

УДК 539.3

Будак В.Д.¹, д.т.н., проф., Григоренко О.Я.²,
д.ф.-м.н., проф., Борисенко М.Ю.¹, аспірант.,
Бойчук О.В.¹, к.ф.-м.н.

Вплив ексцентриситету еліптичної оболонки на розподіл її динамічних характеристик

¹ Миколаївський національний університет ім.
В.О. Сухомлинського, 54000, м. Миколаїв, вул.
Нікольська, 24,

e-mail: maxborisenko530@mail.ru

² Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН
України, 83000, м. Київ, вул. Нестерова, 3,
e-mail: ayagrigorenko@yandex.ru

V.D. Budak¹, Dr Sci., Prof., A.Ya. Grigorenko², Dr
Sci., Prof., M.Yu. Borisenko¹, graduate student,
O.V. Boychuk¹, Ph.D.

The elliptical shell eccentricity impact on the distribution of its dynamic characteristics

¹ Mykolaiv National University after V.O. Sukhomlynsky, 54000, Nikolaev, Nikolska st., 24
e-mail: maxborisenko530@mail.ru

² Institute of Mechanics after S.P. Tymoshenko NAS
of Ukraine, 83000, Kyiv, Nesterov st., 3,
e-mail: ayagrigorenko@yandex.ru

Для дослідження динамічних характеристик тонкої ізотропної еліптичної оболонки від зміни ексцентриситету застосовано один з варіантів методу скінчених елементів. Проведено розрахунки вільних частот та форм коливань еліптичної оболонки для різних значень її ексцентриситету зі збереженням маси. Для оцінки достовірності отриманих результатів виконано порівняльний аналіз з даними для конкретного значення ексцентриситету еліптичної оболонки, які були отримані експериментальним шляхом на основі методу голографічної інтерферометрії.

Ключові слова: еліптична оболонка, ексцентриситет, частота, форма коливань, метод скінчених елементів.

A variant of the finite element method is applied to study the isotropic thin shell's dynamic characteristics based on the elliptical eccentricity changes. Free frequencies and modes of the elliptical shell for different values of eccentricity to the conservation of mass were calculated. The comparative analysis with the data for a specific value of the elliptical shell's eccentricity that were obtained experimentally on the basis of holographic interferometry was performed to evaluate its reliability.

The results analysis suggests that we can derive the coefficients of the frequency shift from circular shell to elliptical one, while maintaining its mass and boundary conditions, that will make it possible to predict the frequency of the shells of any ellipticity, with the help of the known circular shell frequencies. This issue needs further studying.

Key words: elliptical shell, eccentricity, frequency, oscillation form, finite element method.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

Однією із широко застосованих форм конструкцій та їх частин, що в процесі експлуатації зазнають динамічних навантажень, є тонкостінні некругові циліндричні оболонки. Дослідження вільних частот і форм коливань таких оболонок пов'язано із значними труднощами, які зумовлені складністю системи вихідних диференціальних рівнянь в частинних похідних із змінними коефіцієнтами та необхідністю задоволення крайових умов. У зв'язку з цим широке застосування для розв'язування задач механіки набуло викорис-

тання систем автоматизованого конструювання (computer-aided engineering – CAE), які можуть розраховувати конструкцію будь-якої форми завдяки використанню метода скінчених елементів. Крім того CAE-системи дають користувачеві можливість оцінити поведінку комп'ютерної моделі виробу в реальних умовах експлуатації, перевірити дієздатність конструкції без значних витрат часу і коштів. Однією з таких систем є пре- і постпроцесор для виконання інженерного аналізу методом скінчених елементів – Femap з розв'язувачем NX Nastran [1].

Постановка проблеми

Метою цієї роботи є встановлення залежності вільних коливань пружних ізотропних некругових циліндричних оболонок від зміни ексцентриситету еліпса поперечного перерізу з використанням програми Femap. Як критерій достовірності отриманих результатів розрахунку було проведено порівняння з даними експериментального дослідження вільних коливань еліптичної оболонки з конкретним значенням ексцентриситету [5].

