}{2}} dz, & z \geq 0. \end{cases}$$

***Числові характеристики розподілу Фішера—Снедекора*:**

1. $M(Z) = \frac{k_1}{k_1-2}$.
2. $M(Z^2) = \frac{k_1^2(k_2+2)}{k_2(k_1-2)(k_1-4)}$.

3. $D(Z) = \frac{2k_1^2(k_2+k_1-2)}{k_2(k_1-2)^2(k_1-4)}$.

4. $\sigma(Z) = \frac{k_1}{k_1-2}\sqrt{\frac{2(k_2+k_1-2)}{k_2(k_1-4)}}$.

Рівномірний закон розподілу. Неперервна випадкова величина X, що визначена на проміжку $[a, b]$, має рівномірний закон розподілу, якщо

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \le a, \\ \frac{1}{b-a}, a < x \le b, \\ 0, x > b. \end{cases}$$

Функція розподілу ймовірностей

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dx = \begin{cases} 0, x \le a, \\ \frac{x-a}{b-a}, a < x \le b, \\ 0, x > b. \end{cases}$$

Числові характеристики рівномірного закону розподілу:

1. $M(X) = \int_a^b xf(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx = \frac{b+a}{2}$.

2. $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

3. $\sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

4. $\mathrm{Me} = M(X) = \frac{b+a}{2}$.

ТЕМА 7. РЯДИ РОЗПОДІЛУ. СЕРЕДНІ ВЕЛИЧИНИ

План

1. Поняття математичної статистики.
2. Статистичні ряди розподілу.
3. Емпірична функція F *(x) та її властивості.
4. Числові характеристики дискретного статистичного розподілу вибірки.
5. Статистичні середні.

1. Поняття математичної статистики

Математична статистика – це розділ математики, який вивчає закономірності, що мають місце в масових явищах і статистичних сукупностях.

Зміст математичної статистики складають математичні методи систематизації, обробки та аналізу масових статистичних даних незалежно від їх якісного змісту.

Основні завдання математичної статистики:

- встановлення законів розподілу різних випадкових змінних, одержаних в результаті статистичного спостереження;
- перевірка статистичних гіпотез;
- оцінка невідомих параметрів різних розподілів.

Оскільки суцільна обробка всіх елементів сукупності практично неможлива, то, як правило, застосовується вибірковий метод. Отже, розрізняють ***генеральну і вибіркову сукупності***.

Множина Ω однотипних елементів, яким притаманні певні кількісні ознаки (розміри, вага, маса тощо), утворює ***генеральну сукупніст*ь**. Кількість усіх елементів генеральної сукупності називають її обсягом і позначають символом N, значення якого здебільшого невідоме.

Кожна непорожня підмножина A множини Ω $(A \subset \Omega)$ випадково вибраних елементів із генеральної сукупності називається ***вибіркою***. Кількість усіх елементів вибірки називають її ***обсягом*** і позначають символом n. Його значення відоме, причому воно набагато менше за обсяг генеральної сукупності $(n < N)$.

Математична статистика розв'язує дві категорії задач:

1) статистичне оцінювання (точкове, інтервальне) параметрів генеральної сукупності;

2) перевірка правдивості статистичних гіпотез про значення параметрів генеральної сукупності або про закон розподілу ознаки генеральної сукупності на підставі обробки результатів вибірки.

Кількісні ознаки елементів генеральної сукупності можуть бути одновимірними і багатовимірними, дискретними і неперервними.

2.Статистичні ряди розподілу

Статистичні ряди розподілу – це впорядковані статистичні сукупності, тобто сукупності (множини) однорідних об'єктів чи явищ, об'єднаних за певними ознаками кількісного чи якісного характеру в єдине ціле.

Ранжированний ряд – це ряд чисел, які знаходяться в порядку зростання або спадання ознаки, що варіює.

Розподіл одиниць сукупності за ознаками, що не мають кількісного виразу, називається ***атрибутивним рядом.***

Коли реалізується вибірка, кількісна ознака, наприклад X, набуває конкретних числових значень ($X = x_i$), які називають ***варіантою***.

Зростаючий числовий ряд варіант називають ***варіаційним.***

Кожна варіанта вибірки може бути спостереженою n_i раз($n_i \geq 1$), число n_i називають ***частотою варіанти*** x_i.

При цьому

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

де k — кількість варіант, що різняться числовим значенням;

n — обсяг вибірки.

Відношення частоти n_i варіанти x_i до обсягу вибірки n називають її ***відносною частотою*** і позначають через W_i , тобто

$$W_i = \frac{n_i}{n}.$$

Для кожної вибірки виконується рівність

$$\sum_{i=1}^{k} W_i = 1.$$

Якщо досліджується ознака генеральної сукупності X, яка є неперервною, то варіант буде багато. У цьому разі ***варіаційний ряд*** — це певна кількість рівних або нерівних частинних інтервалів чи груп варіант зі своїми частотами.

Такі частинні інтервали варіант, які розміщені у зростаючій послідовності, утворюють ***інтервальний варіаційний ряд.***

На практиці для зручності, як правило, розглядають інтервальні варіаційні ряди, у котрих інтервали є рівними між собою.

Перелік варіант варіаційного ряду і відповідних їм частот, або відносних частот, називають ***дискретним статистичним розподілом вибірки.***

У табличній формі він має такий вигляд:

$X = x_i$	x_1	x_2	x_3	…	x_k
n_i	n_1	n_2	n_3	…	n_k
W_i	W_1	W_2	W_3	…	W_k

Дискретний статистичний розподіл вибірки можна подати емпіричною функцією $F^*(x)$.

3. Емпірична функція F *(x) та її властивості.

Функція аргументу x, що визначає відносну частоту події $X < x$, тобто

$$F^*(x) = W(X < x) = \frac{n_x}{n},$$

називається *емпіричною*, або ***комулятою.***

Тут n — обсяг вибірки;

n_x — кількість варіант статистичного розподілу вибірки, значення яких менше за фіксовану варіанту x;

$F^*(x)$ — називають ще ***функцією нагромадження відносних частот.***

Властивості F *(x):

1) $0 \le F^*(x) \le 1$;

2) $F(x_{\min}) = 0$, де $x_{\min}$ є найменшою варіантою варіаційного ряду;

3) $F(x)|x > x_{max}|$, де $x_{\max}$ є найбільшою варіантою варіаційного ряду;

4) $F(x)$ є неспадною функцією аргументу x, а саме: $F(x_2) \ge F(x_1)$ при $x_2 \ge x_1$.

Дискретний статистичний розподіл вибірки можна зобразити графічно у вигляді ламаної лінії, відрізки якої сполучають координати точок $(x_i;\ n_i)$ – ***полігон частот***, або $(x_i;\ W_i)$ - ***полігон відносних частот.***

4. Числові характеристики дискретного статистичного розподілу вибірки

Числові характеристики:

1) ***вибіркова середня величина*** $\bar{x}_B$. Величину, яка визначається формулою

$$\bar{x}_B = \frac{\sum x_i n_i}{n},$$

називають ***вибірковою середньою величиною дискретного статистичного розподілу вибірки.***

Тут x_i — варіанта варіаційного ряду вибірки;

n_i — частота цієї варіанти;

n — обсяг вибірки ($n = \sum n_i$).

