

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2023.01.024>

УДК 539.3

О.Я. Григоренко¹, <https://orcid.org/0000-0002-4109-2672>

М.Ю. Борисенко¹, <https://orcid.org/0000-0002-7287-0975>

О.В. Бойчук², <https://orcid.org/0000-0003-1592-3660>

С.О. Сперкач³, <https://orcid.org/0000-0003-3168-6300>

А.Д. Безугла³, <https://orcid.org/0000-0001-8083-3210>

¹ Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ

² Миколаївський національний аграрний університет

³ Технічний центр НАН України, Київ

E-mail: ayagrigorenko1991@gmail.com, mechanics530@gmail.com,
boychuklena27@gmail.com, svetlana@nasu.kiev.ua, bezuglaya.anna24@gmail.com

Вільні коливання п'ятикутних пластин з отвором

Представлено членом-кореспондентом НАН України О.Я. Григоренком

Розглянуто вільні коливання ізотропних п'ятикутних пластин з отвором у центрі з різними варіаціями жорсткого закріплення на краях та отворі на основі двох різних підходів. Поширено метод скінченних елементів до розрахунку частоти та форми вільних коливань пластин вказаного класу. Експериментально визначені частоти і форми вільних коливань п'ятикутної пластини з жорстко закріпленим отвором у центрі. Проведене порівняння результатів двома методами показало хорошу збіжність отриманих частот. Реалізовані підходи дають можливість досліджувати динамічні характеристики пластин інших конфігурацій і можуть бути використані для оцінки точності інших підходів.

Ключеві слова: п'ятикутна пластинка з отвором, частота вільних коливань, метод скінченних елементів, FEMAP, експеримент.

Пластини різної форми широко використовують в інженерних спорудах, будівлях та інших конструкціях, що виготовляються із застосуванням сучасних технологій. Часто пластини мають різні геометричні неоднорідності, такі як технологічні отвори, скошені кути тощо. При проектуванні пластинчастих конструкцій потрібен розрахунок частот і форм вільних коливань на випадок дії раптових динамічних навантажень різної природи. Ця задача є актуальною проблемою прикладної математики та механіки.

В рамках класичної теорії коливань пластин питання про вільні коливання розв'язують різними методами [1–5]. Теоретичні дослідження вільних коливань ускладнені значними

Цитування: Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Сперкач С.О., Безугла А.Д. Вільні коливання п'ятикутних пластин з отвором. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2023. № 1. С. 24–32. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2023.01.024>

© Видавець ВД «Академперіодика» НАН України, 2023. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>)

труднощами реалізації математичної моделі та необхідністю розв'язання складної системи диференціальних рівнянь в частинних похідних із змінними коефіцієнтами. Визначення частот вільних коливань п'ятикутних пластин пов'язане з проблемами обчислювального характеру та необхідністю переходу до неортогональної системи координат. Тому тут доречно застосовувати чисельні методи.

Одним із сучасних чисельних методів дослідження частот і форм вільних коливань пластин є метод скінченних елементів (МСЕ). На основі даного методу побудовано роботу багатьох програм для інженерного розрахунку, наприклад, програми FEMAP з розв'язувачем NX Nastran. За допомогою цього програмного комплексу проведено ряд досліджень пластин: визначено частоти і форми вільних коливань ізотропних рівнобедрених трикутних пластин з вільними краями [6], визначено частоти та форми вільних коливань тонкої жорстко закріпленої квадратної пластини [7], досліджено тонку трикутну, чотирикутну і п'ятикутну пластини з різними фізико-механічними характеристиками з вільними краями [8].

Основною перевіркою будь-якого з результатів розрахунків є фізичний експеримент. Існують різні експериментальні методи дослідження частот та форм вільних коливань пластин [9–14].

Метою даної роботи є поширення МСЕ на розрахунок частот вільних коливань ізотропної п'ятикутної пластини з отвором та поширення експерименту Хладні до визначення частот та форм вільних коливань пластин вказаного класу.