Задачам про вільні коливання некругових циліндричних оболонок присвячено незначну кількість публікацій. Вільні коливання елементів оболонкових конструкцій розглядалися в [2]. Вивченню вільних коливань незамкнених еліптичних циліндричних оболонок та встановлення залежності власних частот від ексцентриситету присвячена стаття [6]. Для дослідження коливань циліндричних оболонок з еліптичним поперечним перерізом застосовувалася теорія оболонок вищих порядків [7]. Розв'язування задач про вільні коливання ортотропних кругових оболонок змінної товщини методом сплайн-апроксимації та дискретної ортогоналізації запропоновано в [8]. Особливості застосування чисельних методів для вирішення широкого класу задач теорії оболонок описано в [3].

Експериментальне та аналітичне дослідження власних частот еліптичних оболонок еквівалентної маси з різним відношенням півосей широко висвітлене в роботі [4]. Отримані експериментально за допомогою повітряно-реактивного вібраційного грохоту власні частоти та форми коливань добре узгоджуються з аналітичними частотами, розрахованими за допомогою метода Релея – Рітца з урахуванням доданків вищих порядків в позовжних та колових модальних розкладах.

Вихідні співвідношення

Рівняння руху механічної системи з скінченною кількістю ступенів вільності описується системою рівнянь Лагранжа II роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = F_j, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (1)$$

Дане рівняння руху для оболонки при її скінченоелементній апроксимації з урахуванням того, що $L = T - U$, та відсутності зовнішніх сил ($F_j = 0$) прийме вигляд:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (2)$$

Використовуючи дискретну форму функціоналів кінетичної енергії та енергії деформації відповідно

$$T = \frac{1}{2} \dot{\vec{\Phi}}_i^T \mathbf{M}_i \dot{\vec{\Phi}}_i,$$

$$U = \frac{1}{2} \dot{\vec{\Phi}}_i^T \mathbf{K}_i \dot{\vec{\Phi}}_i,$$

де \mathbf{K}_i та \mathbf{M}_i – матриця жорсткості та матриця мас i -того скінченного елемента відповідно, $\vec{\Phi}_i$ – вектор вузлових переміщень i -того елемента.

З рівняння Лагранжа (2) отримуємо наступні рівняння руху оболонки при відсутності демпфування:

$$\mathbf{K} \vec{\Phi}_j + \mathbf{M} \ddot{\vec{\Phi}}_j = 0, \quad (3)$$

де \mathbf{K} та \mathbf{M} – матриця жорсткості та матриця мас механічної системи відповідно, $\vec{\Phi}_j$ – вектор переміщень вузлів системи, що відповідає j -тому ступеню вільності, що відтворює j -ту форму коливань.

При вільних коливаннях оболонок всі вузлові точки здійснюють гармонічні коливання як функції часу:

$$\vec{\Phi}_j(t) = \vec{\Phi}_j \sin \omega_j t. \quad (4)$$

Після підстановки функцій (4) в рівняння руху оболонки (3) визначення власних частот і форм коливань зводиться до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь

$$\mathbf{K} \vec{\Phi}_j - \omega_j^2 \mathbf{M} \vec{\Phi}_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (5)$$

де ω_j – пульсація або частота гармонічних коливань.

NX Nastran для визначення власних форм і частот коливань у випадку, коли дисипація енергії і демпфування не враховується, використовує, як основний, метод Ланцоша, що вимагає менших ресурсів у порівнянні з іншими методами. Метод Ланцоша [9] дозволяє визначати n -ну кількість необхідних власних значень і форм за реальний час, при цьому результати можна вважати практично точними для даної дискретної моделі [1, 9], оскільки похибка складає $\|\vec{\Phi}_j - \omega_j^2 \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \vec{\Phi}_j\| / \|\vec{\Phi}_j\| \leq 10^{-7}$.

Чим більшу кількість власних пар потрібно визначити, тим помітнішими виявляються пере-

ваги цього методу, він гарантує відсутність пропущених власних пар в досліджуваному частотному діапазоні, а також дозволяє аналізувати власні коливання закріплених систем, не спотворюючи їх власний спектр накладенням фіктивних в'язей.