Якщо всі варіанти з'являються у вибірці лише по одному разу, тобто $n_i = 1$, то

$$\bar{x}_B = \frac{\sum x_i}{n}.$$

2) ***відхилення варіант***. Різницю $(x_i - \bar{x}_B)n_i$ називають відхиленням варіант.

При цьому

$$\sum(x_i - \bar{x}_B)n_i = \sum x_i n_i - \sum \bar{x}_B n_i = n \cdot \bar{x}_B - n \cdot \bar{x}_B = 0.$$

Отже, сума відхилень усіх варіант варіаційного ряду вибірки завжди дорівнює нулеві;

3) ***мода (Mo*)***. Модою дискретного статистичного розподілу вибірки називають варіанту, що має найбільшу частоту появи;

4) ***медіана (Me*)***. Медіаною дискретного статистичного розподілу вибірки називають варіанту, яка поділяє варіаційний ряд на дві частини, рівні за кількістю варіант;

5) ***дисперсія***. Для вимірювання розсіювання варіант вибірки відносно $\bar{x}_B$ вибирається дисперсія.

Дисперсія вибірки — це середнє арифметичне квадратів відхилень варіант відносно $\bar{x}_B$, яке обчислюється за формулою

$$D_B = \frac{\sum(x_i - \bar{x}_B)^2 n_i}{n}$$

або

$$D_B = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - (\bar{x}_B)^2;$$

6) ***середнє квадратичне відхилення вибірки σ_B***. При обчисленні D_B відхилення підноситься до квадрата, а отже, змінюється одиниця виміру ознаки X, тому на основі дисперсії вводиться середнє квадратичне відхилення

$$\sigma_B = \sqrt{D_B},$$

яке вимірює розсіювання варіант вибірки відносно $\bar{x}_B$, але в тих самих одиницях, в яких вимірюється ознака X;

7) ***розмах (R)***. Для грубого оцінювання розсіювання варіант відносно $\bar{x}_B$ застосовується величина, яка дорівнює різниці між найбільшою x_{max} і найменшою x_{min} варіантами варіаційного ряду. Ця величина називається *розмахом*

$$R = xmin_{max};$$

8) ***коефіцієнт варіації V***. Для порівняння оцінок варіацій статистичних рядів із різними значеннями $\bar{x}_B$, які не дорівнюють нулеві, вводиться коефіцієнт варіації, який обчислюється за формулою

$$V = \frac{\sigma_B}{\bar{x}_B} 100\%.$$

Перелік часткових інтервалів і відповідних їм частот, або відносних частот, називають ***інтервальним статистичним розподілом вибірки***.

У табличній формі цей розподіл має такий вигляд:

h	$x_1 - x_2$	$x_2 - x_3$	$x_3 - x_4$	...	$x_{k-1} - x_k$
n_i	n_1	n_2	n_3	...	N_k
W_i	W_1	W_2	W_3	...	W_k

Тут $h = x_i - x_{i-1}$ є довжиною часткового i-го інтервалу. Як правило, цей інтервал береться однаковим.

Інтервальний статистичний розподіл вибірки можна подати графічно у вигляді гістограми частот або відносних частот, а також, як і для дискретного статистичного розподілу, емпіричною функцією $F^*(x)$ (комулятою).

5.Статистичні середні

Статистичні середні відображають об’єктивну наявність певних умов, які проявляються в кожній одиниці досліджуваної сукупності, вони дають узагальнюючу кількісну характеристику статистичним сукупностям однотипних явищ за варіаційною ознакою.

Середня узагальнює або являє собою весь діапазон даних і є результатом абстрагування від відмінностей, що притаманні окремим одиницям сукупностей. Середні поділяються на об’ємні та структурні.

Середню можна визначити як *просту*, коли значення варіант спостерігаються в сукупності лише один раз або однакову кількість разів, і як *зважену*, коли значення варіант повторюються різну кількість разів. Степеневі середні (проста і зважена) мають вигляд:

$$\bar{x} = \sqrt[k]{\frac{\sum x_i^k}{n}}; \qquad \bar{x} = \sqrt[k]{\frac{\sum x_i^k \cdot n_i}{\sum n_i}},$$

де $\bar{x}$ – степенева середня; $\boldsymbol{k}$ – показник степеня, що визначає вид середньої;

x_i - варіанта; $\boldsymbol{n_i}$ – частоти ($n = \sum n_i$).

Відповідні формули степеневих середніх подано в таблиці 1.

Таблиця 1

Формули степеневих середніх

Розмір (к)	***Вид степеневої середньої***	***Степенева середня***	
		проста	***зважена***
-1	Гармонійна	$\bar{x} = \frac{n}{\sum \frac{1}{x_i}}$	$\bar{x} = \frac{\sum n_i}{\sum \frac{n_i}{x_i}}$
0	Геометрична	$\bar{x} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k}$	$\bar{x} = \sqrt[\sum n_i]{x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}}$
1	Арифметична	$\bar{x} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{\sum n_i}}$	$\bar{\boldsymbol{x}} = \frac{\sum \boldsymbol{x_i} \cdot \boldsymbol{n_i}}{\sum \boldsymbol{n_i}}$
2	Квадратична	$\bar{x} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}}$	$\bar{x} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{\sum n_i}}$

Спрощений метод розрахунку середньої арифметичної заснований на використанні ряду її властивостей і називається методом відліку від умовного початку $\boldsymbol{x_0}$:

$$\bar{x} = \bar{x}' \cdot h + x_0 = \frac{\sum \left(\frac{x_i - x_0}{h}\right) \cdot n_i}{\sum n_i} \cdot h + x_0,$$

де $\bar{x}' = \frac{\sum x_i' \cdot n_i}{\sum n_i}$ – зменшена середня арифметична;

$x' = \frac{x_i - x_0}{h}$ – відхилення в інтервалах;

x_0 – початок відхилу;

h – величина інтервалу.

Правило мажорантності середніх:

$$\bar{x}_{гарм} < \bar{x}_{геом} < \bar{x}_{арифм} < \bar{x}_{квадр}.$$

Для характеристики статистичних рядів розподілу використовуються також структурні середні: мода та медіана.

Мода – це варіанта, що має найбільшу частоту.

Для інтервального ряду розподілу мода визначається за формулою:

$$Mo = x_{Mo\,\min} + h \cdot \frac{n_{Mo} - n_{Mo-1}}{(n_{Mo} - n_{Mo-1}) + (n_{Mo} - n_{Mo+1})},$$

де $x_{Mo\,\min}$ – нижня границя модального інтервалу (інтервалу, який має найбільшу частоту);

h – величина інтервалу;

n_{Mo} – частота модального інтервалу;

n_{Mo-1} – частота передмодального інтервалу;

n_{Mo+1} – частота післямодального інтервалу.

Медіана – це значення варіанти в середині ранжированого ряду розподілу.

