

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ГІПЕРБОЛОЇДНОЇ СІТЧАСТОЇ КОНСТРУКЦІЇ

У роботі досліджується гіперboloїдна сітчаста конструкція на міцність та стійкість. Моделювання геометрії та чисельний розрахунок напружено-деформованого стану, власних частот та форм вільних коливань сітчастої вежі виконано методом скінченних елементів, реалізованим в комп'ютерній програмі FEMAP з розв'язувачем NASTRAN. Досліджується міцність та стійкість гіперboloїдної сітчастої вежі при різних значеннях кутів нахилу проєкції прямолінійних твірних до контуру основи при збереженні висоти конструкції. Проводиться порівняння за міцністю та стійкістю гіперboloїдної сітчастої вежі з конусною сітчастою вежею, еквівалентною за радіусами основ, висотою, масою.

Ключові слова: гіперboloїдна сітчаста конструкція, метод скінченних елементів, FEMAP, напружено-деформований стан, власні частоти, форми вільних коливань.

Гіперboloїдна конструкція, сконструювана у вигляді несучої сталевий сітчастої оболонки радянським інженером В. Г. Шуховим, досі розцінюється як вагомий внесок в історію архітектури. Вежа Шухова має оригінальну витончену сітчасту конструкцію, завдяки чому досягається мінімальна вітрове навантаження, що представляє головну небезпеку для високих споруд. За формою секції башти – це однопорожнинні гіперboloїди обертання, зроблені з прямих балок, що упираються кінцями в кільцеві підставки. Основний принцип, закладений Шуховим при проектуванні, – певна частка рухливості елементів конструкції – забезпечує самокомпенсацію по відношенню до зовнішніх навантажень Ажурна сталева конструкція стійка і практична, поєднує в собі міцність і легкість.

Гіперboloїдні конструкції Шухов використовував у сотнях споруд: водонапірних вежах, телерадіовежах, опорах ліній електропередач, щоглах військових кораблів. Водонапірна вежа Шухова була встановлена і у Миколаєві. Сітчастих водонапірних веж Шухов спроектував сотні, при цьому кожна вежа мала свої індивідуальні відмінності – як необхідні технічні, так і художні.

За патентом Шухова досі будуються гіперboloїдні вежі по всьому світу (Цюрих – 2003, Гуанчжоу – 2010).

У наш час задачі із складною геометрією зазвичай вирішуються чисельними методами, до яких відносяться метод скінченних елементів. Цей метод не обмежений ні формою тіла, ні способом навантаження. Це разом з потужною обчислювальною технікою сприяє його поширенню в інженерній практиці. Програмний засіб FEMAP дає можливість розраховувати міцність, стійкість конструкцій будь-якої форми при будь-яких способах навантаження.

Основна ідея методу скінченних елементів полягає в тому, що область визначення неперервної величини розбивається на скінчене число малих областей – скінченних елементів. Ці елементи в сукупності апроксимують форму області.

У NASTRAN реалізовано варіант методу скінченних елементів, в якому шуканим є вектор вузлових переміщень $\{q\}$, що визначаються для задач статички з рівняння жорсткості [1, 178]

$$[\mathbf{K}]\{q\} = \{P\}, \quad (1)$$

де $\{P\}$ – вектор узагальнених сил, $[\mathbf{K}]$ – матриця жорсткості конструкції, що визначається матеріалом та формою конструкції.

Переміщення і деформації будь-яких точок всередині елемента виражається через матрицю $[\Phi]$ базисних функцій скінченного елемента та значення переміщень $\{q\}_e$ вузлів елемента, що є результатом вибірки з глобального вектора вузлових переміщень $\{q\}$:

$$\{U\} = [\Phi]\{q\}_e. \quad (2)$$

Деформації і напруження будь-яких точок всередині елемента визначаються рівняннями:

$$\{\varepsilon\} = [\mathbf{B}]\{q\}_e, \quad (3)$$

$$\{\sigma\} = [\mathbf{D}]\{\varepsilon^e\}, \quad (4)$$

де $[\mathbf{B}]$ – блочна матриця диференціювання по глобальним координатам, $[\mathbf{D}]$ – матриця модулів пружності.

