

З графіків видно, що процес зміни силової взаємодії відбувається за наявності вираженої модуляції (по осі  $Oy$  і по осі  $Oz$ ), впливу вищих гармонік (проявляються супергармоніки та двугорбі піки). Помітний істотний прояв вищих форм з періодами не кратними періоду зовнішнього збудження.

### 3. Висновки

При аналізі поведінки системи під дією гармонічного силового збудження розрізняються діапазони коливань з до-, біля- і зарезонансною частотою. В цих випадках спостерігаються явища, що роблять процес суттєво неусталеним: модуляція коливань (для всіх трьох частотних діапазонів), суттєвий вплив коливань вищих гармонік із своїми частотами (переважно проявляється для до- і білярезонансних частот збудження), що є свідченням неусталеності режиму коливань. Зі збільшенням частоти зовнішнього силового збудження прояв модуляції стає більш суттєвим, а прояв вищих гармонік навпаки зменшується. В моделі не приймається гіпотеза про відсутність коливань з власними частотами в системі і задача розглядається в сумісній постановці для системи резервуар – рідина.

#### Список використаних джерел

1. Лимарченко О.С., В.В. Ясинский. Нелинейная динамика конструкций с жидкостью, Киев: Национальный технический университет Украины "КПИ"//, 1997. – 348 с.
2. Лимарченко О.С., Губська В.В. Задача про вимушені нелінійні коливання резервуару у формі усеченого конуса, частково заповненого рідиною, Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, серія: фізико-математичні науки. – 2012. –Т.1, №1. – С.73-76.
3. Faltinsen O.M., Rognebakke O.F., Timokha A.N. Transient and steady-state amplitudes of resonant three-dimensional sloshing in a square base tank with a finite fluid depth// Physics of fluids 18. – 2006. – 14 p.
4. Limarchenko O.S. Peculiarities of application of perturbation techniques in problems of nonlinear oscillations of liquid with a free surface in cavities of non-cylindrical shape, Ukrainian Mathematical Journal – 2007– Vol. 59, No. 1, p. 44-70.
5. Pal P. Sloshing of liquid in partially filled container – an experimental study // International Journal of Recent Trends in Engineering. – 2009. – Vol. 1, No. 6, p. 1-5.

Надійшла до редколегії 14.05.14

В. Губская, канд. физ.-мат. наук  
НТУУ "КПИ", Киев,  
О. Лимарченко, д-р техн. наук  
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев,  
І. Кудзиновская, канд. техн. наук  
Национальный авиационный университет (НАУ), Киев

### СИЛОВОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ РЕЗЕРВУАРА В ФОРМЕ УСЕЧЕННОГО КОНУСА И ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ПРИ ИХ СОВМЕСТНОМ ДВИЖЕНИИ

*Рассматривается задача силового взаимодействия, возникающего в системе резервуар-жидкость при возбуждении движения системе периодической силой в зоне частот до резонанса, в малой окрестности резонанса, а также больших чем резонансная. Поведение системы рассматривается в рамках нелинейной модели на длительном промежутке времени.*

V. Gubska, PhD  
National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv,  
O. Limarchenko, Full Doctor (eng.)  
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv,  
I. Kudziniv's'ka, PhD (eng.)  
National Aviation University, Kyiv

### FORCE INTERACTION OF RESERVOIR IN THE FORM OF TRUNCATED CONE AND LIQUID WITH A FREE SURFACE IN THEIR COMBINED MOTION

*The problem of force interaction that occurs in the system reservoir-liquid under the action of periodic force in the resonance frequency zone, in a small neighborhood of resonance and greater than the resonant one is under consideration. Behavior of the system is considered within the framework of nonlinear model on durable time interval.*

УДК 539.3

В. Будақ, д-р техн. наук, проф., М. Борисенко, асп., О. Бойчук, канд. фіз.-мат. наук  
Миколаївський національний університет ім. В.О. Сухомлинського, Миколаїв,  
О. Григоренко, д-р фіз.-мат. наук, проф.  
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ

### ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ЕЛІПТИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ

*Досліджуються вільні коливання тонких ізотропних еліптичних оболонок змінної товщини однакової маси на основі методу скінченних елементів. Проводиться порівняльний аналіз результатів з чисельними результатами, підтверджені експериментально, отриманими для еліптичної оболонки постійної товщини еквівалентної маси. Порівнюються частоти при однакових формах коливань для оболонок однакової геометрії для трьох різних матеріалів.*

**Постановка проблеми.** Дослідження вільних частот і форм коливань тонкостінних некругових циліндричних оболонок змінної товщини пов'язано із значними труднощами, які зумовлені складністю системи вихідних диференціальних рівнянь з частинними похідними зі змінними коефіцієнтами та необхідністю задоволення крайовим умовам.

Метою цієї роботи є вивчення вільних коливань пружних ізотропних некругових циліндричних оболонок змінної товщини вздовж дуги поперечного перерізу з використанням програми Femar та порівняння їх з отриманими чисельними результатами за допомогою експерименту для еліптичної оболонки постійної товщини [1]. Також розглядається вплив зміни товщини оболонкових конструкцій і механічних параметрів матеріалу на їх динамічні характеристики.

Задачам про вільні коливання некругових циліндричних оболонок присвячено незначну кількість публікацій. Вільні коливання елементів оболонкових конструкцій розглядалися в [4]. Вивченню вільних коливань некругових циліндричних оболонок присвячена стаття [3]. Для дослідження коливань циліндричних оболонок з еліптичним поперечним перерізом застосовувалася теорія оболонок вищих порядків [10]. Розв'язування задач про вільні коливання ортотропних кругових оболонок змінної товщини методом сплайн-апроксимації та дискретної ортогоналізації запро-

поновано в [2]. Аналіз зазначених публікацій дає можливість зробити висновок про те, що не існує єдиної точки зору щодо переваг застосування того чи іншого підходу до вирішення зазначеного класу задач.

Широке застосування для дослідження динамічних процесів в оболонкових конструкціях отримала класична теорія оболонок Кірхгофа-Лява. У випадку змінної товщини або довільної форми серединної поверхні оболонок розглянутого класу механіко-математична модель описується системою диференціальних рівнянь з частинними похідними зі змінними коефіцієнтами. У цьому випадку не вдається розділити змінні з використанням рядів Фур'є в одному з координатних напрямків, тому розв'язування задач про вільні коливання оболонок змінної товщини або довільної форми серединної поверхні призводить до значних труднощів обчислювального характеру. Особливості застосування чисельних методів для вирішення широкого класу задач теорії оболонок описано в [5, 6, 7].

У даний час широке застосування для розв'язування задач механіки набуло використання систем автоматизованого конструювання (computer-aided engineering – CAE), які можуть розраховувати конструкцію будь-якої форми завдяки використанню метода скінчених елементів. Крім того CAE-системи дають користувачеві можливість оцінити поведінку комп'ютерної моделі виробу в реальних умовах експлуатації, перевірити дієздатність конструкції без значних витрат часу і коштів. Однією з таких систем є пре- і постпроцесор для виконання інженерного аналізу методом скінчених елементів – Femap з розв'язувачем NX Nastran [8].

**Вихідні співвідношення.** NX Nastran для визначення власних форм і частот коливань у випадку, коли дисипація енергії і демпфування не враховується, використовує, як основний, метод Ланцоша (Lanczos), що вимагає менших ресурсів (часу обчислень і вільної пам'яті на жорсткому диску) в порівнянні з іншими методами. Метод Ланцоша [11] дозволяє визначити  $n$ -ну кількість необхідних власних значень і форм із заданою точністю. Чим більшу кількість власних пар потрібно визначити, тим помітнішими виявляються переваги цього методу.

Знаходження власних частот і форм коливань зводиться до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь

$$K\bar{\Phi}_i - \omega_i^2 M\bar{\Phi}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

де  $[K]$  – матриця жорсткості,  $[M]$  – матриця мас,  $\bar{\Phi}_i$  – власна форма,  $\omega_i$  – пульсація.