Для інтервального ряду розподілу:

$$Me = x_{Me\,\min} + h \cdot \frac{0{,}5 \sum n_i - S_{Me-1}}{n_{Me}},$$

де $x_{Me\,\min}$ – нижня границя медіанного інтервалу (інтервалу, якому відповідає перша із нагромаджених частот, що перевищує половину всього об'єму сукупності);

h – величина інтервалу;

$0{,}5\sum n_i$ – половина суми всіх частот;

S_{Me-1} – нагромаджена частота передмодального інтервалу;

n_{Me} – частота медіанного інтервалу.

Показники варіації

Варіація- це коливання ознаки. Для характеристики міри варіації потрібно використовувати показники варіації, що подані в вигляді таблиці 2.

Розмах варіації дає лише загальне уявлення про розміри варіації, тобто її наближену оцінку.

Таблиця 2

Формули розрахунку показників варіації

Статистична характе-ристика варіації	***Форми показника варіації***	
	проста	***зважена***
Розмах варіації	$R = X_{max} - X_{min}$	$R = X_{max} - X_{min}$
Середнє лінійне відхилення	$\bar{d} = \frac{\sum \lvert x_i - \bar{x} \rvert}{n}$	$\bar{d} = \frac{\sum \lvert x_i - \bar{x} \rvert \cdot n_i}{\sum n_i}$
Дисперсія, середній квадрат відхилень	$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$	$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i}{\sum n_i}$
Середнє квадратичне відхилення	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i}{\sum n_i}}$
Коефіцієнт варіації за середнім квадратичним відхиленням	$V_\sigma = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\%$	$V_\sigma = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\%$

Середнє лінійне відхилення характеризує повноту коливання ознаки. Чим більша його величина, тим менш однорідною вважається сукупність.

Середнє квадратичне відхилення характеризує абсолютну міру варіації, показує на скільки одиниць у середньому всі значення ознаки відрізняються від середньої арифметичної.

Коефіцієнт варіації характеризує відносну міру варіації і дозволяє порівнювати ступінь варіації в рядах розподілу з різним рівнем середніх. Якщо $V = 5\%$ - варіація слабка, 6-10 – помірна, 10-20 – значна, 21-50 – велика, $V > 50\%$ - дуже велика.

Властивості дисперсії:

1. Якщо з усіх можливих варіант відняти стале число А, то

величина дисперсії не зміниться:

$$\sigma^2_{(x_i - A)} = \sigma^2 .$$

2. Якщо значення варіант поділити на стале число *A*, то величина дисперсії зменшиться в A^2, а середнє квадратичне відхилення – в А разів.

3.Дисперсія сталої величини дорівнює нулю.

ТЕМА 8. СТАТИСТИЧНІ ГІПОТЕЗИ

План

1. Поняття статистичних гіпотез.
2. Області прийняття гіпотези.
3. Алгоритм перевірки правильності гіпотези.

1. Поняття статистичних гіпотез

Будь-які статистичні висновки, здобуті на підставі обробки вибірки, називають ***статистичними гіпотезами.***

Статистичні гіпотези про значення параметрів ознак генеральної сукупності називають ***параметричними.***

Статистичні гіпотези, що висуваються на підставі обробки вибірки про закон розподілу ознаки генеральної сукупності, називаються ***непараметричними***.

Гіпотезу, що підлягає перевірці, називають ***основною***. Оскільки ця гіпотеза припускає відсутність систематичних розбіжностей (нульові розбіжності) між невідомим параметром генеральної сукупності і величиною, що одержана внаслідок обробки вибірки, то її називають ***нульовою гіпотезою*** і позначають H_0.

Зміст нульової гіпотези записується так:

$H_0: \rightleftarrows\rightleftarrows\rightleftarrows\rightleftarrows\rightleftarrows\rightleftarrows \ \bar{x}_Г = a$; $H_0:\ \sigma_Г = 2$; $H_0: r_{xy} = 0{,}95$.

Кожній нульовій гіпотезі можна протиставити кілька ***альтернативних (конкуруючих) гіпотез***, які позначають символом H_α, що заперечують твердження нульової. Так, наприклад, нульова гіпотеза стверджує: $H_0: \bar{x}_Г = a$, а альтернативна гіпотеза — $H_\alpha: \bar{x}_Г > a$, тобто заперечує твердження нульової.

Проста гіпотеза, як правило, належить до параметра ознак генеральної сукупності і є однозначною.

Складна статистична гіпотеза є неоднозначною. Вона може стверджувати, що значення параметра генеральної сукупності належить певній області ймовірних значень, яка може бути дискретною і неперервною.

Множину Ω всіх можливих значень статистичного критерію K можна поділити на дві підмножини A і $\bar{A}$, які не перетинаються.

$(A \cup \bar{A} = \Omega, A \cap \bar{A} = \emptyset)$.

2.Область прийняття гіпотези

Сукупність значень статистичного критерію $K \in A$, за яких нульова гіпотеза не відхиляється, називають ***областю прийняття нульової гіпотези***.

Сукупність значень статистичного критерію $K \in \bar{A}$, за яких нульова гіпотеза не приймається, називають ***критичною областю***.

Отже, A — область прийняття H_0,

$\bar{A}$ — критична область, де H_0 відхиляється.

Точку або кілька точок, що поділяють множину Ω на підмножини A і $\bar{A}$, називають ***критичними*** і позначають через $K_{кр}$. Існують три види критичних областей:

Якщо при $K < K_{кр}$ нульова гіпотеза відхиляється, то в цьому разі ми маємо лівосторонню критичну область, яку умовно можна зобразити (рис. 1).

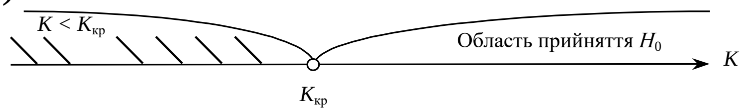


Рисунок 1 – Лівостороння критична область

Якщо при $K > K_{кр}$ нульова гіпотеза відхиляється, то в цьому разі маємо правосторонню критичну область (рис. 2).

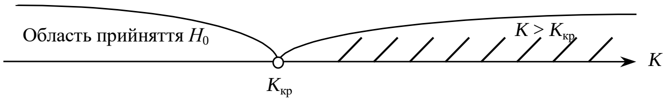


Рисунок 2 - Правостороння критична область

Якщо ж при $K < K'_{кр}$ і при $K > K''_{кр}$ нульова гіпотеза відхиляється, то маємо двосторонню критичну область (рис. 3).

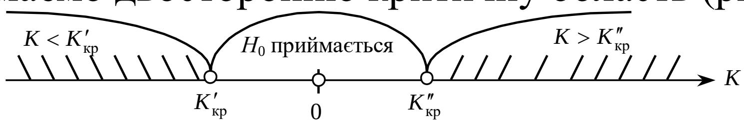


Рисунок 3 – Двостороння критична область

Лівостороння і правостороння області визначаються однією критичною точкою, двостороння критична область — двома критичними точками, симетричними відносно нуля.

Для перевірки правильності H_0 задається так званий ***рівень значущості*** $\boldsymbol{\alpha}$.