Метод скінченних елементів і чисельні алгоритми розв'язування динамічних задач, реалізовані в NASTRAN, дозволяють досліджувати досить широке коло прикладних проблем динаміки. При встановленні власних частот та форм коливань в NASTRAN розв'язується рівняння [1, 186]:

$$\det([\mathbf{K}] - \omega^2 [\mathbf{M}]) = 0. \quad (5)$$

де $[\mathbf{M}]$ – матриця мас конструкції. Рівняння (5) має N додатних розв'язків – власних частот ω_k , причому можливі парні значення. Зазвичай шукаються не всі корні рівняння (5), а декілька найменших значень, оскільки тільки при нижчих власних частотах амплітуди коливань мають відносно великі значення.

Вектор вузлових зміщень конструкції $\{\lambda\}$ є лінійною комбінацією з N гармонічних коливальних рухів:

$$\{\lambda\} = \sum_{k=1}^N \{A_k\} \cos(\omega_k t + \beta_k). \quad (6)$$

де $\{A_k\}$ – вектор амплітудних значень вузлових переміщень, β_k – початкова фаза коливань, що відповідають частоті ω_k .

Кожному значенню ω_k відповідає певне співвідношення між амплітудами A_{ki} , тобто всі амплітуди вектора можуть бути виражені через одну з них. Співвідношення між амплітудами A_{ki} визначають k -ту власну форму коливань. Всі ступені вільності в процесі коливань з власною частотою ω_k здійснюють синхронний рух. Таким чином, конфігурація конструкції не змінює своєї базової форми, а змінюються тільки амплітуди.

Зміна форми лінійної пружної конструкції з часом, коли вона коливається вільно або здійснює вимушені коливання, є лінійною комбінацією всіх її власних форм.

Оскільки значення компонентів власних векторів $\{A_k\}$ можуть бути знайдені не однозначно, а з точністю до постійного множника, то звичайно їх нормують за правилом:

$$\{A_k\}^T [\mathbf{M}] \{A_k\} = 1. \quad (7)$$

Для розрахунку програмним засобом FEMAP конструкції необхідно спочатку створити скінченно-елементну модель і задати граничні умови. Скінченно-елементні моделі сітчастих веж створювались на основі змодельованих геометрій конструкцій.

Однопорожнинний гіперболоїд є двічі лінійчатою поверхнею. Якщо він є гіперболоїдом обертаня, то його можна отримати обертанням прямої навколо іншої прямої, мимобіжною з нею. Саме цю властивість лінійчатих однопорожнинних гіперболоїдів використовують в архітектурі.

Для побудови геометрії сітчастої конструкції радіуси основ та висота задавались такими ж як у водонапірної вежі Шухова в місті Миколаєві, а саме $R_H = 6,46$ м (42 фути), $R_B = 3,504$ м (23 фути), $H = 25,6$ м (84 фути). Відповідно вибирались кількості прямолінійних стержнів (24 пари) каркасу вежі та горизонтальних кілець (9 проміжних), що укріплюють каркас конструкції. Сітчаста поверхня вежі являє собою єдину систему прямолінійних стержнів та кілець, з'єднаних заклепками між собою.

Геометричні моделі конструкцій відрізняються кутами нахилу α проєкцій прямолінійних твірних до контуру основи. У першій моделі $\alpha = 80^\circ$, у другій $\alpha = 85^\circ$, у третій $\alpha = 90^\circ$, у четвертій $\alpha = 95^\circ$, у п'ятій $\alpha = 100^\circ$. Отже у першій (рис. 1, а) і другій моделях (рис. 1, б) найвужчі перерізи займають проміжне положення між основами, причому для першої моделі це положення нижче, у третій моделі

(рис. 1, *в*) верхній переріз є самим вузьким (горлом), у четвертій (рис. 1, *г*) і п'ятій моделі (рис. 1, *д*) найвузьчі перерізи розташовані на продовженнях твірних вище верхньої основи, причому для п'ятої моделі це положення вище. Відстані між точками обпирання стержнів у нижню основу для всіх гіперболоїдних моделей однаковий. Розташування розпірних кілець по висоті еквівалентне.

В якості матеріалу задавалася сталь з характеристиками: модуль Юнга $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,32$, густина $\rho = 7800$ кг/м³.