Метод Ланцоша використовує приведення до трьохдіагональної матриці  $T$  вигляду

$$T = Q_j^T M K^{-1} M Q_j, \quad (2)$$

де  $Q_j = \{q_1, q_2, \dots, q_j\}$  – прямокутна матриця з елементами  $N_{eq} \times j$ ,  $N_{eq}$  – число рівнянь,  $j$  – номер кроку по методу Ланцоша,  $q_j$  –  $j$ -ий вектор Ланцоша. Вираз

$$\beta_{j+1} \bar{q}_{j+1} = K^{-1} M \bar{q}_j - \alpha_j \bar{q}_j - \beta_j \bar{q}_j, \quad (3)$$

генерує наступний вектор Ланцоша  $q_{j+1}$  і визначає поточний рядок матриці  $T$

$$T = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & & & \\ & \beta_3 & \alpha_3 & \beta_4 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \beta_j & \alpha_j \end{vmatrix}.$$

Таким чином, отримуємо задачу на власні значення:

$$T \bar{s}_k^j - \lambda_k^j \bar{s}_k^j = 0, \quad k = 1, 2, \dots, j, \quad (4)$$

$(\omega_k^j)^2 = 1/\lambda_k^j$ , де  $\omega_k^j$  –  $j$ -а апроксимація кругової частоти  $\omega_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $n$  – необхідне число власних пар. Алгоритм продовжує обчислення (при збільшенні  $j$ -номера кроку процедури Ланцоша) до тих пір, поки не буде досягнуто необхідної точності по всім необхідним власним значенням.

Процедура вибіркової ортогоналізації підтримує необхідний рівень ортогоналізації векторів Ланцоша  $q_j$ , що забезпечує надійність і стійкість чисельного процесу розрахунку. При цьому застосовуються економічні методи для реалізації процедури вибіркової ортогоналізації й для визначення власних значень (4) шляхом використання подвійних QR-ітерацій зі зсувами. Вихідні власні вектори визначаються за формулою

$$\bar{\Phi}_k^j = Q_j \bar{s}_k^j, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

Більш детальний опис даного методу можна знайти в [9, 11].

**Методика розв'язування.** За допомогою системи Femap побудовано геометрію оболонок у вигляді циліндричних поверхонь еліптичного перерізу змінної і постійної товщини еквівалентної маси з розмірами: висота  $h = 120$  мм, велика піввісь серединної поверхні  $a = 50,8$  мм, мала піввісь серединної поверхні  $b = 36,295$  мм. Товщини оболонок уздовж великої півосі  $d_a$  і вздовж малої півосі  $d_b$  вказані в таблиці 1.

Таблиця 1. Значення товщини вздовж великої і малої півосі еліптичних оболонок

Вид оболонки		$d_a, \text{мм}$	$d_b, \text{мм}$
постійної товщини	$d_a = d_b$	2	2
змінної товщини	$d_a > d_b$	3	1,3
	$d_a < d_b$	1	2,73

Досліджувані оболонки жорстко закріплювалися вздовж одного краю; тобто при  $z = 0$  виконуються умови

$$u = v = w = \varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = 0.$$

Матеріалом оболонок обирались три різних метала: сталь 40Х (модуль Юнга  $E = 214 \text{ ГПа}$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,32$ , густина  $\rho = 7820 \text{ кг/м}^3$ ), алюміній (модуль Юнга  $E = 71 \text{ ГПа}$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,34$ , густина  $\rho = 2710 \text{ кг/м}^3$ ), мідь (модуль Юнга  $E = 110 \text{ ГПа}$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,35$ , густина  $\rho = 8920 \text{ кг/м}^3$ ). Розбиття проводилось лінійними восьмикутними solid-елементами розміром сторони 1 мм.

**Результати.** За допомогою вищеописаної методики досліджувався спектр резонансних частот і форми коливань консольно затиснених ізотропних оболонок змінної і постійної товщини. Резонансні частоти приведені в порівняльних таблицях 2 (для оболонок із сталі), 3 (для оболонок з алюмінію) і 4 (для оболонок з міді), де  $m$  – кількість вузлів уздовж твірної,  $n$  – кількість вузлів по колу, і у вигляді гістограм (рис. 1, 2, 3 відповідно).