Основні співвідношення. При розрахунку МСЕ динамічних процесів рівняння руху механічної системи зі скінченною кількістю ступенів вільності за відсутності зовнішніх сил описується системою рівнянь Лагранжа II роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (1)$$

де $L = T - U$. Використовуючи дискретну форму функціоналів кінетичної енергії та енергії деформації відповідно

$$T = \frac{1}{2} \dot{\bar{\Phi}}_i^T \mathbf{M}_i \dot{\bar{\Phi}}_i, \quad U = \frac{1}{2} \dot{\bar{\Phi}}_i^T \mathbf{K}_i \dot{\bar{\Phi}}_i,$$

де \mathbf{K}_i та \mathbf{M}_i – матриця жорсткості та матриця мас i -го скінченного елемента відповідно; $\bar{\Phi}_i$ – вектор вузлових переміщень i -го елемента, з рівняння Лагранжа (1) отримаємо наступні рівняння руху за відсутності демпфування

$$\mathbf{K} \bar{\Phi}_j + \mathbf{M} \ddot{\bar{\Phi}}_j = 0, \quad (2)$$

де \mathbf{K} та \mathbf{M} – матриця жорсткості та матриця мас механічної системи відповідно; $\bar{\Phi}_j$ – вектор переміщень вузлів системи, що відповідає j -му ступеню вільності і відтворює j -ту форму коливань.

При вільних коливаннях механічної системи всі вузлові точки здійснюють гармонічні коливання як функції часу

$$\bar{\Phi}_j(t) = \bar{\Phi}_j \sin \omega_j t. \quad (3)$$

Після підстановки функцій (3) в рівняння руху (2) визначення власних частот і форм коливань зводиться до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь

$$\mathbf{K}\bar{\Phi}_j - \omega_j^2 \mathbf{M}\bar{\Phi}_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (4)$$

де ω_j — пульсація або частота гармонічних коливань.

NX Nastran для визначення власних форм і частот коливань у випадку, коли дисипація енергії і демпфування не враховується, використовує, як основний, метод Ланцоша, що вимагає менших ресурсів у порівнянні з іншими методами. Метод Ланцоша дозволяє визначати n -ну кількість необхідних власних значень і форм, при цьому результати можна вважати практично точними для даної дискретної моделі, оскільки похибка складає $\|\bar{\Phi}_j - \omega_j^2 \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M}\bar{\Phi}_j\| / \|\bar{\Phi}_j\| \leq 10^{-7}$.

Результати чисельних розрахунків. В середовищі програми FEMAP побудована геометрична модель пластини у вигляді правильного п'ятикутника зі стороною $a = 87,19$ мм, товщиною $h = 2$ мм та отвором у центрі з радіусом $r = 6$ мм. Як матеріал пластини був вибраний алюміній з наступними параметрами: модуль Юнга $E = 71$ ГПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,33$, густина $\rho = 27,10$ кг/м³. Пластину досліджували при різних варіантах закріплення (рис. 1):

- вільні краї пластини та кромки отвору ($F_a F_h$);
- вільно закріплені краї пластини та жорстко закріплені кромки отвору ($F_a C_h$);
- жорстко закріплені краї пластини та вільні кромки отвору ($C_a F_h$);
- жорстко закріплені краї пластини та кромки отвору ($C_a C_h$).

Для порівняння побудована геометрична модель пластини без отвору, яку досліджували при вільних (F_a) та жорстко закріплених (C_a) краях (рис. 1). Розрахунок проводили на визначення частот і форм вільних коливань.

В результаті розрахунків отримано частоти та форми вільних коливань п'ятикутних пластин з отвором із чотирма різними варіантами вільного та жорсткого закріплення, а також п'ятикутних пластин без отвору з вільними та жорстко закріпленими краями.

Перші десять форм коливань п'ятикутних пластин із отворами та без них з вільними краями представлені на рис. 2, а.

Відмітимо, що форми коливань для пластинки $F_a C_h$, а саме *Form 1*, *Form 2* та *Form 8* це форми коливань, що відповідають поворотним коливанням відносно вісей системи координат, одна з яких перпендикулярна площині пластинки (рис. 2, б), що пояснюється наявністю ступенів вільності за рахунок вільних країв. Якщо не враховувати ці форми коливань при порівнянні, то отримаємо набір однакових форм коливань для розглянутих пластин, при цьому для пластини з жорстко закріпленим отвором спостерігається зміна порядку формоутворення, а також зміщення вузлових ліній до центра, наприклад, *Form 3*, *Form 9* та *Form 10*.

