

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ТОНКИХ ПЛАСТИН З РІЗНИХ МАТЕРІАЛІВ

В роботі досліджується тонка квадратна пластина з різними фізико-механічними характеристиками з вільними краями. Моделювання геометрії та чисельний розрахунок частот та форм вільних коливань пластин виконано методом скінченних елементів, який реалізовано за допомогою комп'ютерної програми FEMAP з розв'язувачем NASTRAN. Проводиться порівняльний аналіз розрахованих власних частот квадратної пластини з частотами, які отриманні чисельно та експериментально іншими авторами.

Ключові слова: квадратна пластина, метод скінченних елементів, FEMAP, власні частоти, форми вільних коливань.

У різних галузях сучасної техніки пластини різноманітних форм є найбільш поширеними елементами тонкостінних конструкцій. Вони широко застосовуються в будівництві, машинобудуванні, електротехніці і в інших областях техніки. У будівництві це перекриття, робочі майданчики, деякі види фундаментів; в машинобудуванні – елементи технологічного обладнання; в електроніці – друковані плати з фольгованого склопластику і т. п.

При проектуванні і будівництві різних інженерних споруд необхідно проводити розрахунок несучих елементів конструкцій на випадок дії різноманітних раптових динамічних навантажень. Тому, вивчення динамічної поведінки елементів інженерних споруд з урахуванням властивостей матеріалу і впливу навколишнього середовища при динамічному навантаженні є актуальною проблемою. У зв'язку з цим є необхідним розробити чисельний підхід до визначення частот та форм власних коливань, а також підхід до моделювання коливальних процесів в пластинках різної форми.

Протягом двох століть коливання прямокутних пластин експериментально відтворювались і класифікувались у великій кількості робіт, детальний огляд деяких публікацій наведено в роботі [2]. Однією з перших робіт, яка розглядається як класична задача про коливання тонких ізотропних прямокутних пластин з вільними краями є трактат Хладні з акустики [4]. Чисельний розрахунок частот і форм вільних коливань квадратної пластини варіаційним методом Рітца вперше представлено в [6]. В статті В. В. Мелешка і С. О. Папкова [2] розглянуто класичну задачу коливань прямокутної пластини та проводиться порівняння теоретичних і експериментальних даних. Наше дослідження спрямоване на розрахунок квадратної пластини розглянутої в [2], порівнянню отриманих результатів та поширенню запропонованого чисельного підходу на задачі по визначенню частот та форм вільних коливань пластин іншої форми з вільними краями.

Моделювання та чисельний розрахунок проводилися методом скінченних елементів (МСЕ) реалізованим на ліцензійному програмному засобі Femap з розв'язувачем NX Nastran. Достовірність отриманих результатів забезпечується використанням апробованих чисельних методів і критерію практичної збіжності; узгодженням чисельних результатів з експериментальними; чисельними розв'язками тестових задач.

Основна ідея методу скінченних елементів полягає в тому, що область визначення неперервної величини розбивається на скінчене число малих областей – скінченних елементів. Ці елементи в сукупності апроксимують форму області.

Рівняння динаміки для МСЕ можна отримати, якщо розглянути рівняння руху механічної системи зі скінченною кількістю ступенів вільності, яка описується системою рівнянь Лагранжа II роду [3].

Дане рівняння руху для пластини при її скінченоелементній апроксимації з урахуванням відсутності зовнішніх сил ($F(t) = 0$) прийме вигляд:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \lambda_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \lambda_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Використовуючи дискретну форму функціоналу потенціальної та кінетичної енергії

$$П = \frac{1}{2} \{\lambda\}_i^T K_i \{\lambda\}_i, \quad T = \frac{1}{2} \{\dot{\lambda}\}_i^T M_i \{\dot{\lambda}\}_i,$$