Метод Ланцоша використовує приведення до трьохдіагонального вигляду матриці \mathbf{T}

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q}_k^T \mathbf{M} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{Q}_k, \quad (6)$$

де $\mathbf{Q}_k = \{\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_k\}$ – прямокутна матриця з елементами $N_{eq} \times k$, N_{eq} – число рівнянь, k – номер кроку по методу Ланцоша, \bar{q}_k – k -ий вектор Ланцоша. Вираз

$$\beta_{k+1} \bar{q}_{k+1} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \bar{q}_k - \alpha_k \bar{q}_k - \beta_k \bar{q}_{k-1}, \quad (7)$$

генерує наступний вектор Ланцоша q_{k+1} і визначає поточний рядок матриці \mathbf{T}

$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & & & \\ & \beta_3 & \alpha_3 & \beta_4 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \beta_k & \alpha_k \end{vmatrix}.$$

Таким чином, отримуємо задачу на власні значення:

$$\mathbf{T} \bar{s}_h^k - \lambda_h^k \bar{s}_h^k = 0, \quad h = 1, 2, \dots, k, \quad (8)$$

$(\omega_h^k)^2 = 1/\lambda_h^k$, де ω_h^k – k -та апроксимація круглої частоти ω_h , $h = 1, 2, \dots, n$, n – необхідне число власних пар. Алгоритм продовжує обчислення (при збільшенні k -номера кроку процедури Ланцоша) до тих пір, поки не буде досягнуто необхідної точності по всім необхідним власним значенням.

Процедура вибіркової ортогоналізації підтримує необхідний рівень ортогоналізації векторів Ланцоша q_k , що забезпечує надійність і стійкість чисельного процесу розрахунку. При цьому застосовуються економічні методи для реалізації процедури вибіркової ортогоналізації й для визначення власних значень (8) шляхом використання подвійних QR -ітерацій зі зсувами. Вихідні власні вектори визначаються за формулою

$$\bar{\Phi}_h^k = \mathbf{Q}_k \bar{s}_h^k, \quad h = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

Більш детальний опис даного методу можна

знайти в [9, 11].

Методика розв'язування

За допомогою системи Femap побудовано геометрію оболонок еквівалентної маси висотою $h = 120$ мм у вигляді циліндричних поверхонь еліптичного перерізу з різними значеннями ексцентриситету ε . Велика піввісь серединної поверхні a_c та мала піввісь серединної поверхні b_c в залежності від ε вказані в таблиці 1.

Досліджувані оболонки жорстко закріплювалися вздовж одного краю; тобто при $z = 0$ виконуються умови

$$u = v = w = \varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = 0.$$

Матеріалом оболонки задавалась сталь 40Х з модулем Юнга $E = 214$ ГПа, коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0,32$, густиною $\rho = 7820$ кг/м³. Скінченно-елементна розбивка проводилась лінійними восьмикутними solid-елементами розміром сторони 1 мм.

Таблиця 1

Значення півосей серединної поверхні відповідно до значення ексцентриситету

| | ε | | | | |
|-------|---------------|--------|--------|--------|--------|
| | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 |
| a_c | 43,547 | 43,657 | 43,992 | 44,574 | 45,444 |
| b_c | 43,547 | 43,438 | 43,103 | 42,512 | 41,651 |
| | ε | | | | |
| | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 |
| a_c | 46,674 | 48,386 | 50,810 | 54,434 | 60,656 |
| b_c | 40,421 | 38,709 | 36,285 | 32,661 | 26,439 |

Результати

За допомогою вищеописаної методики досліджувався спектр резонансних частот і форми коливань консольно затисненої ізотропної оболонки при різних значеннях ексцентриситету. Резонансні частоти приведені в порівняльній таблиці 2, де m – кількість вузлів уздовж твірної, n – кількість вузлів по колу, та у вигляді графіків (рис. 1). Для порівняння в таблиці 2 крім частот, отриманих чисельно, наводяться частоти, визначені методом голографічної інтерферометрії для оболонки еквівалентної маси [10]. На рисунку 2 приводиться порівняльна гістограма експериментально та чисельно отриманих частот для оболонки із значенням ексцентриситету 0,7.