α — це мала ймовірність, якою наперед задаються. Вона може набувати значення α = 0,005; 0,01; 0,001.

В основу перевірки H_0 покладено принцип $P(K \in \bar{A}) = \alpha$, тобто ймовірність того, що статистичний критерій потрапляє в критичну область $\bar{A}$, дорівнює малій імовірності α. Якщо ж виявиться, що $K \in \bar{A}$, а ця подія малоймовірна і все ж відбулася, то немає підстав приймати нульову гіпотезу.

3.Алгоритм перевірки правильності гіпотези

Алгоритм перевірки правильності H₀:

1. Сформулювати H_0 й одночасно альтернативну гіпотезу H_α.

2. Вибрати статистичний критерій, який відповідав би сформульованій нульовій гіпотезі.

3. Залежно від змісту нульової та альтернативної гіпотез будується правостороння, лівостороння або двостороння критична область, а саме:

нехай $H_0: \bar{x}_r = a$, тоді, якщо:

$H_\alpha: \bar{x}_r > a$, то вибирається правостороння критична область, якщо

$H_\alpha: \bar{x}_r < a$, то вибирається лівостороння критична область і коли

$H_\alpha: \bar{x}_r \neq a$, то вибирається двостороння критична область.

4. Для побудови критичної області (лівосторонньої, правосторонньої чи двосторонньої) необхідно знайти критичні точки. За вибраним статистичним критерієм та рівнем значущості α знаходяться критичні точки.

5. За результатами вибірки обчислюється спостережуване значення критерію $K^*_{\text{сп}}$.

6. Відхиляють чи приймають нульову гіпотезу на підставі таких міркувань:

у разі, коли $K^* \in \bar{A}$, а це є малоймовірною випадковою подією, $P(K^* \in \bar{A}) = \alpha$ і, незважаючи на це, вона відбулася, то в цьому разі H_0 відхиляється:

для лівосторонньої критичної області

$P(K^*_{\text{сп}} < K_{кр}) = \alpha;$

для правосторонньої критичної області

$P(K^*_{\text{сп}} > K_{\text{кр}}) = \alpha;$

для двосторонньої критичної області

$P(K^*_{\text{сп}} < K'_{\text{кр}}) + P(K^*_{\text{сп}} > K''_{\text{кр}}) = \alpha$

або

$P(K^*_{\text{сп}} < K'_{\text{кр}}) = P(K^*_{\text{сп}} > K''_{\text{кр}}) = \frac{\alpha}{2},$

ураховуючи ту обставину, що критичні точки $K'_{\text{кр}}$ і $K''_{\text{кр}}$ симетрично розташовані відносно нуля.

ТЕМА 9. ДИСПЕРСІЙНО-КОРЕЛЯЦІЙНИЙ МЕТОД АНАЛІЗУ

План

1. Елементи дисперсійного аналізу.
2. Елементи теорії регресії.
3. Кореляційна залежність.

1.Елементи дисперсійного аналізу

Сутність дисперсійного аналізу полягає в тому, що загальну дисперсію досліджуваної ознаки розділяють на окремі компоненти, які обумовлені впливом певних конкретних чинників. Істотність їх впливу на цю ознаку здійснюється методом дисперсійного аналізу.

Відповідно до дисперсійного аналізу будь-який його результат можна подати у вигляді суми певної кількості компонент. Під ***рівнем фактора*** розуміють певну його міру.

У разі проведення дисперсійного аналізу досліджуваний масив даних, одержаних під час експерименту, поділяють на певні групи, які різняться дією на результати експерименту певних рівнів факторів.

Вважається, що досліджувана ознака має нормальний закон розподілу, а дисперсії в кожній окремій групі здобутих значень ознаки однакові. Ці припущення необхідно перевірити.

Однофакторний дисперсійний аналіз

Нехай потрібно дослідити вплив на ознаку X певного одного фактора. Результати експерименту ділять на певне число груп, які відрізняються між собою ступенем дії фактора.

Відповідно до моделі однофакторного дисперсійного аналізу необхідно визначити дві дисперсії, а саме: міжгрупову (дисперсію групових середніх), зумовлену впливом досліджуваного фактора на ознаку X, і внутрішньогрупову, зумовлену впливом інших випадкових факторів.

Загальна дисперсія розглядається як сума квадратів відхилень: $\sum_{i=1}^{n_j}\sum_{j=1}^{p}(x_{ij}-\bar{x})^2$.

Для зручності в проведенні необхідних обчислень результати експерименту зводять в спеціальну таблицю(табл.1):

Таблиця 1

Ступінь впливу фактора (групи)	Спостережуване значення ознаки X	Групові середні	Загальна середня
1	$x_{11}, x_{21}, x_{31}, \ldots, x_{n,1}$	$\bar{x}_1 = \dfrac{\sum_{i=1}^{m} x_{i1}}{n_1}$	$\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n_j}\sum_{j=1}^{p} x_{ij}}{N}$ $N = \sum\limits_{j=1}^{p} n_j$
2	$x_{12}, x_{22}, x_{32}, \ldots, x_{n,2}$	$\bar{x}_2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{m} x_{i2}}{n_2}$	
3	$x_{13}, x_{23}, x_{33}, \ldots, x_{n,31}$	$\bar{x}_3 = \dfrac{\sum_{i=1}^{m} x_{i3}}{n_3}$	
. . .	....	....	
p	$x_{1p}, x_{2p}, x_{3p}, \ldots, x_{n,p}$	$\bar{x}_p = \dfrac{\sum_{i=1}^{m} x_{ip}}{n_p}$	

2. Елементи теорії регресії

При дослідженні двох змінних X та Y зміна значень $X = x_i$ призводить до такої зміни значень Y, яку можна розбити на два компоненти: систематичну, що пов'язана із залежністю, котра існує між X та Y, і випадкову, яка зазнає впливу випадкових факторів.

Показником, що вимірює стохастичний зв'язок між змінними, є ***коефіцієнт кореляції***, який свідчить з певною мірою ймовірності, наскільки зв'язок між змінними близький до строгої лінійної залежності.

За наявності кореляційного зв'язку між змінними необхідно виявити його форму функціональної залежності (лінійна чи нелінійна), а саме:

$$y = \beta_0 + \beta_i x; \quad (1)$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2; \quad (2)$$

$$y = \beta_0 + \frac{\beta_1}{x}. \quad (3)$$

Наведені можливі залежності між змінними X і Y (1), (2), (3) називають ***функціями регресії.***

Для двовимірного статистичного розподілу вибірки ознак (X, Y) поняття статистичної залежності між ознаками X та Y має таке визначення:

статистичною залежністю X від Y називають таку, за якої при зміні значень ознаки $Y = y_i$ змінюється умовний статистичний розподіл ознаки X, статистичною залежністю ознаки Y від X називають таку, за якої зі зміною значень ознаки $X = x_i$ змінюється умовний статистичний розподіл ознаки Y.

У разі зміни умовних статистичних розподілів змінюватимуться і умовні числові характеристики.