Частоти вільних коливань п'ятикутних пластин з отворами та без них з вільними краями та різним закріпленням отвору представлені в табл. 1, де $F_a C_h$ — перші десять частот, $F_a C_h^*$ — десять частот, що відповідають однаковим формам коливань. Як можна бачити, частоти для однакових форм коливань майже однакові, окрім деяких, що пояснюється зміною порядку формоутворення. Наявність незакріпленого отвору трохи зменшує власні частоти пластини і не впливає на формоутворення.

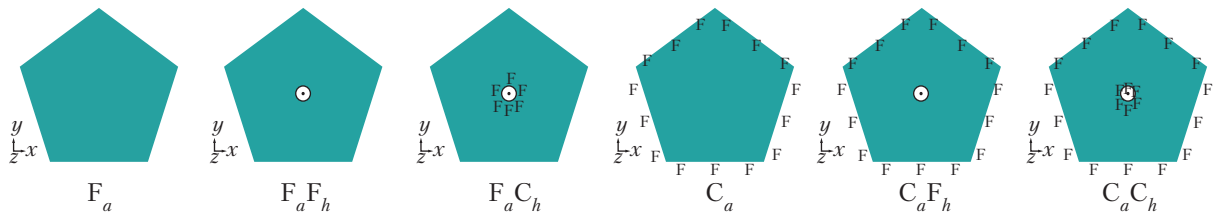


Рис. 1. Геометричні моделі досліджуваних п'ятикутних пластин

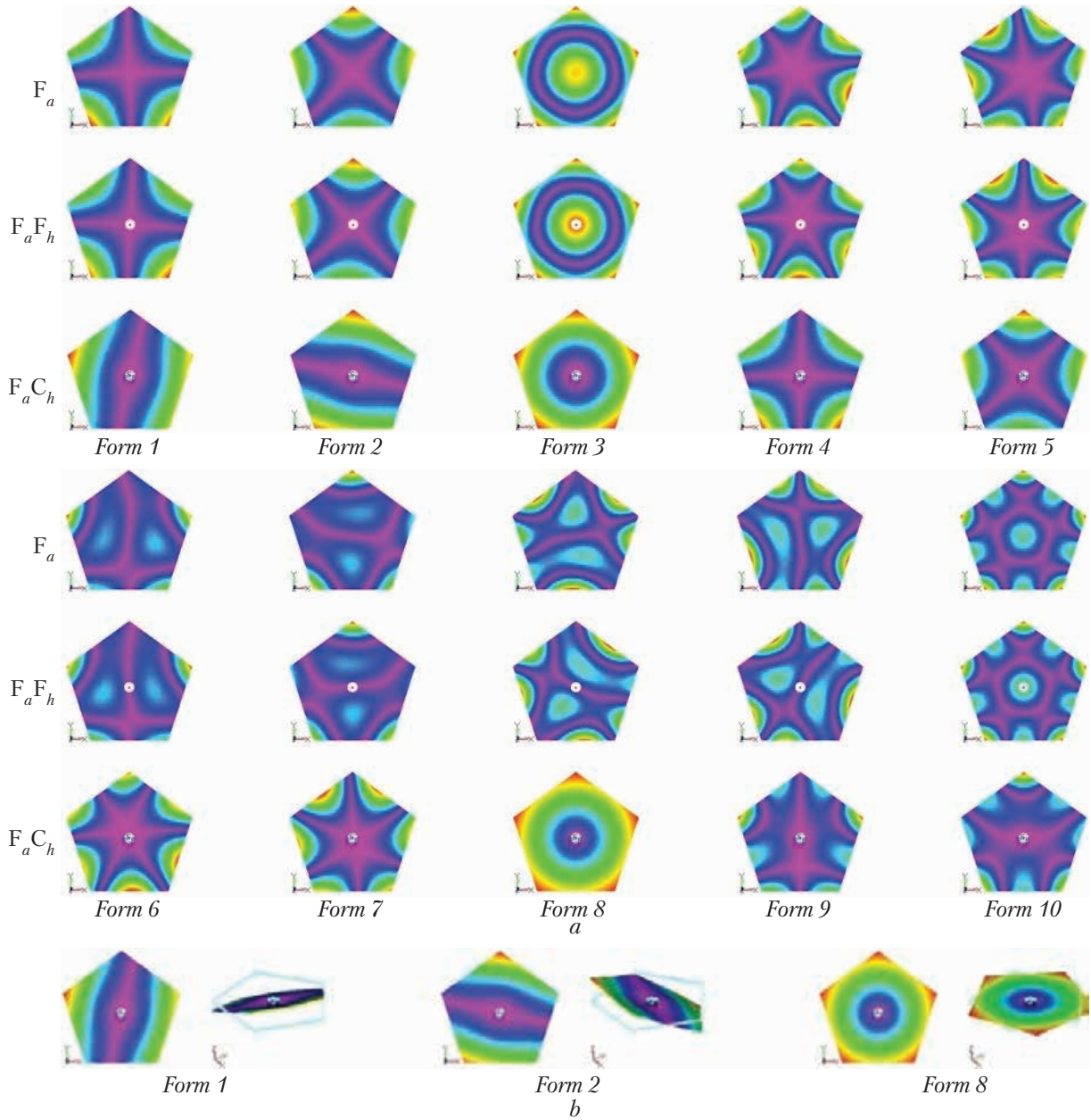


Рис. 2. Перші десять форм коливань п'ятикутних пластин з вільними краями

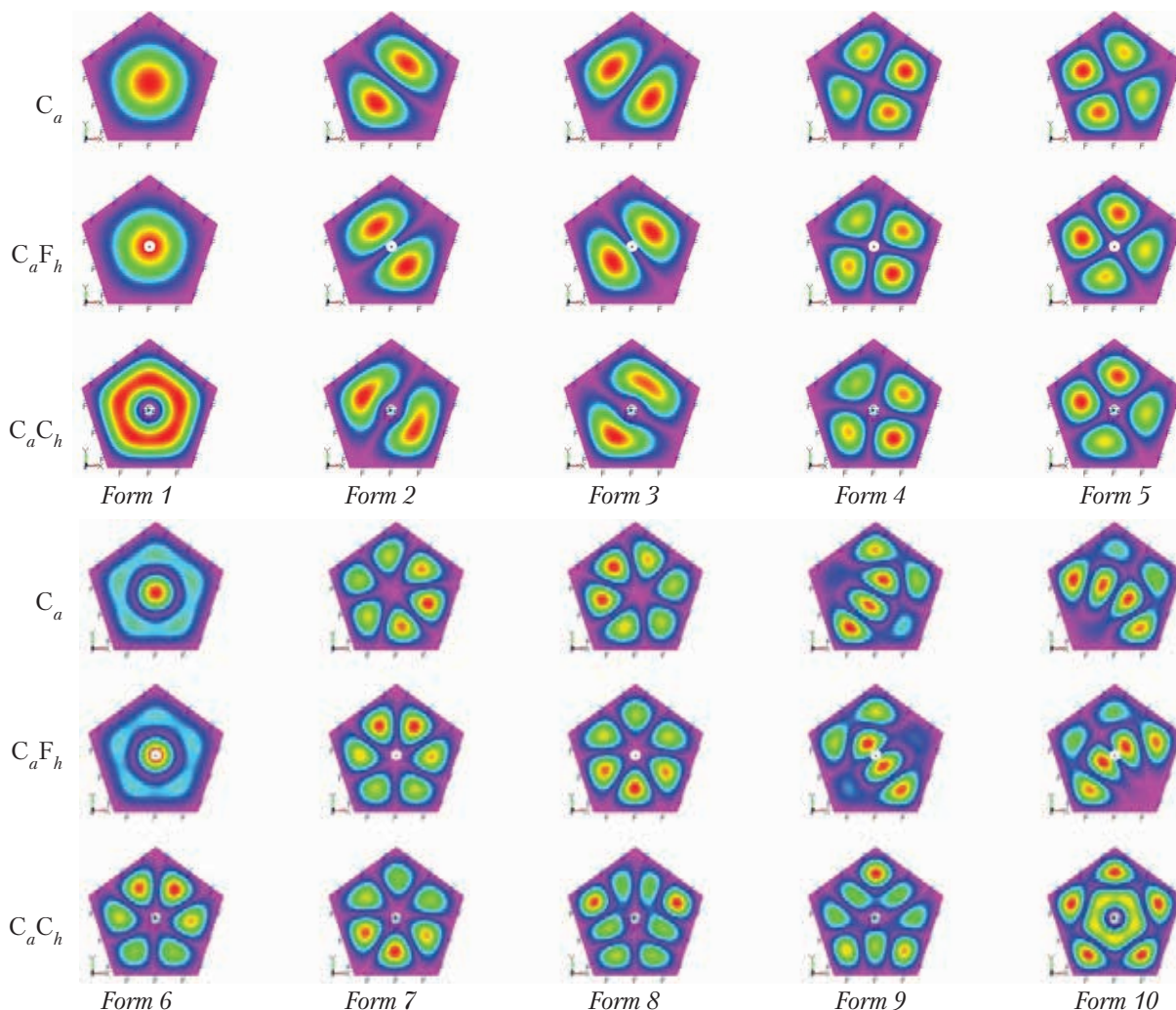


Рис. 3. Перші десять форм коливань п'ятикутних пластин з жорстко закріпленими краями