Таблиця 2

Чисельно та експериментально отримані частоти ($\Gamma\text{ц}$)

| m | n | $f_{\text{чис.}}$ | | | | | | | | | | $f_{\text{експ.}}$ |
|-----|-----|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|---------------------|
| | | $\varepsilon=0$ | $\varepsilon=0,1$ | $\varepsilon=0,2$ | $\varepsilon=0,3$ | $\varepsilon=0,4$ | $\varepsilon=0,5$ | $\varepsilon=0,6$ | $\varepsilon=0,7$ | $\varepsilon=0,8$ | $\varepsilon=0,9$ | $\varepsilon=0,694$ |
| 1 | 4 | 1836 | 1836 | 1835 | 1833 | 1827 | 1812 | 1779 | 1712 | 1576 | 1284 | 1723 |
| 1 | 6 | 2266 | 2266 | 2265 | 2263 | 2258 | 2245 | 2216 | 2154 | 2023 | 1727 | 2306 |
| 1 | 8 | 3977 | 3977 | 3976 | 3974 | 3967 | 3952 | 3919 | 3849 | 3703 | 3362 | 4097 |
| 1 | 10 | 6318 | 6317 | 6315 | 6310 | 6298 | 6273 | 6225 | 6129 | 5921 | 5381 | 6519 |
| 1 | 12 | 9155 | 9155 | 9154 | 9151 | 9143 | 9123 | 9075 | 8963 | 8677 | 7934 | 9493 |
| 2 | 4 | 6476 | 6476 | 6475 | 6470 | 6456 | 6419 | 6338 | 6159 | 5769 | 4901 | – |
| 2 | 6 | 4812 | 4812 | 4810 | 4804 | 4788 | 4748 | 4661 | 4488 | 4145 | 3441 | 4782 |
| 2 | 8 | 5302 | 5302 | 5300 | 5293 | 5271 | 5219 | 5109 | 4895 | 4486 | 3661 | 5597 |
| 2 | 10 | 7231 | 7230 | 7229 | 7225 | 7217 | 7199 | 7161 | 7072 | 6819 | 5975 | – |
| 2 | 12 | 9935 | 9935 | 9935 | 9932 | 9924 | 9904 | 9858 | 9748 | 9480 | 8715 | – |

