

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ



Інженерно-енергетичний факультет
Кафедра загальнотехнічних дисциплін

МЕХАНІКА МАТЕРІАЛІВ І КОНСТРУКЦІЙ:
методичні рекомендації для виконання контрольної роботи
здобувачами першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
ОПП «Агроінженерія»
спеціальності 208 «Агроінженерія»
заочної форми здобуття вищої освіти

Миколаїв
2023

УДК 539.3/.6

М 55

Рекомендовано до друку рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету від 13.11.23, протокол №3.

Укладач:

Н. А. Доценко – д-р. пед. наук, професор, професор кафедри загальнотехнічних дисциплін, Миколаївський національний аграрний університет.

Рецензенти:

І. В. Бацуровська – д-р пед. наук, доцент, професор кафедри електроенергетики, електротехніки та електромеханіки, Миколаївський національний аграрний університет

О. А. Горбенко – канд. техн. наук, доцент кафедри агроінженерії, Миколаївський національний аграрний університет

© Миколаївський національний аграрний університет, 2023

© Доценко Н. А., 2023

Зміст

Вступ.....	6
1. Частина 1	
1. Задача №1 «Геометричні характеристики плоских перерізів»	7
1.1. Приклад 1.1. «Визначення геометричних характеристик плоских симетричних перерізів із сортаменту прокатної сталі»	7
1.2. Приклад 1.2. «Визначення геометричних характеристик плоских несиметричних перерізів»	9
1.3. Приклад 1.3. «Визначення геометричних характеристик плоских несиметричних перерізів із прокатної сталі для трьох елементів»	11
1.4. Графічно-цифрове пояснення до модуля «Геометричні характеристики плоских перерізів»	15
1.5. Завдання для самостійного виконання з теми «Геометричні характеристики плоских перерізів»	16
2. Задача №2 «Центральний розтяг та стиск стрижнів»	19
2.1. Приклад 2.1 «Розрахунок ступінчастого стрижня на розтяг-стиск»	19
2.2. Графічно-цифрове пояснення до модуля «Центральний розтяг та стиск стрижнів»	20
2.3. Завдання для самостійного виконання з теми «Центральний розтяг та стиск стрижнів»	21
Задача №3.1. «Кручення»	22
3.2. Графічно-цифрове пояснення до модуля «Кручення валу»	25
3.3. Завдання для самостійного виконання з теми «Кручення»	25
Задача №4 «Згин»	27
4.1. Графічно-цифрове пояснення до модуля «Згин балки»	30
4.2. Завдання для самостійного виконання з теми «Згин»	31
Частина 2	33
Задача №5 «Визначення переміщень при згині»	33
5.1. Приклад 5.1 «Побудова епюр поперечної сили Q , згинального моменту M та підбір поперечного перерізу балки»	33

5.2. Приклад 5.2 «Підбір поперечного перерізу балки та перевірка міцності»	37
5.3. Приклад 5.3. «Визначення прогинів та кутів повороту зігнутої осі балки»	44
5.4. Графічно-цифрове пояснення до модуля «Визначення переміщень при згині».....	46
5.5. Завдання для самостійного виконання з теми «Визначення переміщень при згині».....	47
Задача №6 «Статично невизначені системи»	52
6.1. Приклад 6.1. «Статично невизначені системи. Розрахунок плоских статично-невизначених рам за методом сил».....	52
6.2. Графічно-цифрове пояснення до модуля «Статично невизначені системи»	57
6.3. Завдання для самостійного виконання з теми «Статично невизначені системи»	57
Задача №7 «Складний опір»	60
7.1. Приклад 7.1. «Косий згин балки»	60
7.2. Приклад 7.2. «Розрахунок при позацентровому стисканні. Побудова ядра перерізу»	67
7.3. Графічно-цифрове пояснення до модуля «Складний опір»	76
7.4. Завдання для самостійного виконання з теми «Складний опір»	76
Задача №8 «Стійкість стиснутих стрижнів»	79
8.1. Приклад 8.1 «Стійкість стиснутих стрижнів»	79
8.2. Приклад 8.2. «Стійкість стиснутих стрижнів»	80
8.3. Приклад 8.3 «Стійкість стиснутих стрижнів»	82
8.4. Графічно-цифрове пояснення до модуля «Стійкість стиснутих стрижнів»	84
8.5. Завдання для самостійного виконання з теми «Стійкість стиснутих стрижнів».....	84
9. Тестовий контроль.....	86
9.1. Інтерактивний тестовий тренажер «Основні поняття механіки матеріалів і конструкцій».....	86

9.2. Інтерактивний тестовий тренажер «Геометричні характеристики плоских перерізів»	86
9.3. Інтерактивний тестовий тренажер «Центральний розтяг та стиск стрижнів»	87
9.4. Інтерактивний тестовий тренажер «Механічні властивості матеріалів»	87
9.5. Інтерактивний тестовий тренажер «Напружений та деформований стан в точці»	88
9.6. Інтерактивний тестовий тренажер «Кручення та зсув»	88
9.7. Інтерактивний тестовий тренажер «Згин»	89
9.8. Підсумковий інтерактивний тестовий тренажер «Механіка матеріалів і конструкцій. Частина 1»	89
9.9. Інтерактивний тестовий тренажер «Згинання-2»	90
9.10. Інтерактивний тестовий тренажер «Статично невизначені системи»	90
9.11. Інтерактивний тестовий тренажер «Складний опір»	91
9.12. Інтерактивний тестовий тренажер «Стійкість стиснутих стрижнів»	91
9.13. Інтерактивний тестовий тренажер «Підсумковий. Частина 2»	92
10.1. Перелік підсумкових питань курсу. Частина 1	93
10.2. Перелік підсумкових питань курсу. Частина 2	95
Додаток 1	98
Додаток 2	109
Література	110

Вступ

Завданням механіки матеріалів і конструкцій є узагальнення інженерного досвіду створення машин та споруд, розроблення наукових засад проектування та конструювання надійних виробів, удосконалення методів оцінки міцності. У методичних рекомендаціях представлено приклади виконання задач для контрольної роботи з курсу механіки матеріалів і конструкцій в контексті наступних тем: поняття геометричних характеристик плоских перерізів та їх знаходження, розрахунок інженерних об'єктів на центральний розтяг та стиск, кручення, згин, визначення переміщень при згині, статично невизначені системи, складний опір, стійкість стиснутих стрижнів.

Методичні рекомендації для виконання контрольної роботи здобувачами першого (бакалаврського) рівня вищої освіти ОПІ «Агроінженерія» спеціальності 208 «Агроінженерія» заочної форми здобуття вищої освіти складаються з 8 задач. Номер варіанту обирається згідно до останніх цифр залікової книжки. Задачі №1, №5, №7, №8 містять по три приклади, здобувач вищої освіти обирає для виконання один з них на власний вибір. Відповідно, всі інші задачі містять по одному прикладу.

За допомогою QR кодів представлені графічно-цифрові пояснення до задач, які розміщені в інформаційно-освітньому середовищі MOODLE. Тому необхідно увійти на платформу дистанційного навчання MOODLE, ввести свій логін та пароль, зайти на свою сторінку користувача та зареєструватися на курс «Механіка матеріалів і конструкцій». Наступним кроком є сканування зображення QR-коду та ознайомлення з теорією та методикою виконання завдання до пройденого матеріалу.

Також методичні рекомендації містять тестовий контроль до кожного з модулів та перелік підсумкових питань курсу. Платформа дистанційного навчання методичних рекомендацій може використовуватися здобувачами вищої освіти та викладачами під час очної, дистанційної або змішаної форм навчання для виконання контрольної роботи та під час модульного та підсумкового контролів.

Частина 1

1. Задача №1 «Геометричні характеристики плоских перерізів»

1.1. Приклад 1.1. «Визначення геометричних характеристик плоских симетричних перерізів із сортаменту прокатної сталі»

На рис. 1 зображено плоский переріз конструкції, яка складається з двотаврової балки №20 (позиція 5) та чотирьох нерівносторонніх кутників 70x45x5 (позиції 1, 2, 3 та 4). Необхідно знайти осьові моменти інерції I_{xc} , I_{yc} для даного перерізу, моменти опору перерізу W_{xc} , W_{yc} та радіуси інерції i_x , i_y .

1. Виконуємо креслення перерізу на міліметровому папері, вказуємо розміри та вибираємо осі координат з початком в центрі ваги кожного елемента конструкції (рис. 1).

2. Випишуємо дані з таблиці сортаменту (додаток 1). Переводимо значення всіх параметрів із мм в см. Необхідно пам'ятати про приведення всіх показників до однакових одиниць виміру.

Таблиця 1. Вихідні дані до задачі 1

Двотаврова балка №20	Кутник нерівносторонній 70x45x5
$h=200\text{мм}=20\text{см}$	$B=70\text{мм}=7\text{см}$
$b=100\text{мм}=10\text{см}$	$b=45\text{мм}=4,5\text{см}$
$I_x=1840\text{см}^4$	$x_0=1,05\text{см}$
$I_y=115\text{см}^4$	$y_0=2,28\text{см}$
$F=26,8\text{см}^2$	$F=5,59\text{см}^2$
	$I_x=27,8\text{см}^4$
	$I_y=9,05\text{см}^4$

Знайти: I_{xc} ; I_{yc} ; W_{xc} ; W_{yc} ; i_x ; i_y .

1. Розрахуємо центри ваги кожної із складових частин конструкції:

$$C_5 = C_0 \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \quad C_1 \begin{cases} x_1 = -x_0 = -1,05 \text{ см} \\ y_1 = \frac{h}{2} + y_{01} = \frac{20}{2} + 2,28 = 12,28 \text{ см} \end{cases}$$

$$C_2 \begin{cases} x_2 = 1,05 \text{ см} \\ y_2 = 12,28 \text{ см} \end{cases}$$

$$C_3 \begin{cases} x_3 = 1,05 \text{ см} \\ y_3 = -12,28 \text{ см} \end{cases}$$

$$C_4 \begin{cases} x_4 = -1,05 \text{ см} \\ y_4 = -12,28 \text{ см} \end{cases}$$

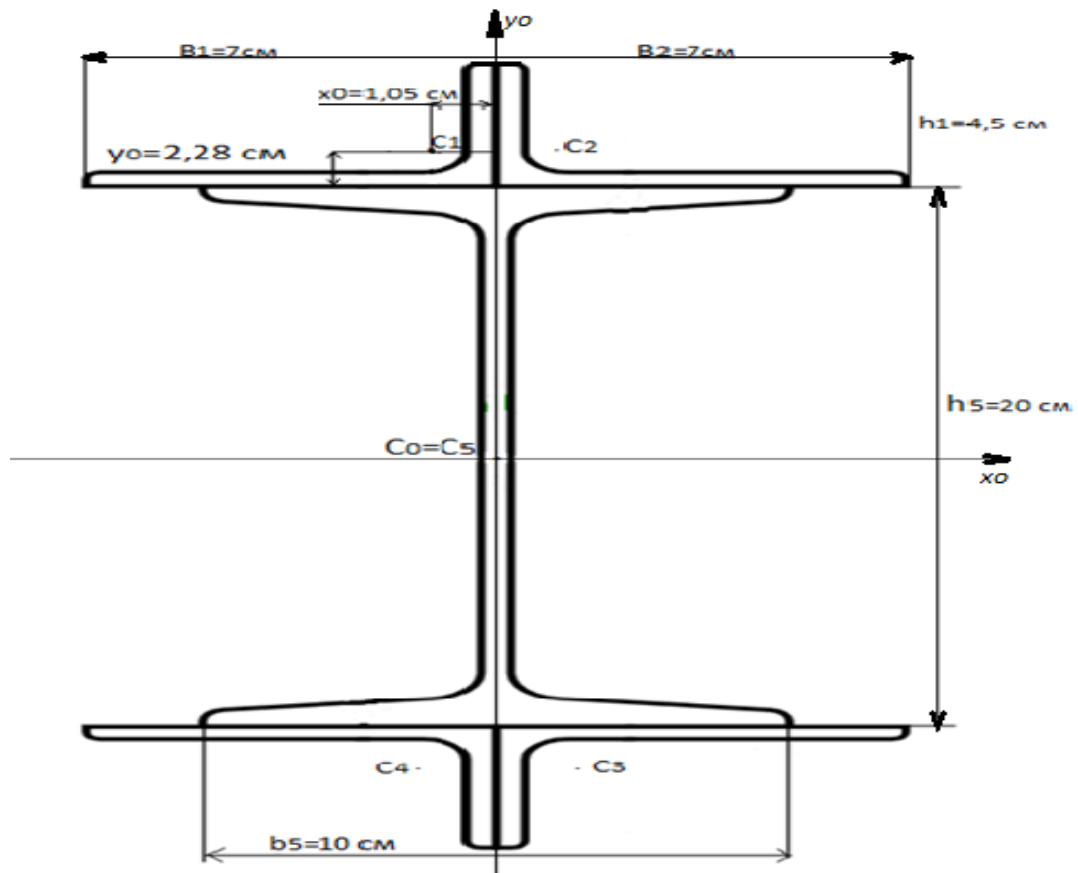


Рис. 1. Рисунок до задачі 1 «Визначення геометричних характеристик плоских симетричних перерізів із сортаменту прокатної сталі»

2. Знаходимо момент інерції відносно осей

$$I_{xc} = I_{x_1} + I_{x_2} + I_{x_3} + I_{x_4} + I_{x_5} + F_1 y_1^2 + F_2 y_2^2 + F_3 y_3^2 + F_4 y_4^2 + F_5 y_5^2 =$$

$$27,8 + 27,8 + 27,8 + 27,8 + 1840 + 5,59 \cdot 12,28^2 + 5,59 \cdot 12,28^2 + 5,59 \cdot (-12,28)^2 + 5,59 \cdot (-12,28)^2 + 26,8 \cdot 0^2 = 5323 \text{ см}^4 \quad (1)$$

$$I_{yc} = I_{y_1} + I_{y_2} + I_{y_3} + I_{y_4} + I_{y_5} + F_1 x_1^2 + F_2 x_2^2 + F_3 x_3^2 + F_4 x_4^2 + F_5 x_5^2 =$$

$$9,05 + 9,05 + 9,05 + 9,05 + 115 + 5,59 \cdot (-1,05)^2 + 5,59 \cdot (-1,05)^2 + 5,59 \cdot 1,05^2 + 5,59 \cdot 1,05^2 + 26,8 \cdot 0^2 = 175,85 \text{ см}^4 \quad (2)$$

3. Знаходимо моменти опору перерізу:

$$W_{xc} = \frac{I_{xc}}{y_{max}} = \frac{5323}{\frac{h_5}{2} + b_1} = \frac{5323}{10 + 4,5} = \frac{5323}{14,5} = 367,1 \text{ см}^3 \quad (3)$$

$$W_{yc} = \frac{I_{yc}}{x_{max}} = \frac{175,85}{B_1} = \frac{175,85}{7} = 25,12 \text{ см}^3 \quad (4)$$

4. Розраховуємо радіуси інерції:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_{xc}}{\Sigma F}} = \sqrt{\frac{5323}{51,26}} = 10,41 \text{ см} \quad (5)$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_{yc}}{\Sigma F}} = \sqrt{\frac{175,85}{51,26}} = 1,89 \text{ см} \quad (6)$$

$$\Sigma F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 = 5,59 + 5,59 + 5,59 + 5,59 + 26,8 = 49,16 \text{ см}^2 \quad (7)$$

Відповідь:

$$I_{xc} = 5323 \text{ см}^4; I_{yc} = 175,85 \text{ см}^4;$$

$$W_{xc} = 367,1 \text{ см}^3; W_{yc} = 25,12 \text{ см}^3;$$

$$i_{xc} = 10,19 \text{ см}; i_{yc} = 1,85 \text{ см}$$

1.2. Приклад 1.2. «Визначення геометричних характеристик плоских несиметричних перерізів»

На рис. 2 зображено плоский несиметричний переріз із зміщеним центром ваги. Переріз складається з круга діаметром $a=8$ см і вирізаного а ньому отвору круглої форми діаметром $b=2$ см. Необхідно знайти координати центру ваги конструкції X_c ; Y_c , осьові моменти інерції I_{xc} ; I_{yc} моменти опору перерізу W_{xc} ; W_{yc} та радіуси інерції i_{xc} ; i_{yc} .

Дано: $a=8$ см; $b=2$ см.

Знайти: X_c ; Y_c ; I_{xc} ; I_{yc} ; W_{xc} ; W_{yc} ; i_{xc} ; i_{yc} .

1. Знайти площі кожної з фігур. Т.я. площа фігури F_2 є вирізаною, то її приймаємо зі знаком “-”

$$F_1 = \pi R^2 \quad F_1 = 3,14 \cdot 4^2 = 50,24 \text{ см}^2 \quad (8)$$

$$F_2 = \pi R^2 \quad F_2 = -3,14 \cdot 1^2 = -3,14 \text{ см}^2 \quad (9)$$

2. Центр першої фігури приймаємо за початковий центр ваги конструкції:

$$C_1 \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \quad C_2 \begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = -1 \end{cases}$$

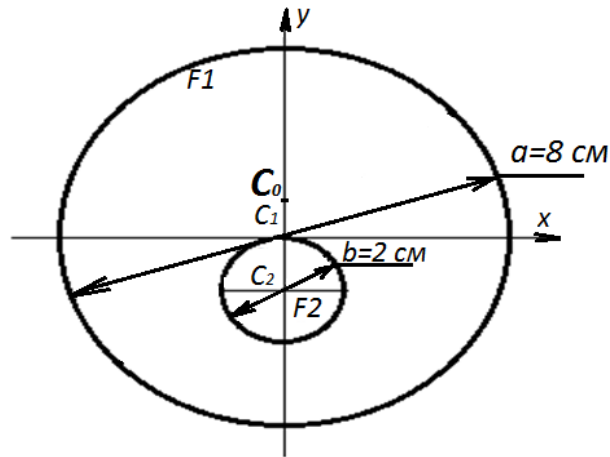


Рис.2. Рисунок до задачі 2 «Визначення геометричних характеристик плоских несиметричних перерізів»

3. Знаходимо центри ваги конструкції

$$y_c = \frac{\sum Sx}{\sum F} = \frac{3,14}{47,1} = 0,07 \text{ см} \quad (10)$$

$$x_c = \frac{\sum Sy}{\sum F} = \frac{0}{47,1} = 0 \text{ см} \quad (11)$$

$$\sum F = F_1 + (-F_2) = 47,1 \text{ см}^2 \quad (12)$$

$$S_{x_1} = F_1 \cdot y_1 = 50,24 \cdot 0 = 0 \quad (13)$$

$$S_{x_2} = F_2 \cdot y_2 = -3,14 \cdot (-1) = 3,14 \quad (14)$$

$$S_{y_1} = F_1 \cdot x_1 = 0 \quad (15)$$

$$S_{y_2} = F_2 \cdot x_2 = 0 \quad (16)$$

Координати центра ваги в точці $C_0 = \begin{cases} x_c = 0 \\ y_c = 0,07 \text{ см} \end{cases}$

4. Знаходимо моменти інерцій відносно осей:

$$I_{x_1} = I_{y_1} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 8^4}{64} = 200,96 \text{ см}^4 \quad (17)$$

$$I_{x_2} = I_{y_2} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 2^4}{64} = 0,79 \text{ см}^4 \quad (18)$$

5. Знаходимо координати центрів ваги кожної із складових частин конструкції по відношенню до центру ваги всієї конструкції:

$$C_1 \begin{cases} x_1' = x_1 - x_c = 0 \\ y_1' = y_1 - y_c = -0,07 \end{cases} \quad (19)$$

$$C_2 \begin{cases} x_2' = x_2 - x_c = 0 \\ y_2' = y_2 - y_c = -1 - 0,07 = -1,07 \end{cases} \quad (20)$$

6. Знаходимо моменти інерції всієї конструкції:

$$I_{x_c} = I_{x_1} - I_{x_2} + F_1(y_1)^2 - F_2(y_2)^2 = 200,96 - 0,79 + 50,24 \cdot (0,07)^2 - 3,14 \cdot (-1,07)^2 = 196,83 \text{ см}^4 \quad (21)$$

$$I_{y_c} = I_{y_1} - I_{y_2} + F_1(x_1)^2 - F_2(x_2)^2 = 200,96 - 0,79 + 50,24 \cdot (0)^2 - 3,14 \cdot (0)^2 = 200,17 \text{ см}^4 \quad (22)$$

7. Знаходимо моменти опору перерізу:

$$W_{x_c} = \frac{I_{x_c}}{y_{max}} = \frac{196,83}{4,07} = 48,36 \text{ см}^3 \quad (23)$$

$$W_{y_c} = \frac{I_{y_c}}{x_{max}} = \frac{200,17}{4} = 50,04 \text{ см}^3 \quad (24)$$

8. Знаходимо радіуси інерції:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_{x_c}}{\Sigma F}} = \sqrt{\frac{196,825}{47,1}} = 2,05 \text{ см} \quad (25)$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_{y_c}}{\Sigma F}} = \sqrt{\frac{200,175}{47,1}} = 2,06 \text{ см} \quad (26)$$

$$\Sigma F = F_1 - F_2 = 50,24 - 3,14 = 47,1 \text{ см}^2 \quad (27)$$

Відповідь: $X_c=0$; $Y_c=0,07$ см; $I_{x_c} = 196,83 \text{ см}^4$; $I_{y_c} = 200,17 \text{ см}^4$;
 $W_{x_c} = 48,36 \text{ см}^3$; $W_{y_c} = 50,04 \text{ см}^3$; $i_x = 2,05$ см; $i_y = 2,06$ см

1.3. Приклад 1.3. «Визначення геометричних характеристик плоских несиметричних перерізів із прокатної сталі для трьох елементів»

Для поперечного перерізу, що складається із декількох фігур, необхідно:

1) накреслити переріз в відповідному масштабі, вказати всі необхідні розміри і вибрати осі (при розрахунку всі необхідні дані потрібно брати із таблиці сортаменту);

2) визначити координати центра ваги;

3) обчислити осьові і відцентрові моменти інерції відносно центральних осей;

4) зробити перевірку правильності виконання.

Дано:

1) кутник нерівносторонній № 70x45x5;

2) швелер №14;

3) лист №16.

Схема розташування фігур зображена на рис. 3.



Рис. 3. Схема розташування фігур

Примітка: площа та момент інерції для листа знаходиться як для прямокутника. За схемою висоту листа приймаємо рівною висоті швелера, за умовою його товщини $b = 16\text{мм} = 1,6\text{ см}$. Розрахуємо параметри листа.

$$F_3 = h \cdot b = 14 \cdot 1,6 = 22,4 \text{ см}^2 \quad (28)$$

$$I_{x3} = \frac{bh^3}{12} = \frac{1,6 \cdot 14^3}{12} = 365,87 \text{ см}^4 \quad (29)$$

$$I_{y3} = \frac{hb^3}{12} = \frac{1,6^3 \cdot 14}{12} = 4,78 \text{ см}^4 \quad (30)$$

Таблиця 2. Вихідні дані до задачі

№1. Кутник нерівносторонній № 70x45x5	№2. Швелер №14	№3. Лист №16
$B_1 = 70\text{мм} = 7\text{см}$ $b_1 = 45\text{мм} = 4,5\text{см}$ $x_{01} = 1,05\text{см}$ $y_{01} = 2,28\text{см}$ $F_1 = 5,59\text{см}^2$ $I_{x1} = 27,8\text{см}^4$ $I_{y1} = 9,05\text{см}^4$ $\text{tg}\alpha = 0,404$	$h_2 = 140\text{ мм} = 14\text{см}$ $b_2 = 58\text{ мм} = 5,8\text{см}$ $d_2 = 4,9\text{ мм} = 0,49\text{см}$ $t_2 = 8,1\text{ мм} = 0,81\text{см}$ $F_2 = 15,6\text{см}^2$ $I_{x2} = 491\text{см}^4$ $I_{y2} = 45,4\text{ см}^4$ $Z_{02} = 1,67\text{ см}$	$b_3 = 16\text{ мм} = 1,6\text{ см}$ $h_3 = 140\text{ мм} = 14\text{ см}$ $F_3 = 22,4\text{ см}^2$ $I_{x3} = 365,86\text{ см}^4$ $I_{y3} = 4,778\text{ см}^4$

Знайти: I_{xc} ; I_{yc} ; W_{xc} ; W_{yc} ; i_{xc} ; i_{yc} .

1. Одну із фігур приймаємо з нульовими координатами за початок відліку. В нашому випадку це лист.

$$C_3 \begin{cases} x_3 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

$$C_1 \begin{cases} x_1 = -\left(\frac{1}{2}b_3 + b_2 + (B_1 - x_{0_1})\right) = -\left(\frac{1}{2} \cdot 1,6 + 5,8 + (7 - 1,05)\right) = -12,55 \\ y_1 = \frac{1}{2}h_2 - y_{0_1} = \frac{14}{2} - 2,28 = 4,72 \end{cases}$$

$$C_2 \begin{cases} x_2 = -\left(\frac{1}{2}b_3 + Z_{0_2}\right) = -\left(\frac{1}{2} \cdot 1,6 + 1,67\right) = -2,47 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

2. Знайти центр ваги всієї конструкції.

$$x_c = \frac{\sum S_y}{\sum F} = \frac{-70,16 - 38,53 + 0}{43,59} = -2,49 \quad (31)$$

$$S_{y_1} = F_1 \cdot x_1 = 5,59 \cdot (-12,55) = -70,16 \text{ см}^3 \quad (32)$$

$$S_{y_2} = F_2 \cdot x_2 = 15,6 \cdot (-2,47) = -38,53 \text{ см}^3 \quad (33)$$

$$S_{y_3} = F_3 \cdot x_3 = 22,4 \cdot 0 = 0 \text{ см}^3 \quad (34)$$

$$\sum F = F_1 + F_2 + F_3 = 5,59 + 15,6 + 22,4 = 43,59 \text{ см}^2 \quad (35)$$

$$S_{x_1} = F_1 \cdot y_1 = 5,59 \cdot (4,72) = 26,39 \text{ см}^3 \quad (36)$$

$$S_{x_2} = F_2 \cdot y_2 = 15,6 \cdot 0 = 0 \text{ см}^3 \quad (37)$$

$$S_{x_3} = F_3 \cdot y_3 = 22,4 \cdot 0 = 0 \text{ см}^3 \quad (38)$$

$$y_c = \frac{\sum S_x}{\sum F} = \frac{26,39}{43,59} = 0,61 \quad (39)$$

Координати центру ваги:

$$C_0 \begin{cases} x_c = -2,49 \\ y_c = 0,61 \end{cases}$$

3. Знаходимо центр ваги кожної із складових частин конструкції по відношенню до центра ваги всієї конструкції.

$$C_1 \begin{cases} x'_1 = x_1 - x_c = -12,55 - (-2,49) = -10,06 \\ y'_1 = y_1 - y_c = 4,72 - 0,61 = 4,12 \end{cases}$$

$$C_2 \begin{cases} x'_2 = x_2 - x_c = -2,47 - (-2,49) = 0,02 \\ y'_2 = y_2 - y_c = 0 - 0,61 = -0,61 \end{cases}$$

$$C_3 \begin{cases} x'_3 = x_3 - x_c = 0 - 2,49 = -2,49 \\ y'_3 = y_3 - y_c = 0 - 0,61 = -0,61 \end{cases}$$

4. Розрахуємо осьові моменти інерції:

$$I_{x_c} = I_{x_1} + I_{x_2} + I_{x_3} + F_1(y_1')^2 + F_2(y_2')^2 + F_3(y_3')^2 = 27,8 + 491 + 365,86 + 5,59 \cdot (4,12)^2 + 22,4 \cdot (-0,61)^2 + 15,6 \cdot (-0,61)^2 = 884,66 + 94,89 + 8,34 + 5,81 = 993,7 \text{ см}^4 \quad (40)$$

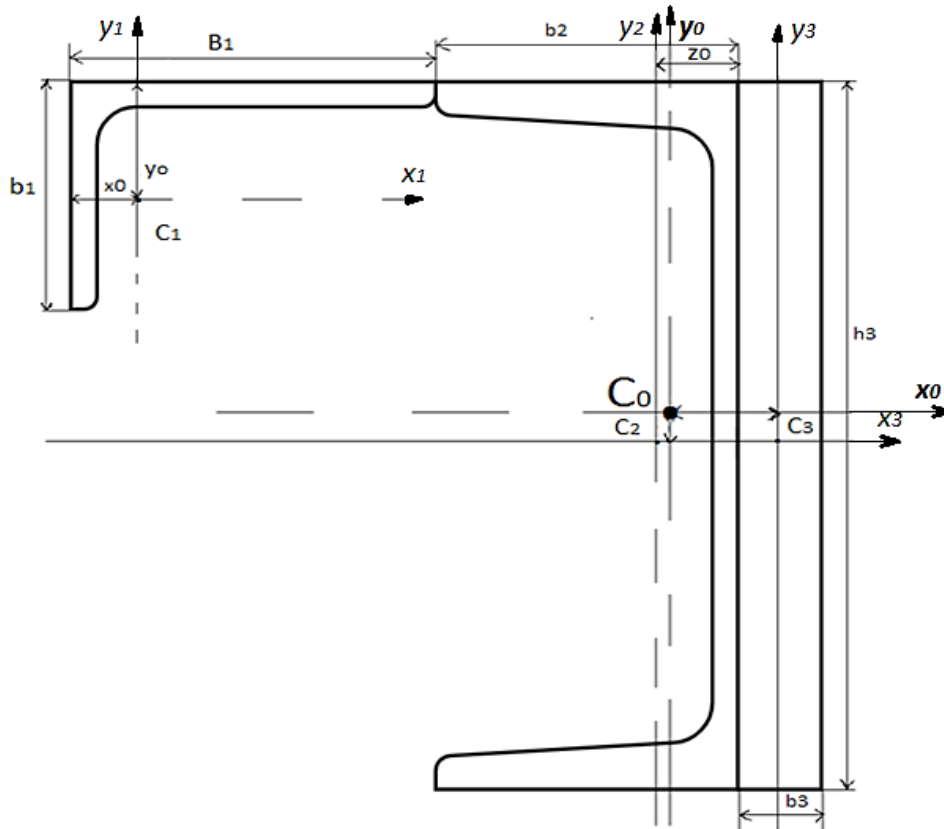


Рис. 4. Рисунок до задачі 3 «Визначення геометричних характеристик плоских несиметричних перерізів із прокатної сталі для трьох елементів»

$$I_{y_c} = I_{y_1} + I_{y_2} + I_{y_3} + F_1(x_1')^2 + F_2(x_2')^2 + F_3(x_3')^2 = 9,05 + 45,4 + 4,78 + 5,59 \cdot (-10,06)^2 + 15,6 \cdot (-0,02)^2 + 22,4 \cdot (2,49)^2 = 59,23 + 565,73 + 0,01 + 138,88 = 763,85 \text{ см}^4 \quad (41)$$

5. Знаходимо відцентровий момент інерції всієї конструкції:

$$I_{x_c y_c} = I_{x_1 y_1} + F_1 x_1' y_1' + I_{x_2 y_2} + F_2 x_2' y_2' + I_{x_3 y_3} + F_3 x_3' y_3' \quad (42)$$

6. Для симетричних фігур:

$$I_{x_2 y_2} = I_{x_3 y_3} = 0 \text{ см}^4 \quad (43)$$

Для кутника:

$$I_{x_c y_c} = \frac{I_{max} - I_{min}}{2} \cdot \sin 2\alpha \quad (44)$$

Для нерівностороннього кутника:

$$I_{x_1 y_1} = \frac{I_u - I_v}{2} \cdot \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{27,8 - 9,05}{2} \cdot 2 \cdot 22^\circ = 9,375 \cdot 0,9657 = 9,05 \text{ см}^4 \quad (45)$$

$$I_{x_c y_c} = 0 + 0 + 9,05 + 5,59 \cdot (-10,06) \cdot 4,12 + 15,6 \cdot (-0,61) \cdot (0,02) + 22,4 \cdot (2,49) \cdot (-0,61) = 9,05 - 231,69 - 0,19 - 34,02 = -256,85 \text{ см}^4 \quad (42a)$$

7. Виконаємо перевірку:

$$I_{u/v} = \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{x_c} - I_{y_c}}{2}\right)^2 + 4(I_{x_c y_c})^2} \quad (46)$$

$$I_{u/v} = \frac{993,7 + 363,85}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{993,7 - 363,85}{2}\right)^2 + 4 \cdot (-256,85)^2} = 878,78 \pm \sqrt{13208 + 263887} = 878,78 \pm \sqrt{277095} = 878,78 \pm 526,4 \quad (46a)$$

$$I_u = 1405,28$$

$$I_v = 352,48$$

Перевірка:

$$I_{x_c} + I_{y_c} = I_u + I_v \quad (47)$$

$$993,7 + 363,85 = 1405,28 + 352,48$$

$$1757,76 = 1756,55$$

Обчислимо похибку:

$$\Delta = \left| \frac{\Delta_i - \Delta_2}{\Delta_1} \right| \cdot 100\% = \left| \frac{1757,76 - 1756,55}{1757,76} \right| \cdot 100\% = 0,07\%$$

Похибка є допустимою: $\Delta = 0,07\% \leq 5\%$

1.4. Графічно-цифрове пояснення до модуля «Геометричні характеристики плоских перерізів»

В даному завданні представлено графічно-цифрове пояснення до знаходження центру ваги плоских несиметричних перерізів із прокатної сталі для трьох елементів. Посилання на ресурс наведено нижче. Необхідно відсканувати QR-код, після чого здобувач вищої

освіти побачить послідовність знаходження центру ваги конструкції (задача 3).