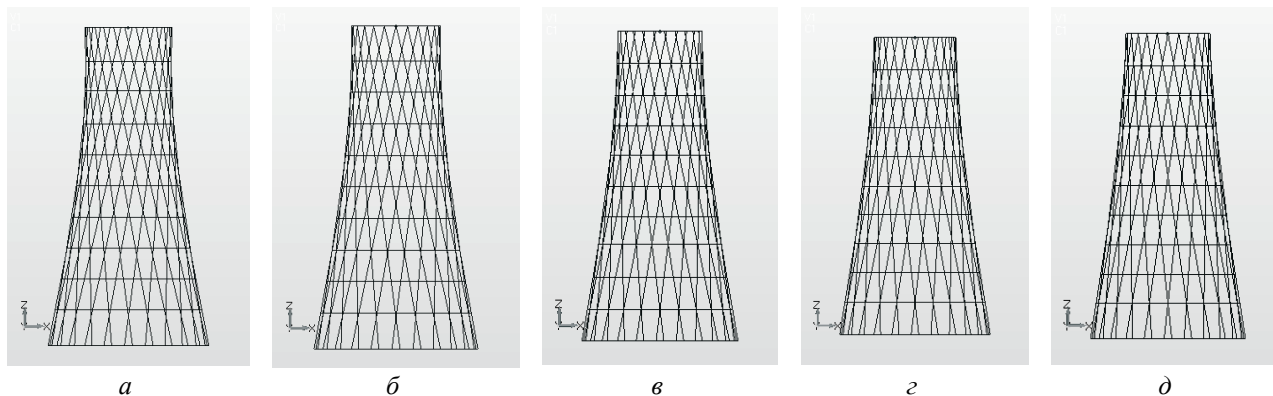


Рис. 1. Геометричні моделі гіперболоїдних веж

Для розбивки всіх моделей веж були вибрані скінченні елементи типу BEAM з профілем кутника 11×11 см товщиною 8 мм для прямих і CURVED BEAM з відповідними радіусами кривизни з прямокутним профілем розмірами 10×1 см для проміжних кілець та 20×2 см для опорних.

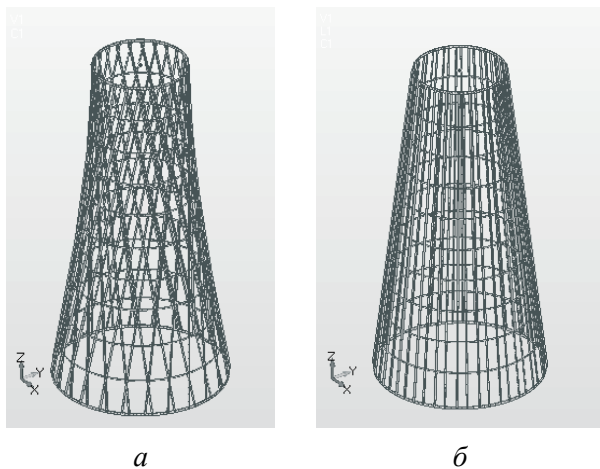


Рис. 2. Скінченно-елементні моделі гіперболоїдної (*а*), конусної (*б*) веж

Для порівняння будувалася сітчаста конструкція у формі зрізаного конуса висотою і радіусами основ рівними відповідно висоті гіперболоїдної вежі і радіусам основ вежі. Скінченно-елементні моделі гіперболоїдної (рис. 2, *а*) та конусної (рис. 2, *б*) сітчастих веж представлені.

Маси скінченно-елементних гіперболоїдних моделей не відрізняються більше ніж на 0,2%, маса скінченно-елементної конусної моделі відрізняється від мас гіперболоїдних моделей менше ніж на 0,5% при заданих поперечних перерізах стержнів та кілець.

Конструкції закріплювалися у нижніх вузлах. Спочатку проводився розрахунок власних частот та форм коливань для ненавантажених веж. Відношення перших власних частот всіх змодельованих веж до відповідних частот гіперболоїдної вежі третьої моделі, наведені в таблиці 1.

Таблиця 1

Приведенні значення власних частот коливань гіперболоїдних та конусної веж

№ частот	Гіперболоїдна вежа					Конусна вежа
	Модель 1	Модель 2	Модель 3	Модель 4	Модель 5	
Mode 1, 2	1,19	1,11	1	0,91	0,81	0,26
Mode 3, 4	1,20	1,11	1	0,92	0,82	0,30
Mode 5, 6	1,16	1,08	1	0,92	0,81	0,30
Mode 7, 8	1,15	1,08	1	0,92	0,84	0,30
Mode 9, 10	1,17	1,08	1	0,93	0,86	0,38

Спостерігається зменшення значень частот для гіперboloїдної вежі при збільшенні кута нахилу проєкцій прямолинійних твірних до контуру основи. Для конусної вежі частоти в 2,5 – 3,5 разу менші.