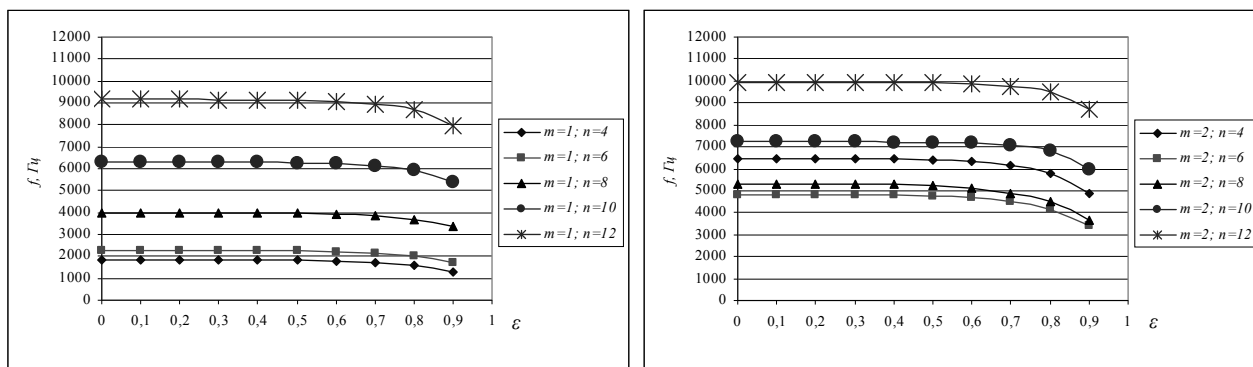


Рис. 1. Графіки залежності власної частоти від ε при однакових формах коливань

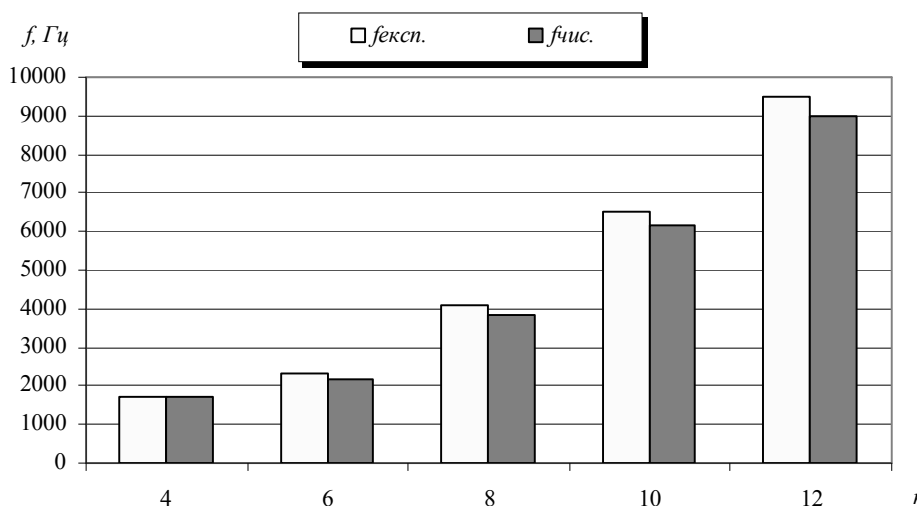


Рис. 2. Порівняння частот для форм коливань при $m = 1$

Форми коливань для оболонок з різними значеннями ексцентриситету на деяких частотах зображено на рис. 3. Переміщення точок

оболонок для візуалізації показані в десятикратному збільшенні.