з рівняння Лагранжа (1) отримаємо рівняння руху оболонки при відсутності демпфування:

$$[M] \{\ddot{\lambda}\} + [K] \{\lambda\} = \{0\}. \quad (2)$$

Розв'язок рівняння (1) можна шукати у вигляді

$$\{\lambda\} = \{A\} \cos(\omega t + \beta), \quad (3)$$

де $\{A\}$ – вектор амплітудних значень вузлових переміщень, що визначають форму власних коливань; ω – циклічна частота, β – фаза коливань. Після прямої підстановки (3) у (2) та скорочення на $\cos(\omega t + \beta)$ отримаємо систему алгебраїчних рівнянь:

$$(-\omega^2 [M] + [K]) \{A\} = \{0\}. \quad (4)$$

У цієї системи ненульові значення компонентів $\{A\}$ можливі лише при умові, що

$$\det([K] - \omega^2 [M]) = 0. \quad (5)$$

Якщо квадратні матриці $[M]$ та $[K]$ – додатньо визначені (звичайно для задачі лінійної пружності), то рівняння (5) має N додатних розв'язків – власних частот ω_k , причому можливі парні значення (тут N – кількість невідомих у системі алгебраїчних рівнянь (4)).

Маючи N значень власних частот ω_k , розв'язок системи (2) можна шукати у вигляді лінійної комбінації з N виразів (3):

$$\{\lambda\} = \sum_{k=1}^N \{A_k\} \cos(\omega_k t + \beta_k). \quad (6)$$

Для визначення частот та форм вільних коливань, якщо дисипація енергії та демпфування не враховується, доцільно використовувати як основний, метод Ланцоша (Lanczos), що потребує менших ресурсів (часу обчислень і вільної пам'яті на жорсткому диску) порівняно з іншими методами [3].

Детальніше ознайомитися з методикою визначення частот та форм вільних коливань методом скінченних елементів реалізованого на програмному засобі FEMAP можна в роботі [1].

За допомогою FEMAP була побудована геометрія прямокутної пластинки постійної товщини $d = 1$ мм розмірами $a = 80$ мм та $b = 80$ мм. Модель жорстко закріплювалась в центрі мас. В якості ізотропного матеріалу вибирався алюміній (модуль Юнга $E = 71$ ГПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,33$, густина $\rho = 2710$ кг/м³). Така геометрія і матеріал були вибрані у відповідності з геометрією і матеріалом пластинки, яку досліджував Мелешко та Папков в роботі [2]. Розбивка проводилась *plate*-елементами постійної товщини розмірами 1×1 мм і вміщує 6561 вузлів та 6400 прямокутних елементів (рис. 1). За допомогою вищеописаної методики досліджувався спектр резонансних частот і форми коливань прямокутної пластинки постійної товщини.

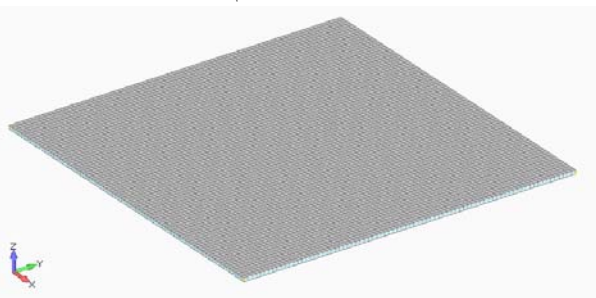


Рис. 1. Скінченноелементна модель досліджуваної пластинки

Значення власних частих частот, отриманих за допомогою програмного забезпечення FEMAP з розв'язувачем Nastran, добре узгоджуються із результатами, отриманими іншими авторами, а саме: на основі оптичного методу голографічної інтерферометрії (AF-ESPI) [5], на основі методу скінченних елементів (FEM) і згідно з алгоритмом розробленим Мелешко та Папковим (Т). У табл. 1 представлено порівняння перших п'яти власних частот, отриманих трьома зазначеними способами і чисельно розрахованих в даній роботі.