Перші десять форм коливань п'ятикутних пластин з отворами та без них з жорстко закріпленими краями представлені на рис. 3. Відмітимо, що форми коливань для пластинки $C_a C_h$ порушують порядок формоутворення починаючи з шостої, а форми, у яких всі вузлові лінії не проходять через отвір, є видозміненими: *Form 8*, *Form 9*, та *Form 10*.

Частоти вільних коливань п'ятикутних пластин з отворами та без них з жорстко закріпленими краями та різним закріпленням отвору представлені в табл. 2. Як можна бачити з таблиці, при жорсткому закріпленні отвору всі частоти більші, що пояснюється накладанням додаткових обмежень на ступені вільності гнучкої пластини, в свою чергу наявність незакріпленого отвору трохи зменшує власні частоти пластини і не впливає на формоутворення.

Експериментальний метод. Для оцінки достовірності розрахованих частот і форм вільних коливань п'ятикутної пластини з отвором розроблена експериментальна установка з механічним збудженням коливання пластини. Форми вільних коливань спостерігаються на фіксованій частоті в реальному часі з можливістю реєстрації на фотокамеру. Установка

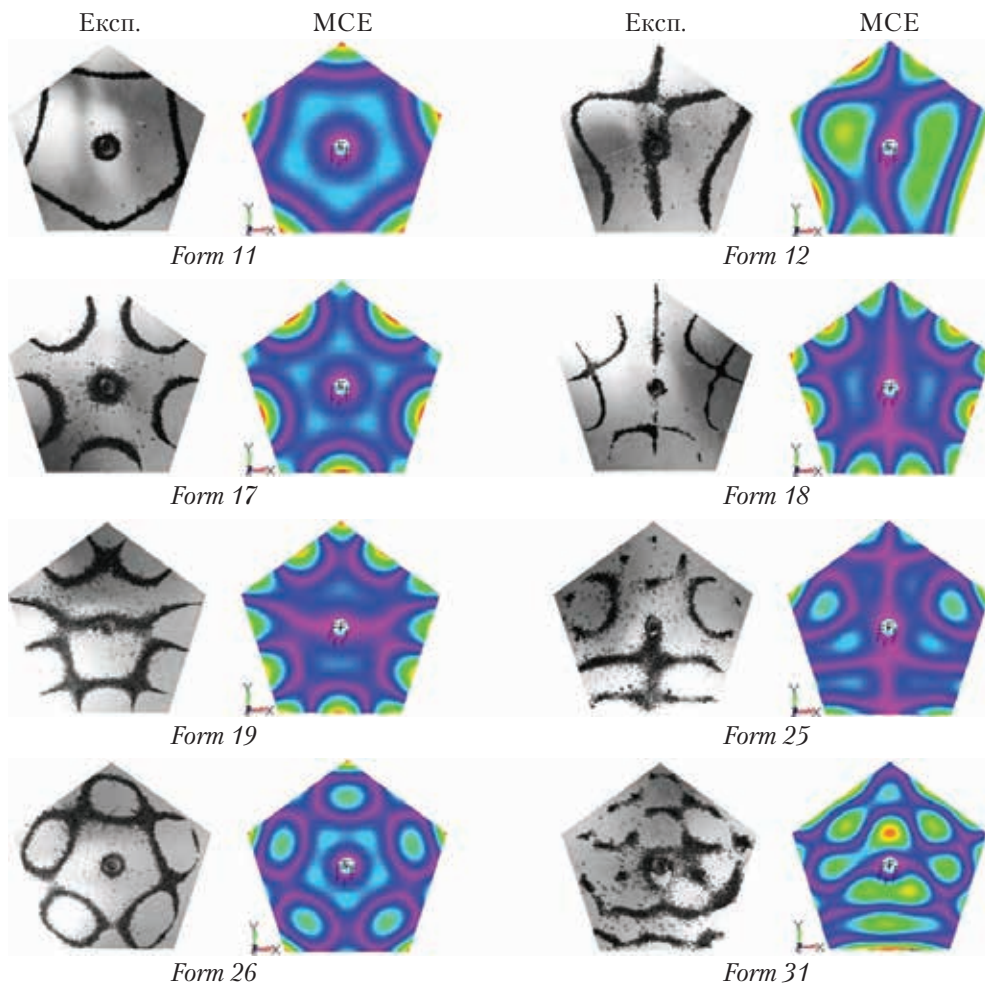


Рис. 4. Деякі форми коливань п'ятикутних пластин, отриманих МСЕ та експериментально

Таблиця 1. Частоти п'ятикутних пластин з вільними краями

Form	$f, \text{Гц}$			
	F_a	$F_a F_h$	$F_a C_h$	$F_a C_h^*$
1	605,93	600,48	397,55	629,99
2	605,96	600,50	397,67	630,03
3	1033,47	1009,42	494,43	494,43
4	1434,64	1433,68	629,99	1438,22
5	1434,65	1433,72	630,03	1438,23
6	2072,91	2069,72	1438,22	2314,52
7	2073,00	2069,84	1438,23	2314,68
8	2818,53	2813,64	2024,76	2551,79
9	2818,56	2813,66	2314,52	3299,19
10	3336,49	3320,71	2314,68	3299,59

Таблиця 2. Частоти п'ятикутних пластин з жорстко закріпленими краями

Form	f, Гц		
	C_a	$C_a F_h$	$C_a C_h$
1	1299,04	1289,93	3383,81