3.Кореляційна залежність

Кореляційною залежністю ознаки X від Y називається функціональна залежність умовного середнього $\bar{y}_{x_j}$ від аргументу x, що можна записати так:

$$\bar{y}_x = \alpha(x).$$

Між ознаками X та Y може існувати статистична залежність і за відсутності кореляційної. Але коли існує кореляційна залежність між ознаками X та Y, то обов'язково між ними існуватиме і статистична залежність.

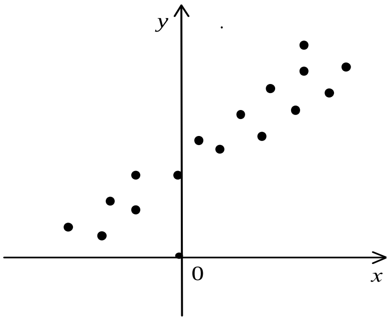


Рисунок 1

Лінійне рівняння зв'язку X і Y можна подати в такому вигляді:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i,$$

де β_0, β_1 є невідомі параметри регресії, ε_i є випадковою змінною, що характеризує відхилення y від гіпотетичної теоретичної регресії (рис.1).

ПИТАННЯ ДЛЯ ПІДСУМКОВОГО КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ ЗДОБУВАЧІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ

1. Предмет теорії ймовірностей. Поняття події. Класифікація подій.
2. Відносна частота. Стійкість відносної частоти. Статистична ймовірність.
3. Деякі відомості із комбінаторики. Комбінації, розміщення, перестановки.
4. Класичне визначення ймовірності. Його обмеженість. Геометрична ймовірність.
5. Поняття про сумісні та несумісні події. Сума подій. Теорема додавання ймовірностей несумісних подій.
6. Повна група подій. Ймовірність суми повної групи подій.
7. Протилежні події. Ймовірність появи протилежної події. Вірогідні та неможливі події, їх ймовірності.
8. Незалежні події. Теорема множення ймовірностей незалежних подій. Ймовірність появи хоча би однієї незалежної події.
9. Залежні події. Умовні ймовірності. Теорема додавання ймовірностей сумісних подій.
10. Формула повної ймовірності. Ймовірність гіпотез. Формули Байєса.
11. Повторні незалежні випробування. Формула Бернуллі.
12. Дискретні та неперервні випадкові величини. Закон розподілу випадкової величини. Біномний закон розподілу.
13. Закон розподілу Пуассона. Ймовірність відхилення відносної частоти від сталої ймовірності в незалежних випробуваннях.
14. Знаходження найімовірнішого числа появи події в незалежних випробуваннях.
15. Локальна теорема Лапласа (без доведення).
16. Інтегральна теорема Лапласа (без доведення).
17. Числові характеристики дискретних випадкових величин (математичне сподівання, середнє квадратичне відхилення, дисперсія).
18. Числові характеристики неперервних випадкових величин (математичне сподівання, середнє квадратичне відхилення, дисперсія).
19. Властивості математичного сподівання.

20. Властивості дисперсії. Поняття про моменти розподілу.
21. Математичне сподівання випадкової величини, розподіленої за біномним законом.
22. Дисперсія та середнє квадратичне відхилення випадкової величини, розподіленої за біномним законом.
23. Математичне сподівання випадкової величини, розподіленої за законом Пуассона.
24. Дисперсія і середнє квадратичне відхилення випадкової величини розподіленої за законом Пуассона.
25. Поняття інтегральної функції розподілу. Властивості інтегральної функції, її графік.
26. Поняття диференціальної функції розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини та її властивості. Ймовірність попадання неперервної випадкової величини в заданий інтервал.
27. Знаходження інтегральної функції розподілу за відомою диференціальною функцією.
28. Закон великих чисел. Нерівність і теорема Чебишева. Значення теореми Чебишева для практики.
29. Закон великих чисел. Теорема Бернуллі.
30. Нормальний закон розподілу випадкової величини.
31. Властивості функції щільності ймовірності нормального закону розподілу.
32. Ймовірність попадання в заданий інтервал нормально розподіленої випадкової величини.
33. Правило трьох сигм.
34. Математичне сподівання диференціальної функції нормального розподілу.
35. Дисперсія диференціальної функції нормального розподілу.
36. Поняття про теорему Ляпунова. Формулювання центральної граничної теореми.
37. Оцінка відхилення теоретичного розподілу від нормального. Асиметрія та ексцес.
38. Показниковий розподіл. Числові характеристики.
39. Предмет математичної статистики. Її місце в системі статистичних дисциплін.
40. Завдання математичної статистики.

41. Статистичні ряди розподілу: ранжирований ряд, варіаційний ряд (дискретний та інтервальний). Побудова рядів розподілу.
42. Графічне зображення рядів розподілу: полігон, гістограма, кумулята та огіва. Основні форми статистичних розподілів.
43. Емпірична та теоретична функція розподілу.
44. Центральна тенденція ряду розподілу. Середні величини як характеристики ряду.
45. Об'ємні середні величини: середня арифметична, середня геометрична, середня гармонійна, середня квадратична. Правило мажорантності середніх.
46. Структурні середні величини: мода та медіана.
47. Показники варіації ознак: розмах варіації, середнє лінійне відхилення, дисперсія, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт варіації.
48. Математичні властивості середньої арифметичної. Обчислення середньої арифметичної спрощеним методом.
49. Математичні властивості дисперсії. Обчислення дисперсії спрощеним методом. Формула для обчислення дисперсії.
50. Загальна, групова та внутрішньогрупова дисперсії. Правило додавання дисперсій.
51. Моменти статистичного розподілу: початкові, центральні, умовні та нормовані.
52. Оцінка відхилення емпіричного розподілу від нормального. Характеристика асиметрії та ексцесу розподілу.
53. Загальні поняття вибіркового спостереження. Генеральна та вибіркова сукупності. Їх характеристики.
54. Повторна та безповторна вибірки. Репрезентивна вибірка. Способи відбору.
55. Статистичні оцінки. Оцінка генеральної дисперсії за виправленою вибірковою.
56. Основні вимоги до статистичної оцінки: незміщеність, ефективність, спроможність і достатність.
57. Точкова та інтервальна оцінки параметрів генеральної сукупності. Надійна ймовірність. Надійний інтервал. Рівень значимості.
58. Надійний інтервал для оцінки математичного сподівання нормального розподілу при відомому σ.