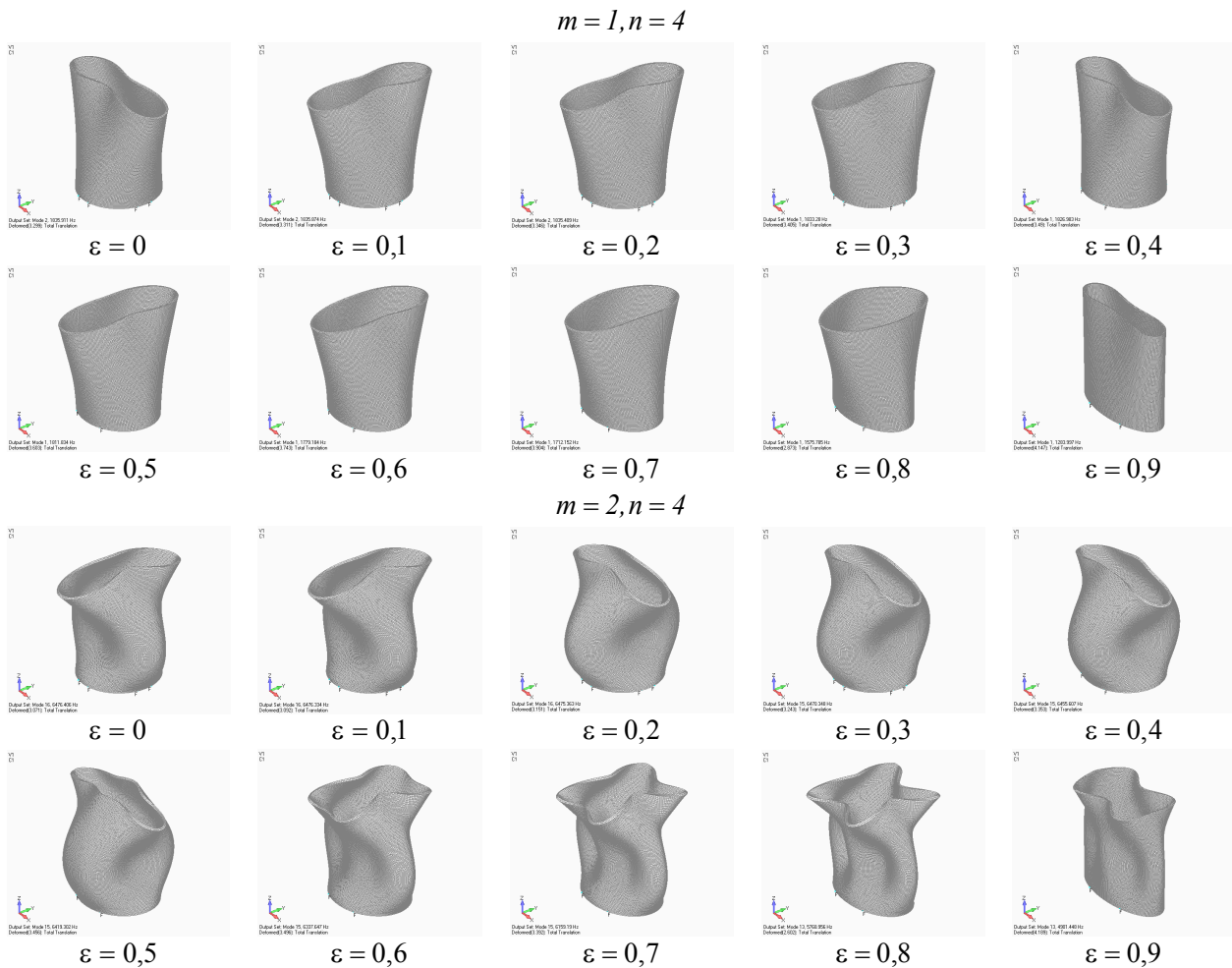


Рис. 3. Форми коливань для оболонки з різними значеннями ε

Висновки

Проведено розрахунки вільних коливань некругових циліндричних оболонок еквівалентних мас з різними значеннями ексцентриситету на основі методу скінчених елементів із застосуванням комплексу FEMAP. Аналіз отриманих результатів показав:

- порядок виникнення форм коливань для всіх оболонок зберігається;
- спостерігається зменшення власної частоти при збільшенні ексцентриситету;
- із збільшенням значення ε від 0 до 0,5 залежність при однакових формах частот від ексцентриситету має лінійний характер, відхилення частот еліптичних оболонок від кругової не перевищує 1,5%;
- в діапазоні ε від 0,5 до 0,9 залежність при однакових формах частот від ексцентриситету має квадратичний характер спадання;
- зміна поведінки оболонки спостерігається й

на зовнішньому вигляді форм коливань, так при $m = 1, n = 4$ спостерігається візуальна мутація форм починаючи із значення ексцентриситету 0,7, а при $m = 2, n = 4$ – з 0,4.

Порівняння отриманих результатів з результатами роботи [4] показало:

- спостерігається однаковість тенденції спадання частот із збільшенням ексцентриситету;
- відхилення відношення частот оболонок із значенням ексцентриситету 0 та 0,916.

Аналіз відповідностей результатів нашою думку можна вивести коефіцієнти частотного переходу від кругової оболонки до еліптичної при збереженні маси та граничних умов, що буде давати можливість прогнозувати частоти оболонок будь-якої еліптичності по відомим частотам кругової оболонки. Дана проблема потребує подальшого дослідження.