Графічно-цифрове пояснення до знаходження центру ваги плоских несиметричних перерізів із прокатної сталі для трьох елементів

1.5. Завдання для самостійного виконання з теми «Геометричні характеристики плоских перерізів»

1. Номери профілів вказані в завданні до роботи. Значення розмірів профілів вказані в таблиці сортаменту (див. додаток). Виконати креслення заданого перерізу в масштабі згідно до варіанту.

2. Вибрати допоміжні координатні осі.

3. Знайти координати центру ваги перерізу.

4. Визначити геометричні характеристики складових частин перерізу.

5. Визначити осьові та відцентрові моменти інерції площі перерізу відносно допоміжних центральних осей.

6. Визначити положення головних центральних осей інерції перерізу.








7. Визначити величини головних центральних моментів інерції перерізу.



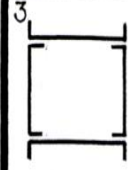
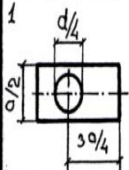
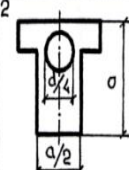
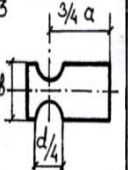


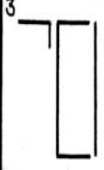


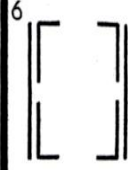
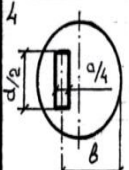
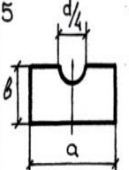
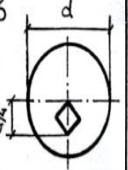

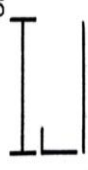
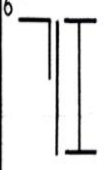

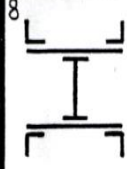
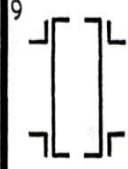
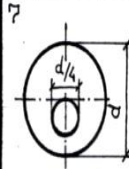
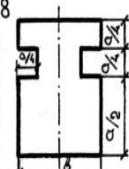
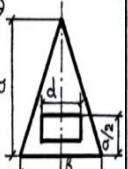





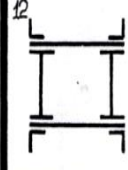
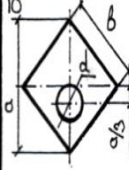
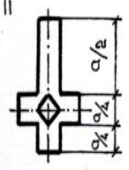
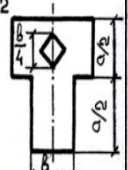



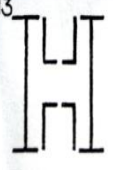
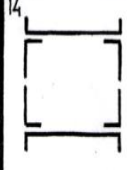
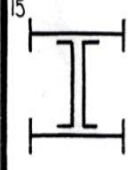
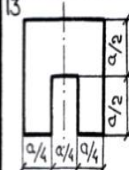
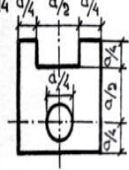
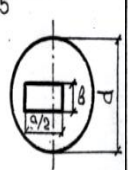

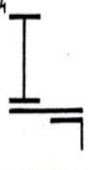


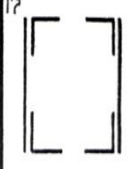

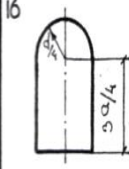
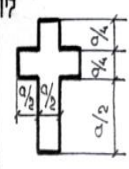
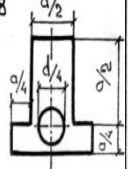

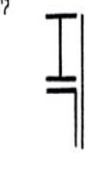

8. Визначити осьові моменти перерізу.

9. Визначити величини головних радіусів інерції перерізу.

10. Виконати перевірку.

Таблиця 3.

№	№ профілів							Розміри		
					Лист 			а, мм	б, мм	с, мм
1	24	20	8	18	10	9/9	56x36x5	80	40	20
2	12	14	22	20	20	12,5/12	80x50x6	100	60	40
3	27	18	10	14	14	16/10	63x40x6	60	20	16
4	30	22	24	33	12	20/12	110x70x80	40	30	60
5	10	24a	12	16a	8	11/8	63x40x5	40	40	100
6	18	27	27	24	10	14/10	90x56x6	40	20	100
7	20	16	14	12	16	18/12	70x45x5	30	50	80
8	22	18	30	22	18	20/16	160x100x10	80	60	20
9	18 a	10	16	16	20	5/5	80x50x5	90	60	16
10	16	22a	27	20	14	8/6	180x110x10	60	30	10
11	14	27	22a	24	12	10/7	75x50x8	60	10	20
12	33	18	16a	18	10	16/10	90x56x8	70	24	10
13	24	33	20	20	18	14/12	63x40x6	40	40	20
14	30	20a	18	16a	16	7,5/5	110x63x10	100	80	60
15	24a	40	24	22a	20	11/7	56x36x4	40	10	80
16	36	22	20	27	10	9/9	90x56x6	80	25	60
17	22a	24	16	18	14	6,5/6	160x100x10	88	30	40
18	12	10	22	16	12	7/5	75x50x5	80	40	48
19	16	30	12	14	18	10/6,5	100x63x8	100	80	60
20	22	24a	24	18a	20	9/6	160x100x14	96	48	20
21	18	27	16a	12	16	10/10	110x70x8	80	64	24
22	14	36	33	24	10	5/4	140x90x8	100	40	20
23	20	22	14	10	12	8/8	100x63x6	120	60	40
24	10	18	20	22	18	14/9	80x50x6	60	48	16
25	16	24	18	8	14	9/7	140x90x10	96	60	30

ЗАДАЧА № 1			ЗАДАЧА № 2			ЗАДАЧА № 3		
1 	2 	3 	1 	2 	3 	1 	2 	3 
4 	5 	6 	4 	5 	6 	4 	5 	6 
7 	8 	9 	7 	8 	9 	7 	8 	9 
10 	11 	12 	10 	11 	12 	10 	11 	12 
13 	14 	15 	13 	14 	15 	13 	14 	15 
16 	17 	18 	16 	17 	18 	16 	17 	18 

2. Задача №2 «Центральний розтяг та стиск стрижнів»

2.1. Приклад 2.1 «Розрахунок ступінчастого стрижня на розтяг-стиск»

Для заданого статично визначеного стрижня необхідно:

- 1) побудувати епюру поздовжніх сил;
- 2) із умови міцності по нормальних напруженнях підібрати поперечний переріз стрижня на кожній ділянці;
- 3) побудувати епюру нормальних напружень;
- 4) визначити загальне подовження поперечних перерізів, прийнявши $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па.

Дано:

$$F=0,002 \text{ м}^2 = 20 \text{ см}^2;$$

$$l_1 = 0,3 \text{ м}; l_2 = 0,3 \text{ м}; l_3 = 0,3 \text{ м}; l_4 = 0,3 \text{ м};$$

$$P_1 = 5 \cdot 10^3 \text{ Н}; P_2 = 5 \cdot 10^3 \text{ Н}; P_3 = 20 \cdot 10^3 \text{ Н}$$

1. Розрахуємо поздовжню силу на кожній ділянці стрижня. Для цього пронумеруємо їх, починаючи з вільного кінця. Якщо дія сили викликає розтяг, то приймаємо знак «+», якщо стиск, то знак «-».

$$\text{I. } N_{1-1} = N_{2-2} = 0;$$

$$\text{II. } N_{3-3} = N_{4-4} = P_1 = 5 \cdot 10^3 \text{ Н};$$

$$\text{III. } N_{5-5} = N_{6-6} = P_1 - P_2 = 5 \cdot 10^3 - 5 \cdot 10^3 = 0;$$

$$\text{IV. } N_{7-7} = N_{8-8} = P_1 - P_2 - P_3 = (5 - 5 - 20) \cdot 10^3 = (-15 \cdot 10^3) \text{ Н}$$

2. Площа поперечного перерізу стрижня:

$$F_1 = F = 0,002 \text{ м}^2;$$

$$F_2 = 2F = 0,004 \text{ м}^2$$

3. Знаходимо нормальні напруження в перерізах.

$$\sigma = \frac{N}{F} \quad (48)$$

$$\sigma_{1-1} = \sigma_{2-2} = \frac{0}{0,002} = 0 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{3-3} = \sigma_{4-4} = \frac{5 \cdot 10^3}{0,002} = 2500 \cdot 10^3 = 2,5 \cdot 10^6 = 2,5 \text{ МПа.}$$

$$\sigma_{5-5} = \sigma_{6-6} = \frac{0}{0,004} = 0;$$

$$\sigma_{7-7} = \sigma_{8-8} = \frac{(-15 \cdot 10^3)}{0,004} = -3750 \cdot 10^3 = (-3,75) \cdot 10^6 = -3,75 \text{ МПа.}$$

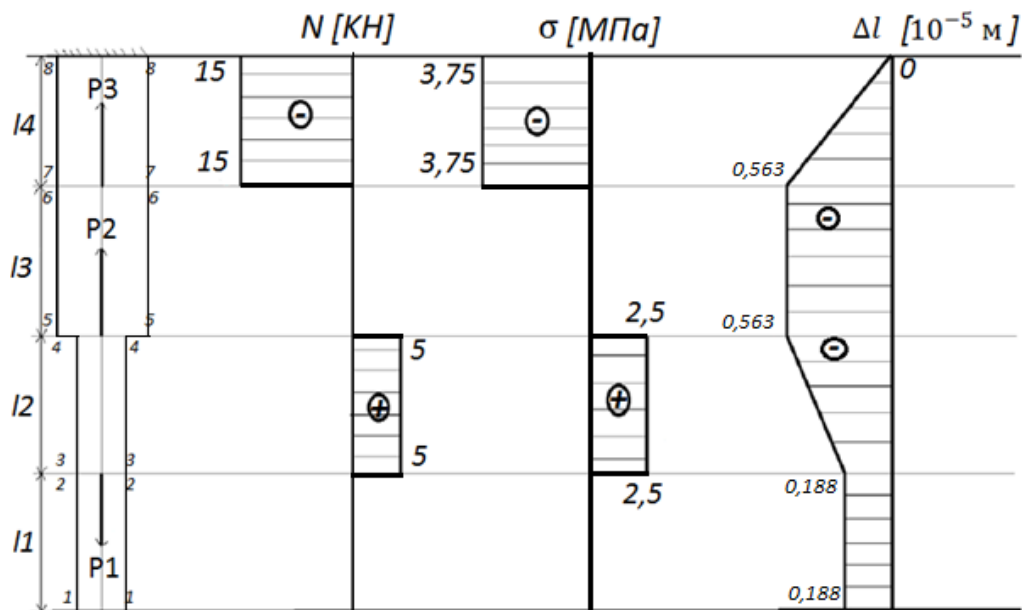


Рис.5. Розрахунок ступінчастого стрижня на розтяг-стиск

4. Визначаємо укорочення або подовження на ділянках стрижня. Будуємо епюру Δl , починаючи із защемленого кінця стрижня, додаючи значення деформації на кожній ділянці перерізу.

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} \quad (49)$$

$$\Delta l_I = \frac{0 \cdot 0,3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0,002} = 0 \text{ м}$$

$$\Delta l_{II} = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 0,3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0,002} = \frac{375}{10^8} = 375 \cdot 10^{-8} = 0,375 \cdot 10^{-5} \text{ м}$$

$$\Delta l_{III} = \frac{0 \cdot 0,3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0,004} = 0 \text{ м}$$

$$\Delta l_{IV} = \frac{(-15) \cdot 10^3 \cdot 0,3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0,004} = -563 \cdot 10^{-8} = (-0,563) \cdot 10^{-5} \text{ м}$$

5. Знаходимо загальне подовження або укорочення

$$\Delta l = (l_I + l_{II} + l_{III} + l_{IV}) \quad (50)$$

$$\Delta L = (0 + 0,375 - 0,563 + 0) = (-0,188) \cdot 10^{-5} \text{ м}$$

Відповідь: відбувається укорочення стрижня.

2.2. Графічно-цифрове пояснення до модуля «Центральний розтяг та стиск стрижнів»

В даному завданні представлено графічно-цифрове пояснення до методу перерізів, побудови епюри поздовжньої сили та

визначення загального видовження або вкорочення стрижня. Посилання на ресурс наведено нижче. Необхідно відсканувати QR-код, після чого здобувач вищої освіти побачить послідовність побудови епюр N_z та Δl .



Графічно-цифрове пояснення до використання методу перерізів, побудови епюри поздовжньої сили та визначення загального видовження або вкорочення стрижня

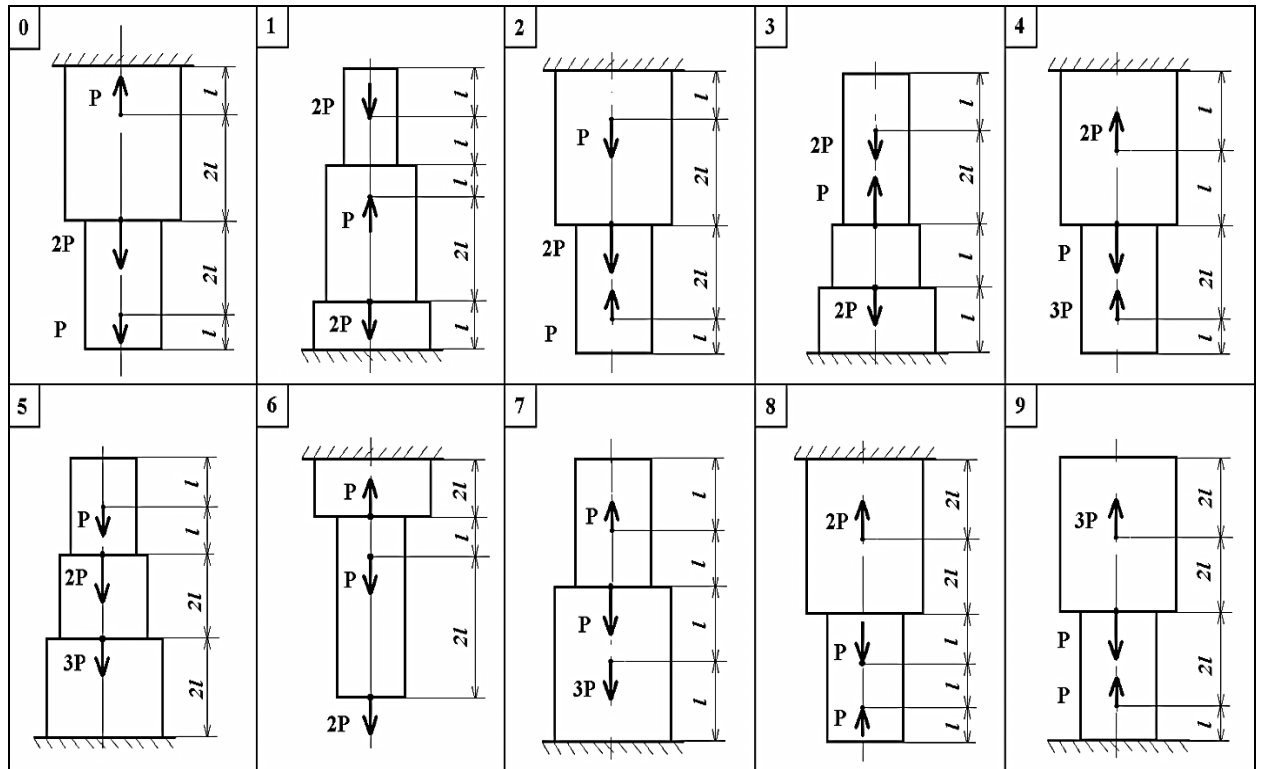
2.3. Завдання для самостійного виконання з теми «Центральний розтяг та стиск стрижнів»

Для заданого статично визначеного стрижня необхідно: побудувати епюру поздовжніх сил; із умови міцності по нормальних напруженнях підібрати поперечний переріз стрижня; побудувати епюру нормальних напружень; визначити загальне подовження поперечних перерізів, прийнявши $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па.

Таблиця 4

Варіанти завдань для виконання задачі

Параметри задачі	Числові варіанти									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_1 , кН	40	50	65	40	80	55	60	45	50	30
P_2 , кН	90	55	70	50	60	70	80	35	55	45
P_3 , кН	100	60	35	65	70	90	70	30	70	85
l , м	0,3	0,4	0,5	0,3	0,9	0,1	0,3	0,7	0,8	0,4



Задача №3.1. «Кручення»

На стальний вал діють чотири моменти. Необхідно:

- 1) побудувати епюру моментів кручення;
- 2) при заданому значенні $[\tau]$ визначити діаметр валу із розрахунку на міцність і округлити його величину до ближнього більшого значення, відповідно рівного: 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 125, 140, 160, 180 і 200 мм;
- 3) побудувати епюру кутів закручування;
- 4) знайти найбільший відносний кут закручування (на 1 пог. м). Модуль зсуву для сталі приймаємо: $G = 8 \cdot 10^4$ МПа

Дано:

$$M_1 = M_3 = 1700 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

$$M_2 = M_4 = 700 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

$$a = b = c = d = 1,7 \text{ м}$$

$$G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа} = 8 \cdot 10^{10} \text{ Па}$$

$$I_p = 0,1 \cdot d^4$$

$$[\tau] = 65 \text{ МПа}$$

1. Визначаємо значення моментів кручення на кожній ділянці валу та будуємо епюру (рис. 6). Вважається, що приймаємо крутний момент додатнім, якщо при погляді на переріз зі сторони зовнішньої нормалі він повертає переріз за ходом годинникової стрілки.

$$M_{I-I} = -M_4 = -700 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

$$M_{II-II} = -M_4 + M_3 = -700 + 1700 = 1000 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

$$M_{III-III} = -M_4 + M_3 - M_2 = -700 + 1700 - 700 = 300 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

$$M_{IV-IV} = -M_4 + M_3 - M_2 + M_1 = -700 + 1700 - 700 + 1700 = 2000 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

2. При заданому значенні $[\tau]$ визначаємо діаметр валу:

$$W = \frac{M_{кр(max)}}{[\tau]} \quad (51)$$

$$W = \frac{2000}{65 \cdot 10^6} = 30,8 \cdot 10^{-6} = 30,8 \text{ см}^3$$

Для круглого поперечного перерізу:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = 0,2 \cdot d^3 \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{W}{0,2}} \quad (52)$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{30,8}{0,2}} = 5,36 \text{ см}$$

Приймаємо діаметр валу рівний 50 мм.

Розраховуємо похибку:

$$\Delta = \frac{53,6 - 50}{53,6} \cdot 100\% = 6,7\% > 5\%, \text{ тому приймаємо } \varphi = 60 \text{ мм}$$

Тобто необхідно прийняти вал більшого діаметру із ряду: $\varnothing = 60 \text{ мм}$.

3. Визначаємо кути закручування і будуємо епюру

$$\varphi = \frac{M_i \cdot a}{G \cdot I_p} \quad (53)$$

$$\varphi_I = \frac{-700 \cdot 1,7}{8 \cdot 10^{10} \cdot (0,1 \cdot (0,06)^4)} = -0,0119 \text{ рад}$$

$$\varphi_{II} = \frac{1000 \cdot 1,7}{8 \cdot 10^{10} \cdot (0,1 \cdot (0,06)^4)} = 0,017 \text{ рад}$$

$$\varphi_{III} = \frac{300 \cdot 1,7}{8 \cdot 10^{10} \cdot (0,1 \cdot (0,06)^4)} = 0,0051 \text{ рад}$$

$$\varphi_{IV} = \frac{2000 \cdot 1,7}{8 \cdot 10^{10} \cdot (0,1 \cdot (0,06)^4)} = 0,034 \text{ рад}$$

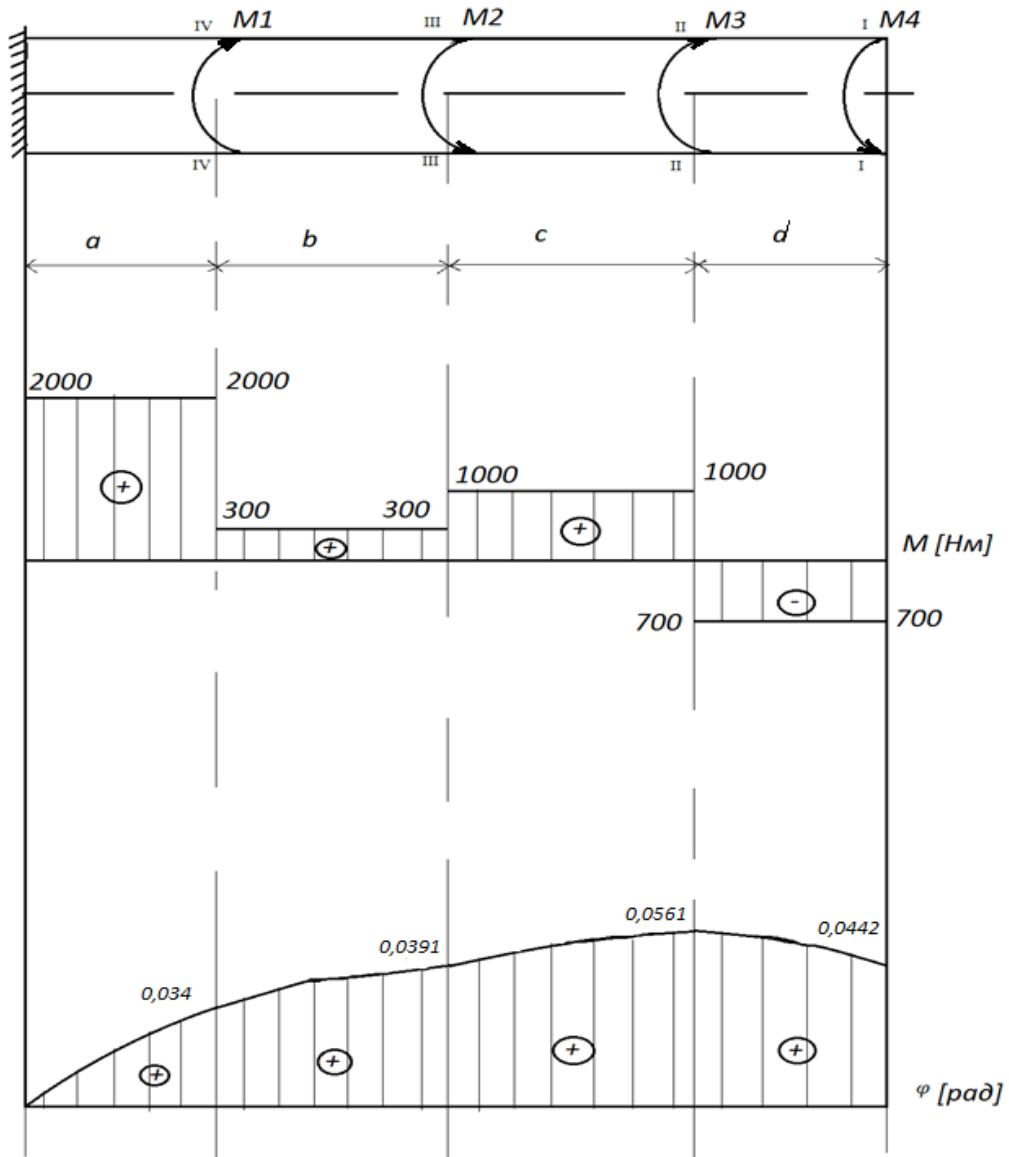


Рис.2.6. Побудова епюр крутних моментів та кутів закручування

Загальний кут закручування складає:

$$\varphi = \varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{III} + \varphi_{IV} \quad (54)$$

$$\varphi = -0,0119 + 0,017 + 0,0051 + 0,034 = 0,0442 \text{ рад}$$

Будуємо епюру кутів закручення відносно затиснення валу. Вона будується від жорсткого зацмлення, значення на кожній ділянці додаються.

4.Визначаємо найбільший відносний кут закручення:

$$\theta = \frac{\varphi_{\max}}{l} = \frac{0,034}{1,7} = 0,02 \text{ рад/м} \quad (55)$$

Відповідь: $\theta = 0,02$ рад/м

3.2. Графічно-цифрове пояснення до модуля «Кручення валу»

В даному завданні представлено графічно-цифрове пояснення до визначення крутних моментів в перерізах та побудови епюри крутних моментів. Посилання на ресурс наведено нижче. Необхідно відсканувати QR-код, після чого здобувач вищої освіти побачить послідовність побудови епюри крутних моментів.



Графічно-цифрове пояснення до визначення крутних моментів в перерізах та побудови епюри крутних моментів

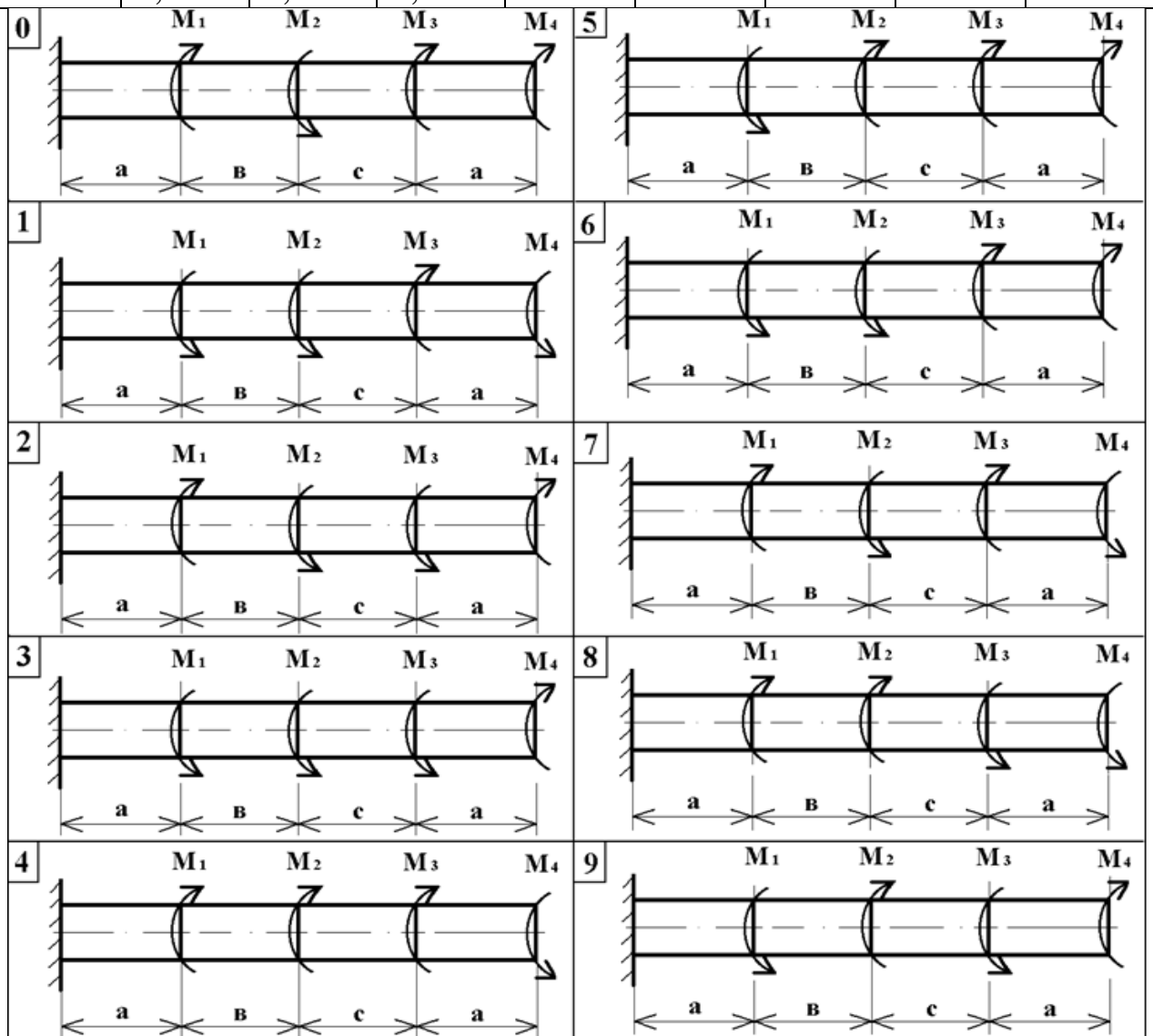
3.3. Завдання для самостійного виконання з теми «Кручення»

На сталевий вал діють чотири моменти. Необхідно:

- 1) побудувати епюру моментів кручення;
- 2) при заданому значенні $[\tau]$ визначити діаметр валу із розрахунку на міцність і округлити його величину до ближнього більшого значення, відповідно рівного: 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 125, 140, 160, 180 і 200 мм;
- 3) побудувати епюру кутів закручування;
- 4) знайти найбільший відносний кут закручування (на 1 пог. м).

Завдання для самостійного виконання

№	a, м	b, м	c, м	M ₁ , кНм	M ₂ , кНм	M ₃ , кНм	M ₄ , кНм	[τ], МПа
1	1,1	1,1	1,1	110	110	110	110	35
2	1,2	1,2	1,2	120	120	120	120	40
3	1,3	1,3	1,3	130	130	130	130	45
4	1,4	1,4	1,4	140	140	140	140	50
5	1,5	1,5	1,5	150	150	150	150	55
6	1,6	1,6	1,6	160	160	160	160	60
7	1,7	1,7	1,7	170	170	170	170	65
8	1,8	1,8	1,8	180	180	180	180	70
9	1,9	1,9	1,9	190	190	190	190	75
0	2,0	2,0	2,0	200	200	200	200	80



Задача №4 «Згин»

Для консольної статично визначеної балки необхідно:

- визначити опорні реакції;
- побудувати епюри поперечних сил і моментів згинання;
- із умови міцності по нормальних напруженнях підібрати:

а) діаметр d круглого поперечного перерізу;

б) висоту h і ширину b прямокутного поперечного перерізу, прийнявши $b = 0,5h$;

в) побудувати епюри нормальних і дотичних напружень в небезпечних перерізах.

Дано: балку розмірами $a_1=1,5\text{м}$; $a_2=2\text{м}$; $l=5,5\text{м}$;

$P=5\text{кН}$; $q=15\text{кН/м}$; $[\sigma]=10\text{МПа}$

1. Визначаємо реакції опор за рівнянням рівноваги. В точці А маємо жорстке защемлення. В точці жорсткого защемлення маємо три складові реакції R_A , Z_A і пару сил з моментом защемлення M_A .