59. Надійний інтервал для оцінки математичного сподівання нормального розподілу при невідомому σ.
60. Надійний інтервал для оцінки середнього квадратичного відхилення σ нормального розподілу.
61. Закони розподілу. Нормальний розподіл.
62. Розподіл Стьюдента, розподіл χ^2, розподіл Фішера-Снедекора.
63. Статистичні гіпотези: нульова та альтернативна, проста та складна.
64. Статистичні критерії та критична область.
65. Перевірка статистичних гіпотез відносно середніх.
66. Перевірка статистичних гіпотез відносно розподілів.
67. Перевірка гіпотез про відповідність емпіричного розподілу теоретичному з використанням χ^2-критерію Пірсона як критерію узгодження.
68. Перевірка гіпотез про достовірність відмінностей між дисперсіями за допомогою F-критерію.
69. Суть та завдання дисперсійного методу аналізу.
70. Схема дисперсійного аналізу.
71. Алгоритм рішення однофакторної моделі.
72. Функціональна, статистична та кореляційна залежності.
73. Умовні середні. Дві основні задачі теорії кореляції.
74. Метод найменших квадратів при відшуканні параметрів вибіркового рівняння лінії регресії за незгрупованими даними.
75. Відшукання параметрів вибіркового рівняння прямої лінії регресії за згрупованими даними. Кореляційна таблиця.
76. Вибірковий коефіцієнт кореляції. Коефіцієнт детермінації.
77. Визначення коефіцієнтів регресії (ρ_{yx}, ρ_{xy}) через коефіцієнт кореляції.
78. Вибіркове кореляційне відношення. Криволінійна регресія.
79. Перевірка адекватності кореляційної моделі фактичних даних.
80. Перевірка значимості коефіцієнта кореляції.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Барковський В. В. Теорія ймовірності та математична статистика : навчальний посібник. Київ : ЦУЛ, 2019. 424 с.
2. Бідюк П. І., Ткач Б. П., Харрінгтон Т. Математична статистика : навчальний посібник. Київ : ДП «Видавничий дім «Персонал», 2018. 348 с.
3. Валь О. Д., Мельничук О. Д., Королюк С. Л. Теорія ймовірностей від найпростішого : навчальний посібник. Чернівці : Книги-XXI, 2004. 160 с.
4. Васильків І. М. Основи теорії ймовірностей і математичної статистики : навчальний посібник. Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2020. 184 с.
5. Волошин О. Р., Галайко Н. В. Математична статистика : курс лекцій. Львів : ЛьвДУВС, 2010. 88 с.
6. Гуськова В. Г., Бідюк П. І., Гасанов А. С. Ймовірнісно-статистичні методи моделювання і прогнозування. Київ : Видавництво НПУ імені М. П. Драгоманова, 2022. 456 с.
7. Донченко В. С., Сидоров М. В., Шарапов М. М. Теорія ймовірності та математична статистика : навчальний посібник. Київ : Академія, 2009. 288 с.
8. Жалдак М. І., Кузьміна Н. М., Михалін Г. О. Теорія ймовірностей і математична статистика : підручник. Київ : НПУ імені М.П. Драгоманова, 2020. 750 с.

9. Жалдак М. І., Михалін Г. О Елементи стохастики з комп’ютерною підтримкою : посібник для вчителів. Київ : Шкільний світ, 2002. 128 с.

10. Жерновий Ю. В. Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики для студентів нематематичних спеціальностей. Львів, 2009. 18 с. URL: http://zyurvas.narod.ru/Lekcyi_z_TIMS/zbirn_zadach.pdf.

11. Жерновий Ю.В. Теорія ймовірностей та математична статистика : тексти лекцій для студентів нематематичних спеціальностей. Львів, 2008. 101 с. URL: http://zyurvas.narod.ru/Lekcyi_z_TIMS/Lekcii_z_TIMS.pdf.

12. Зайцев Є. П. Теорія ймовірностей і математична статистика. Базовий курс з індивідуальними завданнями і розв’язком типових варіантів : навчальний посібник. 2-ге видання. Київ : Алерта, 2017. 440 с.

13. Майборода Р. Є. Комп'ютерна статистика : підручник. Київ : ВПЦ "Київський університет", 2019. 589 с.

14. Медведєв М. Г., Пащенко І. О. Теорія ймовірностей та математична статистика : підручник. Київ : Ліра-К, 2020. 536 с.

15. Найко Д. А. Шевчук О. Ф. Теорія ймовірностей та математична статистика : навчальний посібник. Вінниця : ВНАУ, 2020. 382 с.

16. Огірко О. І., Галайко Н. В. Теорія ймовірностей та математична статистика: навчальний посібник. Львів : ЛьвДУВС, 2017. 292 с.

17. Статистична перевірка гіпотез. URL: https://tdmuv.com/kafedra/internal/informatika/classes_stud/uk/med/bi

ol/ptn/вища%20математика/1/11.Статистична%20перевірка%20гіпотез.htm

18. Теорія ймовірностей : навчальний посібник / уклад. О. В. Барабаш, А. П. Мусієнко, О. В. Свинчук. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 193 с.
19. Теорія ймовірностей та математична статистика : конспект лекцій / уклад. О. В. Шебаніна, С. І. Тищенко, І. І. Хилько, В. О. Крайній. Миколаїв : МНАУ, 2022. 60 с. URL: https://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/12460.
20. Турчин В. М. Теорія ймовірностей та математична статистика. Основні поняття, приклади, задачі : підручник. Дніпропетровськ : ІМА-прес, 2014. 560 с.

ДОДАТКИ

Додаток 1

Значення функції Гауса $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3667
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3521	3503	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3392	3271	3251	3230	3209	3287	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2903	2780	2756	2832	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2689	2565	2541	2516	2592	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1682	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	100969	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551

x	***0***	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0476	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0191	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0090	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток 2

Значення функції Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	*Ф (x)*	*x*	*Ф (x)*	*x*	*Ф (x)*	*x*	*Ф (x)*
0,00	0,0000	**0,34**	0,1331	**0,68**	0,2517	**1,02**	0,3461
0,01	0,0040	**0,35**	0,1368	**0,69**	0,2549	**1,03**	0,3485
0,02	0,0080	**0,36**	0,1406	**0,70**	0,2580	**1,04**	0,3508
0,03	0,0120	**0,37**	0,1443	**0,71**	0,2611	**1,05**	0,3551
0,04	0,0160	**0,38**	0,1480	**0,72**	0,2642	**1,06**	0,3554
0,05	0,0199	**0,39**	0,1517	**0,73**	0,2673	**1,07**	0,3577
0,06	0,0239	**0,40**	0,1554	**0,74**	0,2703	**1,08**	0,3599
0,07	0,0279	**0,41**	0,1591	**0,75**	0,2734	**1,09**	0,3621
0,08	0,0319	**0,42**	0,1628	**0,76**	0,2764	**1,10**	0,3643
0,09	0,0359	**0,43**	0,1664	**0,77**	0,2794	**1,11**	0,3665
0,10	0,0398	**0,44**	0,1700	**0,78**	0,2823	**1,12**	0,3686
0,11	0,0438	**0,45**	0,1736	**0,79**	0,2852	**1,13**	0,3708
0,12	0,0478	**0,46**	0,1772	**0,80**	0,2881	**1,14**	0,3729
0,13	0,0517	**0,47**	0,1808	**0,81**	0,2910	**1,15**	0,3749
0,14	0,0557	**0,48**	0,1844	**0,82**	0,2939	**1,16**	0,3770
0,15	0,0596	**0,49**	0,1879	**0,83**	0,2967	**1,17**	0,3790
0,16	0,0636	**0,50**	0,1915	**0,84**	0,2995	**1,18**	0,3810
0,17	0,0675	**0,51**	0,1950	**0,85**	0,3023	**1,19**	0,3830
0,18	0,0714	**0,52**	0,1985	**0,86**	0,3051	**1,20**	0,3849
0,19	0,0753	**0,53**	0,2019	**0,87**	0,3078	**1,21**	0,3869
0,20	0,0793	**0,54**	0,2054	**0,88**	0,3106	**1,22**	0,3883
0,21	0,0832	**0,55**	0,2088	**0,89**	0,3133	**1,23**	0,3907
0,22	0,0871	**0,56**	0,2123	**0,90**	0,3159	**1,24**	0,3925
0,23	0,0910	**0,57**	0,2157	**0,91**	0,3186	**1,25**	0,3944
0,24	0,0948	**0,58**	0,2190	**0,92**	0,3212	**1,26**	0,3962
0,25	0,0987	**0,59**	0,2224	**0,93**	0,3238	**1,27**	0,3980
0,26	0,1026	**0,60**	0,2257	**0,94**	0,3264	**1,28**	0,3997
0,27	0,1064	**0,61**	0,2291	**0,95**	0,3289	**1,29**	0,4015
0,28	0,1103	**0,62**	0,2324	**0,96**	0,3315	**1,30**	0,4032
0,29	0,1141	**0,63**	0,2357	**0,97**	0,3340	**1,31**	0,4049
0,30	0,1179	**0,64**	0,2389	**0,98**	0,3365	**1,32**	0,4066
0,31	0,1217	**0,65**	0,2422	**0,99**	0,3389	**1,33**	0,4082
0,32	0,1255	**0,66**	0,2454	**1,00**	0,3413	**1,34**	0,4099
0,33	0,1293	**0,67**	0,2486	**1,01**	0,3438	**1,35**	0,4115