Таблиця 2. Власні частоти для різних форм коливань сталевих еліптичних оболонок постійної і змінної товщини

m	n	f, Гц		
		$d_a < d_b$	$d_a = d_b$	$d_a > d_b$
1	4	1565	1712	1801
1	6	1992	2155	2119
1	8	3678	3849	3755
1	10	5829	6131	5896
1	12	8493	8962	8610
2	4	5800	6160	6369
2	6	4456	4488	4386
2	8	4817	4896	4733
2	10	6714	7073	6848
2	12	9245	9748	9374

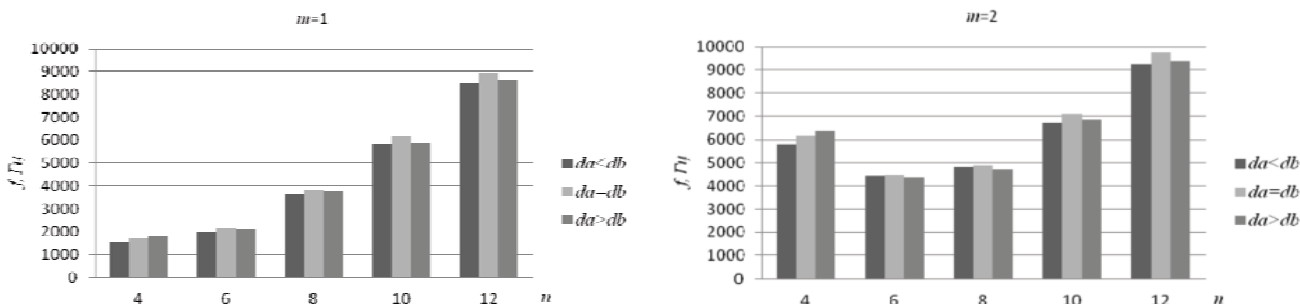


Рис. 1. Порівняльні гістограми власних частот для різних форм коливань сталевих еліптичних оболонок постійної і змінної товщини

Таблиця 3. Власні частоти для різних форм коливань алюмінієвих еліптичних оболонок постійної і змінної товщини

m	n	f, Гц		
		$d_a < d_b$	$d_a = d_b$	$d_a > d_b$
1	4	1531	1676	1761
1	6	1952	2113	2078
1	8	3607	3776	3684
1	10	5719	6015	5784
1	12	8332	8793	8448
2	4	5672	6025	6230
2	6	4363	4394	4294
2	8	4720	4797	4638
2	10	6585	6938	6716
2	12	9070	9564	9197

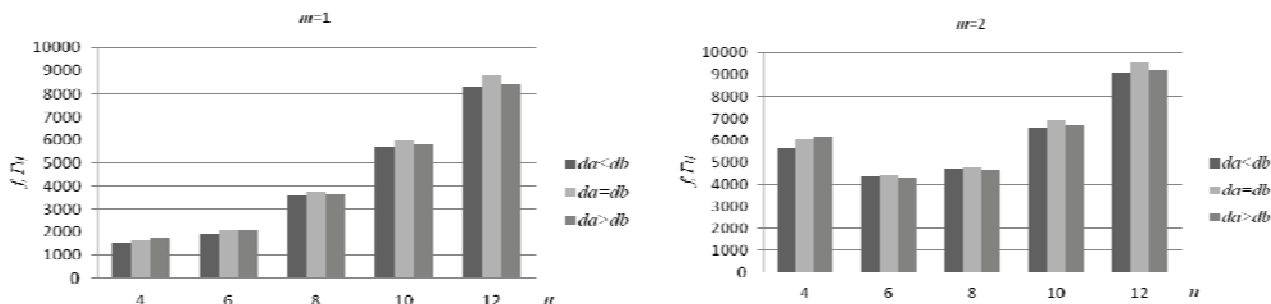


Рис. 2. Порівняльні гістограми власних частот для різних форм коливань алюмінієвих еліптичних оболонок постійної і змінної товщини