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma Z_1 = 0; \quad Z_A = 0 \\ \Sigma Y_1 = 0; \quad -R_A - P + q \cdot a_2 = 0 \\ \Sigma \Sigma M_{iA} = 0; \quad -q \cdot a_2 \cdot \frac{a_2}{2} + P \cdot a_1 + M_A = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma Z_1 = 0; \quad Z_A = 0 \\ \Sigma Y_1 = 0; \quad -R_A - 5 \cdot 10^3 + 15 \cdot 10^3 = 0 \\ \Sigma M_{iA} = 0; \quad -15 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} + 5 \cdot 10^3 + M_A = 0 \end{array} \right.$$

Звідси визначаємо реакції: $R_A = 25 \cdot 10^3\text{кН}$; $M_A = 22,5\text{кН}\cdot\text{м}$.

Поперечні сили у відповідних перерізах балки мають такі значення:

$$Q_{(Y)1}=Q_{(Y)2}= Q_{(Y)3}=0;$$

$$Q_{(Y)4}=q \cdot 0,5=15 \cdot 0,5=7,5\text{кН};$$

$$Q_{(Y)5}=q \cdot 0,5 - P=7,5 - 5=2,5\text{кН};$$

$$Q_{(Y)6}=q \cdot 2 - P=15 \cdot 2 - 5=25\text{кН}$$

2. Згинальні моменти у відповідних перерізах балки мають такі значення:

$$M_{(X)1} = M_{(X)2} = M_{(X)3} = 0;$$

$$M_{(X)4} = M_{(X)5} = -\left(q \cdot \frac{a_2}{4} \cdot \frac{a_2}{8}\right) = -(15 \cdot 0,5 \cdot 0,25) = -1,87 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{(X)6} = -\left(q \cdot a_2 \cdot \frac{a_2}{2}\right) + P \cdot a_1 = -(15 \cdot 2 \cdot 1) + 0,5 \cdot 1,5 = -22,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

3. Із умови міцності по нормальним напруженням підбираємо:

а) балку круглого перерізу з діаметром d .

$$W_{кр} = \left| \frac{M_{x \max}}{[\sigma]} \right| = \frac{22,5 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^6} = 2,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 2250 \text{ см}^3 \quad (56)$$

$$W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \approx 0,1 \cdot d^3 \quad (57)$$

$$W_{кр} = 2250 = W_x = 0,1 \cdot d^3 \quad (58)$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{W_x}{0,1}} = \sqrt[3]{\frac{2250}{0,1}} = \sqrt[3]{22500} = 28,2 \text{ см}$$

б) балку прямокутного поперечного перерізу, прийнявши $b=0,4 \cdot h$.

$$W = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{0,4 \cdot h^3}{6} \quad (59)$$

$$W_{кр} = 2250 \text{ см}^3;$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{W_{кр} \cdot 6}{b}} = \sqrt[3]{\frac{2250 \cdot 6}{0,4}} = 32,3 \text{ см} \quad (60)$$

4. Будуємо епюру нормальних і дотичних напружень в перерізах з максимальним значенням моменту M_{\max} і максимальним значенням поперечної сили Q_{\max} . Таким перерізом виявився переріз в точці б.

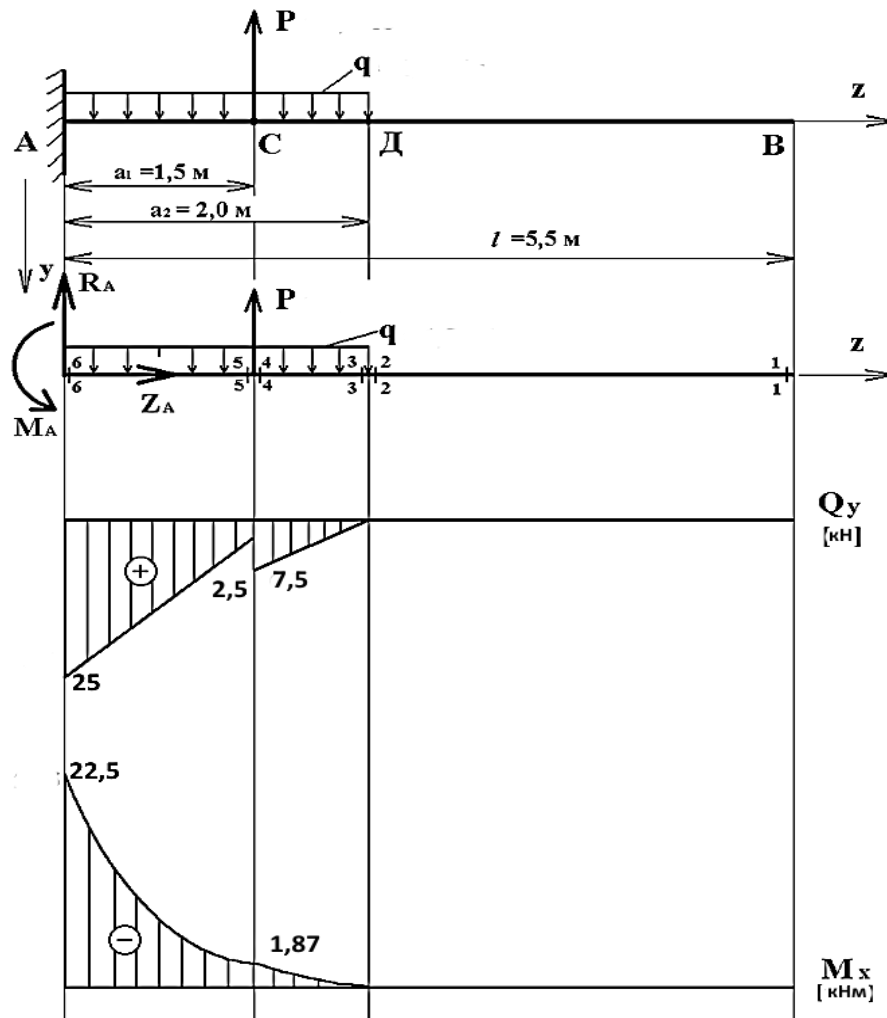


Рис. 7. Побудова епюр поперечної сили та згинального моменту

а) для круглого поперечного перерізу:

Нормальні напруження:

$$\sigma_{(1)} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{22,5 \cdot 10^3}{0,1 \cdot d^3} = \frac{22,5 \cdot 10^3}{0,1 \cdot (0,282)^3} = 10 \text{ МПа} \quad (61)$$

$$\sigma_{(2)} = 0;$$

$$\sigma_{(3)} = -10 \text{ МПа.}$$

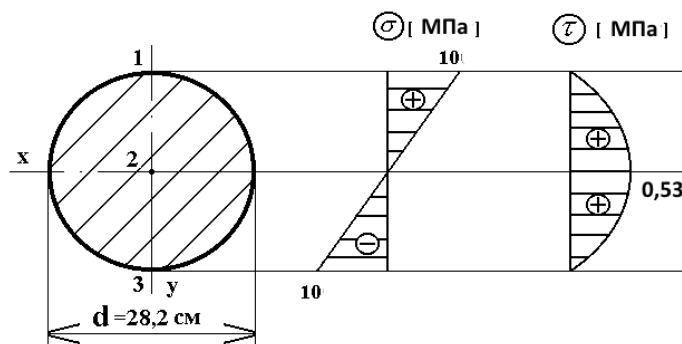


Рис. 8. Побудова епюр для круглого поперечного перерізу

Дотичні напруження знаходяться за формулою:

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_x}{I_x \cdot b} \quad (62)$$

$$\tau_{(1)} = \tau_{(3)} = 0; \quad (63)$$

$$\tau_{(2)} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_{Y \max}}{F} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_{Y \max}}{\pi R^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{25 \cdot 10^3}{3,14 \cdot (0,141)^2} = 0,53 \text{ МПа} \quad (64)$$

б) для квадратного поперечного перерізу:

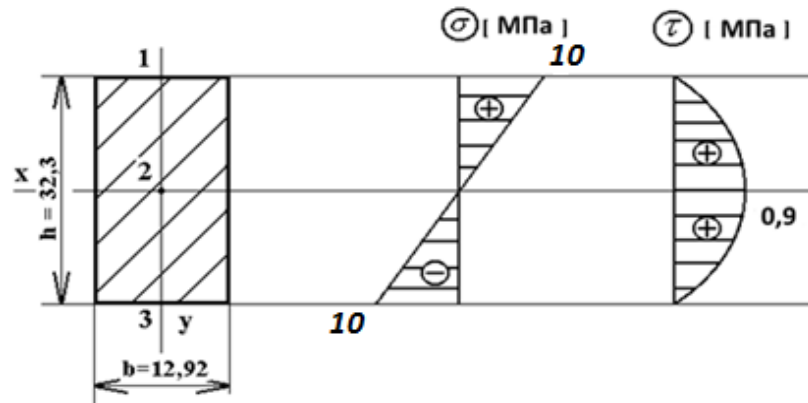


Рис 9. Побудова епюр для квадратного поперечного перерізу

Нормальні напруження:

$$\sigma_{(1)} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{M_{\max}}{b \cdot h^2 / 6} = \frac{22,5 \cdot 10^3}{0,13 \cdot 0,32^2 / 6} = 10 \text{ МПа}; \quad (65)$$

$$\sigma_{(2)} = 0;$$

$$\sigma_{(3)} = -10 \text{ МПа}$$

Дотичні напруження : $\tau_{(1)} = \tau_{(3)} = 0;$

$$\tau_{(2)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_{Y \max}}{F} = \frac{3}{2} \cdot \frac{25 \cdot 10^3}{b \cdot h} = \frac{3 \cdot 25 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,1292 \cdot 0,323} = 0,9 \text{ МПа}$$

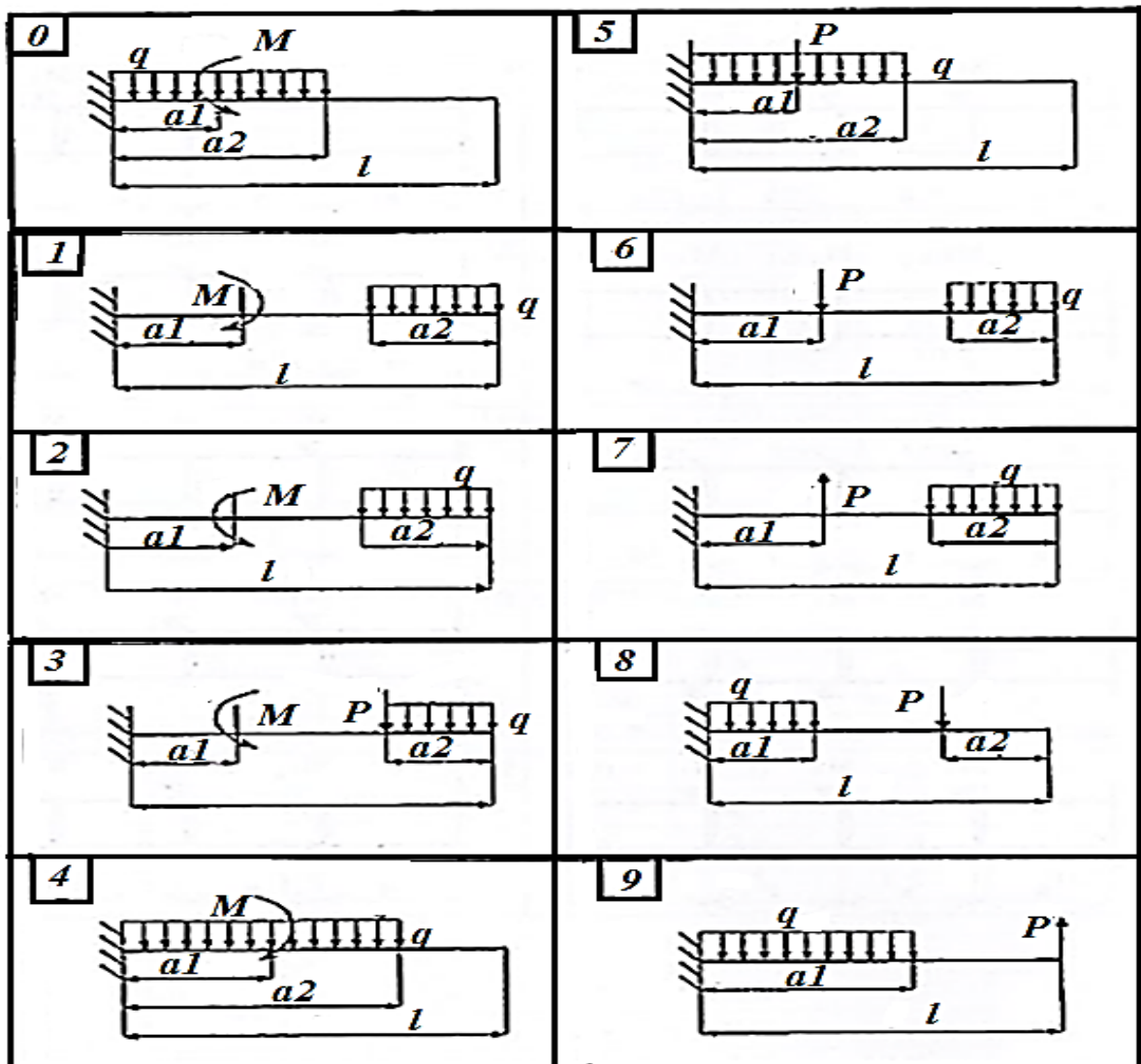
4.1. Графічно-цифрове пояснення до модуля «Згин балки»

В даному завданні представлено графічно-цифрове пояснення до методу побудови епюри поперечних сил та згинальних моментів. Посилання на ресурс наведено нижче. Необхідно відсканувати QR-код, після чого здобувач вищої освіти побачить послідовність побудови епюр Q_y та M_x .



Графічно-цифрове пояснення до побудови епюри поперечних сил та згинальних моментів

4.2. Завдання для самостійного виконання з теми «Згин»



Таблиця 6.

Варіанти завдань для самостійного виконання

№	L,m	a ₁ ,m	a ₂ ,m	M, кН·м	P, кН	Q, кН/м	[σ], МПа
1	5,0	1,0	2,0	10	5	5	12
2	4,0	1,5	1,5	20	10	10	10
3	3,5	1,0	1,5	3	3	3	8
4	4,5	2,0	1,0	4	4	4	12
5	5,5	1,5	2,0	5	5	5	10
6	5,0	2,0	1,5	6	6	6	8
7	4,5	2,0	0,5	7	7	7	12
8	4,0	1,0	1,0	8	8	8	10
9	3,0	1,8	0,9	9	9	9	8
10	4,5	1,5	1,5	10	10	10	12

Частина 2

Задача №5 «Визначення переміщень при згині»

5.1. Приклад 5.1 «Побудова епюр поперечної сили Q , згинального моменту M та підбір поперечного перерізу балки»

Розрахунок для консольної балки.

Для заданої схеми консольної балки потрібно побудувати епюри поперечної сили Q і моменту, що згинає M , виконати розрахунок, підбравши круглий переріз.

Матеріал – дерево, $[\sigma] = 10\text{МПа}$, $M = 14\text{кН} \cdot \text{м}$, $q = 8\text{кН} / \text{м}$

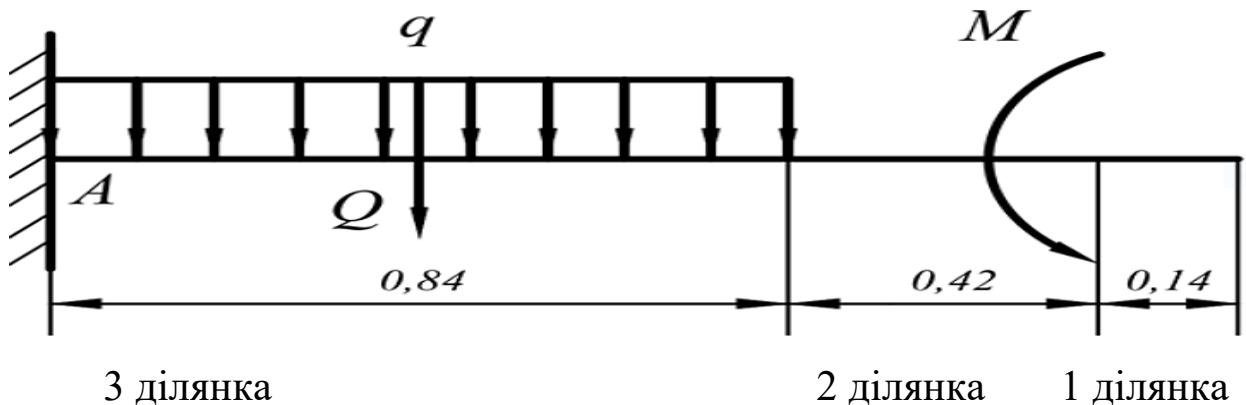


Рис. 1. Консольна балка

1. Визначимо опорні реакції.

Рівномірно розподілене навантаження q замінимо силою.

$$Q = q \cdot 0,84 = 6,72 \text{ кН} \quad (1)$$

У жорсткому защемленні закладені три опорні реакції – вертикальна, горизонтальна і момент, у разі горизонтальна реакція дорівнює 0.

Знайдемо вертикальну реакцію опори R_A та опорний момент M_A із рівнянь рівноваги.

$$R_A - Q = 0; \quad R_A = Q = 6,72 \text{ кН} \quad (2)$$

$$\sum M_A = 0; \quad -0,42Q + M - M_A = 0; \quad M_A = -0,42Q + M = 11,18 \text{ кНм} \quad (3)$$

2. Будуємо епюру поперечних сил. Розрахунок починаємо з вільного кінця балки (без защемлення).

На перших двох ділянках праворуч поперечна сила відсутня. На початку ділянки з рівномірно розподіленим навантаженням (праворуч) $Q = 0$, у защемленні – величині реакції R_A .

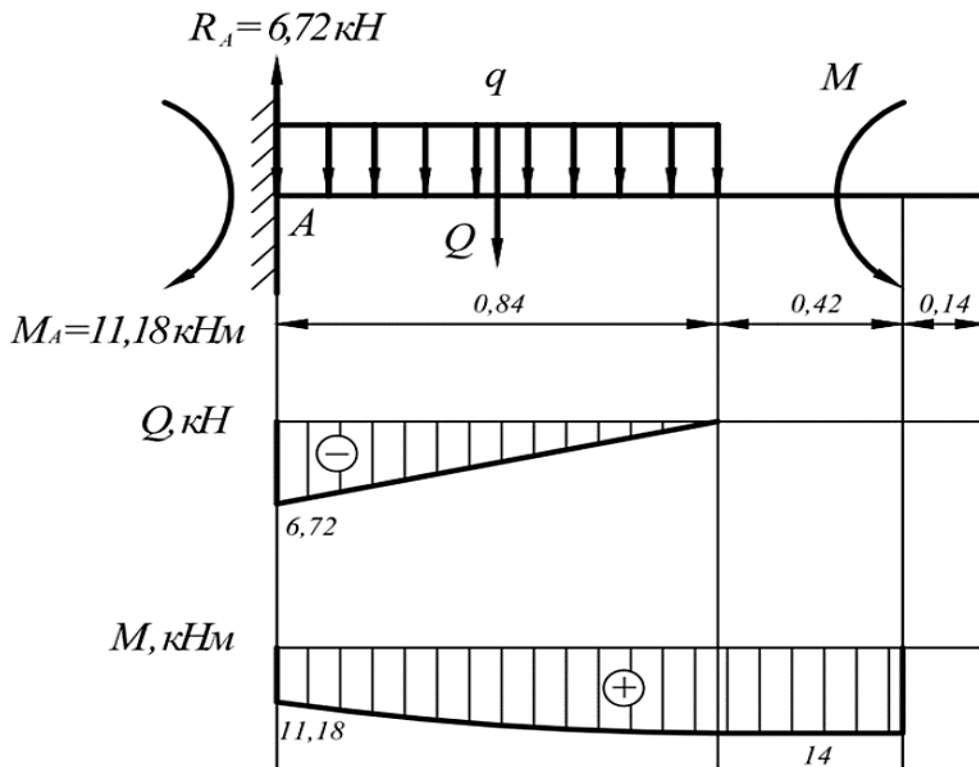


Рис. 2. Епюри поперечної сили та згинального моменту для консольної балки

3. Для побудови епюри згинальних моментів M складемо вирази для їх визначення на ділянках. Епюру моментів збудуємо на розтягнутих волокнах, тобто вниз.

Ділянка 1 ($0 \text{ м} \leq l \leq 0,14 \text{ м}$):

$$M_1 = 0 \text{ кНм}$$

Ділянка 2: ($0,14 \text{ м} \leq l \leq (0,14 + 0,42) \text{ м}$):

$$M_2 = M = 14 \text{ кНм}$$

Ділянка 3: ($(0,14 + 0,42) \text{ м} \leq l \leq (0,14 + 0,42 + 0,84) \text{ м}$):

$$M_3 = M - (qx^2)/2$$

$$X=0; M_3=14 \text{ кНм};$$

$$X=0,84; M_3=11,18 \text{ кНм};$$

$X=0,42$ (для середини ділянки при рівномірно розподіленому навантаженні); $M_3=13,3 \text{ кНм}$;

4. Підбір розмірів поперечного перерізу.

Максимальний згинальний момент з епюри $M = 14 \text{ кНм}$.
Визначимо осьовий момент опору перерізу.

$$W_x \geq M_{\max} / [\sigma] \quad (4)$$

Для круглого поперечного перерізу осьовий момент інерції розраховується:

$$W_x = (\pi \cdot d^3) / 32 \quad (5)$$

Звідси:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 M_{\max}}{\pi R}} \quad (6)$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 14 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 10 \cdot 10^6}} = 0,242 \text{ м} = 25 \text{ см}$$

Таким чином, підбираємо переріз діаметром 25 см.

Розрахунок для балки на шарнірних опорах.

Потрібно побудувати епюри Q і M та підібрати сталеву балку двотаврового поперечного перерізу при $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

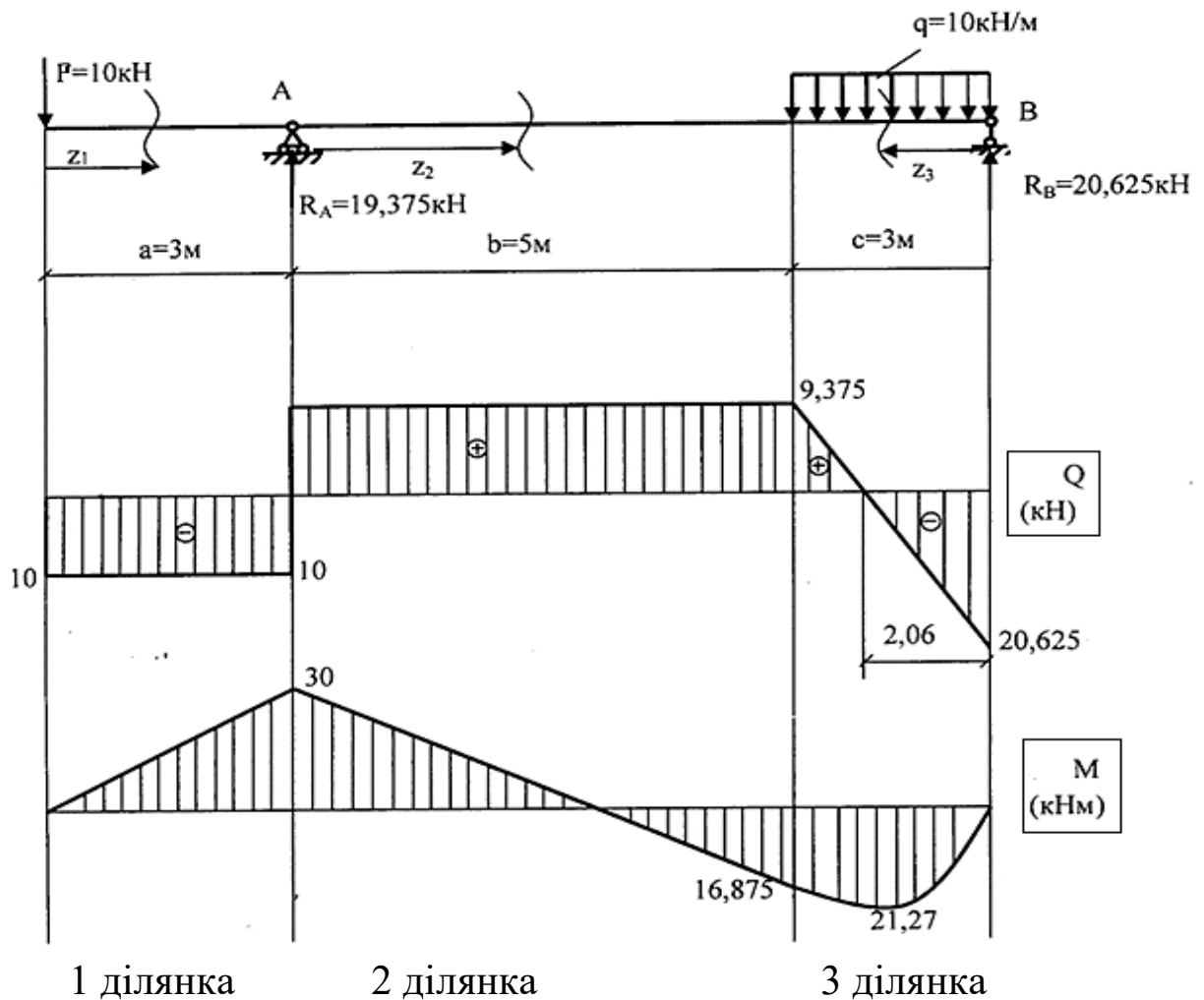


Рис. 3. Розрахункова схема та побудова епюр поперечної сили та згинального моменту для балки на двох опорах

1.Визначення реакцій:

Сума моментів щодо опор:

Опора А:

$$\sum M_a = 0; \quad P \cdot a + R_b \cdot (b+c) - q \cdot c \cdot (b+c/2) = 0 \quad (7)$$

Звідси:

$$8R_b = -10 \cdot 10^3 \cdot 3 + 10 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 6,5; \quad R_b = 20,625 \text{ кН} \quad (8)$$

Опора В:

$$\sum M_b = 0; \quad P \cdot (a+b+c) - R_b \cdot (b+c) + q \cdot c \cdot (c/2) = 0 \quad (9)$$

Звідси:

$$8R_b = 10 \cdot 10^3 \cdot 11 + 10 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 1,5; \quad R_b = 19,375 \text{ кН} \quad (10)$$

Сума проекцій усіх сил на вісь У (перевірка):

$$\sum y = 0; \quad R_a - P - q \cdot c + R_b = 0 \quad (11)$$

$$19,375 \cdot 10^3 - 10 \cdot 10^3 - 10 \cdot 10^3 \cdot 3 + 20,625 \cdot 10^3 = 0$$

$$0 = 0$$

2.Записуємо рівняння Q та M для кожної з ділянок у загальному вигляді, при цьому враховуємо знаки.

1) Перша ділянка:

$$0 \leq z_1 \leq 3$$

$$Q_1 = -P$$

$$Q_1(0) = Q_1(3) = -P = -10 \text{ кН}$$

$$M_1 = -P \cdot z_3$$

$$M_1(0) = 0$$

$$M_1(3) = -30 \text{ кНм}$$

2) Друга ділянка:

$$0 \leq z_2 \leq 5$$

$$Q_1 = -P + R_a$$

$$Q_1(0) = Q_1(5) = -P + R_a = 9,375 \text{ кН}$$

$$M_2 = -P \cdot (a + z_2) + R_a \cdot z_2$$

$$M_2(0) = -P \cdot 3 = -30 \text{ кНм}$$

$$M_2(5) = -P \cdot (a + z_2) + R_a \cdot z_2 = -10 \cdot 10^3 \cdot 8 + 19,375 \cdot 10^3 \cdot 5 = 16,875 \text{ кНм}$$

3) Третя ділянка:

$$0 \leq z_3 \leq 3$$

$$Q_3 = -R_b + q \cdot z_3$$

$$Q_3(0) = -R_b = -20,625 \text{ кН}$$

$$Q_3(3) = -R_b = -20,625 \cdot 10^3 + 10 \cdot 10^3 \cdot 3 = 9,375 \text{ кН}$$

$$Q_3 = 0 \text{ при } z_3 = 2,06 \text{ м}$$

$$M_3 = R_b \cdot z_3 - q \cdot z_3 \cdot z_3/2$$

$$M_3(0) = 0$$

$$M_3(2,06) = 20,625 \cdot 10^3 \cdot 2,06 - 10 \cdot 10^3 \cdot 2,06 \cdot 1,03 = 21,27 \text{ кНм (для середини ділянки при рівномірно розподіленому навантаженні);}$$

$$M_3(3) = 20,625 \cdot 10^3 \cdot 3 - 10 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 1,5 = 16,875 \text{ кНм}$$

3. Підбір розмірів поперечного перерізу.

Підібрати сталеву балку двотаврового поперечного перерізу при $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$:

З епюри обираємо максимальний момент:

$$M_{\max} = 30 \text{ кНм}$$

$$W_x \geq M_{\max} / [\sigma] = 30 \cdot 10^3 / 160 \cdot 10^6 = 0,1875 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 187,5 \text{ см}^3 \quad (12)$$

За сортаментом підбираємо двотавр № 20 з $W_x = 184 \text{ см}^3$

Двотавр можна взяти трохи менше, за умови, що похибка становить менше 5%:

$$\sigma_{\max} = M_{\max} / W_x = 30 \cdot 10^3 / 184 \cdot 10^{-6} = 163 \text{ МПа} \quad (13)$$

$$\Delta = [(163 - 160) / 163] \cdot 100\% = 1,8\% \leq 5\% \quad (14)$$

5.2. Приклад 5.2 «Підбір поперечного перерізу балки та перевірка міцності»

Для балки з побудованими епюрами внутрішніх зусиль підібрати переріз у вигляді двох швелерів з умови міцності за нормальними напруженнями. Перевірити міцність балки, використовуючи умову міцності за дотичними напруженнями.

Дано: $[\sigma] = 150 \text{ МПа}$; $[\tau] = 75 \text{ МПа}$; $P = 80 \text{ кН}$; $q = 60 \text{ кН/м}$; $M = 30 \text{ кНм}$; $l = 1,6 \text{ м}$. На рис.2.4 представлена балка з побудованими епюрами Q та M :

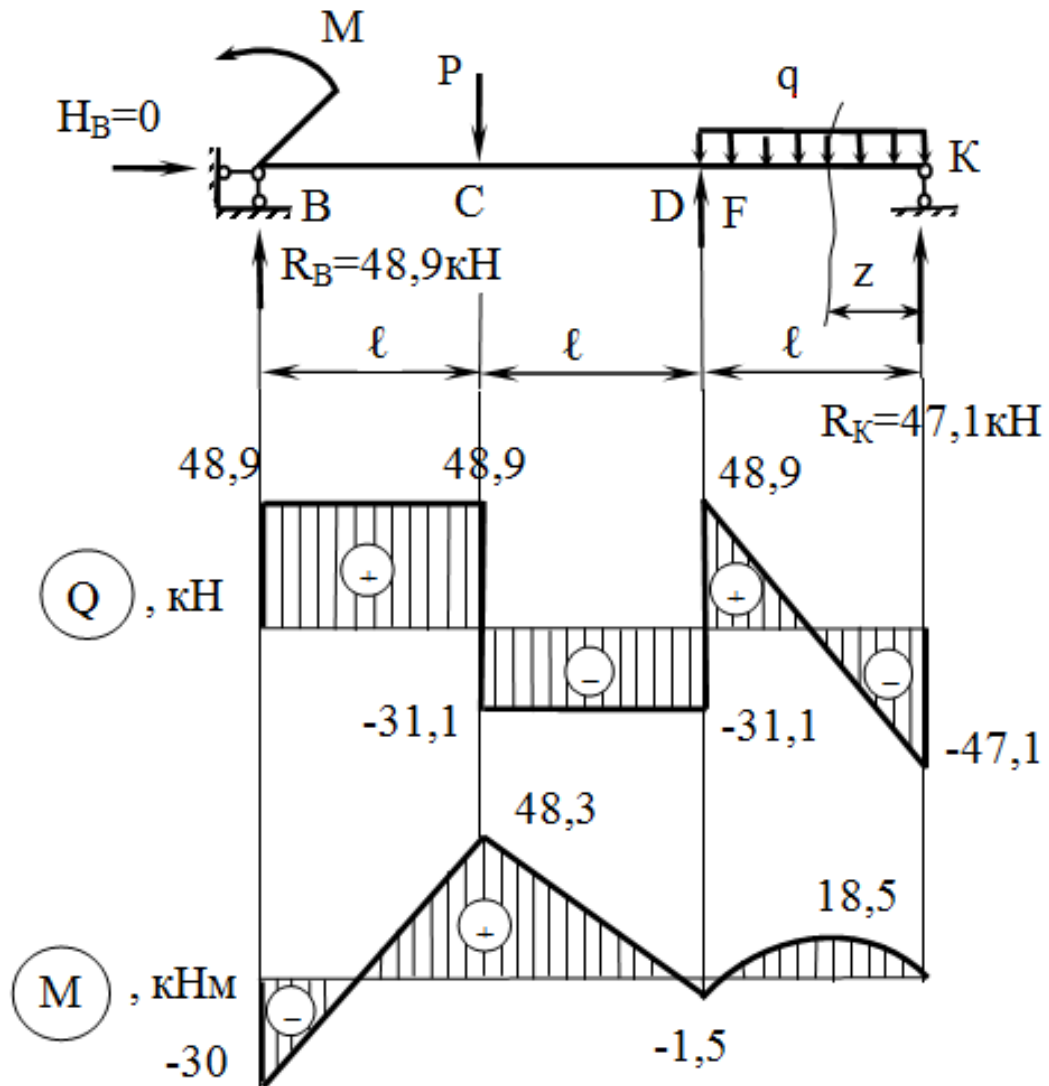


Рис.4. Балка з побудованими епюрами Q та M

Відповідно до епюри згинальних моментів небезпечним є переріз С, в якому $M_C = M_{\max} = 48,3 \text{ кНм}$.