Деякі відповідні форми коливань представлені на рисунку 3 для першої моделі гіперboloїчної та для конічної сітчастих веж. Для наочності зміщення показані в збільшеному вигляді. Так як вежі мають осьову симетрію, то частоти утворюють пари близьких значень, яким відповідають однакові форми, зміщені по фазі. Форми власних коливань та порядок їх виникнення не однаковий для розглядуваних веж. Власні частоти та форми коливань розраховані для ненавантажених конструкцій.

На водонапірну вежу діє вага бака з водою та сила вітру. Вертикальне навантаження вежі задавалось 6500 кН. Розрахунки показали, що навіть при дуже сильному вітру, вітрове навантаження порівняно з вертикальним навантаженням є незначним, тому не задавалось. Для рівномірності прикладання вертикальне навантаження передавалось на вузли верхньої основи через RIGID-елемент. Враховувалася також власна вага конструкції [2, 281–282].

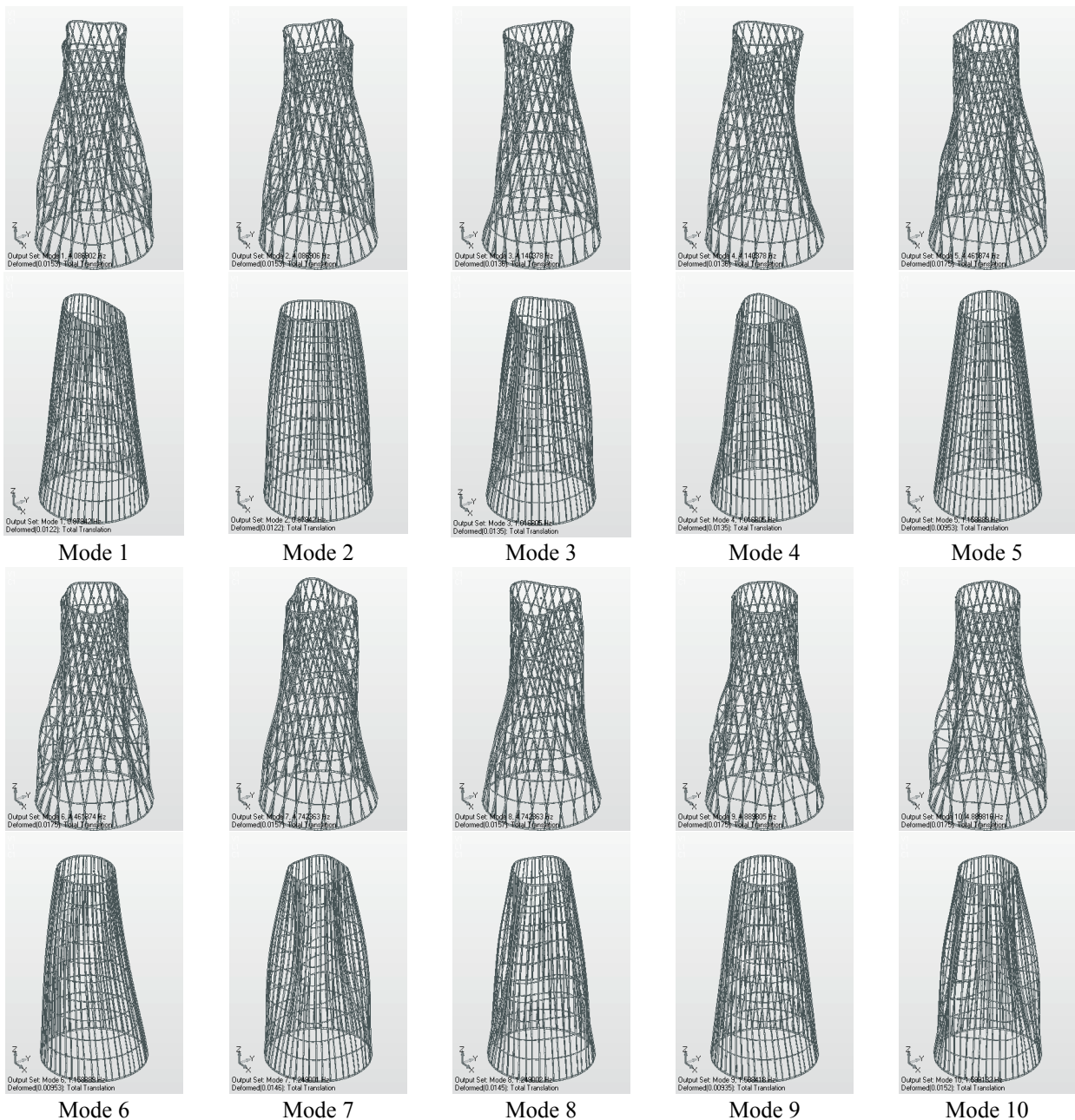


Рис. 3. Форми власних коливань першої моделі гіперboloїдної та конусної сітчастих веж

Відношення максимальних напружень розтягу і стиску та коефіцієнтів запасу стійкості для гіперболоїдних веж у відношенні до відповідних значень напружень гіперболоїдної вежі третьої моделі, отримані при заданому навантаженні, наведені в таблиці 2.

Спостерігається загальна тенденція зменшення значень напружень стиску в прямолінійних стернях та напружень розтягу в розпірних кільцях гіперболоїдної вежі при збільшенні кута нахилу проєкцій прямолінійних твірних до контуру основи. Поведінка коефіцієнта запасу стійкості аналогічна.

Таблиця 2

Приведенні значення максимальних напружень та коефіцієнтів стійкості для гіперболоїдних веж

	Гіперболоїдна вежа				
	Модель 1	Модель 2	Модель 3	Модель 4	Модель 5
Напруження розтягу	1,70	1,42	1	1,06	0,81
Напруження стиску	1,09	0,99	1	0,98	0,98
Коефіцієнт запасу стійкості	1,2	1,1	1	0,9	0,8

Для конусної вежі коефіцієнт запасу стійкості в 2,8 разу менший в порівнянні із коефіцієнт запасу стійкості гіперболоїдної вежі третьої моделі.

Список використаних джерел