Таблиця 4. Власні частоти для різних форм коливань еліптичних оболонок постійної і змінної товщини з міді

m	n	f, Гц		
		$d_a < d_b$	$d_a = d_b$	$d_a > d_b$
1	4	1051	1150	1209
1	6	1344	1456	1432
1	8	2488	2605	2541
1	10	3946	4150	3991
1	12	5749	6068	5829
2	4	3887	4131	4272
2	6	2995	3018	2949
2	8	3248	3302	3193
2	10	4541	4785	4631
2	12	6258	6600	6345

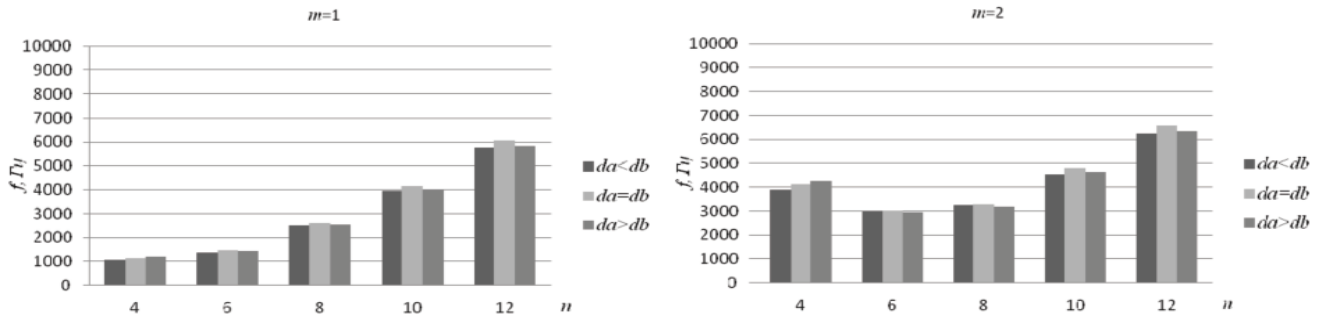


Рис. 3. Порівняльні гістограми власних частот для різних форм коливань мідних еліптичних оболонок постійної і змінної товщини

Порівняння частот вільних коливань при однакових формах для оболонок однакової геометрії з різних матеріалів подано на рис. 4, 5, 6, де суцільною лінією показано графік зміни частоти від форми коливань для оболонки зі сталі, штриховою пунктирною лінією – для оболонки з алюмінію, пунктирною лінією з точками – для оболонки з міді.

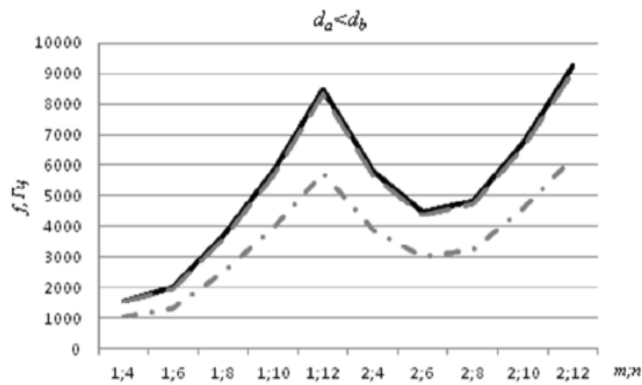


Рис.4. Порівняння частот вільних коливань при однакових формах для оболонок змінної товщини ( $d_a=1\text{мм}$ ,  $d_b=2.73\text{мм}$ ) з різних матеріалів