Умова міцності за нормальними напруженнями для даної балки має вигляд $\sigma_{\max} = M_C / W_x \leq [\sigma]$. Потрібно підібрати переріз із двох швелерів.

Визначимо необхідне розрахункове значення осьового моменту опору перерізу:

$$W_{x \text{ розрах.}} = M_C / [\sigma] \quad (15)$$

$$W_{x \text{ розрах.}} = 48,3 \cdot 10^3 / 150 \cdot 10^6 = 0,322 \cdot 10^{-3} = 322 \text{ см}^3$$

Для перерізу у вигляді двох швелерів згідно сортаменту прокатної сталі приймаємо два швелери №20а, момент інерції кожного

швелера $I_x=1670\text{см}^4$, тоді осьовий момент опору всього перерізу подвоюємо.

Розрахуємо похибку підбору перерізу за напруженнями:

$$\Delta=(W_x \text{ розрах.} - W_x) \cdot 100 / W_x \quad (16)$$

$$\Delta=(322 - 334) \cdot 100 / 334 = -3,6\%$$

Тепер перевіримо міцність балки, виходячи з умови міцності по дотичних напруженнях. Згідно з епюрою поперечних сил небезпечними є перерізи на ділянці ВС і переріз D. Як видно з епюри, $Q_{\max}=48,9$ кН.

Умова міцності за дотичними напруженнями має вигляд:

$$\tau_{\max} = Q_{\max} \cdot S_x / I_x \cdot b \leq [\tau] \quad (17)$$

Згідно до таблиці сортаменту ля швелера №20а: статичний момент площі $S_{x1}=95,9$ см³, момент інерції перерізу $I_{x1}=1670$ см⁴, товщина стінки $d_1=5,2$ мм, середня товщина полиці $t_1=9,7$ мм, висота швелера $h_1=20$ см, ширина полиці $b_1 = 8$ см.

Для поперечного перерізу з двох швелерів:

$$S_x = 2S_{x1} = 2 \cdot 95,9 = 191,8 \text{ см}^3,$$

$$I_x = 2I_{x1} = 2 \cdot 1670 = 3340 \text{ см}^4,$$

$$b = 2d_1 = 2 \cdot 0,52 = 1,04 \text{ см}.$$

Визначаємо значення максимального дотичного напруження:

$$\tau_{\max} = 48,9 \cdot 10^3 \cdot 191,8 \cdot 10^{-6} / 3340 \cdot 10^{-8} \cdot 1,04 \cdot 10^{-2} = 27 \text{ МПа}.$$

$$\tau_{\max} < [\tau] \quad (27 \text{ МПа} < 75 \text{ МПа}).$$

Отже, умова міцності виконується.

Небезпечним є переріз С, в якому $M_C = M_{\max} = 48,3$ кНм і $Q_C = Q_{\max} = 48,9$ кН.

Проведемо аналіз напруженого стану в точках перерізу С.

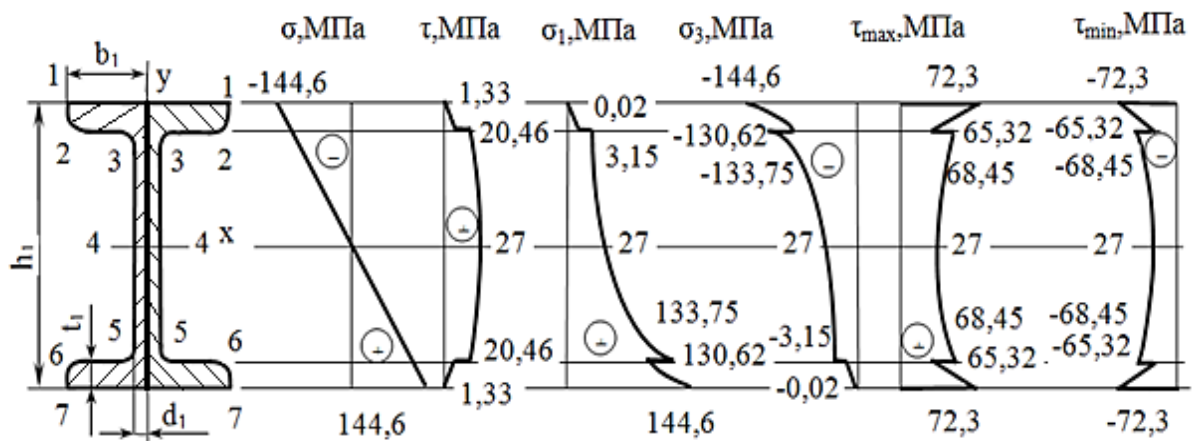


Рис. 5. Епюри для перерізу з двох швелерів до задачі 2

Визначимо нормальні та дотичні напруження на кількох рівнях (позначені на схемі перерізу).

Рівень 1-1: $y_{1-1} = h_1/2 = 20/2 = 10$ см.

Нормальні та дотичні напруження:

$$\sigma_{1-1} = \frac{M_c}{I_x} \cdot y_{1-1} = - \frac{48,3 \cdot 10^3}{3340 \cdot 10^{-8}} \cdot 10 \cdot 10^{-2} = -144,6 \text{ МПа}; \quad (18)$$

$$\tau_{1-1} = 0 \text{ МПа} = 0 \text{ МПа}$$

Головні напруження:

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_{1-1}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{1-1}^2 + 4\tau_{1-1}^2} = - \frac{144,6}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(-144,6)^2 + 4 \cdot 0^2} = -72,3 \pm 72,3$$

(19)

$$\sigma_1 = 0 \text{ МПа}; \sigma_3 = -144,6 \text{ МПа}$$

Екстремальні дотичні напруження:

$$\frac{\tau_{\max}}{\tau_{\min}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{1-1}^2 + 4\tau_{1-1}^2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(-144,6)^2 + 4 \cdot 0^2} \quad (20)$$

$$\tau_{\max} = 72,3 \text{ МПа}; \tau_{\min} = -72,3 \text{ МПа};$$

Рівень 2-2: $y_{2-2} = h_1/2 - t_1 = 20/2 - 0,97 = 9,03$ см.

Нормальні та дотичні напруження:

$$\sigma_{2-2} = \frac{M_c}{I_x} \cdot y_{2-2} = - \frac{48,3 \cdot 10^3}{3340 \cdot 10^{-8}} \cdot 9,03 \cdot 10^{-2} = -130,6 \text{ МПа}; \quad (21)$$

$$\tau_{2-2} = \frac{Q_c \cdot S_{x2}}{I_x \cdot b_{2-2}} \quad (22)$$

Відповідно до геометричних характеристик:

$$S_{x2} = 2b_1 \cdot t_1 \left(\frac{h_1}{2} - \frac{t_1}{2} \right) = 2 \cdot 8 \cdot 0,97 \cdot \left(10 - \frac{0,97}{2} \right) = 147,67 \text{ см}^3 \quad (23)$$

$$b_{2-2} = 2b_1 = 2 \cdot 8 = 16 \text{ см} \quad (24)$$

$$\tau_{2-2} = \frac{48,3 \cdot 147,67 \cdot 10^{-6}}{3340 \cdot 10^{-8} \cdot 16 \cdot 10^{-2}} = 1,33 \text{ МПа} \quad (25)$$

Головні напруження:

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_{2-2}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{2-2}^2 + 4\tau_{2-2}^2} = - \frac{130,6}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(-130,6)^2 + 4 \cdot 1,33^2} = -65,3 \pm 65,32 \quad (26)$$

$$\sigma_1 = 0,02 \text{ МПа}; \sigma_3 = -130,62 \text{ МПа}$$

Екстремальні дотичні напруження:

$$\tau_{\frac{\max}{\min}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{2-2}^2 + 4\tau_{2-2}^2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(-130,6)^2 + 4 \cdot 1,33^2} \quad (27)$$

$$\tau_{\max} = 65,32 \text{ МПа}; \tau_{\min} = -65,32 \text{ МПа};$$

Рівень 3-3: $y_{3-3} = h_1/2 - t_1 = 20/2 - 0,97 = 9,03 \text{ см}$.

Нормальні та дотичні напруження:

$$\sigma_{3-3} = \sigma_{2-2} = -130,6 \text{ МПа}$$

$$\tau_{3-3} = \frac{Q_C \cdot S_{x3}}{I_x \cdot b_{3-3}}$$

$$S_{x3} = S_{x2} = 147,67 \text{ см}^3$$

$$b_{3-3} = 2d_1 = 2 \cdot 0,52 = 1,04 \text{ см} \quad (28)$$

$$\tau_{3-3} = \frac{48,3 \cdot 147,67 \cdot 10^{-6}}{3340 \cdot 10^{-8} \cdot 1,04 \cdot 10^{-2}} = 20,46 \text{ МПа}$$

Головні напруження:

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_{3-3}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{3-3}^2 + 4\tau_{3-3}^2} = - \frac{130,6}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(-130,6)^2 + 4 \cdot 20,46^2} = -65,3 \pm 68,45 \quad (29)$$

$$\sigma_1 = 3,15 \text{ МПа}; \sigma_3 = -133,75 \text{ МПа}$$

Екстремальні дотичні напруження:

$$\tau_{\frac{\max}{\min}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{3-3}^2 + 4\tau_{3-3}^2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(-130,6)^2 + 4 \cdot 20,46^2} \quad (30)$$

$$\tau_{\max} = 68,45 \text{ МПа}; \tau_{\min} = -68,45 \text{ МПа};$$

Рівень 4-4: $y_{4-4} = 0$.

Нормальні та дотичні напруження:

$$\sigma_{4-4} = 0 \text{ МПа};$$

$$\tau_{4-4} = \tau_{\max} = 27 \text{ МПа}$$

(у середині нормальні напруження дорівнюють нулю, дотичні максимальні, їх знаходили у перевірці міцності по дотичних напруженнях).

Головні напруження:

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_{4-4}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{4-4}^2 + 4\tau_{4-4}^2} = 0 \pm \frac{1}{2} \sqrt{0^2 + 4 \cdot 27^2} = 0 \pm 27 \text{ МПа} \quad (31)$$

$$\sigma_1 = 27 \text{ МПа}; \sigma_3 = -27 \text{ МПа}$$

Екстремальні дотичні напруження:

$$\tau_{\frac{\max}{\min}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{4-4}^2 + 4\tau_{4-4}^2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{0^2 + 4 \cdot 27^2} \quad (32)$$

$$\tau_{\max} = 27 \text{ МПа}; \tau_{\min} = -27 \text{ МПа};$$

Рівень 5-5: $y_{5-5} = -(h_1/2 - t_1) = -(20/2 - 0,97) = -9,03 \text{ см}$.

Нормальні та дотичні напруження:

$$\sigma_{5-5} = \sigma_{3-3} = 130,6 \text{ МПа};$$

$$\tau_{5-5} = \frac{Q_c \cdot S_{x5}}{I_x \cdot b_{5-5}} = 20,46 \text{ МПа} \quad (33)$$

Головні напруження:

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_{5-5}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{5-5}^2 + 4\tau_{5-5}^2} = -\frac{130,6}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(-130,6)^2 + 4 \cdot 20,46^2} = -65,3 \pm 68,45 \quad (34)$$

$$\sigma_1 = 133,75 \text{ МПа}; \sigma_3 = -3,15 \text{ МПа}$$

Екстремальні дотичні напруження:

$$\tau_{\frac{\max}{\min}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{5-5}^2 + 4\tau_{5-5}^2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(-130,6)^2 + 4 \cdot 20,46^2} \quad (35)$$

$$\tau_{\max} = 68,45 \text{ МПа}; \tau_{\min} = -68,45 \text{ МПа};$$

Рівень 6-6: $y_{5-5} = -(h_1/2 - t_1) = -(20/2 - 0,97) = -9,03 \text{ см}$.

Нормальні та дотичні напруження:

$$\sigma_{6-6} = -\sigma_{2-2} = 130,6 \text{ МПа};$$

$$\tau_{6-6} = \frac{Q_c \cdot S_{x6}}{I_x \cdot b_{6-6}} = 1,33 \text{ МПа} \quad (36)$$

Головні напруження:

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_{6-6} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{6-6}^2 + 4\tau_{6-6}^2}}{2} = -\frac{130,6 \pm \frac{1}{2} \sqrt{(130,6)^2 + 4 \cdot 1,33^2}}{2} = 65,3 \pm 65,32 \quad (37)$$

$$\sigma_1 = 130,62 \text{ МПа}; \sigma_3 = -0,02 \text{ МПа}$$

Екстремальні дотичні напруження:

$$\tau_{\frac{\max}{\min}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{6-6}^2 + 4\tau_{6-6}^2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(130,6)^2 + 4 \cdot 1,33^2} \quad (38)$$

$$\tau_{\max} = 65,32 \text{ МПа}; \tau_{\min} = -65,32 \text{ МПа};$$

Рівень 7-7: $y_{7-7} = -(h_1/2) = -20/2 = -10 \text{ см}$.

Нормальні та дотичні напруження:

$$\sigma_{7-7} = -\sigma_{1-1} = 144,6 \text{ МПа};$$

$$\tau_{7-7} = 0 \text{ МПа}$$

Головні напруження:

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_{7-7} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{7-7}^2 + 4\tau_{7-7}^2}}{2} = -\frac{144,6 \pm \frac{1}{2} \sqrt{(144,6)^2 + 4 \cdot 0^2}}{2} = -72,3 \pm 72,3 \quad (39)$$

$$\sigma_1 = 144,6 \text{ МПа}; \sigma_3 = 0 \text{ МПа}$$

Екстремальні дотичні напруження:

$$\tau_{\frac{\max}{\min}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{7-7}^2 + 4\tau_{7-7}^2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(144,6)^2 + 4 \cdot 0^2} \quad (40)$$

$$\tau_{\max} = 72,3 \text{ МПа}; \tau_{\min} = -72,3 \text{ МПа};$$

Аналіз епюр показує, що в перерізі балки небезпечними є точки на рівні 3-3 (або 5-5), в яких:

$$\sigma_{3-3} = \sigma_{2-2} = -130,6 \text{ МПа}; \tau_{3-3} = 20,46 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{5-5} = \sigma_{3-3} = 130,6 \text{ МПа}; \tau_{5-5} = \frac{Q_c \cdot S_{x5}}{I_x \cdot b_{5-5}} = 20,46 \text{ МПа}; \quad (41)$$

$$\sigma_1 = 3,15 \text{ МПа}; \sigma_3 = -133,75 \text{ МПа};$$

$$\sigma_1 = 133,75 \text{ МПа}; \sigma_3 = -3,15 \text{ МПа};$$

Використовуючи енергетичний критерій міцності, отримаємо

$$\sigma_e^{IV} = \sqrt{\sigma_{3-3}^2 + 3\tau_{3-3}^2} = \sqrt{(-130,6)^2 + 3(20,46)^2} = 135,3 \text{ МПа} \quad (42)$$

З порівняння еквівалентного та допустимого напруження випливає, що умова міцності також виконується.

$$\sigma_e^{IV} < [\sigma] \quad (43)$$

$$135,3 \text{ МПа} < 150 \text{ МПа}$$

5.3. Приклад 5.3. «Визначення прогинів та кутів повороту зігнутої осі балки»

Використовуючи універсальне рівняння прогинів і кутів повороту, необхідно побудувати епюри кута повороту та прогину.

Дано:

$$R_B = 10 \text{ кН} = 10^3 \text{ М}$$

$$q = 40 \text{ кН/м} = 40 \cdot 10^3 \text{ кН/м}$$

$$M = 40 \text{ кН}\cdot\text{м} = 40 \cdot 10^3 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$R_A = 70 \text{ кН} = 70 \cdot 10^3$$

$$I_x = 2030 \text{ см}^4 = 2,03 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4$$

$$\left[\frac{f}{l} \right] = \frac{1}{100}$$

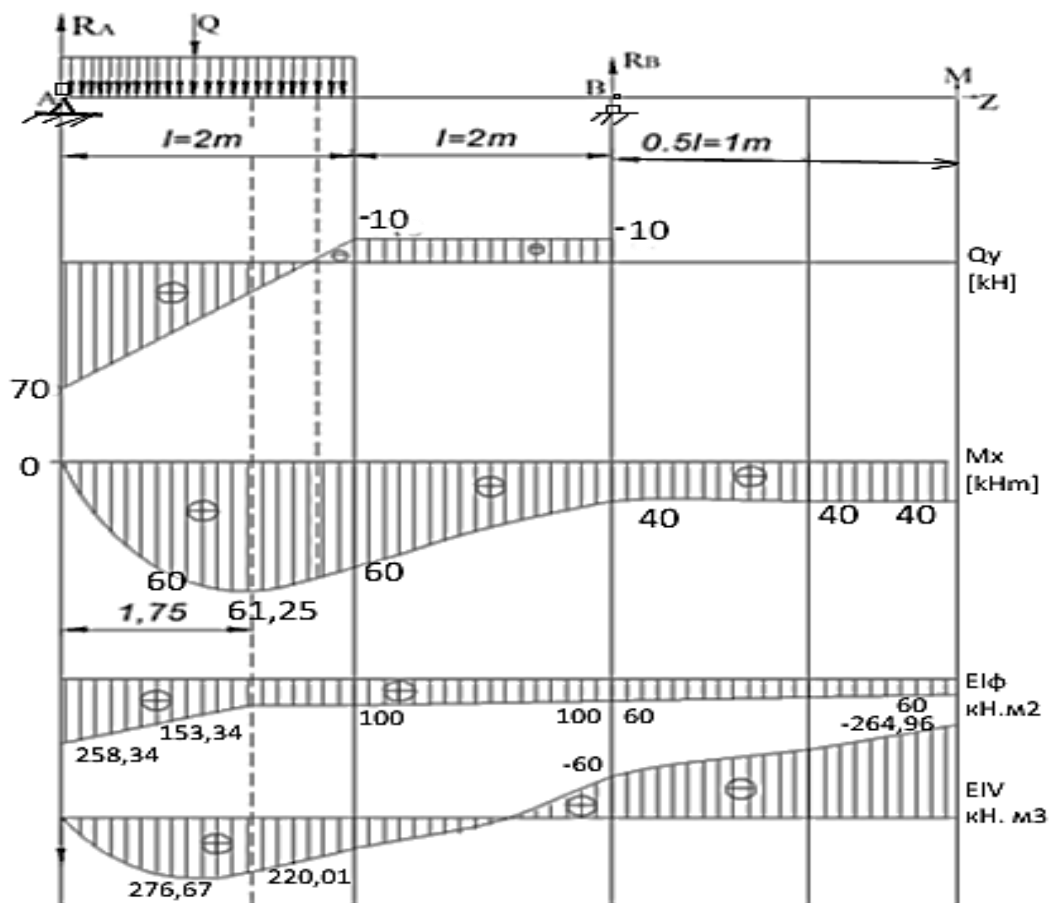


Рис. 6. Епюри поперечних сил, згинальних моментів, прогинів та кутів повороту

Розрахунок і побудову епюр згинальних моментів і поперечних сил опустимо, т.я. детально це розглядали в задачі 1.

Запишемо універсальне рівняння прогинів:

$$EIV(z) = EIV_0 + EI\varphi_0 \cdot z \pm \sum M \left(\frac{z-a}{2}\right)^2 \pm \sum P \frac{(z-b)^3}{6} \pm \sum q \frac{(z-c)^4}{24} \quad (44)$$

Використовуємо початкові умови прогин в опорах:

$$V(A) = 0; \quad V(B) = 0.$$

Запишемо рівняння для визначення початкових параметрів:

EIV_0 ; $EI\varphi_0$

$$EIV(A) = EIV(0) = EIV_0 = EIV_0 + EI\varphi_0 \cdot z - \frac{R_A(0-0)^3}{6} = 0;$$

$EIV_0 = 0$;

$$EIV(B) = EIV(4) = EI\varphi_0 \cdot 4 - \frac{R_A \cdot 4^3}{6} + q \frac{(4-0)^4}{24} - q \frac{(4-2)^4}{24} = 0$$

$$0 + EI\varphi_0 \cdot 4 - \frac{70 \cdot 4^3}{6} + \frac{(4-0)^4}{24} - 4 \frac{(4-2)^4}{24} = 0; \quad EI\varphi_0 \cdot 4 = 746,67 + 26,67 - 426,67;$$

$$EI\varphi_0 = 286,67 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$$

Знайдемо кути поворотів за допомогою універсального рівняння кутів повороту

$$EI\varphi(z) = EI\varphi_0 \pm \sum M(z-a) \pm \sum P \frac{(z-b)^2}{2} \pm \sum q \frac{(z-c)^3}{6} \quad (45)$$

$$EI\varphi(1) = EI\varphi_0 - \frac{R_A \cdot (1-0)^2}{2} + \frac{q(1-0)^3}{6} - \frac{q(1-1)^3}{6} = 286,67 - \frac{70 \cdot 1}{2} + \frac{40 \cdot 1^3}{6} = 258,34 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$EI\varphi(2) = EI\varphi_0 - \frac{R_A \cdot (2-0)^2}{2} + q \frac{(2-0)^3}{6} - \frac{q(2-2)^3}{6} = 286,67 - \frac{70 \cdot 2^2}{2} + \frac{40 \cdot 1^3}{6} = 153,34 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$EI\varphi(4) = EI\varphi_0 - \frac{R_A \cdot (4-0)^2}{2} + q \frac{(4-0)^3}{6} - q \frac{(4-2)^3}{6} = 286,67 - \frac{70 \cdot 4^2}{2} + \frac{40 \cdot 4^3}{6} - \frac{40(2)^3}{6} = 100 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$EI\varphi(5) = EI\varphi_0 - \frac{R_A \cdot 5^2}{2} + q \frac{(5-0)^3}{6} - q \frac{(5-0)^3}{6} - \frac{R_B (5-4)^2}{2} + M(5-5) = 60 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$$

Знайдемо прогини за допомогою універсального рівняння прогинів:

$$EIV(z) = EIV_0 + EI\varphi_0 \cdot z \pm \sum M \left(\frac{z-a}{2}\right)^2 \pm \sum P \frac{(z-b)^3}{6} \pm \sum q \frac{(z-c)^4}{24} \quad (46)$$

$$EIV(1) = EIV_0 + EI\varphi(z) - \frac{R_A \cdot (1-0)^3}{6} + q \frac{(1-0)^4}{24} - q \frac{(1-1)^4}{24} = 286,67 - \frac{70}{6} + \frac{40}{24} = 276,67 \text{ кН}\cdot\text{м}^3;$$

$$EIV(2) = EIV_0 + EI\varphi(z) - \frac{R_A \cdot 2^3}{6} + q \frac{(2-0)^4}{24} - q \frac{(2-2)^4}{24} = 286,67 - 93,34 + 26,67 = 220,01 \text{ кН}\cdot\text{м}^3$$

$$EIV(4) = EIV_0 + EI\varphi(z) - \frac{R_A \cdot 4^3}{6} + q \frac{(4-0)^4}{24} - q \frac{(4-2)^4}{24} = 286,67 - 746,67 + 426,67 - 26,67 = -60 \text{ кН}\cdot\text{м}^3;$$

$$EIV(5) = EIV_0 + EI\varphi(z) - \frac{R_A \cdot 5^3}{6} + q \frac{(5-0)^4}{24} - q \frac{(5-2)^4}{24} + M \frac{(5-5)^2}{2} = 286,67 - 1458,34 + 1041,67 - 135 + 0 = -264,96 \text{ кН}\cdot\text{м}^3$$

Визначимо, чи забезпечена жорсткість.

Прольот, де прогин максимальний ($EIV(1) = 276,67 \text{ кН}\cdot\text{м}^3$) має довжину 4 м.

$$\left[\frac{f}{l} \right] = \frac{1}{100} = \frac{f}{4} \Rightarrow [f] = 0,04$$

$$f_{\text{розр.}} = \frac{V_{\text{max}}}{EI} = \frac{276,67 \cdot 10^3}{2 \cdot (2 \cdot 10^{11} \cdot 2,03 \cdot 10^{-5})} = 0,034$$

$$[f] > f; \quad 0,04 > 0,034$$

Умова жорсткості забезпечена

5.4. Графічно-цифрове пояснення до модуля «Визначення переміщень при згині»

В даному завданні представлено графічно-цифрове пояснення до модуля «Визначення переміщень при згині». Посилання на ресурс наведено нижче. Необхідно відсканувати QR-код, після чого здобувач вищої освіти побачить послідовність знаходження поперечних сил та згинальних моментів.



Графічно-цифрове пояснення до розрахунку балки на згин



Графічно-цифрове пояснення до знаходження поперечних сил та згинальних моментів

5.5. Завдання для самостійного виконання з теми «Визначення переміщень при згині»

Для визначення переміщень при згині для заданої балки необхідно:

1. Визначити опорні реакції та виконати їх перевірку (задача 1).

2. Побудувати епюри згинальних моментів і поперечних сил і визначити значення максимального згинального моменту M_{zmax} (задача 1).

3. За величиною максимального згинального моменту підібрати балку круглого поперечного перерізу при допустимих нормальних напруженнях (задача 1).

4. За величиною максимального згинального моменту підібрати сталеву балку зі швелера при допустимих нормальних напруженнях $[\sigma]=160$ МПа (задача 2).

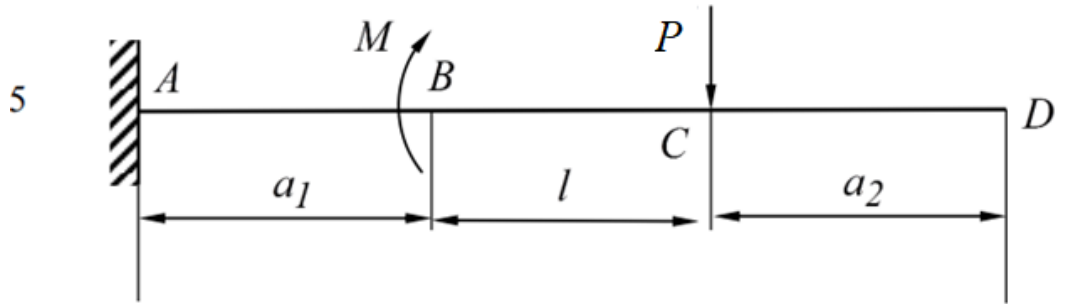
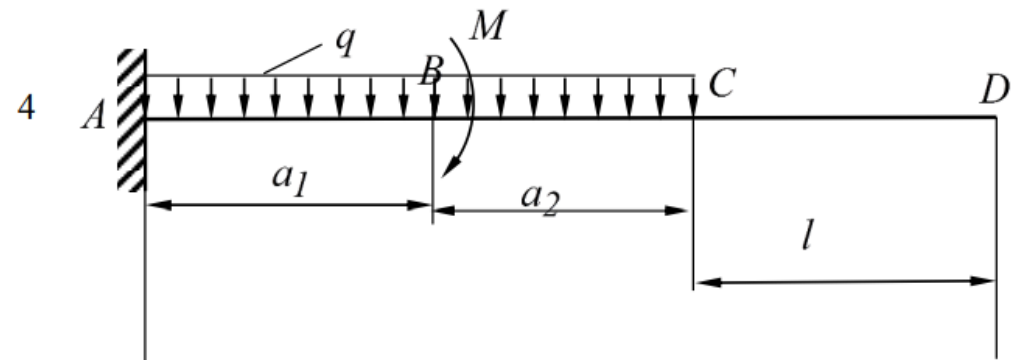
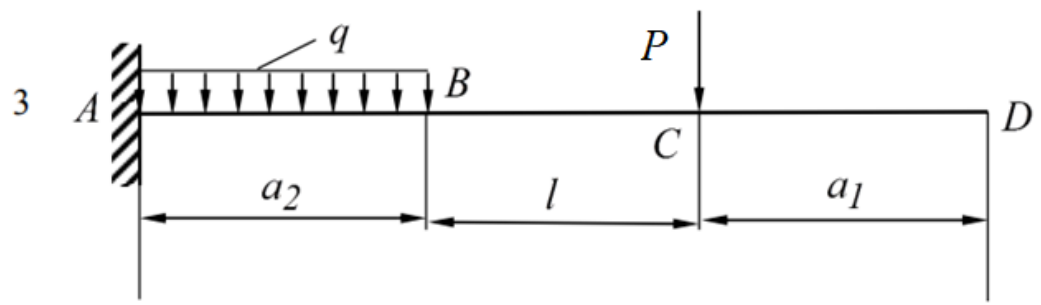
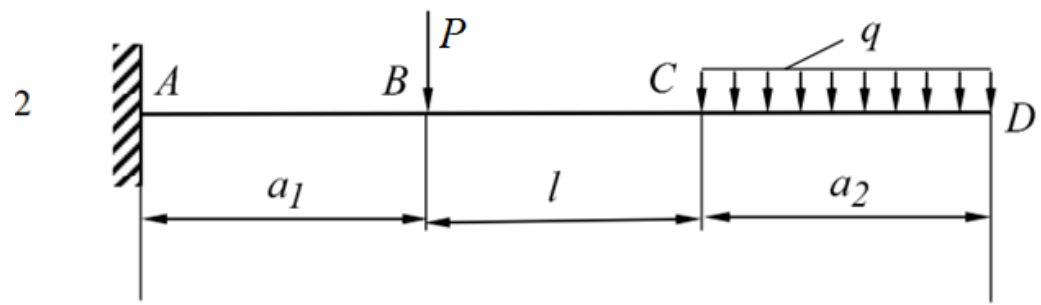
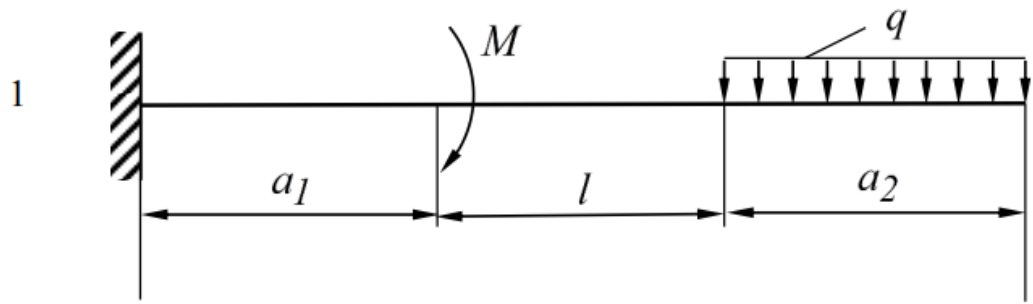
5. Для балки з побудованими епюрами внутрішніх зусиль підібрати переріз у вигляді двох швелерів з умови міцності за нормальними напруженнями. Перевірити міцність балки, використовуючи умову міцності за дотичними напруженнями (задача 2).