Список використаних джерел

1. Рудаков К.Н. FEMAP 10.2.0. Геометрическое и конечно-элементное моделирование конструкций / К.Н. Рудаков – К. НТУУ «КПИ», 2011. – 317с.
2. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций / Я.М. Григоренко, Е.И. Беспалова, А.Б. Китайгородский, А.И. Шинкарь – Киев: Наук. думка, 1986. – 171 с.
3. Григоренко Я.М. Теория оболочек переменной жесткости / Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко – Киев: Наук. думка, 1981. – 544 с. – (Методы расчета оболочек: В 5 т. – Т. 4.).
4. Sewall J.L. An experimental and analytical vibration study of elliptical cylindrical shells / J.L. Sewall, W.M. Thompson, C.G. Pnsey. // NASA TN D–6089, 1971. – 81 p.
5. Определение собственных частот эллиптической оболочки постоянной толщины методом конечных элементов / В.Д. Буда, А.Я. Григоренко, М.Ю. Борисенко, Е.В. Бойчук // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2014 – 57, № 1. – С. 145-152.
6. Григоренко А.Я. Исследование свободных колебаний некруговых цилиндрических оболочек с помощью метода сплайн-коллокации / А.Я. Григоренко, С.В. Пузырев, Е.А. Волчек // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2011. – 54, № 3. – С. 60-69.
7. Hayek S.I. Vibration of elliptic cylindrical shells: higher order shell theory / S.I. Hayek, J.E. Boisvert // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 2010. – 128, No. 3. – P. 1063–1072.
8. Влайков Г.Г. Свободные колебания анизотропных цилиндрических оболочек с переменными параметрами / Г.Г. Влайков, А.Я. Григоренко, Л.В. Соколова // *Восточно-Европейский журнал передовых технологий.* – 2013. – Том 3, № 12 – С. 13-16.
9. Papadrakakis. Solving large-scale problems in mechanics / Papadrakakis – John Wiley & Sons Ltd., 1993.
10. Експериментальне визначення власних частот тонкостінної оболонки з некруговим поперечним перерізом постійної товщини / В.Д. Буда, О.Я. Григоренко, М.Ю. Борисенко, О.П. Пригода, В.В. Хоришко // *Сучасні проблеми фізико-математичних наук та підготовка фахівців у цій галузі.* Миколаїв, 2013 – С. 5-6.

References

1. RUDAKOV, K. N. (2011) *FEMAP 10.2.0. Geometricheskoe i konechno-elementnoe modelirovanie konstruksiy.* Kiev: NTUU «KPI».
2. GRIGORENKO, YA. M. et al. (1986) *Svobodnyie kolebaniya elementov obolochechnykh konstruksiy.* Kiev: Naukova dumka.
3. GRIGORENKO, YA. M. and VASILENKO, A. T. (1981) *Teoriya obolochek peremennoy zhestkosti.* Kiev: Naukova dumka. (Metodyi rascheta obolochek: V 5 t. – T. 4.).
4. SEWALL, J. L. THOMPSON, W. M. and PNSEY, C. G. (1971) *An experimental and analytical vibration study of elliptical cylindrical shells.* NASA TN D–6089.
5. BUDAK V. D., GRIGORENKO A. YA., BORISENKO M. YU., BOYCHUK E. V. (2014) *Opređenje sobstvennykh chastot ellipticheskoy obolochki postoyannoy tolschinyi metodom konechnykh elementov.* *Mat. metody ta fiz.-meh. polya.* 57 (1). p. 145-152.
6. GRIGORENKO A. YA., PUZIRYEV S. V. and VOLCHEK E. A. (2011) *Issledovanie svobodnykh kolebaniy nekrugovykh tsilindricheskikh obolochek s pomoshchyu metoda splayn-kollokatsii.* *Mat. metody ta fiz.-meh. polya.* 54 (3). p. 60-69.
7. HAYEK S. I. and BOISVERT J. E. (2010) *Vibration of elliptic cylindrical shells: higher order shell theory.* *J. Acoust. Soc. Amer.* 128 (3). p. 1063–1072.
8. VLAKOV, G. G., GRIGORENKO, A. YA. and SOKOLOVA, L. V. (2013) *Svobodnyie kolebaniya anizotropnykh tsilindricheskikh obolochek s peremennymi parametrami.* *Vostochno-Yevropeyskiy zhurnal peredovykh tehnologiy.* 3 (12). p. 13-16.
9. PAPADRAKAKIS M. (1993) *Solving large-scale linear problems in solid and structural mechanics.* *Solving large-scale problems in mechanics.* Oxford, UK: Wiley. p. 1-37.
10. BUDAK V. D., GRIGORENKO A. YA., BORISENKO M. YU., PRIGODA O. P., KHORISHKO V. V. (2013) *Eksperimentalne viznachennya vlasnykh chastot tonkostinnoi z nekrugovym poperechnym pererizom postyinoi tovschyny.* In *Suchasni problemy fizyko-matematychnykh nauk ta pidgotovka fakhivtsiv u tsiy galuzi.* pp. 5-6.

Надійшла до редколегії 16.02.2015