2	2676,38	2666,95	3571,00
3	2676,54	2667,19	3571,69
4	4314,60	4278,06	4484,57
5	4314,91	4278,24	4484,94
6	4934,76	4884,13	6381,69
7	6350,29	6341,27	6382,00
8	6350,75	6341,53	8261,25
9	7267,92	7186,38	8261,99
10	7268,76	7186,65	8704,35

Таблиця 3. Частоти п'ятикутних пластин ($F_a C_h$), з отриманих МСЕ та експериментально

Form	f, Гц		ε, %
	Експеримент	МСЕ	
11	2391	2552	6,31 %
12	3104	3299	5,91 %
17	4146	4180	0,81 %
18	5426	5459	0,60 %
19	5449	5460	0,20 %
25	7277	7552	3,64 %
26	7501	7864	4,62 %
37	11008	11634	5,38 %

представляє собою п'езокерамічний вібратор [9], який складається зі суцільного стакану з набором п'езокерамічних круглих шайб із титанату барію з контактними пластинками із мідної тонкої фольги, через які забезпечується подача змінної напруги на шайби. Стовпчик шайб притискується інерційним елементом за допомогою різьбового з'єднання. Сама пластинка горизонтально закріплюється жорстко в центрі за допомогою болтового з'єднання. Віброприскорення такого віброзбудження досягають великих значень, які недосяжні іншими типами вібраторів.

Результати експериментальних досліджень. За допомогою віброустановки отримані частоти вільних коливань алюмінієвої п'ятикутної пластини з жорстко закріпленим отвором у центрі ($F_a C_h$). Результати представлені у табл. 3, де ϵ – відхилення між експериментально отриманими та розрахованими частотами. Нумерація форм коливань здійснювалась згідно з нумерацією форм коливань в FEMAP.

Для ілюстрації наведемо деякі форми коливань на відповідних частотах, які отримані експериментальним і чисельним методами (рис. 4).

Висновки. У роботі поширено метод скінченних елементів до визначення частоти і форми вільних коливань тонких ізотропних п'ятикутних пластин з отвором у центрі при різних варіаціях жорсткого закріплення на краях та отворі.