x	*Φ (x)*	*x*	*Φ (x)*	*x*	*Φ (x)*	*x*	*Φ (x)*
1,36	0,4131	**1,67**	0,4525	**1,98**	0,4761	**2,58**	0,4951
1,37	0,4147	**1,68**	0,4535	**1,99**	0,4767	**2,60**	0,4953
1,38	0,4162	**1,69**	0,4545	**2,00**	0,4772	**2,62**	0,4956
1,39	0,4177	**1,70**	0,4554	**2,02**	0,4783	**2,64**	0,4959
1,40	0,4192	**1,71**	0,4564	**2,04**	0,4793	**2,66**	0,4961
1,41	0,4207	**1,72**	0,4573	**2,06**	0,4803	**2,68**	0,4963
1,42	0,4222	**1,73**	0,4582	**2,08**	0,4812	**2,70**	0,4965
1,43	0,4236	**1,74**	0,4591	**2,10**	0,4821	**2,72**	0,4967
1,44	0,4251	**1,75**	0,4599	**2,12**	0,4830	**2,74**	0,4969
1,45	0,4265	**1,76**	0,4608	**2,14**	0,4838	**2,76**	0,4971
1,46	0,4219	**1,77**	0,4616	**2,16**	0,4846	**0,78**	0,4973
1,47	0,4292	**1,78**	0,4625	**2,18**	0,4854	**2,80**	0,4974
1,48	0,4306	**1,79**	0,4633	**2,20**	0,4861	**2,82**	0,4976
1,49	0,4319	**1,80**	0,4641	**2,22**	0,4868	**2,84**	0,4977
1,50	0,4332	**1,81**	0,4649	**2,24**	0,4875	**2,86**	0,4979
1,51	0,4345	**1,82**	0,4656	**2,26**	0,4881	**2,88**	0,4980
1,52	0,4357	**1,83**	0,4664	**2,28**	0,4887	**2,90**	0,4981
1,53	0,4370	**1,84**	0,4671,	**2,30**	0,4893	**2,92**	0,4982
1,54	04382	**1,85**	0,4678	**2,32**	0,4898	**2,94**	0,4984
1,55	0,4394	**1,86**	0,4686	**2,34**	0,4904	**2,96**	0,4985
1,56	0,4406	**1,87**	0,4693	**2,36**	0,4909	**2,98**	0,4986
1,57	0,4418	**1,88**	0,4699	**2,38**	0,4913	**3,00**	0,49865
1,58	0,4429	**1,89**	0,4706	**2,40**	0,4918	**3,20**	0,49931
1,59	0,4441	**1,90**	0,4713	**2,42**	0,4922	**3,40**	0,49966
1,60	0,4452	**1,91**	0,4719	**2,44**	0,4927	**3,60**	0,499841
1,61	0,4463	**1,92**	0,4726	**2,46**	0,4931	**3,80**	0,499928
1,62	0,4474	**1,93**	0,4732	**2,48**	0,4934	**4,00**	0,499968
1,63	0,4484	**1,94**	0,4738	**2,50**	0,4938	**4,50**	0,499997
1,64	0,4495	**1,95**	0,4744	**2,52**	0,4991	**5,00**	0,499997
1,65	0,4505	**1,96**	0,4750	**2,54**	0,4945		
1,66	0,4515	**1,97**	0,4756	**2,56**	0,4948		

Додаток 3

Значення $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n	***γ***			***n***	***γ***		
	0,95	**0,99**	**0,999**		**0,95**	**0,99**	**0,999**
5	2,78	4,60	8,61	**20**	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	**25**	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	**30**	2,045	2,756	3,656
8	2,37	3,50	5,41	**35**	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	**40**	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	**45**	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	**50**	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	**60**	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	**70**	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	**80**	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	**90**	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	**100**	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	**120**	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97		1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Додаток 4

Значення $q = q(\gamma, n)$

n	γ			***n***	γ		
	0,95	**0,99**	**0,999**		**0,95**	**0,99**	**0,999**
5	1,37	2,67	5,64	**20**	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	**25**	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	**30**	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	**35**	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	**40**	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	**45**	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	**50**	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,50	**60**	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	**70**	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	**80**	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	**90**	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	**100**	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	**150**	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	**200**	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	**250**	0,089	0,120	0,162

Додаток 5

Критичні точки розподілу Фішера (F-розподілу)