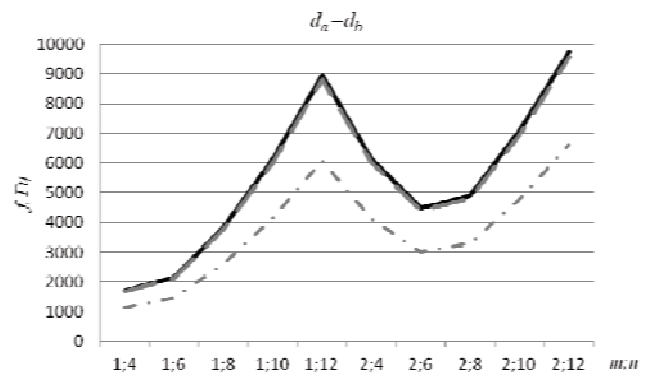


Рис.5. Порівняння частот вільних коливань при однакових формах для оболонок однакової товщини ( $d_a=2\text{мм}$ ,  $d_b=2\text{мм}$ ) з різних матеріалів

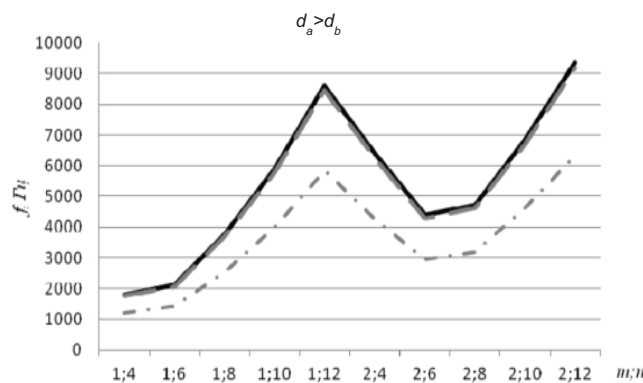


Рис.6. Порівняння частот вільних коливань при однакових формах для оболонок змінної товщини ( $d_a=3\text{мм}$ ,  $d_b=1.3\text{мм}$ ) з різних матеріалів

Форми коливань для оболонки із сталі на деяких частотах зображено на рис.7, переміщення точок оболонки для візуалізації показані в десятикратному збільшенні.