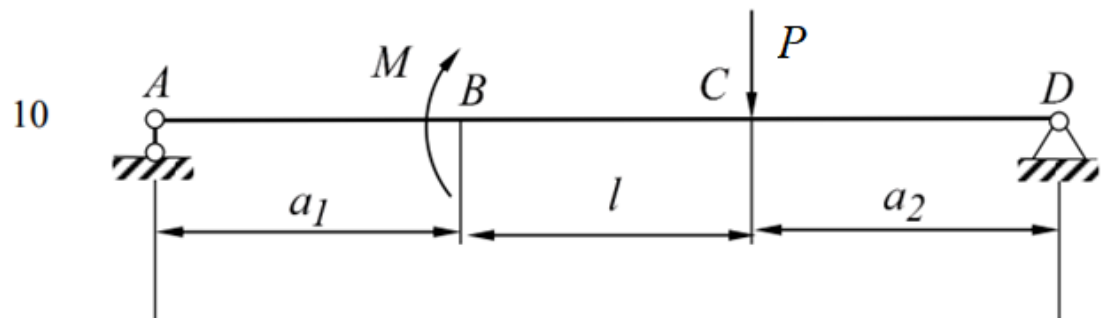
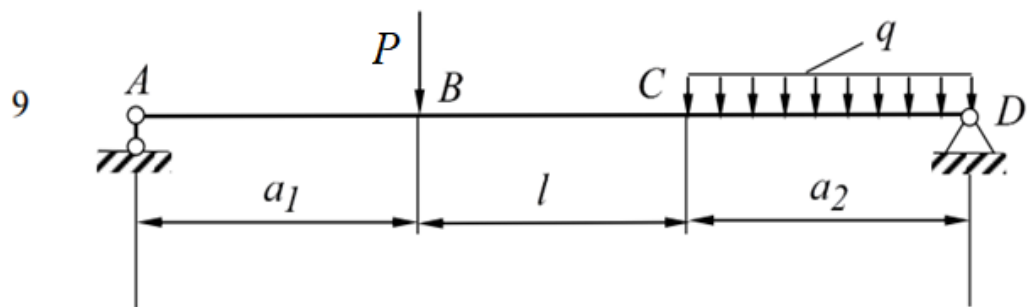
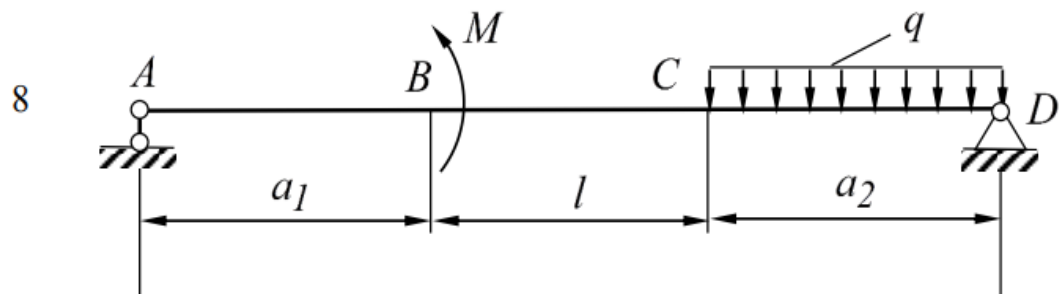
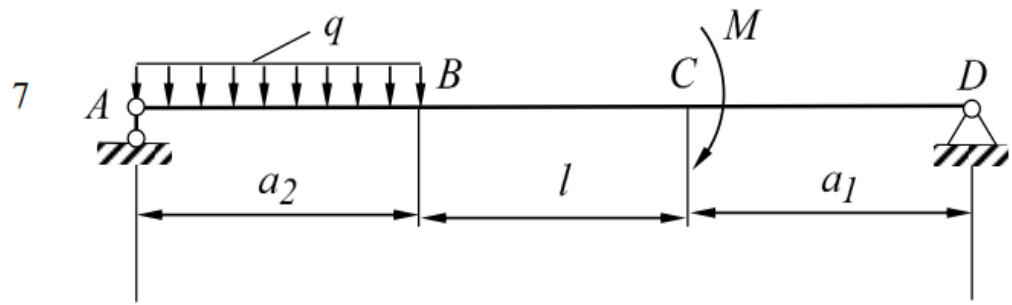
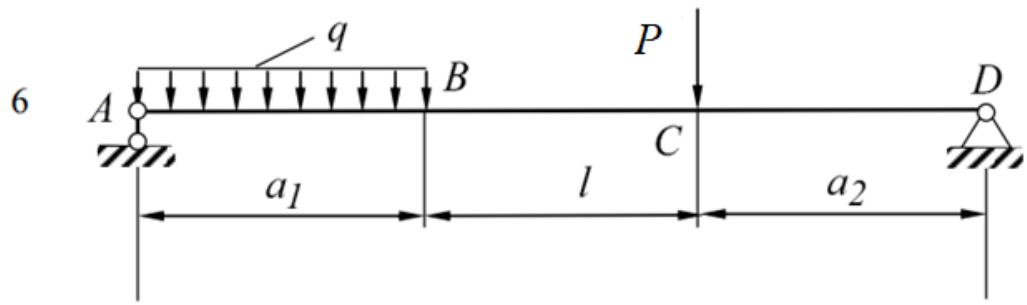
6. Використовуючи універсальне рівняння прогинів і кутів повороту, необхідно побудувати епюри кута повороту та прогину (задача 3).

Вихідні дані беруться згідно до номеру варіанту (таблиця 1).
Номер схеми вказаний у вихідних даних для кожного варіанту.

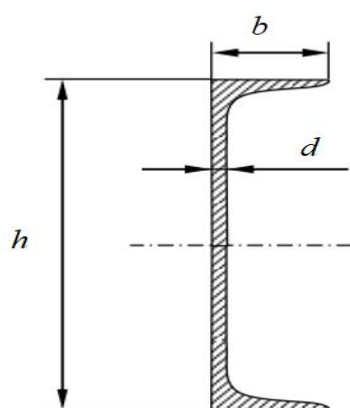
Таблиця 1. Вихідні дані

Номер варіанту	Номер схеми	l , м	a_1 , м	a_2 , м	M , кНм	P , кН	q , кН/м
1	1	0,8	0,1	0,15	6	10	1
2	2	0,9	0,2	0,25	5	9	2
3	3	1	0,3	0,35	4	8	3
4	4	1,1	0,4	0,45	3	7	4
5	5	1,2	0,5	0,55	2	6	5
6	6	1,3	0,6	0,65	1	5	6
7	7	1,4	0,7	0,75	6	4	1
8	8	1,5	0,8	0,85	5	3	2
9	9	1,3	0,9	0,95	4	2	3
10	10	1,4	1	1,05	3	1	4
11	1	0,6	0,9	0,95	2	10	5
12	2	0,7	0,8	0,85	1	9	6
13	3	0,8	0,7	0,75	6	8	1
14	4	0,9	0,6	0,65	5	7	2
15	5	1	0,5	0,55	4	6	3
16	6	1,1	0,4	0,45	3	5	4
17	7	1,2	0,3	0,35	2	4	5
18	8	1,3	0,2	0,25	1	3	6
19	9	1,4	0,1	0,15	6	2	1
20	10	1,5	0,9	0,95	5	1	2
21	1	0,7	0,8	0,85	4	10	3
22	2	0,8	0,7	0,75	3	9	4
23	3	0,9	0,6	0,65	2	8	5
24	4	1	0,5	0,55	1	7	6
25	5	1,1	0,4	0,45	6	6	1
26	6	1,2	0,3	0,35	5	5	2
27	7	1,3	0,2	0,25	4	4	3
28	8	1,4	0,1	0,15	3	3	4
29	9	1,5	0,9	0,95	2	2	5
30	10	1,6	0,8	0,85	1	1	6





Таблиця 2. Вихідні дані для підбору швелера



h – висота швелера;

b – ширина полиці;

d – товщина стінки.

Номер профілю	5	6,5	8	10	12	14	14а	16
$I_z, \text{см}^4$	22,8	48,6	89,4	174	304	491	545	747
$W_z, \text{см}^3$	9,1	15,0	22,4	34,8	50,6	70,2	77,8	93,4

Номер профілю	16а	18	18а	20	20а	22	22а
$I_z, \text{см}^4$	823	1090	1190	1520	1670	2110	2330
$W_z, \text{см}^3$	103	121	132	152	167	192	212

Номер профілю	24	24а	27	30	33	36	40
$I_z, \text{см}^4$	2900	3180	4160	5810	7980	10820	15220
$W_z, \text{см}^3$	242	265	308	387	484	601	761

Задача №6 «Статично невизначені системи»

6.1. Приклад 6.1. «Статично невизначені системи. Розрахунок плоских статично-невизначених рам за методом сил»

Побудувати епюри внутрішніх зусиль від силового впливу в рамі, якщо відомо, що згинальна жорсткість поперечних перерізів ригелів рами EJ_p вдвічі більше згинальної жорсткості поперечних перерізів її стійок EJ_c , тобто $EJ_p : EJ_c = 2 : 1$.

1. Визначення ступеня статичної невизначеності рами:

$$n = 3K - H = 3 \cdot 2 - 4 = 2. \quad (47)$$

1. Вибір основної системи методу сил та її кінематичний аналіз. Основну систему утворюємо впровадженням циліндричних шарнірів у верхній і нижній вузли правої стійки рами, тобто видаленням зв'язків, що перешкоджають взаємному повороту двох сусідніх перерізів верхнього правого вузла рами та повороту перерізу, розташованому близько до правого опорного затискання рами. За невідомі методи сил у разі приймаються зусилля у віддалених кутових зв'язках, саме – згинальні моменти X_1 і X_2 (рис. 2.7,б).

Прийнята до розрахунку основна система має просту структуру і геометрично незмінна.

3. Побудова епюр згинальних моментів в основній системі за методом сил від $X_1 = 1$ (рис. 2.7, в), $X_2 = 1$ (рис. 2.7, г) та заданого навантаження (рис. 2.7, д).

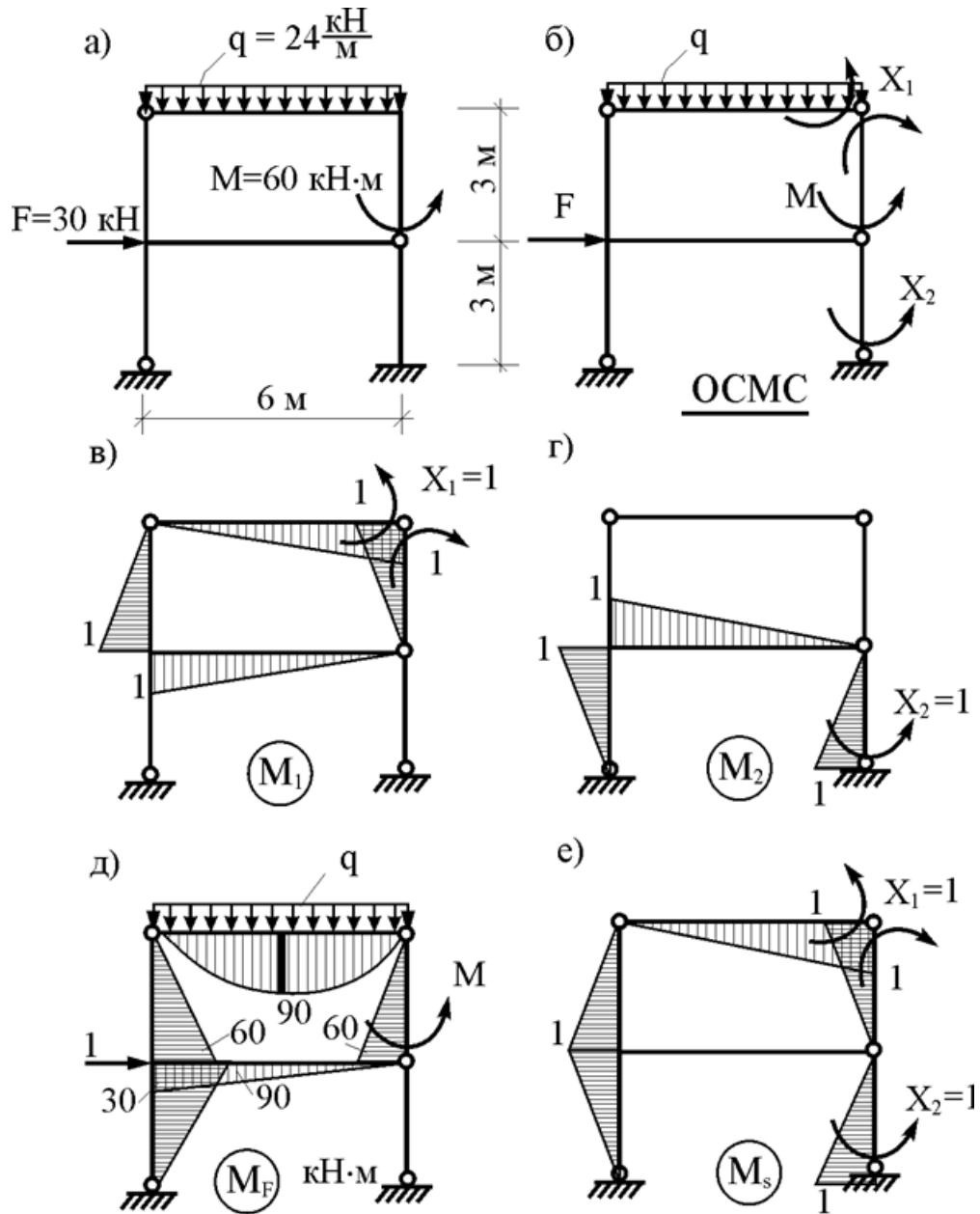


Рис. 7. Задача «Статично невизначені системи. Розрахунок плоских статично-невизначених рам за методом сил»

4. Обчислення коефіцієнтів та вільних членів системи канонічних рівнянь:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} &= 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} &= 0. \end{aligned} \quad (48)$$

Прийmemo $EJ_p=2EJ$, $EJ_c=EJ$ (EJ – довільне число), зберігаючи задане співвідношення між згинальними жорсткостями поперечних перерізів ригелів і стійок рами.

$$\delta_{11} = \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{4}{EJ}; \quad (49)$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = -\frac{1}{EJ}; \quad (50)$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{3}{EJ}; \quad (51)$$

$$\Delta_{1F} = \frac{6}{6 \cdot 2EJ} \cdot 4 \cdot 90 \cdot 0,5 + \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 30 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 60 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 60 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{90}{EJ}; \quad (52)$$

$$\Delta_{2F} = -\frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 30 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 90 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = -\frac{120}{EJ}. \quad (53)$$

5. Перевірка правильності обчислення коефіцієнтів при невідомих та вантажних коефіцієнтах системи канонічних рівнянь. Сумарна епюра згинальних моментів $M_s = M_1 + M_2$ від $X_1 = 1$ і $X_2 = 1$ в основній системі методу сил показано на рис. 2.7, е.

$$M_s = M_1 + M_2 = \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 4 = \frac{5}{EJ}. \quad (54)$$

Результат поєднання епюри згинальних моментів M_s саму на себе дорівнює сумі

$$\delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22} = \frac{4}{EJ} - \frac{1}{EJ} - \frac{1}{EJ} + \frac{3}{EJ} = \frac{5}{EJ} \quad (55)$$

що підтверджує достовірність обчислення коефіцієнтів за невідомих.

$$\frac{6}{6 \cdot 2EJ} \cdot 4 \cdot 90 \cdot 0,5 - \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 60 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 60 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 90 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = -\frac{30}{EJ}. \quad (56)$$

Сума раніше обчислених вантажних коефіцієнтів системи канонічних рівнянь

$$\Delta_{1F} + \Delta_{2F} = \frac{90}{EJ} - \frac{120}{EJ} = -\frac{30}{EJ} \quad (57)$$

збігається з результатами сполучення епюр згинальних моментів M_s і M_F , що свідчить про правильність їх обчислення.

6. Розв'язання системи канонічних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{4}{EJ} \cdot X_1 - \frac{1}{EJ} \cdot X_2 + \frac{90}{EJ} &= 0, \\ -\frac{1}{EJ} \cdot X_1 + \frac{3}{EJ} \cdot X_2 - \frac{120}{EJ} &= 0. \end{aligned} \quad (58)$$

У заданій системі рівнянь абсолютне значення жорсткості поперечного перерізу стійок рами $EJ_s = EJ$ скорочується, тобто. величини зусиль у зайвих зв'язках X_1 і X_2 , отже, значення внутрішніх зусиль від заданого навантаження у всіх перерізах рами залежить від відносного значення згинальних жорсткостей поперечних перерізів елементів рами.

$$\begin{aligned} 4 \cdot X_1 - 1 \cdot X_2 &= 90 = 0, \\ -1 \cdot X_1 + 3 \cdot X_2 - 120 &= 0. \end{aligned} \quad (59)$$

Звідси отримаємо: $X_1 = -13,64$ кНм, $X_2 = 35,45$ кНм. Знак "мінус" для числового значення зусилля в зайвому зв'язку X_1 вказує на зворотний напрямок дії цього зусилля в порівнянні з попередньо прийнятим при виборі основної системи методу сил.

7. Визначення згинальних моментів у перерізах заданої рами та побудова відповідної епюри. Для розглянутого завдання співвідношення набуде вигляду:

$$M = M_1 X_1 + M_2 X_2 + M_F. \quad (60)$$

Ординати епюри M_1 помножимо на $-13,64$ кНм, а M_2 - на $35,45$ кНм, потім зробимо додавання епюр $M_1 X_1$, $M_2 X_2$ і M_F (рис. 2.8). Епюра згинальних моментів заданій рамі показано на рис. 2.9, а.

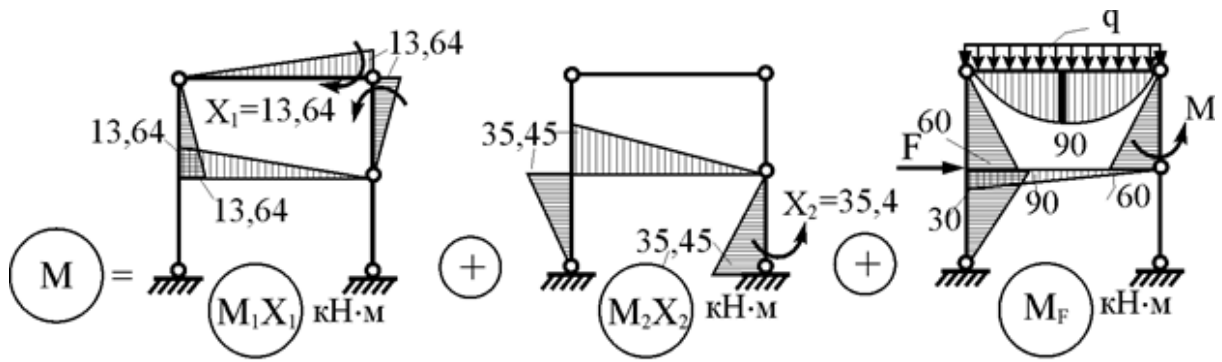


Рис. 8. Епюри до задачі

8. Кінематична перевірка. З цією метою використовуємо сумарну епюру згинальних моментів M_s (рис. 16.10, е).

$$\Delta = \frac{6}{6 \cdot 2EJ} \cdot (4 \cdot 83,18 \cdot 0,5 - 13,64 \cdot 1) - \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 73,64 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 54,55 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{3}{6EJ} \cdot \left(-13,64 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{60 - 13,64}{2} \cdot 0,5 \right) + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 35,45 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{73,36}{EJ} - \frac{73,36}{EJ} = 0.$$

(61)

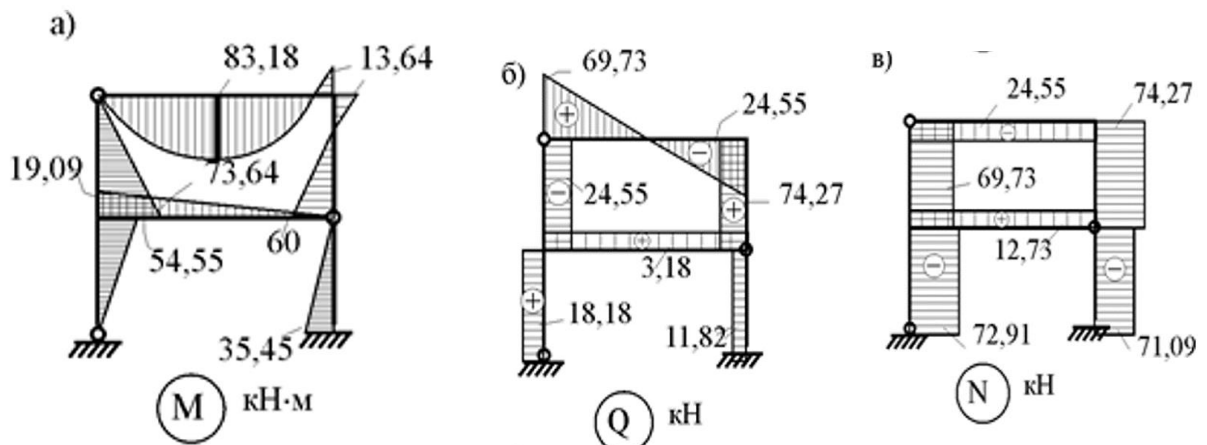


Рис. 9. Епюри до задачі

Кінематична перевірка виконана з абсолютною нульовою похибкою.

9. Побудова епюр поперечних та поздовжніх сил у заданій рамі. Епюри Q і N для заданої рами показані на рис. 2.9.

6.2. Графічно-цифрове пояснення до модуля «Статично невизначені системи»

В даному завданні представлено графічно-цифрове пояснення до модуля «Статично невизначені системи». Посилання на ресурс наведено нижче. Необхідно відсканувати QR-код, після чого здобувач вищої освіти побачить послідовність розрахунку статично невизначених систем.



Графічно-цифрове пояснення до розрахунку статично невизначених систем

6.3. Завдання для самостійного виконання з теми «Статично невизначені системи»

Для зображеної на рисунку рами необхідно:

1. вибрати основну систему методу сил;
2. скласти канонічні рівняння; побудувати дія основної системи одиничні і вантажні епюри моментів згинання;
3. визначити одиничні і вантажні переміщення;
4. знайти „зайві” невідомі;
5. побудувати епюри моментів згинання, поперечних і поздовжніх сил для статично невизначеної рами.

Таблиця 3

Варіанти завдань для виконання задачі

№ вар.	№сх.	F, кН	q, кН/м	M, кНм	L1	L2	H
1	1	6	1	3	1	7	2
2	2	7	2	4	2	6	3
3	3	8	3	5	3	5	4
4	4	9	4	6	4	4	5
5	5	10	5	7	5	3	6
6	6	11	1	8	6	2	2
7	7	12	2	3	7	1	3
8	8	13	3	4	1	7	4
9	9	14	4	5	2	6	5
10	10	15	5	6	3	5	6
11	11	6	1	7	4	4	2
12	12	7	2	8	5	3	3
13	13	8	3	3	6	2	4
14	14	9	4	4	7	1	5
15	15	10	5	5	1	7	6
16	1	11	1	6	2	6	2
17	2	12	2	7	3	5	3
18	3	13	3	8	4	4	4
19	4	14	4	3	5	3	5
20	5	15	5	4	6	2	6
21	6	6	1	5	7	1	2
22	7	7	2	6	1	7	3
23	8	8	3	7	2	6	4
24	9	9	4	8	3	5	5
25	10	10	5	3	4	4	6
26	11	11	1	4	5	3	2
27	12	12	2	5	6	2	3
28	13	13	3	6	7	1	4
29	14	14	4	7	1	7	5
30	15	15	5	8	2	6	6

Задача №7 «Складний опір»

7.1. Приклад 7.1. «Косий згин балки»

Для балки побудувати епюри згинальних моментів, перевірити міцність, визначити положення нульової лінії в перерізі, побудувати епюру нормальних напружень.

Дано: переріз з двох двотаврів №16, матеріал балки сталь Ст3, допустиме нормальне напруження $[\sigma]=160$ МПа, модуль пружності $E=2 \cdot 10^5$ МПа.

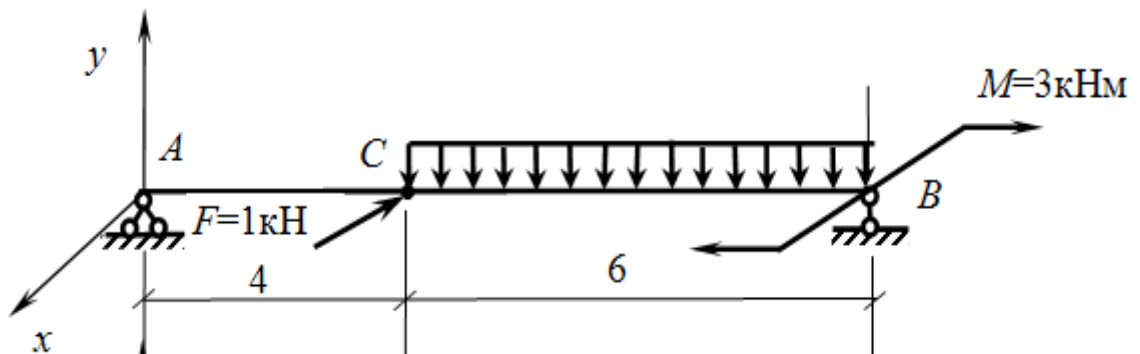


Рис. 10. Схема до задачі 3.1

1. Балка зазнає деформації косоного згину. За принципом незалежності дії сил задане навантаження покажемо в осях x , і побудуємо епюри M_x і M_y .

а) Покажемо балку з навантаженням по осі (рис.2.11) і побудуємо епюру згинальних моментів M_x .

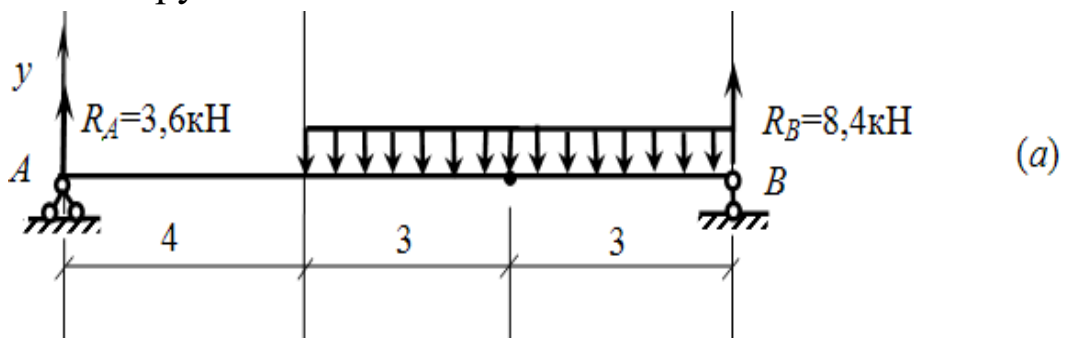


Рис. 11. Визначення реакцій опор

Спочатку визначимо опорні реакції R_A та R_B .

$$\sum M_a = 0, -R_B \cdot 10 + q \cdot 6 \cdot 7 = 0, R_B = \frac{q \cdot 6 \cdot 7}{10} = 8,4 \text{ кН}; \quad (62)$$

$$\sum Mb = 0, \quad R_b \cdot 10 + q \cdot 6 \cdot 3 = 0, \quad R_b = \frac{q \cdot 6 \cdot 3}{10} = 3,6 \quad \text{кН};$$

(63)

Перевірка: $\sum y = 0, \quad R_a + R_b - q \cdot 6 = 0$

(64)

$$3,6 + 8,4 - 2 \cdot 6 = 0 \quad \text{- вірно.}$$

Будуємо епюру M_x методом характерних точок. Характерні точки – початок і кінець ділянок, середина рівномірно розподіленої навантаження – т. К.

$$M_A^{\text{лів}} = 0, M_B^{\text{прав}} = 0 \quad (65)$$

$$M_C^{\text{лів}} = R_A \cdot 4 = 14,4 \text{ кНм} \quad (66)$$

$$M_K^{\text{прав}} = R_B \cdot 3 - q \cdot 1,5 = 25,2 - 9 = 16,2 \text{ кНм} \quad (67)$$

Будуємо епюру M_x (рис.2.12).

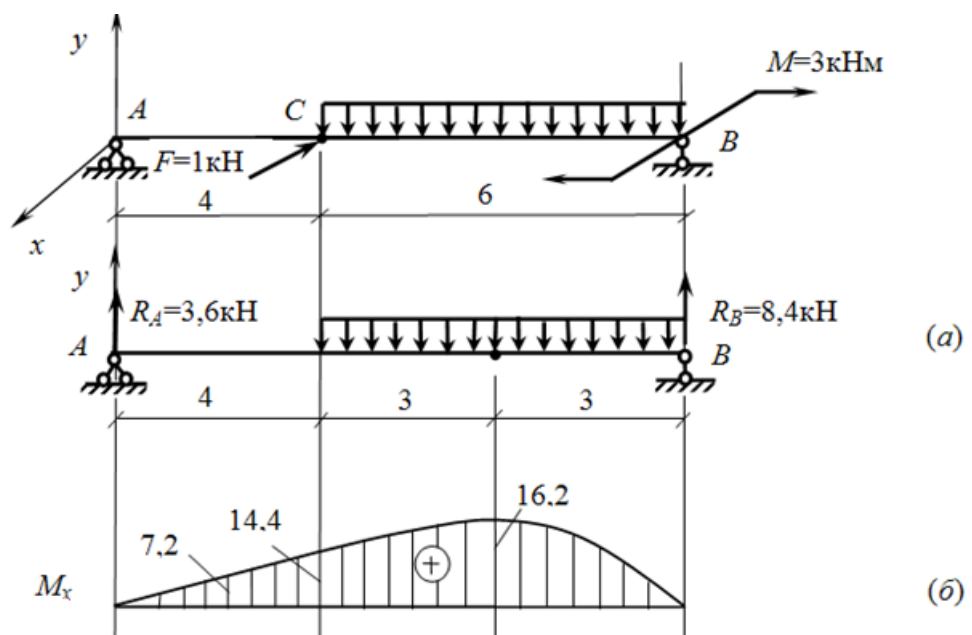


Рис. 12. Побудова епюри M_x

б) Покажемо балку з навантаженням у площині x (рис. 2.13), визначаємо опорні реакції та побудуємо епюру M_y .

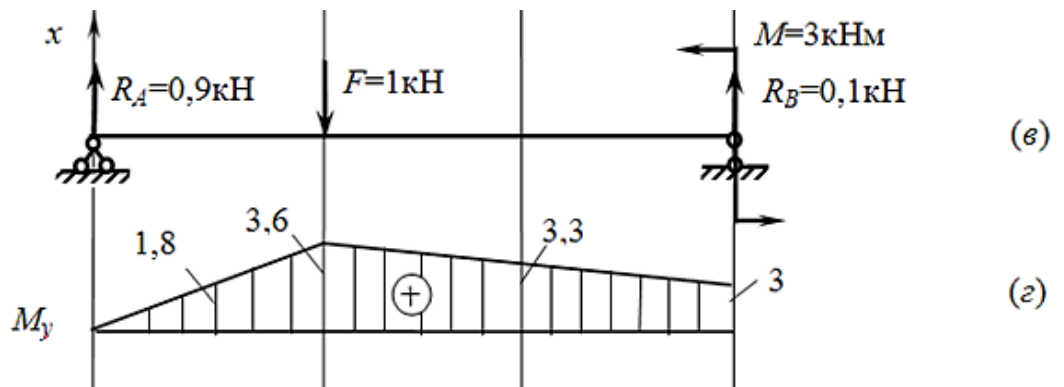


Рис. 13. Побудова епюри M_y .

$$\sum M_A = 0, F \cdot 4 - M - R_B \cdot 10 = 0, R_B = \frac{F \cdot 4 - M}{10} = \frac{4 - 3}{10} = 0,1 \text{ кН.} \quad (68)$$

$$\sum M_B = 0, R_A \cdot 10 - M - F \cdot 6 = 0, R_A = \frac{M + F \cdot 6}{10} = \frac{3 + 6}{10} = 0,9 \text{ кН.} \quad (69)$$

Перевірка:

$$\sum y = 0, R_A + R_B - F = 0, 0,9 + 0,1 - 1 = 0 \quad (70)$$

$$1 - 1 = 0 - \text{вірно}$$

Будуємо епюру M_y методом характерних точок.

$$M_A^{\text{лів}} = 0, M_B^{\text{пр}} = M = 3 \text{ кНм} \quad (71)$$

$$M_C^{\text{лів}} = R_A \cdot 4 = 0,9 \cdot 4 = 3,6 \text{ кНм} \quad (72)$$

Будуємо епюру M_y (рис.13.г).