Для підтвердження чисельно розрахованих частот і форм вільних коливань п'ятикутної пластини з жорстко закріпленим отвором у центрі запропоновано експериментальний метод, який показав хорошу збіжність отриманих результатів з похибкою, що не перевищує 6,5 %.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Grigorenko A.Ya., Efimova T.L. Spline-Approximation Method Applied to Solve Natural Vibration Problems for Rectangular Plates of Varying Thickness. *Int. Appl. Mech.* 2005. **41**, № 10. P. 1161-1169. <https://doi.org/10.1007/s10778-006-0022-2>
2. Lam K.Y., Liew K.M., Chow S.T. Free vibration analysis of isotropic and orthotropic triangular plate. *Int. J. Mech. Sci.* 1990. **32**, № 5. P. 455–464. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(90\)90172-F](https://doi.org/10.1016/0020-7403(90)90172-F)
3. Leissa A. W., Jaber N. A. Vibrations of completely free triangular plate. *Int. J. Mech. Sci.* 1992. **34**, № 8. P. 605–616. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(92\)90058-O](https://doi.org/10.1016/0020-7403(92)90058-O)
4. Liew K.M., Xiang Y., Kitipornchai S. Research on thick plate vibration: a literature survey. *J. Sound Vib.* 1995. **180**, № 1. P. 163–176. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1995.0072>
5. Wang C.Y. Vibrations of Completely Free Rounded Regular Polygonal Plates. *Int. J. Acoust. Vib.* 2015. **20**, № 2. P. 107-112.
6. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Чисельне визначення частот і форм вільних коливань рівнобедрених трикутних пластин з вільними краями. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2020. **63**, № 3. С. 28-39. <https://doi.org/10.15407/mmpmf2020.63.3.28-39>
7. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук Е.В., Новицький В.С. Чисельний аналіз вільних коливань прямокутних пластин на основ різних підходів. *Вісн. Запорізького нац. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки.* 2019. №1. С. 33-34. <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2019-1-05>
8. Borysenko M., Zavorodnii A., Skupskiy R. Numerical analysis of frequencies and forms of own collars of different forms with free zone. *J. Appl. Math. Comput. Mech.* 2019. **18**, № 1. P. 5-13. <https://doi.org/10.17512/jamcm.2019.1.01>
9. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук Е.В., Новицький В.С. Застосування експериментального і чисельного методів до дослідження вільних коливань прямокутних пластин. *Пробл. обчисл. мех. і міцн. констр.* 2019. **29**. С. 103-112. <https://doi.org/10.15421/4219009>
10. Grigorenko O.Y., Borisenko M.Y., Boichuk O.V., Vasil'eva L.Y. Free Vibrations of Triangular Plates with a Hole. *Int. Appl. Mech.* 2021. **57**, № 5. P. 534-542. <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01104-3>
11. Ma C.C., Huang C.H. Experimental whole-field interferometry for transverse vibration of plate. *J. Sound Vib.* 2004. **271**, № 3-5. P. 493-506. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00276-1](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00276-1)
12. Karlash V.L. Resonant electromechanical vibrations of piezoelectric plates. *Int. Appl. Mech.* 2005. **41**, № 7. P. 709-747. <https://doi.org/10.1007/s10778-005-0140-2>
13. Karlash V.L. Planar electroelastic vibrations of piezoceramic rectangular plate and half-disk. *Int. Appl. Mech.* 2007. **43**, № 5. P. 547-553. <https://doi.org/10.1007/s10778-007-0053-3>
14. Нестеров С.В. Изгибные колебания квадратной пластины, защемленной по контуру. *Мех. тв. тела.* 2011. №6. С. 159-165.

Надійшло до редакції 17.08.2022

REFERENCES

1. Grigorenko, A. Ya. & Efimova, T. L. (2005). Spline-Approximation Method Applied to Solve Natural Vibration Problems for Rectangular Plates of Varying Thickness. *Int. Appl. Mech.*, 41, No. 10, pp. 1161-1169. <https://doi.org/10.1007/s10778-006-0022-2>
2. Lam, K. Y., Liew, K. M. & Chow, S. T. (1990). Free vibration analysis of isotropic and orthotropic triangular plate. *Int. J. Mech. Sci.*, 32, No. 5, pp. 455-464. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(90\)90172-F](https://doi.org/10.1016/0020-7403(90)90172-F)