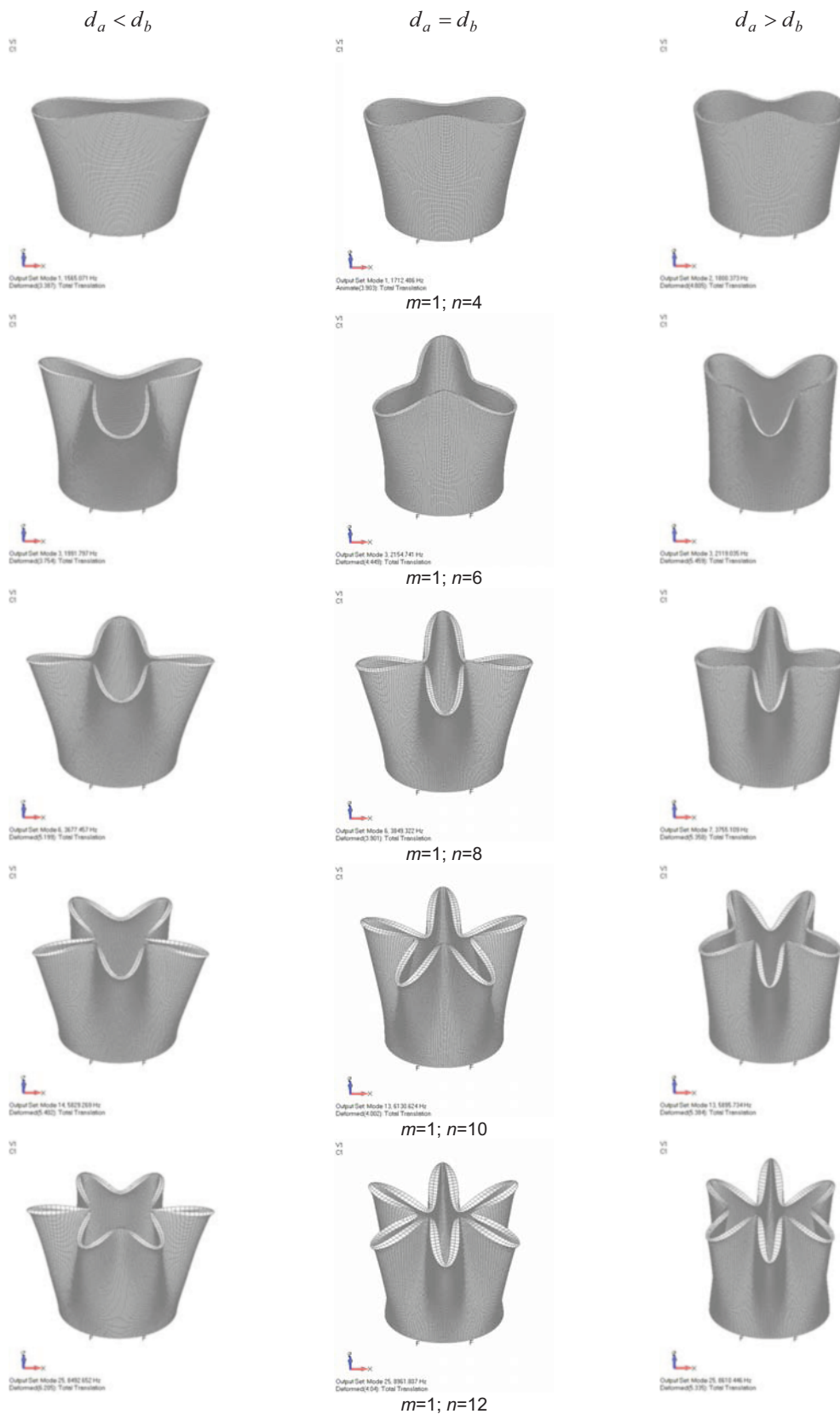


Рис. 7. Форми коливань для оболонки із сталі на деяких частотах

**Висновки.** Проведено розрахунки вільних коливань двох некругових циліндричних оболонок змінної товщини вздовж дуги поперечного перерізу на основі методу скінчених елементів із застосуванням комплексу FEMAP. Порів-



няння отриманих результатів для оболонок змінної товщини з частотами для циліндричних оболонок постійної товщини еквівалентної маси, показало :

✓ для форм коливань  $m = 1$ ,  $n = 4$  і  $m = 2$ ,  $n = 4$  при збільшенні товщини уздовж осі  $a$  резонансні частоти зростають і, навпаки, при збільшенні товщини уздовж осі  $b$  – резонансні частоти зменшуються;

✓ для інших розглянутих форм частота вільних коливань оболонки постійної товщини вища в порівнянні з частотами вільних коливань оболонок змінної товщини, причому із збільшенням  $n$  різниця цих частот зростає.

Запропонована методика дає можливість керувати спектром частот вільних коливань оболонкових конструкцій для виключення її динамічних характеристик з резонансного режиму за рахунок модуляції зміни товщини оболонки, що є однією з актуальних проблем дослідження міцності оболонкових конструкцій.

Для аналізу впливу характеристик матеріалу на динамічні характеристики розглянуто три матеріали (сталь, алюміній і мідь). Аналізуючи отримані дані, можна зробити висновок про те, що частоти вільних коливань при однакових геометричних параметрах оболонок із сталі і алюмінію мають незначну відмінність через невелику відмінність

швидкості розповсюдження об'ємного розширення, яка залежить від модуля Юнга і густини матеріалу  $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ . Частоти для оболонок з міді, при ідентичній геометрії, в 1,49 разів менші відповідних частот оболонок із сталі, що пояснюється відношенням відповідних швидкостей поздовжніх хвиль