Рівень значущості 0,05									
k_2 \ k_1	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***12***	***24***	∞
1	164,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	244,9	249,0	254,3
2	18,5	9,2	19,2	19,3	19,3	19,3	19,4	19,5	19,5
3	10,1	9,6	9,3	9,1	9,0	8,9	8,7	8,6	8,5
4	7,7	6,9	6,6	6,4	6,3	6,2	5,9	5,8	5,6
5	6,6	5,8	5,4	5,2	5,1	5,0	4,7	4,5	4,4
6	6,0	5,1	4,8	4,5	4,4	4,3	4,0	3,8	3,7
7	5,6	4,7	4,4	4,1	4,0	3,9	3,6	3,4	3,2
8	5,3	4,5	4,1	3,8	3,7	3,6	3,3	3,1	2,9
9	5,1	4,3	3,9	3,6	3,5	3,4	3,1	2,9	2,7
10	5,0	4,1	3,7	3,5	3,3	3,2	2,9	2,7	2,5
11	4,8	4,0	3,6	3,4	3,2	3,1	2,8	2,6	2,4
12	4,8	3,9	3,5	3,3	3,1	3,0	2,7	2,5	2,3
13	4,7	3,8	3,4	3,2	3,0	2,9	2,6	2,4	2,2
14	4,6	3,7	3,3	3,1	3,0	2,9	2,5	2,3	2,1
15	4,5	3,7	3,3	3,1	2,9	2,8	2,5	2,3	2,1
16	4,5	3,6	3,2	3,0	2,9	2,7	2,4	2,2	2,0
17	4,5	3,6	3,2	3,0	2,8	2,7	2,4	2,2	2,0
18	4,4	3,6	3,2	2,9	2,8	2,7	2,3	2,1	1,9
19	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,8
20	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,8
22	4,3	3,4	3,1	2,8	2,7	2,6	2,2	2,0	1,8
24	4,3	3,4	3,0	2,8	2,6	2,5	2,2	2,0	1,7
26	4,2	3,4	3,0	2,7	2,6	2,4	2,1	1,9	1,7
28	4,2	3,3	2,9	2,7	2,6	2,4	2,1	1,9	1,6
30	4,2	3,3	2,9	2,7	2,5	2,4	2,1	1,9	1,6
40	4,1	3,2	2,9	2,6	2,5	2,3	2,0	1,8	1,5
60	4,0	3,2	2,8	2,5	2,4	2,3	1,9	1,7	1,4
120	3,9	3,1	2,7	2,5	2,3	2,2	1,8	1,6	1,3
∞	3,8	3,0	2,6	2,4	2,2	2,1	1,8	1,5	1,0

		Рівень значущості 0,01								
k_2 \ k_1	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***8***	***12***	***24***	∞
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5981	6106	6234	6366
2	98,5	99,0	99,2	99,3	99,3	99,4	99,3	99,4	99,5	99,5
3	34,1	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,5	27,1	26,6	26,1
4	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	14,8	14,4	13,9	13,5
5	16,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	10,3	9,9	9,5	9,0
6	13,7	10,9	9,8	9,2	8,8	8,5	8,1	7,7	7,3	6,9
7	12,3	9,6	8,5	7,9	7,5	7,2	6,8	6,5	6,1	5,7
8	11,3	8,7	7,6	7,0	6,6	6,4	6,0	5,7	5,3	4,9
9	10,6	8,0	7,0	6,4	6,1	5,8	5,5	5,1	4,7	4,3
10	10,0	7,6	6,6	6,0	5,6	5,4	5,1	4,7	4,3	3,9
11	9,7	7,2	6,2	5,7	5,3	5,1	4,7	4,4	4,0	3,6
12	9,3	6,9	6,0	5,4	5,1	4,8	4,5	4,2	3,8	3,4
13	9,1	6,7	5,7	5,2	4,9	4,6	4,3	4,0	3,6	3,2
14	8,9	6,5	5,6	5,0	4,7	4,5	4,1	3,8	3,4	3,0
15	8,7	6,4	5,4	4,9	4,6	4,3	4,0	3,7	3,3	2,9
16	8,5	6,2	5,3	4,8	4,4	4,2	3,9	3,6	3,2	2,8
17	8,4	6,1	5,2	4,7	4,3	4,1	3,8	3,5	3,1	2,7
18	8,3	6,0	5,1	4,6	4,3	4,0	3,7	3,4	3,0	2,6
19	8,2	5,9	5,0	4,5	4,2	3,9	3,6	3,3	2,9	2,4
20	8,1	5,9	4,9	4,4	4,1	3,9	3,6	3,2	2,9	2,4
22	7,9	5,7	4,8	4,3	4,0	3,8	3,5	3,1	2,8	2,3
24	7,8	5,6	4,7	4,2	3,9	3,7	3,3	3,0	2,7	2,2
26	*7,7*	5,5	4,6	4,1	3,8	3,6	3,3	3,0	2,6	2,1
28	7,6	5,5	4,6	4,1	3,8	3,5	3,2	2,9	2,5	2,1
30	7,6	5,4	4,5	4,0	3,7	3,5	3,2	2,8	2,5	2,0
40	7,3	5,2	4,3	3,8	3,5	3,3	3,0	2,7	2,3	1,8
60	7,1	5,0	4,1	3,7	3,3	3,1	2,8	2,5	2,1	1,6
120	6,9	4,8	4,0	3,5	3,2	3,0	2,7	2,3	2,0	1,4
∞	6,6	4,6	3,8	3,3	3,0	2,8	2,5	2,2	1,8	1,0

Додаток 6

Критичні точки розподілу Стьюдента (t-розподілу)

Число ступенів свободи, *k*	Рівень значущості, α						
	0,20	***0,10***	***0,05***	***0,02***	***0,01***	***0,002***	***0,001***
1	3,08	6,31	12,7	31,82	63,66	127,32	636,62
2	1,89	2,92	4,30	6,97	9,93	14,09	31,60
3	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84	7,45	12,94
4	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60	5,60	8,61
5	1,48	2,02	2,57	3,37	4,03	4,77	6,86
6	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71	4,32	5,96
7	1,42	1,90	2,36	3,00	3,50	4,03	5,41
8	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36	3,83	5,04
9	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25	3,69	4,78
10	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17	3,58	4,59
11	1,36	1,80	2,20	2,72	3,11	3,50	4,44
12	1,36	1,78	2,18	2,68	3,05	3,43	4,32
13	1,35	1,77	2,16	2,65	3,01	3,37	4,22
14	1,34	1,76	2,14	2,62	2,98	3,33	4,14
15	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95	3,29	4,07
16	1,34	1,75	2,12	2,58	2,92	3,25	4,02
17	1,33	1,74	2,11	2,57	2,90	3,22	3,97
18	1,33	1,73	2,10	2,55	2,88	3,20	3,92
19	1,33	1,73	2,09	2,54	2,86	3,17	3,88
20	1,33	1,73	2,09	2,53	2,85	3,15	3,85
21	1,32	1,72	2,08	2,52	2,83	3,14	3,82
22	1,32	1,72	2,07	2,51	2,82	3,12	3,79
23	1,32	1,71	2,07	2,50	2,81	3,10	3,77
24	1,32	1,71	2,06	2,49	2,80	3,09	3,75
25	1,32	1,71	2,06	2,48	2,79	3,08	3,73
26	1,32	1,71	2,06	2,48	2,78	3,07	3,71
27	1,31	1,70	2,05	2,47	2,77	3,06	3,69
28	1,31	1,70	2,05	2,47	2,76	3,05	3,67
29	1,31	1,70	2,04	2,46	2,76	3,04	3,66
30	1,31	1,70	2,04	2,46	2,75	3,03	3,65
40	1,30	1,68	2,02	2,42	2,70	2,97	3,55
60	1,30	1,67	2,00	2,39	2,66	2,91	3,46
120	1,29	1,66	1,98	2,36	2,62	2,86	3,37
∞	1,28	1,64	1,96	2,33	2,58	2,81	3,29

Навчальне видання

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ
ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Конспект лекцій

Укладачі: **Шебаніна** Олена В'ячеславівна
Тищенко Світлана Іванівна
Хилько Іван Іванович
Крайній Володимир Олексійович

Формат 60х84 1/16. Ум. друк. арк. 5,56.
Наклад 50 прим. Зам. № _____

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.