3. Leissa, A. W. & Jaber, N. A. (1992). Vibrations of completely free triangular plate. *Int. J. Mech. Sci.*, 34, No. 8, pp. 605-616. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(92\)90058-O](https://doi.org/10.1016/0020-7403(92)90058-O)
4. Liew, K.M., Xiang, Y. & Kitipornchai, S. (1995). Research on thick plate vibration: a literature survey, *J. Sound Vib.*, 180, No. 1, pp. 163-176. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1995.0072>
5. Wang, C.Y. (2015). Vibrations of Completely Free Rounded Regular Polygonal Plates. *Int. J. Acoust. Vib.*, 20, No. 2, pp. 107-112.
6. Grigorenko, O. Ya., Borysenko, M. Yu. & Boychuk, O. V. (2020). Numerical evaluation of frequencies and modes of free vibrations of isosceles triangular plates with free edges. *Mat. Metody ta Fiz.-Mekh. Polya*, 63, No. 3, pp. 28-39 (in Ukrainian). <https://doi.org/10.15407/mmpmf2020.63.3.28-39>
7. Grigorenko, O. Ya., Borisenko, M. Yu., Boichuk, O. V. & Novitskii, V. S. (2019). Numerical analysis of the free vibrations of rectangular plates using various approaches. *Visn. Zaporizhzhya Nat. Univ. Phys.-Mat. Sci.*, No. 1, pp. 33-41 (in Ukrainian). <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2019-1-05>
8. Borysenko, M., Zavhorodnii, A. & Skupskiy, R. (2019). Numerical analysis of frequencies and forms of own collars of different forms with free zone. *J. Appl. Math. Comput. Mech.*, 18, No. 1, pp. 5-13. <https://doi.org/10.17512/jamcm.2019.1.01>
9. Grigorenko, O. Ya., Borisenko, M. Yu., Boichuk, O. V. & Novitskii, V. S. (2019). Usage of experimental and numerical methods to study the free vibrations of rectangular plates. *Probl. Comp. Mech. Streng. Struct.*, 29, pp. 103-112 (in Ukrainian). <https://doi.org/10.15421/4219009>
10. Grigorenko, O. Y., Borisenko, M. Y., Boichuk, O. V. & Vasil'eva, L. Y. (2021). Free Vibrations of Triangular Plates with a Hole. *Int. Appl. Mech.*, 57, No. 5, pp. 534-542. <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01104-3>
11. Ma, C. C. & Huang, C. H. (2004). Experimental whole-field interferometry for transverse vibration of plate. *J. Sound Vib.*, 271, No. 3-5, pp. 493-506. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00276-1](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00276-1)
12. Karlash, V. L. (2005). Resonant electromechanical vibrations of piezoelectric plates. *Int. Appl. Mech.*, 41, No. 7, pp. 709-747. <https://doi.org/10.1007/s10778-005-0140-2>
13. Karlash, V. L. (2007). Planar electroelastic vibrations of piezoceramic rectangular plate and half-disk. *Int. Appl. Mech.*, 43, No. 5, pp. 547-553. <https://doi.org/10.1007/s10778-007-0053-3>
14. Nesterov, S. V. (2011). Bending vibrations of a square plate clamped on contour. *Solid Mech.*, No. 6, pp. 159-165 (in Russian).

Received 17.08.2022

A.Ya. Grigorenko¹, <https://orcid.org/0000-0002-4109-2672>

M.Yu. Borysenko¹, <https://orcid.org/0000-0002-7287-0975>

O.V. Boychuk², <https://orcid.org/0000-0003-1592-3660>

S.O. Sperkach³, <https://orcid.org/0000-0003-3168-6300>

A.D. Bezuglaya³, <https://orcid.org/0000-0001-8083-3210>

¹S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv

²Nikolaev National Agrarian University

³Technical center of the NAS of Ukraine, Kyiv

E-mail: ayagrigorenko1991@gmail.com, mechanics530@gmail.com,
boychuklena27@gmail.com, svetlana@nasu.kiev.ua, bezuglaya.anna24@gmail.com

FREE VIBRATIONS OF PENTAGONAL PLATES WITH A HOLE

Free vibrations of isotropic pentagonal plates with a hole in the centre with different variations of rigid fastening at the edges and the hole based on two different approaches are considered in the paper. The finite element method is widespread for calculating the frequency and form of free vibrations of plates of the specified class. Frequencies and forms of free vibrations of a pentagonal plate with a rigidly fixed hole in the centre are determined experimentally. A comparison of the results obtained by the two methods was carried out, which showed a good convergence of the obtained frequencies. The approaches implemented in the work make it possible to study the dynamic characteristics of plates of other configurations and can be used to evaluate the accuracy of other approaches.

Keywords: *pentagonal plate with a hole, frequency of free vibrations, finite element method, FEMAP, experiment.*