2. Перевіримо міцність балки за формулою:

$$\sigma = \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma] \quad (73)$$

Значення M_x і M_y візьмемо з епюр M_x і M_y за небезпечним перерізом, а W_x і W_y для заданого перерізу слід визначити за формулами:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\text{max}}}, W_y = \frac{I_y}{x_{\text{max}}}. \quad (74)$$

Виконаємо креслення перерізу в масштабі.

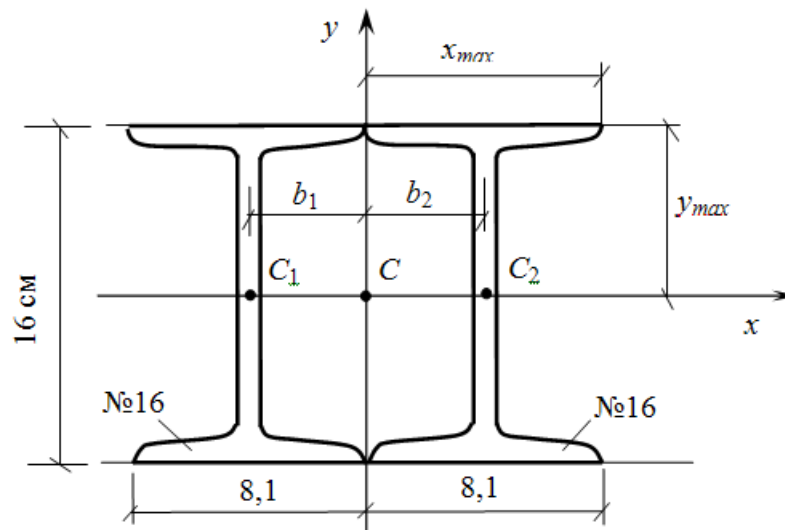


Рис. 14. Креслення перерізу

Визначимо головні центральні моменти інерції всього перерізу:

$$I_x = \sum(I_{xi} + A_i \cdot a_i^2), I_y = \sum(I_{yi} + A_i \cdot a_i^2) \quad (75)$$

$$I_{x1} = I_{x2} = 873 \text{ см}^4, I_{y1} = I_{y2} = 58,6 \text{ см}^4, A_1 = A_2 = 20,2 \text{ см}^2. \quad (76)$$

$$I_x = I_{x1} + A_1 \cdot a_1^2 + I_{x2} + A_2 \cdot a_2^2 = 873 + 873 = 1746 \text{ см}^4 \quad (77)$$

$$a_1 = a_2 = 0 \quad (78)$$

$$b_1 = -4,05 \text{ см}, b_2 = 4,05 \text{ см} \quad (79)$$

$$I_y = I_{y1} + A_1 \cdot b_1^2 + I_{y2} + A_2 \cdot b_2^2 = 58,6 + 20,2 \cdot (-4,05)^2 + 58,6 \cdot (4,05)^2 = 779,9 \text{ см}^4 \quad (80)$$

Визначимо осьові моменти опору:

$$y_{\max} = \frac{16}{2} = 8 \text{ см}, x_{\max} = 8,1 \text{ см}. \quad (81)$$

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{1746}{8} = 218,25 \text{ см}^3, \quad (82)$$

$$W_y = \frac{I_y}{x_{\max}} = \frac{779,9}{8,1} = 96,28 \text{ см}^3 \quad (83)$$

Перевірка міцності. Розглянемо можливі небезпечні перерізи.

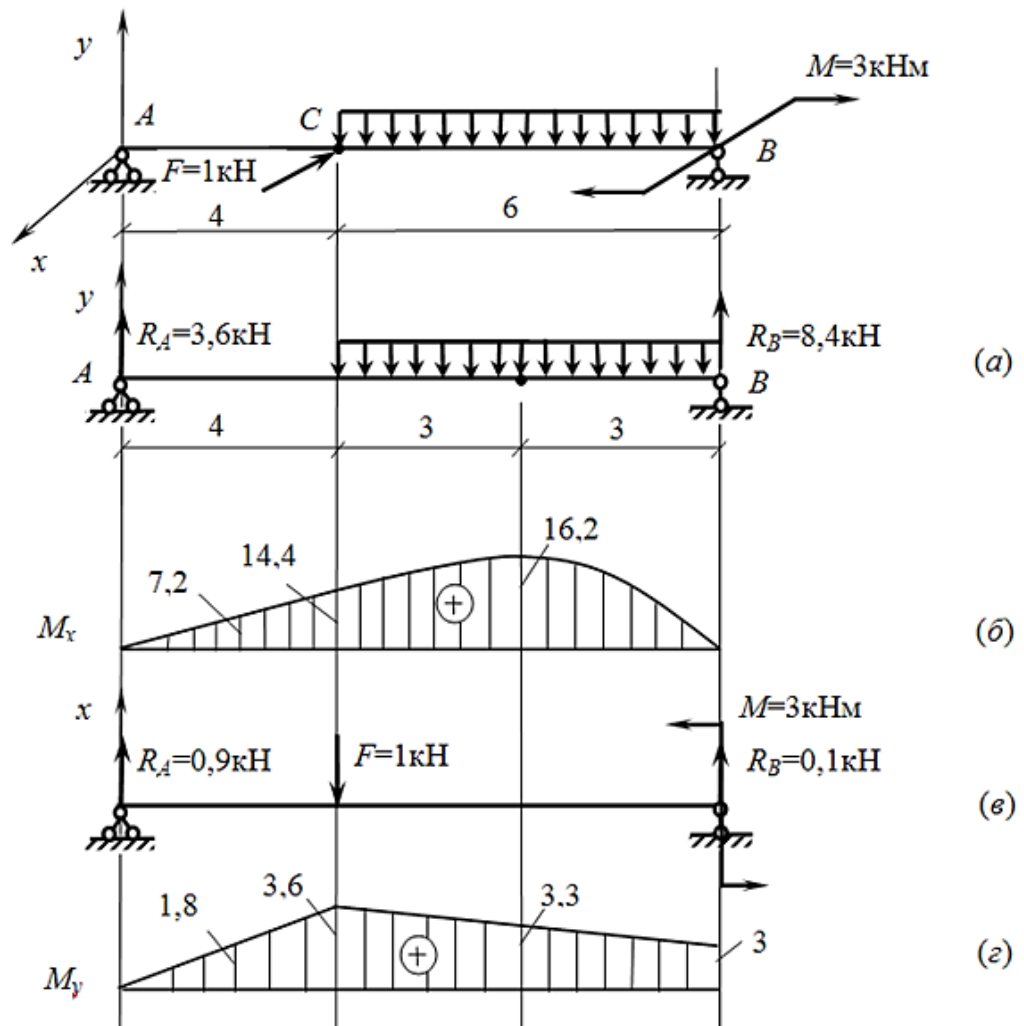


Рис. 15. Перевірка міцності

З двох перерізів на балці - С і К (середина навантаження) - небезпечним є той, де виникає найбільше за величиною напруження.

Перевіримо переріз, де $M_x=14,4$ кНм, $M_y=3,6$ кНм.

$$\max \sigma_c = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{14,4 \cdot 10^{-3} \text{ МНм}}{218,25 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3} + \frac{3,6 \cdot 10^{-3}}{96,28 \cdot 10^{-6}} = 65,98 + 37,39 = 103,37 \text{ МПа.}$$

(84)

Перевіримо переріз До, де $M_x = 16,2$ кНм, $M_y = 3,3$ кНм.

$$\max \sigma_{\text{К}} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{16,2 \cdot 10^{-3}}{218,25 \cdot 10^{-6}} + \frac{3,3 \cdot 10^{-3}}{96,28 \cdot 10^{-6}} = 74,22 + 34,27 = 108,49 \text{ МПа.}$$

(85)

З порівняння визначаємо, що небезпечним перетином балки є переріз К.

Перевіряємо міцність:

$$\sigma = 108,49 < [\sigma] = 160 \text{ МПа} \quad (86)$$

Міцність забезпечена.

3. Для заданого перерізу збудуємо епюру нормальних напружень σ .

Спочатку визначимо положення нульової лінії.

Рівняння нульової лінії:

$$\frac{M_x}{I_x} y_0 + \frac{M_y}{I_y} x_0 = 0 \quad (87)$$

Підставляємо значення M і I і знаходимо співвідношення між y_0 і x_0 .

$$\frac{16,2 \cdot 10^{-3}}{1746 \cdot 10^{-8}} \cdot y_0 + \frac{3,3 \cdot 10^{-3}}{779,9 \cdot 10^{-8}} \cdot x_0 = 0$$

$$927,83 \cdot y_0 + 423,13x_0 = 0$$

$$y_0 \frac{-423,13x_0}{927,83} = -0,45x_0$$

Визначимо координати двох точок нульової лінії: $X_0 (0;2)$; $Y_0(0;-0,9)$.

Будуємо переріз у масштабі та проводимо нульову лінію.

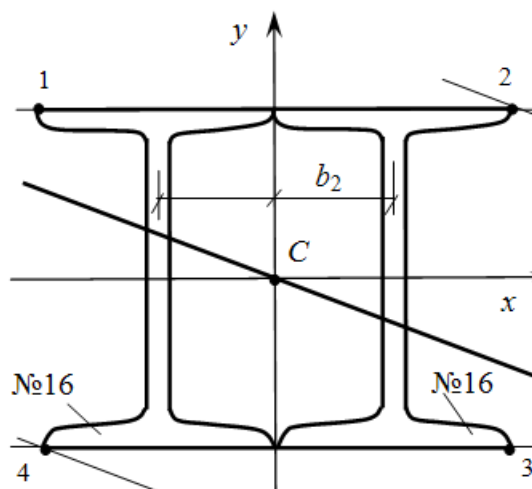


Рис. 16. Побудова поперечного перерізу

Епюра нормальних напружень σ . Для визначення напружень за формулою

$$\sigma = \pm \frac{M_x}{I_x} \cdot y \pm \frac{M_y}{I_y} \cdot x \quad (88)$$

визначимо координати необхідних точок у перерізі (1,2,3,4):
т.1 (- 8,1; 8); т.2 (8,1; 8); т.3 (8,1; -8); т.4 (-8,1; -8).

Будувати епюру будемо для небезпечного перерізу в т.К.

$M_x = 16,2$ кНм, $M_y = 3,3$ кНм.

Визначимо напруження у точках:

Т.1

$$\sigma_1 = \frac{16,2 \cdot 10^{-3}}{1746 \cdot 10^{-8}} \cdot 8 \cdot 10^{-2} + \frac{3,3 \cdot 10^{-3}}{779,9 \cdot 10^{-8}} \cdot (-8,1 \cdot 10^2) = 74,22 - 34,27 = 39,95 \text{ МПа} \quad (89)$$

Т.2 спростимо вираз для σ , розрахувавши:

$$\frac{M_x}{I_x} = \frac{16,2 \cdot 10^{-3}}{1746 \cdot 10^{-8}} = 927,83, \quad \frac{M_y}{I_y} = \frac{3,3 \cdot 10^{-3}}{779,9 \cdot 10^{-8}} = 423,13 \quad (90)$$

$$\sigma_2 = 927,83 \cdot 8 \cdot 10^{-2} + 423,13 \cdot 8,1 \cdot 10^{-2} = 72,22 + 34,27 = 108,49 \text{ МПа}, \quad (91)$$

Т.3

$$\sigma_3 = 927,83 \cdot (-8 \cdot 10^{-2}) + 423,13 \cdot 8,1 \cdot 10^{-2} = -74,22 + 34,27 = -39,95 \text{ МПа}, \quad (92)$$

Т.4

$$\sigma_4 = 927,83 \cdot (-8 \cdot 10^{-2}) + 423,13 \cdot (-8,1 \cdot 10^{-2}) = -72,22 - 34,27 = -108,49 \text{ МПа}. \quad (93)$$

Будуємо епюри напруги в точках по периметру перерізу і загальну епюру напружень σ .

Для цього паралельно нульовій лінії проводимо прямі від найбільш віддалених точок перерізу (точки 2 і 4), перпендикулярно їм наносимо базисну лінію (нульову лінію для загальної епюри напружень σ) і будуємо на ній загальну епюру σ .

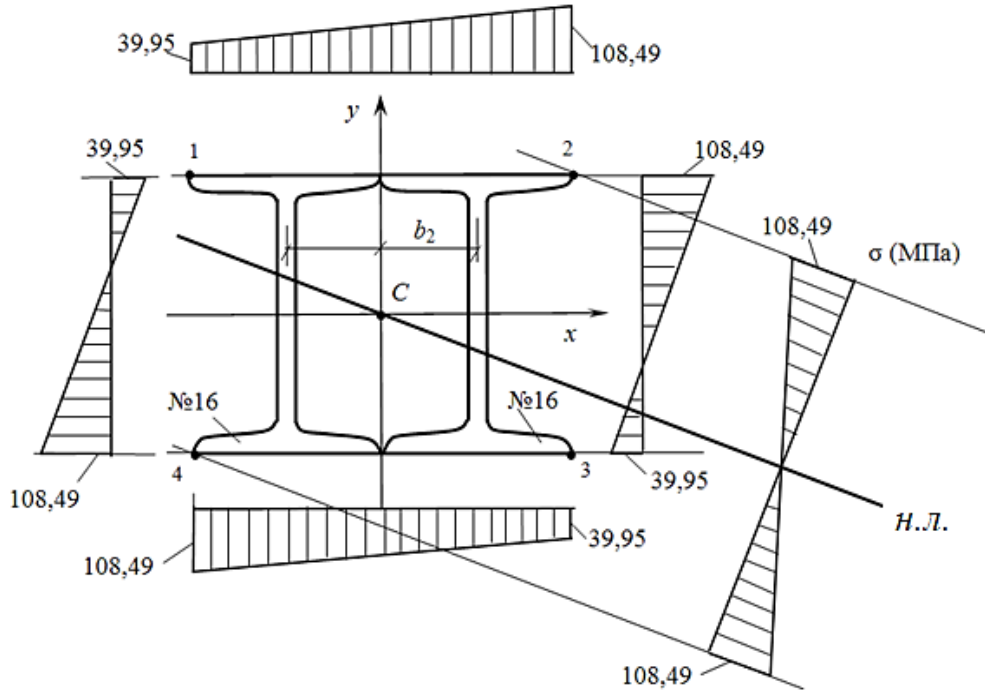


Рис. 17. Побудова епюр напружень

7.2. Приклад 7.2. «Розрахунок при позацентровому стисканні. Побудова ядра перерізу»

Для позацентрово стиснутої колони з крихкого матеріалу побудувати епюри напружень по контуру перерізу, дати оцінку міцності. Сила $F = 100$ кН прикладена у точці 2. Побудувати ядро перерізу. Допустимі напруження на розтяг $[\sigma_p]=3$ МПа, на стиск $[\sigma_c]=30$ МПа.

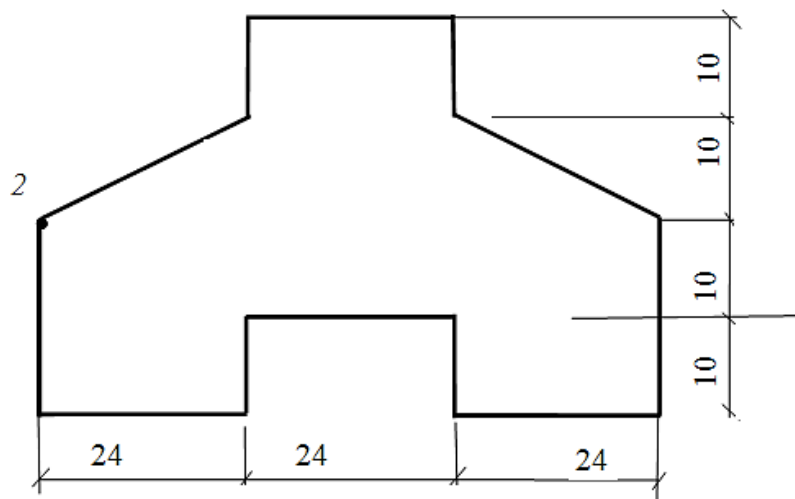


Рис. 18. Схема до задачі

1. Визначимо координати центру ваги перерізу. Переріз викреслимо в масштабі. Розіб'ємо фігуру на 1, 2, 3 – прямокутники, 4, 5 – прямокутні трикутники.

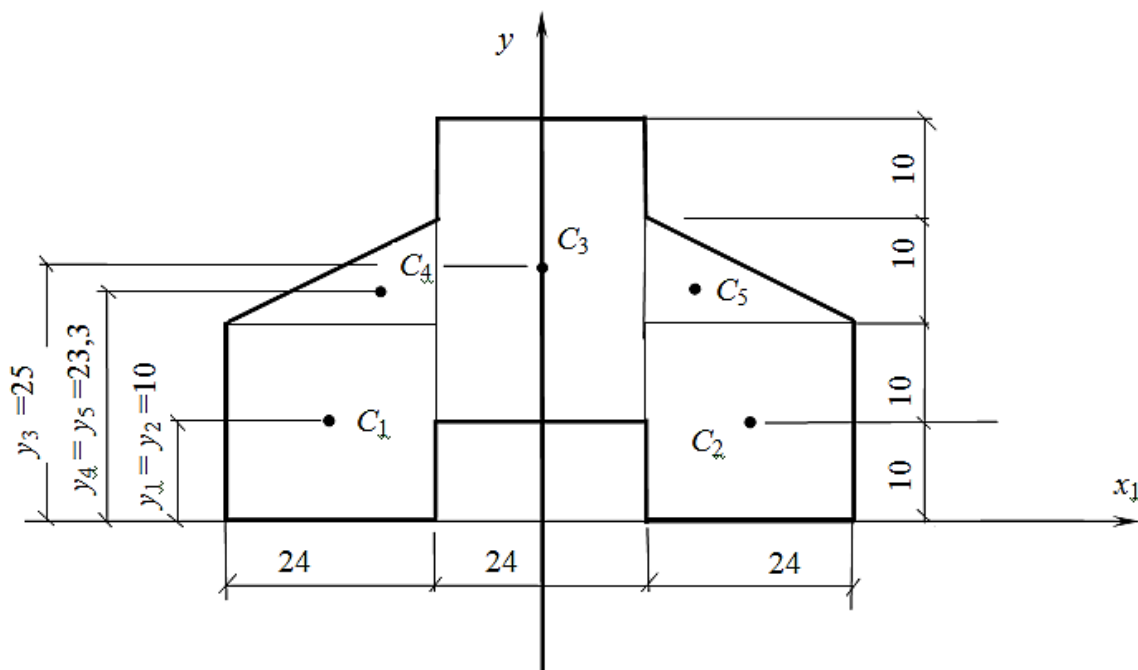


Рис. 19. Переріз до задачі

Вісь y – вісь симетрії, отже $x_C=0$. Вибираємо вісь x_1 за низом перерізу.

Координати « y » фігур:

$$y_1 = y_2 = 10\text{см}; y_3 = 10 + \frac{1}{2}(10 + 10 + 10) = 25\text{см}; y_4 = y_5 = 20 + \frac{1}{3}10 = 23,3\text{см}.$$

(94)

$$\begin{aligned} \text{Площі } A_1 = A_2 &= 24 \cdot 20 = 450\text{см}^2; \\ A_3 &= 24 \cdot 30 = 720\text{см}^2; \\ A_4 = A_5 &= \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 10 = 120\text{см}^2. \end{aligned}$$

(95)

$$y_c = \frac{(A_1 \cdot y_1) \cdot 2 + A_3 \cdot y_3 + (A_4 \cdot y_4) \cdot 2}{A_1 \cdot 2 + A_3 + A_4 \cdot 2} = \frac{480 \cdot 10 \cdot 2 + 720 \cdot 25 + 120 \cdot 23,3 \cdot 2}{480 \cdot 2 + 720 + 120 \cdot 2} = \frac{9600 + 18000 + 5992}{960 + 720 + 240} = \frac{33192}{1920} = 17,3\text{см}.$$

(96)

Проводимо основні центральні осі через центр ваги перерізу.

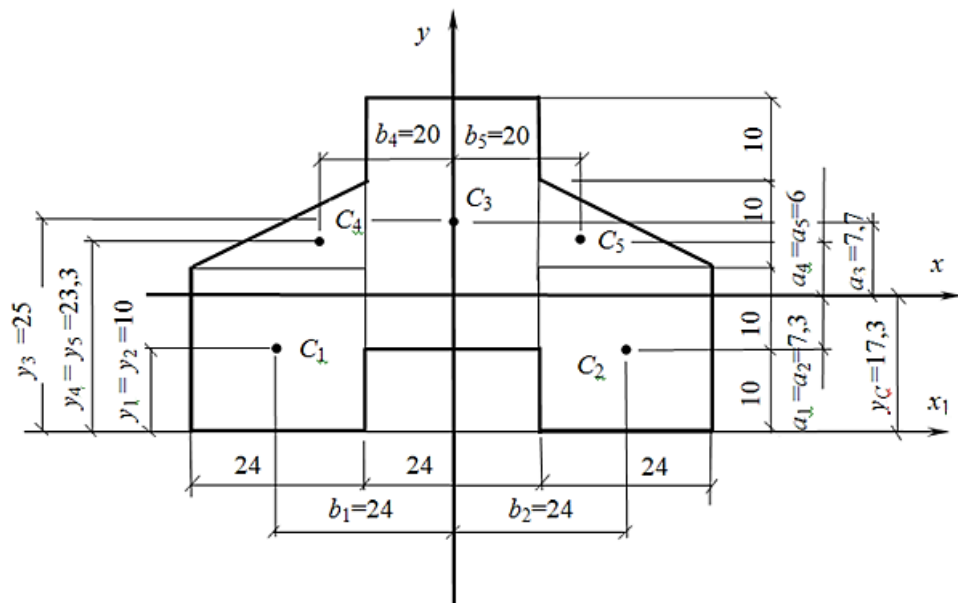


Рис.2.20. Переріз до задачі

2.Визначаємо необхідні геометричні характеристики для розрахунку. Моменти інерції перерізів визначаємо за формулами:

$$I_x = \sum(I_{xi} + A_i a_i^2);$$

(97)

де a – відстань від центра ваги кожної фігури до осі x .

$$I_{xi} = I_{x2} = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{24 \cdot 20^3}{12} = 16000\text{см}^4,$$

$$I_{x3} = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{24 \cdot 30^3}{12} = 54000\text{см}^4,$$

$$I_{x4} = I_{x5} = \frac{b \cdot h^3}{36} = \frac{24 \cdot 10^3}{36} = 666,7 \text{ см}^4,$$

$$a_1 = a_2 = -(y_c - y_1) = -7,3 \text{ см},$$

$$a_3 = y_3 - y_c = 7,7 \text{ см},$$

$$a_4 = a_5 = y_4 - y_c = 6 \text{ см}.$$

$$I_x = (I_{x1} + A_1 \cdot a_1^2) \cdot 2 + I_{x3} + A_3 \cdot a_3^2 + (I_{x4} + A_4 \cdot a_4^2) \cdot 2 \\ = 189820,6 \text{ см}^4$$

Аналогічно:

$$I_y = \sum (I_{yi} + A_i b_i^2) \quad (98)$$

де b - відстань від центру ваги кожної фігури до осі y .

$$I_{y1} = I_{y2} = \frac{hb^3}{12} = 23040 \text{ см}^4,$$

$$I_{y3} = \frac{hb^3}{12} = 34560 \text{ см}^4,$$

$$I_{y4} = I_{y5} = \frac{hb^3}{36} = 3840 \text{ см}^4.$$

$$|b_1| = b_2 = 24 \text{ см}; b_3 = 0; |b_4| = b_5 = \frac{1}{2} \cdot 24 + \frac{1}{3} \cdot 24 = 20 \text{ см}.$$

$$I_y = (I_{y1} + A_1 b_1^2) \cdot 2 + I_{y3} + A_3 b_3^2 + (I_{y4} + A_4 b_4^2) \cdot 2 = 737280 \text{ см}^4.$$

Визначимо квадрати радіусів інерції. Загальна площа перерізу $A = 1920 \text{ см}^2$.

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = 98,86 \text{ см}^2,$$

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} + 384 \text{ см}^2.$$

3. Визначимо положення нульової лінії (лінії, напруження в якій дорівнюють 0) і побудуємо епюри напружень по сторонах заданого перерізу.

Т.2 – точка застосування сили.

Визначимо її координати.

$$x_F = -36 \text{ см}, y_F = 20 - 17,3 = 2,7 \text{ см}.$$

Координати нульової лінії:

$$x_0 = \frac{i_y^2}{x_F} = -\frac{384}{-36} = 10,7 \text{ см},$$

$$y_0 = -\frac{i_x^2}{y_F} = -\frac{98,86}{2,7} = -36,6\text{см.}$$

Проводимо нульову лінію, відсікаючи на головних осях x і y знайдені координати.

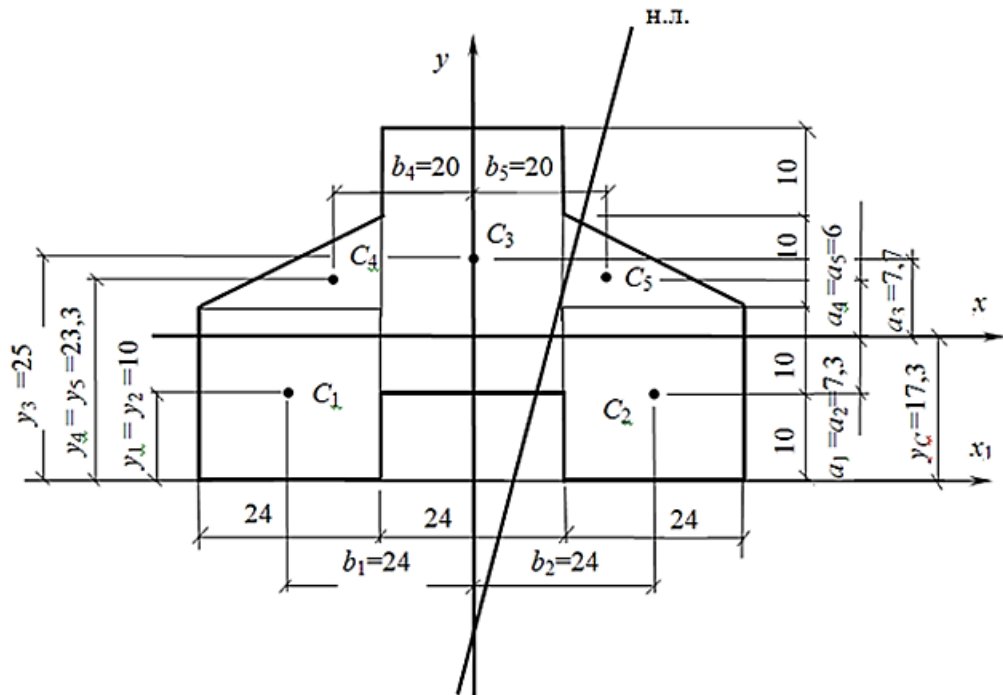


Рис. 21. Побудова нульової лінії

Напруження в точках перерізу визначатимемо за формулою:

$$\sigma = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F \cdot x}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y}{i_x^2} \right) \quad (99)$$

де F – стискаюча сила,

A – площа перерізу,

x_F, y_F – координати точки прикладання сили,

x, y – координати точки, в якій визначається напруга.

Визначимо координати точок по контуру перерізу та напруження в них.

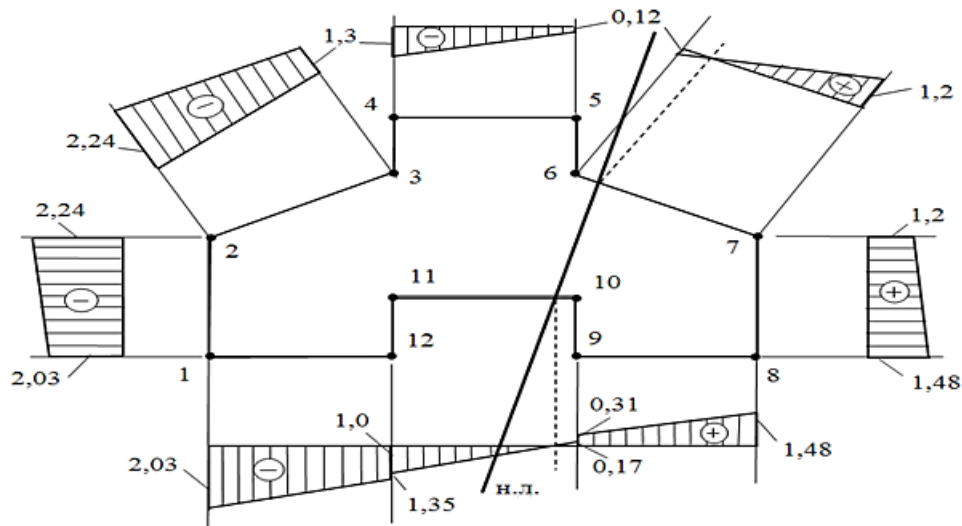


Рис. 22. Координати точок по контуру перерізу та напруження в них.

Т.1(-36; -17,3)

$$\sigma_1 = -\frac{100}{1920} \left(1 + \frac{-36 \cdot (-36)}{384} + \frac{2,7 \cdot (-17,3)}{98,86} \right) = -0,13 \cdot 10$$

$$= -1,3 \text{ МПа};$$

Т.2(-36; 2,7)

$$\sigma_2 = -\frac{100}{1920} \left(1 + \frac{-36 \cdot (-36)}{384} + \frac{2,7 \cdot 2,7}{98,86} \right) = -0,224 \cdot 10$$

$$= -2,24 \text{ МПа};$$

Т.3(-12; 12,7)

$$\sigma_3 = -\frac{100}{1920} \left(1 + \frac{-36 \cdot (-12)}{384} + \frac{2,7 \cdot 12,7}{98,86} \right) = -0,13 \cdot 10$$

$$= -1,3 \text{ МПа};$$

Т.4(-12; 22,7)

$$\sigma_4 = -\frac{100}{1920} \left(1 + \frac{-36 \cdot (-12)}{384} + \frac{2,7 \cdot 22,7}{98,86} \right) = -0,143 \cdot 10$$

$$= -1,43 \text{ МПа};$$

Т.5(12; 22,7)

$$\sigma_5 = -\frac{100}{1920} \left(1 + \frac{-36 \cdot 12}{384} + \frac{2,7 \cdot 12,7}{98,86} \right) = -0,026 \cdot 10$$

$$= -0,26 \text{ МПа};$$

Т.6(12; 12,7)

$$\sigma_6 = -\frac{100}{1920} \left(1 + \frac{-36 \cdot 12}{384} + \frac{2,7 \cdot 12,7}{98,86} \right) = -0,012 \cdot 10$$

$$= -0,12 \text{ МПа};$$

т.7(36; 2,7)

$$\sigma_7 = -\frac{100}{1920} \left(1 + \frac{-36 \cdot 36}{384} + \frac{2,7 \cdot 2,7}{98,86} \right) = 0,12 \cdot 10 = 1,2 \text{ МПа};$$

т.8(36; -17,3)

$$\sigma_8 = -\frac{100}{1920} \left(1 + \frac{-36 \cdot 36}{384} + \frac{2,7 \cdot (-17,3)}{98,86} \right) = 0,148 \cdot 10$$

$$= 1,48 \text{ МПа};$$

т.9(12; -17,3)

$$\sigma_9 = -\frac{100}{1920} \left(1 + \frac{-36 \cdot 12}{384} + \frac{2,7 \cdot (-17,3)}{98,86} \right) = 0,031 \cdot 10$$

$$= 0,31 \text{ МПа};$$

т.10(12; -7,3)

$$\sigma_{10} = -\frac{100}{1920} \left(1 + \frac{-36 \cdot 12}{384} + \frac{2,7 \cdot (-7,3)}{98,86} \right) = 0,017 \cdot 10$$

$$= 0,17 \text{ МПа};$$

т.11(-12; -7,3)

$$\sigma_{11} = -\frac{100}{1920} \left(1 + \frac{-36 \cdot (-12)}{384} + \frac{2,7 \cdot (-7,3)}{98,86} \right) = -0,1 \cdot 10$$

$$= -1 \text{ МПа};$$

т.12(-12; -17,3)

$$\sigma_{12} = -\frac{100}{1920} \left(1 + \frac{-36 \cdot (-12)}{384} + \frac{2,7 \cdot (-17,3)}{98,86} \right) = -0,135 \cdot 10$$

$$= -1,35 \text{ МПа}.$$

Щоб дати висновок про міцність, порівняємо максимальні стискаючі і розтягуювальні напруження з допустимими.

$$|\sigma_{\max \text{ р.}}| = 1,48 \text{ МПа} < [\sigma_{\text{р}}] = 3 \text{ МПа};$$

$$|\sigma_{\max \text{ ст.}}| = 2,24 \text{ МПа} < [\sigma_{\text{ст.}}] = 30 \text{ МПа}.$$

Міцність забезпечена.