$$\frac{c_{\text{сталь}}}{c_{\text{мідь}}} = 1,49 .$$

#### Список використаних джерел

1. Будаков В.Д., Григоренко А.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук Е.В. Определение собственных частот эллиптической оболочки постоянной толщины методом конечных элементов // Актуальні проблеми механіки деформованого твердого тіла. – 2013. – 1. – С. 75-79.
2. Влайков Г. Г., Григоренко А. Я., Соколова Л. В. Свободные колебания анизотропных цилиндрических оболочек с переменными параметрами // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2013. – Том 3, № 12 – С. 13-16.
3. Григоренко А.Я., Пузырев С.В., Волчек Е.А. Исследование свободных колебаний некруговых цилиндрических оболочек с помощью метода сплайн-коллокации // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2011. – 54, № 3. – С. 60-69.
4. Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкарь А.И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. – Киев: Наук. думка, 1986. – 171 с.
5. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жесткости. – Киев: Наук. думка, 1981. – 544 с. – (Методы расчета оболочек: В 5 т. – Т. 4.).
6. Григоренко Я.М., Мукоед А.П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. – Киев: Вища шк., 1983. – 286 с.
7. Григоренко Я.М., Панкратова Н.Д. Обчислювальні методи в задачах прикладної математики. – Київ: Либідь, 1995. – 279 с.
8. Рудаков К.Н. FEMAP 10.2.0. Геометрическое и конечно-элементное моделирование конструкций. – К. НТУУ "КПИ", 2011. – 317с.
9. Clough R.W., Penzien J. Dynamics of Structures. – McGraw-Hill Book Comp., 1975. – 634 p.
10. Hayek Sabih I., Boisvert Jeffrey E. Vibration of elliptic cylindrical shells: higher order shell theory // J. Acoust. Soc. Amer. – 2010. – 128, No. 3. – P. 1063–1072.
11. Papadrakakis. Solving large-scale problems in mechanics. – John Wiley & Sons Ltd., 1993.

Надійшла до редколегії 27.02.14

В. Будаков, д-р техн. наук, проф., М. Борисенко, асп., Е. Бойчук, канд. фіз.-мат. наук  
ННУ ім. В.О. Сухомлинського, Николаєв,  
А. Григоренко, д-р фіз.-мат. наук, проф.  
Інститут механіки ім.С.П.Тимошенка НАН України, Київ

#### СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

*Исследуются свободные колебания тонких изотропных эллиптических оболочек переменной толщины одинаковой массы с помощью метода конечных элементов. Производится сравнительный анализ результатов с численными результатами, подтвержденными экспериментально, полученными для эллиптической оболочки постоянной толщины эквивалентной массы. Сравниваются частоты при одинаковых формах колебаний для оболочек одинаковой геометрии из трех разных материалов.*

V. Budak, Full Doctor (eng), Professor., M. Borisenko, Post graduate student, O. Boychuk, Ph.D.  
Mykolayiv State University named after Sukhomlynskyi, Mykolayiv,  
A. Grigorenko, Full Doctor, Professor  
S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv

#### NATURAL VIBRATIONS OF ELLIPTICAL SHELLS OF VARIABLE THICKNESS

*Natural vibrations of thin isotropic elliptical shells of variable thickness equal weight are studied on the basis of finite element method. A comparative analysis of results with the numerical confirmed experimentally results obtained for elliptical shell of constant thickness equivalent weight. Frequencies vibrations in the same forms for the same geometry of shells of three different materials are compared.*

УДК 517.946

К. Буряченко, канд. фіз.-мат. наук, О. Логачова, канд. фіз.-мат. наук  
Донецький національний університет, Донецьк

#### ВИМІРНИСТЬ ЯДРА ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ РІВНЯНЬ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ У ДЕЯКИХ ВИРОДЖЕНИХ ВИПАДКАХ

*Досліджено питання вимірності ядра задачі Діріхле в крузі для еліптичних рівнянь четвертого порядку зі сталими комплексними коефіцієнтами у вироджених випадках. Особлива увага приділена неправильно еліптичним рівнянням четвертого порядку, які одночасно мають кратні характеристики, а також корені  $\pm i$  відповідного характеристичного рівняння.*

Вступ.

Я. Б. Лопатинський [9] встановив, що однорідна задача Діріхле в обмеженій області з гладкою межею для правильно еліптичних рівнянь парного порядку зі сталими коефіцієнтами має скінчене число лінійно незалежних нетривіальних

© Буряченко К., Логачова О., 2014