1. Рудаков К. М. FEMAP. Геометричне та скінченно-елементне моделювання конструкцій у MSC. visual Nastran for Windows : посібник / К. М. Рудаков. — К. : НТУУ «КПІ», 2005. — 218 с.
2. Шимкович Д. Г. Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows / Д. Г. Шимкович. — М. : ДМК, 2001. — 447 с.

Olena BOYCHUK, Maxim BORISENKO
Mykolaiv

HYPERBOLOID MESH CONSTRUCTION COMPUTER SIMULATION

In this paper the hyperboloid mesh construction is researched for strength and stability. Mesh tower geometry modeling and numerical calculations of its stress-strain state, natural frequencies and free oscillations forms were made by finite element method implemented in FEMAP software with NASTRAN solver. Hyperboloid mesh tower's durability and stability at various rectilinear generators projections to a basis contour tilt angles values while maintaining the height of the structure are researched. An equivalent height, base radiuses and weight hyperboloid and conical mesh tower's strength and stability comparison is carried out.

Key words: hyperboloid mesh construction, finite element method, FEMAP, stress-deformed state, the natural frequencies, forms of free oscillations.

Елена БОЙЧУК, Максим БОРИСЕНКО
Николаев

**КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ГИПЕРБОЛОИДНОЙ СЕТЧАТОЙ КОНСТРУКЦИИ**

В работе исследуется гиперболоидная сетчатая конструкция на прочность и устойчивость. Моделирование геометрии и численный расчет напряженно-деформированного состояния, собственных частот и форм свободных колебаний сетчатой башни выполнен методом конечных элементов, реализованным в компьютерной программе FEMAP с решателем NASTRAN. Исследуется прочность и устойчивость гиперболоидной сетчатой башни при различных значениях углов наклона проекций прямолінійных образующих к контуру основания при сохранении высоты конструкции. Проводится сравнение по прочности и устойчивости гиперболоидной сетчатой башни с конусной сетчатой башней, эквивалентной по радиусам оснований, высоте, массе.

Ключевые слова: гиперболоидная сетчатая конструкция, метод конечных элементов, FEMAP, напряженно-деформированное состояние, собственные частоты, формы свободных колебаний.

Стаття надійшла до редколегії 05.03.2016