4. Побудова ядра перерізу.

Для побудови ядра перерізу слід викреслити переріз у масштабі та провести нульову лінію за її координатами.

Проведемо перерізи по граням фігури (I-I, II-II...VI-VI).

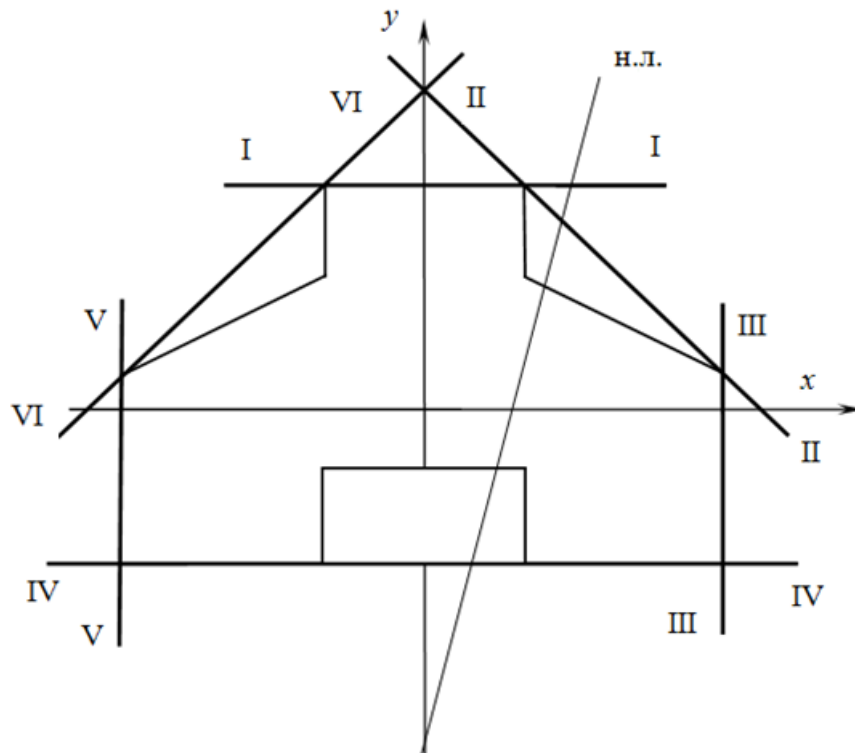


Рис. 23. Побудова ядра перерізу

Нехай переріз I-I є нульовою лінією, тоді координати цієї нульової лінії будуть:

$x_0 = \infty$ (паралельна осі x), $y_0 = 22,7$ см.

Визначаємо координати ядра перерізу за формулами:

$$x = -\frac{i_y^2}{x_0}; y = -\frac{i_x^2}{y_0} \quad (100)$$

Тоді для перерізу I-I:

$$x_1 = 0 \quad y_1 = -\frac{i_x^2}{y_0} = -\frac{98,86}{22,7} = -4,4 \text{ см.}$$

Нехай переріз II-II є нульовою лінією. Для другого перерізу виміряємо відрізки, які переріз II відсікає на осях x та y .

$$x_0 = 39,24 \text{ см, } y_0 = 32,7 \text{ см.}$$

$$\text{Тоді } x_2 = -\frac{i_y^2}{x_0} = -\frac{384}{39,24} = -9,8 \text{ см, } y_2 = -\frac{i_x^2}{y_0} = -\frac{98,86}{32,7} = -3 \text{ см.}$$

Нехай переріз III-III – нульова лінія.

$$x_0 = 36 \text{ см, } y_0 = \infty,$$

$$x_3 = -\frac{384}{36} = -10,7 \text{ см}, y_3 = 0.$$

переріз IV-IV

$$x_0 = \infty, y_0 = -17,3 \text{ см};$$

$$x_4 = 0, y_4 = -\frac{98,86}{-17,3} = 5,7 \text{ см}.$$

переріз V-V

$$x_0 = -36 \text{ см}, y_0 = \infty;$$

$$x_5 = -\frac{384}{-36} = 10,7 \text{ см}, y_5 = 0.$$

переріз VI-VI

$$X_0 = -39,24 \text{ см}, y_0 = 32,7 \text{ см};$$

$$x_6 = -\frac{384}{-39,24} = 9,8 \text{ см}, y_6 = -\frac{98,86}{32,7} = -3 \text{ см}.$$

Будуємо ядро перерізу за отриманими координатами.

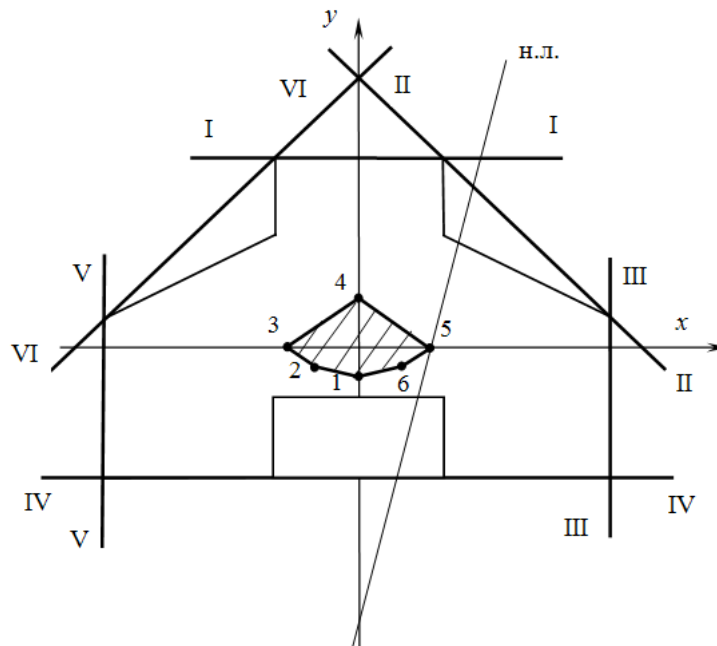


Рис. 24. Побудова ядра перерізу

Нульова лінія і ядро перетину стикаються у т. 5, ядро побудовано правильно (нульова лінія має проходити крізь ядро перерізу, може торкатися точці чи грані).

7.3. Графічно-цифрове пояснення до модуля «Складний опір»

В даному завданні представлено графічно-цифрове пояснення до модуля «Складний опір». Посилання на ресурс наведено нижче. Необхідно відсканувати QR-код, після чого здобувач вищої освіти побачить послідовність розрахунку задачі на складний опір.



Графічно-цифрове пояснення до розрахунку задачі на складний опір

7.4. Завдання для самостійного виконання з теми «Складний опір»

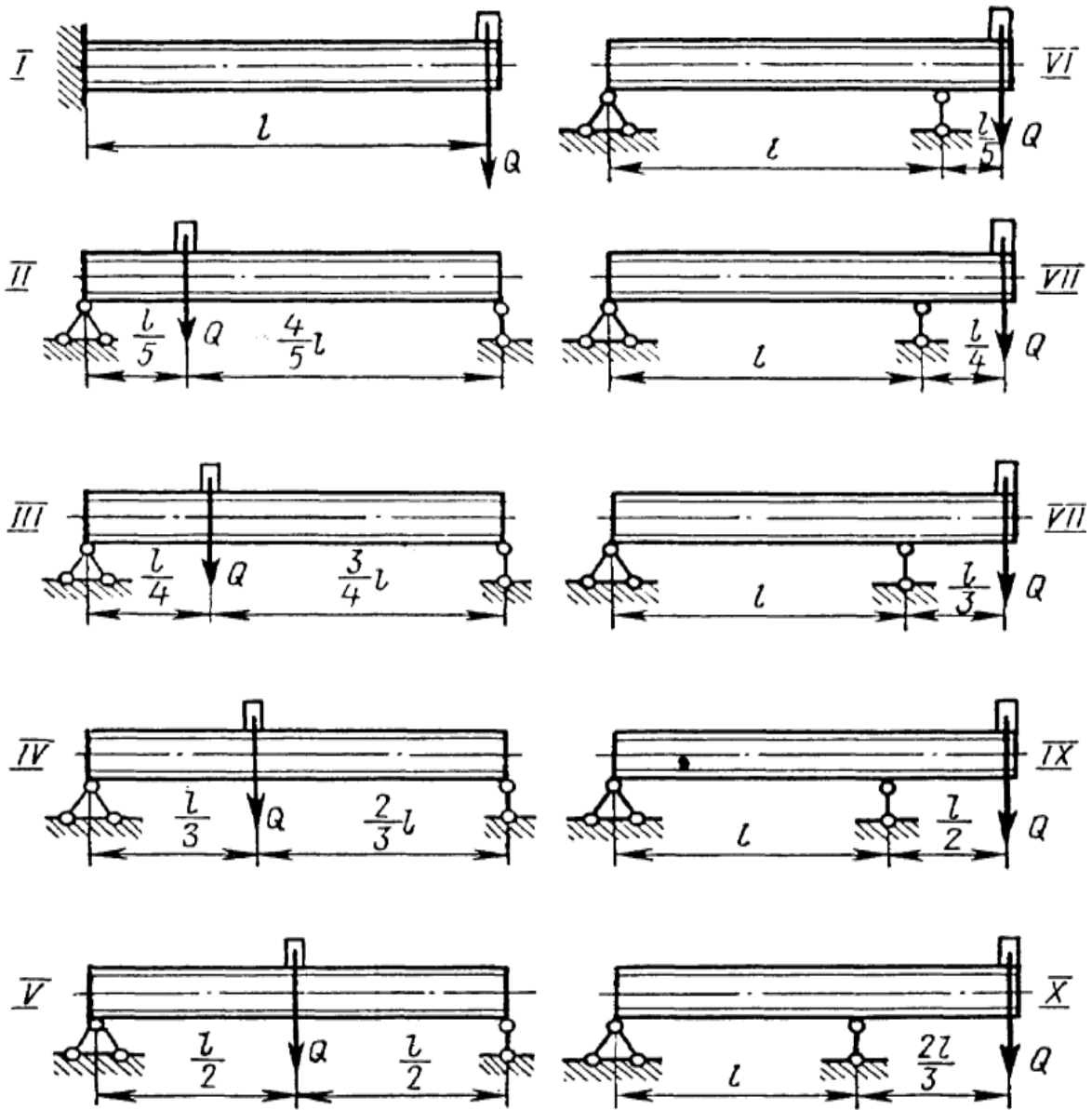
Задача 1.

Дерев'яна балка прямокутного поперечного перерізу навантажена вертикальною силою Q в точці A і горизонтальною силою в точці B , які розташовані на осі балки. Необхідно:

1. побудувати епюри M_x і M_y і встановити положення небезпечного перерізу;
2. підібрати розміри поперечного перерізу h і b за допустимими напруженнями;
3. визначити положення нульової лінії в небезпечному перерізі балки і побудувати для цього перерізу епюру нормальних напружень.

Таблиця 2.4.
Варіанти завдань до задачі 3.2

№ вар.	№ сх.	$[\sigma]$, МПа	Q, кН	L, м	h/b
1	1	6	1	1,1	0,6
2	2	7	2	1,2	0,7
3	3	8	3	1,3	0,8
4	4	9	4	1,4	0,9
5	5	10	5	1,5	1
6	6	11	6	1,6	0,6
7	7	12	7	1,7	0,7
8	8	6	1	1,8	0,8
9	9	7	2	1,9	0,9
10	10	8	3	2	1
11	1	9	4	1,1	0,6
12	2	10	5	1,2	0,7
13	3	11	6	1,3	0,8
14	4	12	7	1,4	0,9
15	5	6	1	1,5	1
16	6	7	2	1,6	0,6
17	7	8	3	1,7	0,7
18	8	9	4	1,8	0,8
19	9	10	5	1,9	0,9
20	10	11	6	2	1
21	1	12	7	1,1	0,6
22	2	6	1	1,2	0,7
23	3	7	2	1,3	0,8
24	4	8	3	1,4	0,9
25	5	9	4	1,5	1
26	6	10	5	1,6	0,6
27	7	11	6	1,7	0,7
28	8	12	7	1,8	0,8
29	9	6	1	1,9	0,9
30	10	7	2	2	1



Задача №8 «Стійкість стиснутих стрижнів»

8.1. Приклад 8.1 «Стійкість стиснутих стрижнів»

Перевіримо стійкість сталеві колони двотаврового перерізу 120а, навантаженої розрахунковою силою $P = 350$ кН (рис. 2.25). Визначимо критичну силу, критичні напруження та найбільшу допустиму величину навантаження з умови стійкості за методом граничних станів. Матеріал колони - сталь марки Ст3 з розрахунковим опором $R = 210$ МПа, $\gamma_c = 1$.

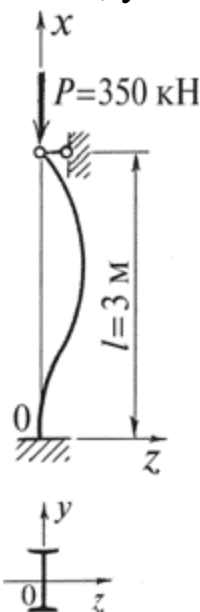


Рис. 25. Схема до задачі «Стійкість стиснутих стрижнів»

Випишемо з сортаменту найменші значення моменту інерції $J = 155$ см⁴, радіуса інерції $i = 2,32$ см і площа перерізу $F = 28,9$ см².

При заданих опорних закріпленнях наведена довжина стрижня дорівнює $L = 0,7 \cdot 300 = 210$ см.

Знаходимо гнучкість стрижня та відповідне значення коефіцієнта поздовжнього згину за додатком 2:

$$\lambda = \frac{l_0}{i_y} = \frac{210}{2,32} = 90; \quad (101)$$

$$\varphi = 0,665.$$

Проводимо перевірку стійкості. Умова стійкості виконується.

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{350}{28,9} = 12,11 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 121,1 \text{ МПа} < \varphi \gamma_c R = 139,6 \text{ МПа} \quad (102)$$

З умови стійкості знаходимо найбільшу допустиму величину розрахункового навантаження:

$$P = \varphi \gamma_c R F = 0,665 \cdot 1,0 \cdot 21 \cdot 28,9 = 403,6 \text{ кН}. \quad (103)$$

Отримане значення гнучкості $\lambda = 90$ задовольняє умові. Тому критичне напруження та критичну силу знаходимо за формулою Ясинського:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda = 310 - 1,14 \cdot 90 = 207,4 \text{ МПа}; \quad (104)$$

$$P_{кр} = \sigma_{кр} \cdot F = 20,74 \cdot 28,9 = 599,4 \text{ кН}. \quad (105)$$

8.2. Приклад 8.2. «Стійкість стиснутих стрижнів»

Підберемо переріз у вигляді рівнобокого кутника, в якому діє розрахункове зусилля $P = 120 \text{ кН}$ (рис. 2.26). Матеріал - сталь марки Ст3, $R = 200 \text{ МПа}$, $\gamma_c = 0,75$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.



Рис. 26. Схема до задачі

При підборі перерізу умову стійкості необхідно записати як:

$$F \geq \frac{P}{\varphi \gamma_c R}. \quad (106)$$

При розрахунку використовують метод послідовних наближень.

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2}. \quad (107)$$

Перше наближення. Приймаємо $\varphi = 0,5$ і знаходимо необхідну площу поперечного перерізу

$$F = \frac{120}{0,5 \cdot 0,75 \cdot 20} = 16,0 \text{ см}^2. \quad (108)$$

За сортаментом приймаємо рівносторонній кутник 110 x 8 з площею $F = 17,2 \text{ см}^2$ та мінімальним радіусом інерції $i_{\min} = 2,18 \text{ см}$. Гнучкість стрижня дорівнює:

$$\lambda = \frac{l_0}{i_{z_0}} = \frac{1 \cdot 235}{2,18} = 107,8. \quad (109)$$

Використовуючи лінійну інтерполяцію:

$$\varphi'_1 = 0,599 - \frac{0,599 - 0,537}{10} (107,8 - 100) = 0,551 > \varphi_1 = 0,5.$$

Друге наближення. Приймаємо:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} = \frac{0,5 + 0,551}{2} = 0,526. \quad (110)$$

Необхідна площа перерізу рівна:

$$F = \frac{120}{0,526 \cdot 15,0} = 15,21 \text{ см}^2. \quad (111)$$

Приймаємо переріз:

$$\text{L}110 \times 7: F = 15,2 \text{ см}^2, i_{z_0} = 2,19 \text{ см}, J_{z_0} = 72,7 \text{ см}^4.$$

$$\lambda = 235 / 2,19 = 107,3, \quad \varphi'_1 = 0,554.$$

Умова стійкості виконується. Визначимо величину похибки.

$$\frac{\varphi_1 - \varphi'_1}{2} \cdot 100\% \approx 5\%. \quad (112)$$

Оскільки похибка вбирається у допустимої величини, то цьому розрахунок можна закінчити.

Наприкінці розрахунку переконаємось у тому, що підібраний перетин задовольняє умову стійкості:

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{120}{15,2} = 7,89 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 78,9 \text{ МПа} < \varphi'_2 \gamma_c K = 83,1 \text{ МПа}. \quad (113)$$

Умова стійкості виконується із невеликим запасом.

Визначимо критичну силу та критичні напруження. Оскільки гнучкість $\lambda = 107,3 > 100$, застосовуємо формулу Ейлера:

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_{z0}}{l_0^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 72,7}{235^2} = 272,6 \text{ кН}; \quad (114)$$

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{P_{\text{кр}}}{F} = \frac{272,6}{15,2} = 17,93 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 179, \text{ МПа}. \quad (115)$$

8.3. Приклад 8.3 «Стійкість стиснутих стрижнів»

Дерев'яна стійка прямокутного поперечного перерізу (рис. 2.27) жорстко закріплена на нижньому кінці. Модуль пружності $E = 10^4$ МПа, розрахунковий опір $R = 13$ МПа. Коефіцієнт умов роботи $\gamma_c = 1,0$. Визначимо критичну силу, критичні напруження та найбільшу допустиму величину розрахункової сили P .

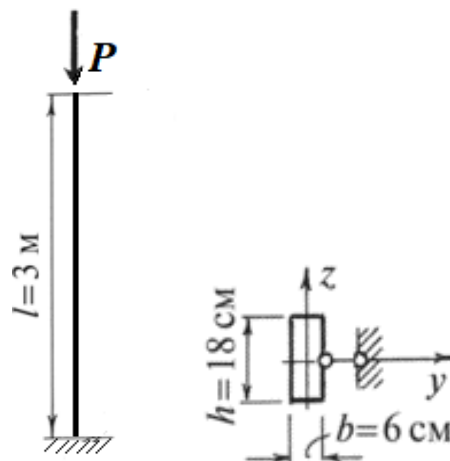


Рис. 27. Схема до задачі

Визначаємо геометричні характеристики поперечного перерізу стійки:

$$F = bh = 6 \cdot 18 = 108 \text{ см}^2; \quad (116)$$

$$J_y = \frac{6 \cdot 18^3}{12} = 2916 \text{ см}^4; \quad J_z = \frac{18 \cdot 6^3}{12} = 324 \text{ см}^4; \quad (117)$$

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}} = 5,196 \text{ см}; \quad i_z = \sqrt{\frac{J_z}{F}} = 1,732 \text{ см}. \quad (118)$$

Визначаємо наведену довжину та гнучкість стійки:

в головній площині Оху:

$$l_0 = 0,7l = 0,7 \cdot 300 = 210 \text{ см}; \quad \lambda = \frac{l_0}{i_z} = \frac{210}{1,732} = 121,2; \quad (119)$$

в головній площині Охz:

$$l_0 = 2l = 2 \cdot 300 = 600 \text{ см}; \quad \lambda = \frac{l_0}{i_y} = \frac{600}{5,196} = 115,5. \quad (120)$$

Таким чином, стійка може втратити стійкість у площині Оху, де гнучкість має більше значення.

Гнучкість $\lambda = 121,2$ більша за граничну гнучкість $\lambda = 70$ для дерева. Тому критичну силу визначаємо за формулою Ейлера:

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_z}{l_0^2} = \frac{\pi^2 \cdot 10^3 \cdot 324}{210^2} = 72,44 \text{ кН}; \quad (121)$$

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{P_{\text{кр}}}{F} = \frac{72,44}{108} = 0,671 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 6,71 \text{ МПа}. \quad (122)$$

Знаходимо коефіцієнт поздовжнього вигину $\varphi = 0,204$. З умови стійкості визначаємо найбільшу допустиму величину розрахункової сили:

$$P = \varphi \gamma_c R F = 0,204 \cdot 1,0 \cdot 1,3 \cdot 108 = 28,64 \text{ кН} \quad (123)$$

8.4. Графічно-цифрове пояснення до модуля «Стійкість стиснутих стрижнів»

В даному завданні представлено графічно-цифрове пояснення до модуля «Стійкість стиснутих стрижнів». Посилання на ресурс наведено нижче. Необхідно відсканувати QR-код, після чого здобувач вищої освіти побачить послідовність розрахунку стійкості стиснутого стрижня.



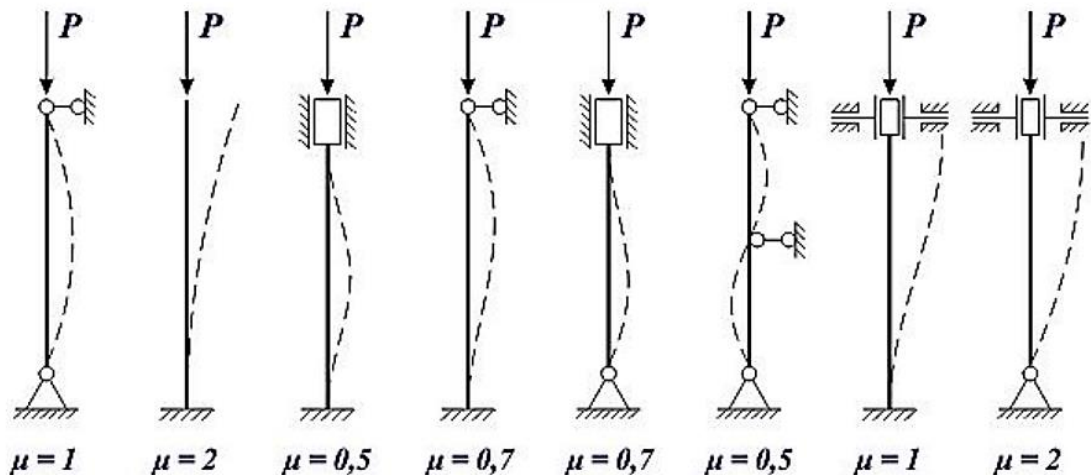
Графічно-цифрове пояснення до розрахунку стійкості стиснутого стрижня.

8.5. Завдання для самостійного виконання з теми «Стійкість стиснутих стрижнів»

Для заданого стрижня необхідно:

1. підібрати номер прокатного профілю, прийнявши для Ст 3 $[\sigma] = 160$ МПа;
2. із умови стійкості визначити відстані між планками для з'єднання профілів.

$$\lambda = \frac{\mu l}{i}$$



Таблиця 5.

Варіанти завдань для самостійного виконання

№ вар.	№ сх.	P, кН	Q, кН/м
1	1	700	5
2	2	650	6
3	3	600	7
4	4	550	8
5	5	500	9
6	6	450	10
7	7	400	5
8	8	350	6
9	1	300	7
10	2	250	8
11	3	700	9
12	4	650	10
13	5	600	5
14	6	550	6
15	7	500	7
16	8	450	8
17	1	400	9
18	2	350	10
19	3	300	5
20	4	250	6
21	5	700	7
22	6	650	8
23	7	600	9
24	8	550	10
25	1	500	5
26	2	450	6
27	3	400	7
28	4	350	8
29	5	300	9
30	6	250	10

9. Тестовий контроль

9.1. Інтерактивний тестовий тренажер «Основні поняття механіки матеріалів і конструкцій»

В даному завданні представлено інтерактивний тестовий тренажер «Основні поняття механіки матеріалів і конструкцій». Посилання на ресурс наведено нижче. Необхідно відсканувати QR-код та пройти інтерактивний тестовий тренажер, після чого здобувач вищої освіти побачить результат.



Інтерактивний тестовий тренажер «Основні поняття механіки матеріалів і конструкцій»

9.2. Інтерактивний тестовий тренажер «Геометричні характеристики плоских перерізів»

В даному завданні представлено інтерактивний тестовий тренажер «Геометричні характеристики плоских перерізів». Посилання на ресурс наведено нижче. Необхідно відсканувати QR-код та пройти інтерактивний тестовий тренажер, після чого здобувач вищої освіти побачить результат.



Інтерактивний тестовий тренажер «Геометричні характеристики плоских перерізів»

9.3. Інтерактивний тестовий тренажер «Центральний розтяг та стиск стрижнів»

В даному завданні представлено інтерактивний тестовий тренажер «Центральний розтяг та стиск стрижнів». Посилання на ресурс наведено нижче. Необхідно відсканувати QR-код та пройти інтерактивний тестовий тренажер, після чого здобувач вищої освіти побачить результат.



Інтерактивний тестовий тренажер «Центральний розтяг та стиск стрижнів»

9.4. Інтерактивний тестовий тренажер «Механічні властивості матеріалів»

В даному завданні представлено інтерактивний тестовий тренажер «Механічні властивості матеріалів». Посилання на ресурс наведено нижче. Необхідно відсканувати QR-код та пройти інтерактивний тестовий тренажер, після чого здобувач вищої освіти побачить результат.



Інтерактивний тестовий тренажер «Механічні властивості матеріалів»

9.5. Інтерактивний тестовий тренажер «Напружений та деформований стан в точці»

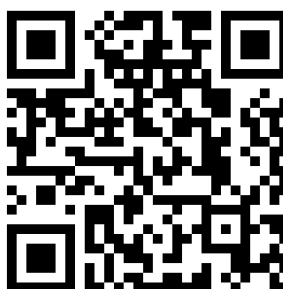
В даному завданні представлено інтерактивний тестовий тренажер «Напружений та деформований стан в точці». Посилання на ресурс наведено нижче. Необхідно відсканувати QR-код та пройти інтерактивний тестовий тренажер, після чого здобувач вищої освіти побачить результат.



Інтерактивний тестовий тренажер «Напружений та деформований стан в точці»

9.6. Інтерактивний тестовий тренажер «Кручення та зсув»

В даному завданні представлено інтерактивний тестовий тренажер «Кручення та зсув». Посилання на ресурс наведено нижче. Необхідно відсканувати QR-код та пройти інтерактивний тестовий тренажер, після чого здобувач вищої освіти побачить результат.



Інтерактивний тестовий тренажер «Кручення та зсув»

9.7. Інтерактивний тестовий тренажер «Згин»

В даному завданні представлено інтерактивний тестовий тренажер «Згин». Посилання на ресурс наведено нижче. Необхідно відсканувати QR-код та пройти інтерактивний тестовий тренажер, після чого здобувач вищої освіти побачить результат.



Інтерактивний тестовий тренажер «Згин»

9.8. Підсумковий інтерактивний тестовий тренажер «Механіка матеріалів і конструкцій. Частина 1»

В даному завданні представлено інтерактивний тестовий тренажер «Механіка матеріалів і конструкцій». Посилання на ресурс наведено нижче. Необхідно відсканувати QR-код та пройти інтерактивний тестовий тренажер, після чого здобувач вищої освіти побачить результат.



Інтерактивний тестовий тренажер «Механіка матеріалів і конструкцій»

9.9. Інтерактивний тестовий тренажер «Згинання-2»

В даному завданні представлено інтерактивний тестовий тренажер «Згинання». Необхідно відсканувати QR-код та пройти інтерактивний тестовий тренажер, після чого здобувач вищої освіти отримає бали за нього в курсі «Механіка матеріалів і конструкцій» на платформі MOODLE.



Інтерактивний тестовий тренажер «Згинання-2»

9.10. Інтерактивний тестовий тренажер «Статично невизначені системи»

В даному завданні представлено інтерактивний тестовий тренажер «Статично невизначені системи». Необхідно відсканувати QR-код та пройти інтерактивний тестовий тренажер, після чого здобувач вищої освіти отримає бали за нього в курсі «Механіка матеріалів і конструкцій» на платформі MOODLE.



Інтерактивний тестовий тренажер «Статично невизначені системи»

9.11. Інтерактивний тестовий тренажер «Складний опір»

В даному завданні представлено інтерактивний тестовий тренажер «Складний опір». Необхідно відсканувати QR-код та пройти інтерактивний тестовий тренажер, після чого здобувач вищої освіти отримає бали за нього в курсі «Механіка матеріалів і конструкцій» на платформі MOODLE.



Інтерактивний тестовий тренажер «Складний опір»

9.12. Інтерактивний тестовий тренажер «Стійкість стиснутих стрижнів»

В даному завданні представлено інтерактивний тестовий тренажер «Стійкість стиснутих стрижнів». Необхідно відсканувати QR-код та пройти інтерактивний тестовий тренажер, після чого здобувач вищої освіти отримає бали за нього в курсі «Механіка матеріалів і конструкцій» на платформі MOODLE.



Інтерактивний тестовий тренажер «Стійкість стиснутих стрижнів»

9.13. Інтерактивний тестовий тренажер «Підсумковий. Частина 2»

В даному завданні представлено інтерактивний тестовий тренажер «Підсумковий». Необхідно відсканувати QR-код та пройти інтерактивний тестовий тренажер, після чого здобувач вищої освіти отримає бали за нього в курсі «Механіка матеріалів і конструкцій» на платформі MOODLE.



*Інтерактивний тестовий тренажер
«Підсумковий.
Частина 2»*

10.1. Перелік підсумкових питань курсу. Частина 1.

1. Поняття чистого зсуву. Закон Гука при чистому зсуві.
2. Статично невизначені задачі при розтяганні і стисканні. Вплив неточності виготовлення елементів і температури на величину зусиль в них.
3. Четверта теорія міцності. Теорія міцності граничних напружень стану (теорія Мора).
4. Практичний розрахунок з'єднань, які працюють на зсув: а) розрахунок заклепочних та болтових з'єднань; б) розрахунок зварних з'єднань.
5. Закон Гука при плоскому та об'ємному напруженому стані.
6. Поздовжні сили і їх епюри при центральному розтяганні (стисканні). Диференціальні залежності між поздовжніми силами і зовнішнім навантаженням при центральному розтяганні (стисканні).
7. Випробування матеріалів на стискання.
8. Напруження в перерізах, нахилених до осі стержня при центральному розтяганні (стисканні).
9. Види навантажень і схематизація елементів конструкцій. Основні об'єкти, які вивчаються в курсі механіки матеріалів і конструкцій.
10. Задачі науки «Механіка матеріалів і конструкцій» та її значення для інженерної освіти. Зв'язок курсу механіки матеріалів і конструкцій з загальноосвітніми, загально інженерними та спеціальними дисциплінами. Короткі історичні відомості.
11. Напруження і деформації при центральному розтяганні (стисканні). Закон Гука. Переміщення перерізів бруса при центральному розтяганні (стисканні). Епюри переміщень.

12. Екстремальні дотичні напруження при плоскому напруженому стані. Коло Мора при плоскому напруженому стані.

13. Екстремальні дотичні напруження при плоскому напруженому стані. Коло Мора при плоскому напруженому стані.

14. Види найпростіших деформацій стержня. Внутрішні зусилля стержнів та їх визначення. Метод перерізів. Поняття про напруження і деформації в точці.

15. Напруження в нахилених площадках при плоскому напруженому стані. Головні напруження та головні площадки в плоскому напруженому стані.

16. Плоске згинання. Основні типи опорних зв'язків. Визначення опорних реакцій. Внутрішні сили при згинанні. Диференціальні залежності між M_x , Q_y і q . Правила спрощеної побудови епюр M_x і Q_y .

17. Основні властивості твердого деформованого тіла. Основні припущення і принципи в механіці матеріалів і конструкцій.

18. Головні деформації. Аналогія між залежностями для напруженого та деформованого стану в точці.

19. Загальні поняття теорії міцності. Перша, друга, третя теорії міцності.

20. Залежності між модулями пружності при розтяганні та при зсуві. Потенціальна енергія при зсуві.

21. Випробування матеріалів на розтягання. Діаграма розтягання.

22. Визначення крутних моментів та побудова їх епюр. Напруження та деформації при крученні стержня, який має круглий поперечний переріз.

23. Поняття напруженого стану в точці та його види. Закон парності дотичних напружень при плоскому напруженому стані.

24. Дійсна діаграма розтягання.

25. Зміна об'єму матеріалу при деформації. Потенціальна енергія при об'ємному напруженому стані.

26. Дотичні напруження при згинанні. Формула Жуковського. Епюри дотичних напружень.

27. Головні осі і головні моменти інерції. Радіус інерції. Еліпс інерції та його властивості.

28. Методи розрахунку деталей машин та елементів конструкцій:

- за руйнуючим навантаженням;

- за допустимим напруженням.

29. Момент інерції відносно паралельних осей. Залежність між моментами інерції при повороті осей.

30. Геометричні характеристики плоских перерізів. Основні поняття. Моменти інерції найпростіших фігур.

10.2. Перелік підсумкових питань курсу. Частина 2.

1. Визначення переміщень балок при згині.

2. Диференціальне рівняння зігнутої осі балки.

3. Визначення прогинів та кутів повороту шляхом його інтегрування.

4. Перевірка жорсткості балки при згині.

5. Метод початкових параметрів.

6. Розрахунок балок на жорсткість.

7. Застосування принципу можливих переміщень для пружних систем.

8. Формула Мора для визначення переміщень.

9. Обчислення інтеграла Мора за способом Верещагіна.

10. Основні поняття та визначення статично-невизначених систем.

11. Канонічні рівняння методу сил.
12. Етапи розрахунку статично невизначених систем.
13. Плоскі статично невизначені рами. Загальні поняття.
14. Приклад розрахунку плоских статично невизначених рам.
15. Розкриття статичної невизначеності багатопрогинні нерозрізних балок за допомогою рівнянь трьох моментів.
16. Визначення опорних реакцій у багатопрогинних нерозрізних балках.
17. Етапи розрахунку багатопрогинних нерозрізних балок.
18. Загальні поняття про складний опір.
19. Поняття косоного згину.
20. Одночасна дія згину і поздовжньої сили.
21. Згин з крученням.
22. Рівняння нульової лінії.
23. Визначення ядра перерізу.
24. Побудова ядра перерізу для різних видів поперечного перерізу.
25. Розрахунок на міцність та жорсткість при позацентровому стиску і косому згині.
26. Кривий брус: загальні поняття. Побудова епюр внутрішніх зусиль.
27. Центральний розтяг-стиск кривого бруса.
28. Чистий згин кривого бруса.
29. Визначення положення нульової лінії при чистому згині кривого бруса.
30. Розрахунок гака крана.
31. Стійкість стиснутих стрижнів: загальні поняття.
32. Формула Ейлера для визначення критичної сили.
33. Вплив умов закріплення кінців стрижня на величину критичної сили.
34. Границі застосування формули Ейлера. Формула Ясинського.
35. Практичний розрахунок стиснутих стрижнів на стійкість.
36. Розрахунок позацентрово стиснутого гнучкого стрижня.

37. Практичне визначення напружень при позацентровому стиску гнучкого стрижня.
38. Загальні поняття про поздовжньо-поперечний згин. Точне визначення прогинів.
39. Наближений спосіб визначення прогинів при поздовжньо-поперечному згині.
40. Напруження при поздовжньо-поперечному згині.
41. Динамічне навантаження: загальні поняття.
42. Врахування сил інерції при розрахунку троса.
43. Розрахунок на удар.
44. Поняття про хвильову теорію удару.
45. Поняття про руйнування від втоми матеріалу.
46. Види циклів повторно змінних напружень.
47. Поняття про границю втоми.
48. Діаграма граничних амплітуд.
49. Фактори, що впливають на величину границі втоми.
50. Розрахунок на міцність при повторно змінних напруженнях.

Додаток

Сортамент прокатної сталі

Кутники рівносторонні (за ГОСТ 8509-86)

Позначення:

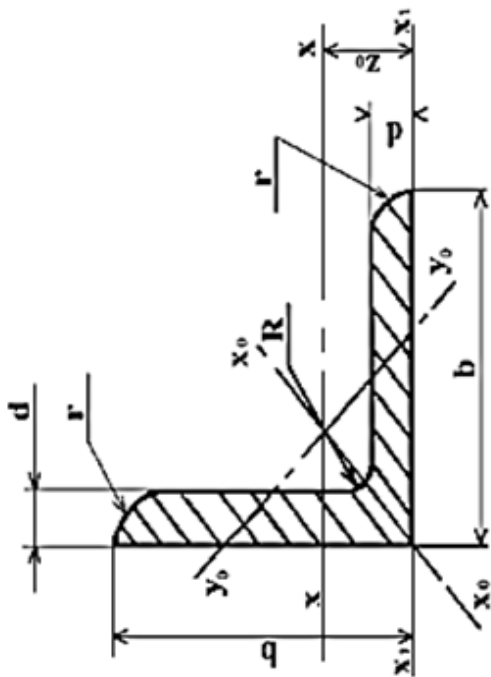
b - ширина полиці;

d - товщина полиці;

J - момент інерції;

i - радіус інерції;

Z_0 - відстань від центра ваги до зовнішньої грані полиці



Номер профілю	Розміри, мм		Площа перерізу F, см ²	J_x , см ⁴	i_x , см	$J_{x_{0max}}$, см ⁴	$i_{x_{0max}}$, см	$J_{y_{0min}}$, см ⁴	$i_{y_{0min}}$, см	J_{x1} , см ⁴	Z_0 , см	Маса 1М, кг
	b	d										
5	50	3	2,96	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	12,4	1,33	2,32
5,6	56	4	3,89	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	16,6	1,38	3,05
5,6	56	5	4,80	11,20	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	20,9	1,42	3,77
6,3	63	4	4,38	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	23,3	1,52	3,44
6,3	63	5	5,41	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	29,2	1,57	4,25
6,5	65	4	4,96	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	33,1	1,69	3,90
6,5	65	5	6,13	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	41,5	1,74	4,81
6,5	65	6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,20	1,24	50,0	1,78	5,72
6,5	65	6	7,52	29,85	1,99	47,38	2,51	12,32	1,28	17,53	1,83	5,91
6,5	65	6	9,84	38,13	1,97	60,42	1,27	15,58	2,48	28,29	1,90	7,73

Номер профілю	Розміри, мм		Площа перерізу F, см ²	J_x , см ⁴	i_x , см	$J_{x_{max}}$ см ⁴	$i_{x_{max}}$ см	$J_{y_{min}}$ см ⁴	$i_{y_{min}}$ см	J_{x1} см ⁴	Z_0 , см	Маса 1м, кг
	b	d										
7	70	4,5	6,20	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88	4,87
		5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90	5,38
		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94	6,39
		7	9,42	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99	7,39
		8	10,70	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02	8,37
7,5	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02	5,80
		6	8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06	6,89
		7	10,1	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10	7,96
		8	11,5	59,8	2,28	94,6	2,87	24,8	1,47	113	2,15	9,02
		9	12,8	66,1	2,27	105	2,86	27,5	1,46	127	2,18	10,10
8	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17	6,78
		6	9,38	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102	2,19	7,36
		7	10,8	65,3	2,45	104	3,09	27,0	1,58	119	2,23	8,51
		8	12,3	73,4	2,34	116	3,08	30,3	1,57	137	2,27	9,65
		6	10,6	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	145	2,43	8,33
9	90	7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	169	2,47	9,64
		8	13,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	194	2,51	10,9
		9	15,6	118	2,75	186	3,96	48,6	1,77	219	2,55	12,2

Номер профілю	Розміри, мм		Площа перерізу	$J_x, \text{см}^4$	$i_x, \text{см}$	$J_{x0 \max}, \text{см}^4$	$i_{x0 \max}, \text{см}$	$J_{y0 \min}, \text{см}^4$	$i_{y0 \min}, \text{см}$	$J_{x1}, \text{см}$	$Z_0, \text{см}$	Маса $l_m, \text{кг}$	
	b	d											
10	100	6,5	12,8	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	214	2,68	10,1	
		7	13,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	231	2,71	10,8	
		8	15,6	147	3,07	233	3,87	60,9	60,9	1,98	265	2,75	12,2
		10	19,2	179	2,05	284	3,84	74,1	74,1	1,96	333	2,83	15,1
		12	22,8	209	3,03	331	3,81	86,9	86,9	1,95	402	2,91	17,9
		14	26,3	237	3,00	375	3,78	99,3	99,3	1,94	472	2,99	20,6
11	110	16	29,7	264	2,98	416	3,74	112	1,94	542	3,06	23,3	
		7	15,7	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	308	2,96	11,9	
		8	17,2	198	3,39	315	4,28	81,8	81,8	2,18	353	3,00	13,5
		8	19,7	294	3,37	467	4,87	122	122	2,49	516	3,36	15,5
		9	22,0	327	3,86	520	4,86	135	135	2,48	582	3,40	17,3
		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	149	2,47	649	3,45	19,1
12,5	125	12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53	22,7	
		14	33,4	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61	26,2	
		16	37,8	539	3,78	853	4,75	224	224	2,44	1051	3,68	29,6
		9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	192	2,79	818	3,78	19,4
		10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	211	2,78	911	3,82	21,5
		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	248	2,76	1097	3,90	25,5
14	140	10	31,4	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30	24,7	
		11	34,4	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35	27,0	
		12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	376	3,17	1633	4,39	29,4
		14	43,3	1046	4,92	1662	6,20	431	431	3,16	1911	4,47	34,0
		16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	485	3,14	2191	4,55	38,5
		18	54,8	1299	4,87	2061	6,13	537	537	3,13	2472	4,63	43,0
16	160	20	60,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70	47,4	

Номер профілю	Розміри, мм		Площа перерізу F , см^2	J_x , см^4	i_x , см	$J_{x_{\text{о max}}}$, см^4	$i_{x_{\text{о max}}}$, см	$J_{y_{\text{о min}}}$, см^4	$i_{y_{\text{о min}}}$, см	J_{x_1} , см^4	Z_0 , см	Маса 1м , кг
	b	d										
18	180	11	38,8	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85	30,5
		12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89	33,1
20	200	12	47,1	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37	37,0
		13	50,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42	39,9
		14	54,6	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46	42,8
		16	62,0	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54	48,7
		20	76,5	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70	60,1
22	220	25	94,3	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89	74,0
		330	111,5	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07	87,6
		14	60,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93	47,4
25	250	16	68,6	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,02	53,8
		16	78,4	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75	61,5
		18	87,7	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83	68,9
		20	97,0	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91	76,1
		22	106,1	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,00	83,3
25	250	25	119,7	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11	94,0
		28	133,1	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23	104,5
		30	142,0	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	14753	7,31	111,4

Кутники верівнобокі (за ГОСТ 8510-86)

Позначення:

B — ширина більшої полиці;

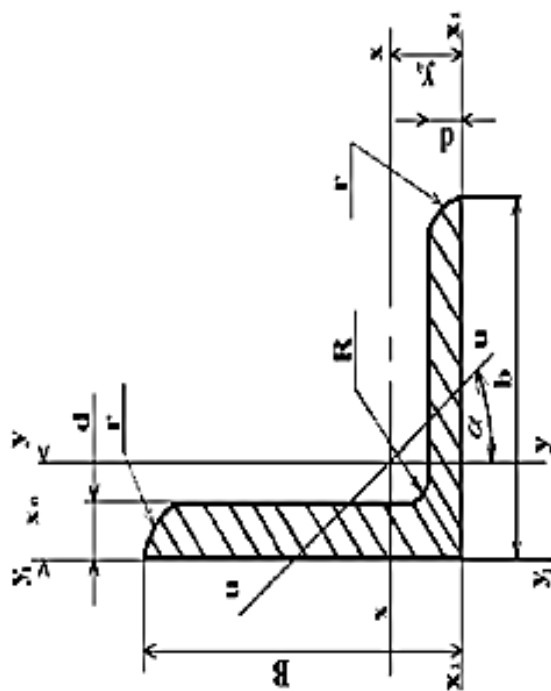
b — ширина меншої полиці;

d — товщина полиці;

J — момент інерції;

i — радіус інерції;

x_0, y_0 - відстань від центра ваги до зовнішніх граней полиць



Номер про- фильо	Розміри, мм		Пло- ща $F, \text{см}^2$	$J_{x_1}, \text{см}^4$	$i_{x_1}, \text{см}$	$J_{y_1}, \text{см}^4$	$i_{y_1}, \text{см}$	$J_{U_{\min}}, \text{см}^4$	$i_{U_{\min}}, \text{см}$	Кут нахил $u, \text{tg} \alpha$ у осі	$J_{X_1}, \text{см}^4$	$J_{Y_1}, \text{см}^4$	$x_0, \text{см}$	$y_0, \text{см}$	Маса $1\text{м}, \text{кг}$
	B	b													
5,6/3, 6	6	6	3,58	11,4	1,78	3,7	1,02	2,19	0,78	0,406	23,2	6,25	0,84	1,82	2,81
			4,41	13,8	1,77	4,48	1,01	2,66	0,78	0,404	29,2	7,91	0,88	1,86	3,46
6,3/4	63	40	4,04	16,3	2,01	5,16	1,13	3,07	0,87	0,397	33,0	8,51	0,91	2,03	3,17
			4,98	19,9	2,00	6,26	1,12	3,72	0,86	0,396	41,4	10,8	0,95	2,08	3,91
			5,90	23,3	1,99	7,28	1,11	4,36	0,86	0,393	49,9	13,1	0,99	2,12	4,63
7/4,5	70	45	7,68	29,6	1,96	9,15	1,09	5,58	0,85	0,386	66,9	17,9	1,07	2,20	6,03
7,5/5	75	50	5,59	27,8	2,23	9,05	1,27	5,34	0,98	0,406	56,7	15,2	1,05	2,28	4,39
			6,11	34,8	2,39	12,5	1,43	7,24	1,09	0,436	69,7	20,8	1,17	2,39	4,79
7,5/5	75	50	7,25	40,9	2,38	14,6	1,42	8,48	1,08	0,435	83,9	25,2	1,21	2,44	5,69
			9,47	52,4	2,35	18,5	1,40	10,9	1,07	0,430	112	34,2	1,29	2,52	7,43

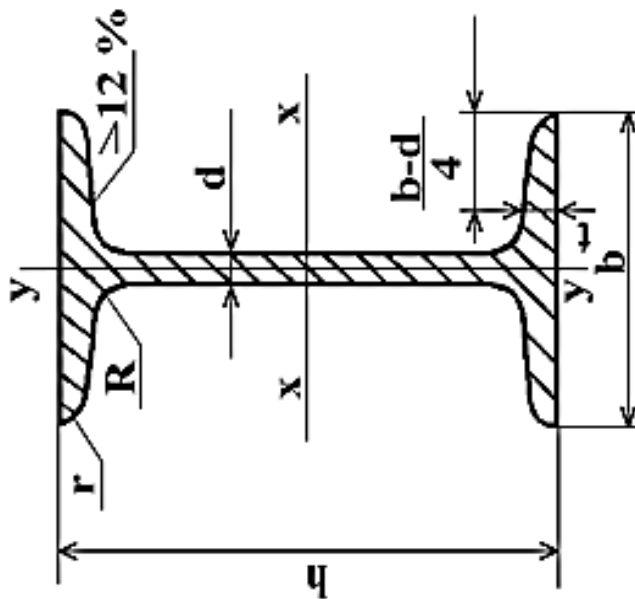
Номер про-філю	Розміри, мм			Площа $F, \text{см}^2$	$J_x, \text{см}^4$	$i_x, \text{см}$	$J_y, \text{см}^4$	$i_y, \text{см}$	$J_{U \min}, \text{см}^4$	$i_{U \min}, \text{см}$	Кут нахил у осі $u, \text{tg} \alpha$	$J_{x_1}, \text{см}^4$	$J_{y_1}, \text{см}^4$	$x_0, \text{см}$	$y_0, \text{см}$	Маса $1\text{м}, \text{кг}$
	B	b	d													
8/5	80	50	5	6,36	41,6	2,56	12,7	1,41	7,58	1,09	0,387	84,6	20,8	1,13	2,60	4,99
			6	7,55	49,0	2,55	14,8	1,40	8,88	1,08	0,386	102	25,2	1,17	2,65	5,92
9/5,6	90	56	5,5	7,86	65,3	2,88	19,7	1,58	11,8	1,22	0,384	132	32,2	1,26	2,92	6,17
			6	8,54	70,6	2,88	21,2	1,58	12,7	1,22	0,384	145	35,2	1,28	2,95	6,70
			8	11,18	90,9	2,85	27,1	1,56	16,3	1,21	0,380	194	47,8	1,36	3,04	8,77
10/ 6,3	100	63	6	9,59	98,3	3,2	30,6	1,79	18,2	1,38	0,393	198	49,9	1,42	3,23	7,53
			7	11,1	113	3,19	35,0	1,78	20,8	1,37	0,392	232	58,7	1,46	3,28	8,70
			8	12,6	127	3,18	39,2	1,77	23,4	1,36	0,391	266	67,6	1,50	3,32	9,87
			10	15,5	154	3,15	47,1	1,75	28,3	1,35	0,387	333	85,8	1,58	3,40	12,1
11/7	110	70	6,5	11,4	142	3,53	45,6	2,00	26,9	1,53	0,402	285	74,3	1,58	3,55	8,98
			8	13,9	172	3,51	54,6	1,98	32,3	1,52	0,400	353	92,3	1,64	3,61	10,9
			7	14,1	227	4,01	73,7	2,29	43,4	1,76	0,407	452	119	1,80	4,01	11,0
12,5/ 8	125	80	8	16,0	256	4,00	83,0	2,28	48,8	1,75	0,406	518	137	1,84	4,05	12,5
			10	19,7	312	3,98	100	2,26	59,3	1,74	0,404	649	173	1,92	4,14	15,5
			12	23,4	365	3,95	117	2,24	69,5	1,72	0,400	781	210	2,00	4,22	18,3
14/9	140	90	8	18,0	364	4,49	120	2,58	70,3	1,98	0,411	727	104	2,03	4,49	14,1
			10	22,2	444	4,47	146	2,56	85,5	1,96	0,409	911	245	2,12	4,58	17,5
16/10	60	100	9	22,9	606	5,15	186	2,85	110	2,20	0,391	1221	300	2,23	5,19	18,0
			10	25,3	667	5,13	204	2,84	121	2,19	0,390	1359	335	2,28	5,23	19,8
			12	30,0	784	5,11	239	2,82	142	2,18	0,388	1634	405	2,36	5,32	23,6
			14	34,7	897	5,08	272	2,80	162	2,16	0,385	1910	477	2,43	5,40	27,3

Номер про-філю	Розміри, мм			Площа F , см ²	J_x , см ⁴	i_x , см	J_y , см ⁴	i_y , см	$J_{U^{min}}$ см ⁴	$i_{u^{min}}$ см	Кут нахил у осі u , $tg\alpha$	J_{X_1} см ⁴	J_{Y_1} см ⁴	x_0 см	y_0 см	Маса M , кг	
	B	b	d														
18/11	180	110	10	18,3	952	5,80	276	3,12	165	2,42	0,375	1933	444	2,44	5,88	22,2	
			12	33,7	1123	5,77	324	3,10	194	2,40	0,374	2342	537	2,52	5,97	26,4	
20/ 12,5	200	125	11	34,9	1449	6,45	446	3,58	264	2,75	0,392	2920	718	2,79	6,50	27,4	
			12	37,9	1568	6,43	482	3,57	285	2,74	0,392	3189	786	2,83	6,54	29,7	
			14	43,9	1801	6,41	551	3,59	327	3,59	327	2,73	3726	922	2,91	6,62	34,4
			16	49,8	2026	6,38	617	3,52	367	3,52	367	2,72	4264	1061	2,99	6,71	39,1
25/16	250	160	12	48,3	3147	8,07	1032	4,62	604	3,54	0,410	6212	1634	3,53	7,97	37,9	
			16	63,6	4091	8,02	1333	4,58	781	3,50	0,408	8308	2200	3,69	8,14	49,9	
			18	71,1	4545	7,99	1475	4,56	896	3,49	0,407	9358	2487	3,77	8,23	55,8	
			20	78,5	4987	7,97	1613	4,53	949	3,48	0,405	10410	2776	3,85	8,31	61,7	

Балки двогаврові (за ГОСТ 8239-89)

Позначення:

- h – висота балки
- b – ширина полиці
- d – товщина стінки
- t – середня товщина полиці
- J – момент інерції
- W – момент опору
- i – радіус інерції
- S – статичний момент площі



Номер профілю	Розміри, мм				Площа F , см ²	J_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	S_x , см ³	J_x , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см	Маса 1м, кг
	h	b	d	t									
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22	9,46
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38	11,5
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55	13,7
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70	15,9
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88	18,4
18 ^a	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12	19,9
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07	21,0
20 ^a	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32	22,7

Номер профілю	Розміри, мм				Площа $F, \text{ см}^2$	$J_x, \text{ см}^4$	$W_x, \text{ см}^3$	$i_x, \text{ см}$	$S_x, \text{ см}^3$	$J_x, \text{ см}^4$	$W_x, \text{ см}^3$	$i_y, \text{ см}$	Маса $1\text{м}, \text{ кг}$
	h	b	d	t									
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27	24,0
22 ^a	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50	25,8
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37	27,3
24 ^a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63	29,4
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54	31,5
27 ^a	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80	33,9
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69	36,5
30 ^a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95	39,2
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79	42,2
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89	48,6
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03	57,0
45	450	160	9,0	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09	66,5
50	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23	78,5
55	550	180	11	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39	92,6
60	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54	108

Швелери (за ГОСТ 8420-89)

Позначення:

h – висота балки

b – ширина полиці

d – товщина стінки

t – середня товщина полиці

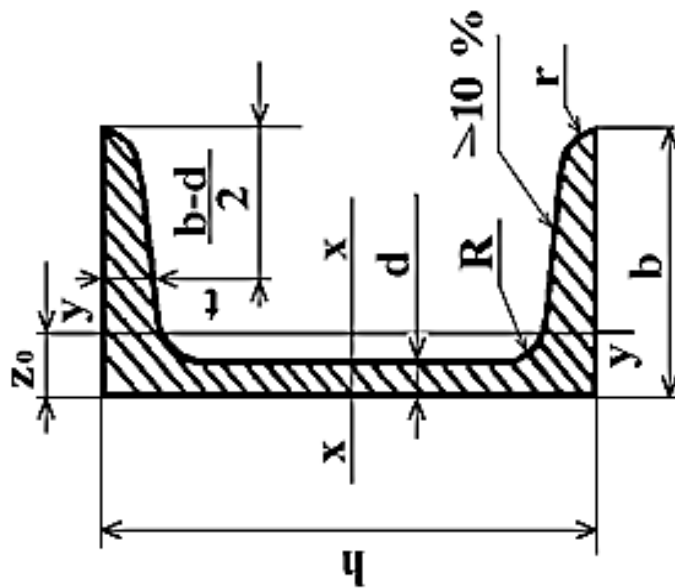
J – момент інерції

W – момент опору

i – радіус інерції

S – статичний момент площі

Z_0 – відстань від осі y до зовнішньої грані стінки



Номер профілю	Розміри, мм				Площа F , см ²	J_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	S_x , см ³	J_x , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см	Z_0 , см	Маса $1M$, кг
	h	b	d	t										
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16	4,84
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,0	8,7	3,68	1,08	1,24	5,90
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31	7,05
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44	8,59
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54	10,4
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67	12,3

Номер профілю	Розміри, мм				Площа F, см ²	J_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	S_x , см ³	J_x , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см	Z_0 , см	Маса 1м, кг
	h	b	d	t										
14a	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87	13,3
16	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,6	13,8	1,87	1,80	14,2
16a	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00	15,3
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94	16,3
18a	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13	17,4
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07	18,4
20a	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28	19,8
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21	21,0
22a	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46	22,6
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42	24,0
24a	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67	25,8
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47	27,7
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52	31,8
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59	36,5
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68	41,9
40	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75	48,3

Додаток 2

Стійкість стиснутих стрижнів. Коефіцієнти поздовжнього згину.

Гнучкість X	Коефіцієнти φ для сталі з розрахунковим опором R_y , МПа							Чавун	Дерево
	200	240	280	320	360	400	440	СЧ	(сосна)
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10	0,988	0,987	0,985	0,984	0,983	0,982	0,981	0,970	0,992
20	0,967	0,962	0,959	0,955	0,952	0,949	0,946	0,910	0,968
30	0,939	0,931	0,924	0,917	0,911	0,905	0,900	0,810	0,928
40	0,906	0,894	0,883	0,873	0,863	0,854	0,846	0,690	0,872
50	0,869	0,852	0,836	0,822	0,809	0,796	0,785	0,570	0,800
60	0,827	0,805	0,785	0,766	0,749	0,721	0,696	0,440	0,712
70	0,782	0,754	0,724	0,687	0,654	0,623	0,595	0,340	0,612
80	0,734	0,686	0,641	0,602	0,566	0,532	0,501	0,260	0,469
90	0,665	0,612	0,565	0,522	0,483	0,447	0,413	0,200	0,370
100	0,599	0,542	0,493	0,448	0,408	0,369	0,335	0,160	0,300
110	0,537	0,478	0,427	0,381	0,338	0,306	0,280	—	0,248
120	0,479	0,419	0,366	0,321	0,287	0,260	0,237	—	0,208
130	0,425	0,364	0,313	0,276	0,247	0,223	0,204	—	0,178
140	0,376	0,315	0,272	0,240	0,215	0,195	0,178	—	0,153
150	0,328	0,276	0,239	0,211	0,189	0,171	0,157	—	0,133
160	0,290	0,244	0,212	0,187	0,167	0,152	0,139	—	0,117
170	0,259	0,218	0,189	0,167	0,150	0,136	0,125	—	0,104
180	0,233	0,196	0,170	0,150	0,135	0,123	0,112	—	0,093
190	0,210	0,177	0,154	0,136	0,122	0,111	0,102	—	0,083
200	0,191	0,161	0,140	0,124	0,111	0,101	0,093	—	0,075
210	0,174	0,147	0,128	0,113	0,102	0,093	0,085	—	0,068
220	0,160	0,135	0,118	0,104	0,094	0,086	0,077	—	0,062

Література

1. Бабенко Д. В., Доценко Н. А., Горбенко О. А. Механіка матеріалів і конструкцій. Частина 1: практикум для навчання на основі інтерактивного графічно-цифрового контенту : навчальний посібник. Миколаїв : МНАУ, 2021. 176 с.
2. Філатов Г. В. Опір матеріалів в задачах і прикладах: Розрахунок статично визначуваних стержневих систем. Кн. 1 : навч. посіб. Київ : Видавництво Ліра-К, 2019. 360 с.
3. Yang X., Song S., Sun L., Zhang D., Liu X., Ding S. Curriculum Construction and Reform for "Mechanics of Materials" Based on the Training of Outstanding Engineers. *Lifelong Education*. 2020. Vol.9. P. 240. doi:10.18282/le.v9i6.1350.
4. Guo H. S., Luo Y. S., Cao Y. X., Liu J., Tu Y. Exploration on the construction of the gold course of mechanics of materials in applied undergraduate civil engineering major. 2021. doi:10.1201/9781003144977-105.
5. Devin V., Tkachuk V., Skorobogatov D. (Use of the mdsolids software in studying discipline "*Material and construction mechanics*"). Open educational e-environment of modern university. 2018. doi:10.28925/2414-0325.2018.5.7787.
6. Prashant K. *Mechanics of Materials: A Friendly Approach*. 2022. doi:10.1142/12590.
7. Механіка матеріалів і конструкцій : навчальний посібник для студентів, які навчаються за спеціальністю «Прикладна механіка» / А. Є. Бабенко та ін. Київ : НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2017. 191 с.
8. Огородніков В. А., Грушко О. В., Архіпова Т. Ф. Механіка матеріалів та конструкцій : навч. посібник. Вінниця : ВНТУ, 2018. 91 с.
9. Бондаренко Л. Ю., Вершков О. О., Антонова Г. В. Лабораторний практикум з механіки матеріалів і конструкцій : навч. посіб. Мелітополь : ТДАТУ, 2017. 183 с.
10. Бабенко Д. В., Горбенко О. А., Доценко Н. А. Механіка матеріалів і конструкцій: практикум : навчальний посібник.

Миколаїв : МНАУ, 2017. 384 с. URL : <http://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/3207>.

11. Бабенко Д. В., Горбенко О. А., Доценко Н. А. Механіка матеріалів і конструкцій : практикум для навчання в умовах інформаційно-освітнього середовища. Миколаїв : МНАУ, 2018. 384 с.

12. Куценко А., Бондар М., Чаусов М. Механіка матеріалів. Київ : Центр навчальної літератури, 2019. 560 с.

13. Мельник О. Є. Опір матеріалів : метод. реком. до вивч. дисц. / Донецький нац. ун-т економіки і торгівлі ім. М. Туган-Барановського ; каф. загальноінженерних дисциплін та обладнання. Кривий Ріг : ДонНУЕТ, 2020. 121 с.

14. Кострицький В. Г., Саух О. М. Опір матеріалів : практикум для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавр спеціальності 015.18 Професійна освіта (технологія виробництва і переробка продуктів сільського господарства), 015.20 Професійна освіта (транспорт) денної та заочної форм навчання. Херсон : Видавництво ХДУ, 2017. 112 с

15. Cicci D., Cicci D. Fundamentals of Engineering Mechanics: Basic Concepts in: Mechanics of Materials. Dynamic Solutions Publishing, 2022. 234 p.

16. Rushchitsky J. Foundations of Mechanics of Materials. *Ventus Publishing ApS*, 2021. 150 p.

17. Литвинов О. І., Василюк В. І., Федорина Т. П. Механіка матеріалів і конструкцій : методичний посібник. Ніжин : вид. НДУ ім. Гоголя, 2020. 180 с.

18. Курс «Механіка матеріалів і конструкцій». Платформа дистанційного навчання MOODLE МНАУ. URL: <https://moodle.mnau.edu.ua/course/view.php?id=355>

Навчальне видання

МЕХАНІКА МАТЕРІАЛІВ І КОНСТРУКЦІЙ

Методичні рекомендації

Укладач: **Доценко** Наталія Андріївна

Редактор: Н. А. Доценко

Комп'ютерний набір: Н. А. Доценко

Дизайн і верстка: Н. А. Доценко

Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 7

Тираж 20 прим. Зам. №_

Надруковано у видавничому відділі

Миколаївського національного аграрного університету.

54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК№4490 від 20.02.2013р.