Таблиця 1

Частоти вільних коливань отримані різними авторами

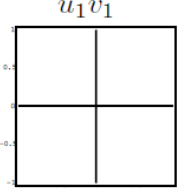
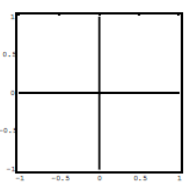
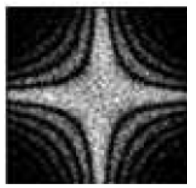
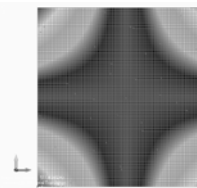
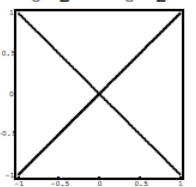
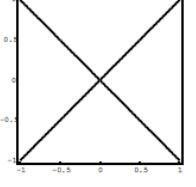
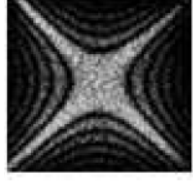
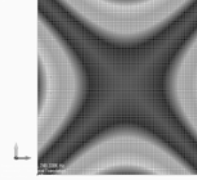
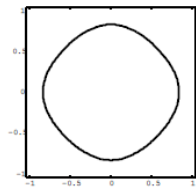
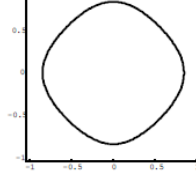
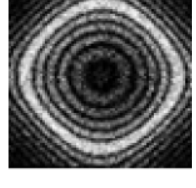
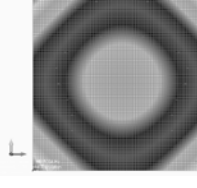
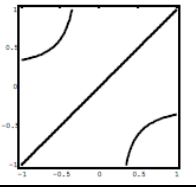
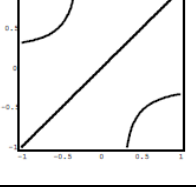

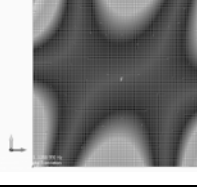
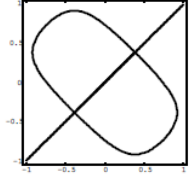
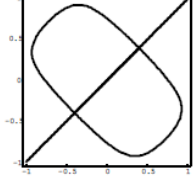
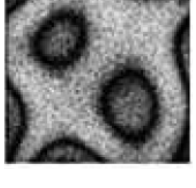
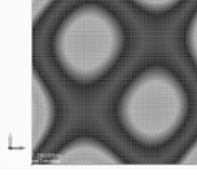
Власна частота, Гц					
N	1	2	3	4	5
AF-ESPI	494	735	890	1271	2330
FEM	510	745	945	1324	2357
Т	505	738	935	1314	2335
FEMAP	512	748	949	1328	2364

Представлені дані показують гарну відповідність між результатами чисельного моделювання та експериментально знайденими власними частотами.

Деякі форми коливань досліджуваної пластинки визначені за формулами Рітца, експериментально, безпосередньо самі рисунки Хладні та форми отримані за допомогою FEMAP представленні в табл. 2.

Таблиця 2

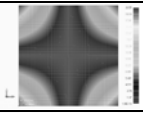
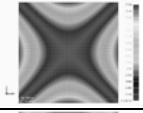
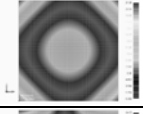
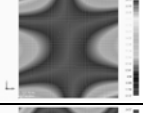
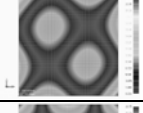
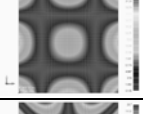
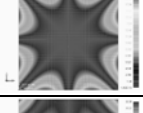
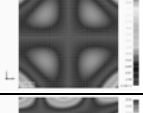
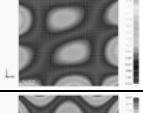
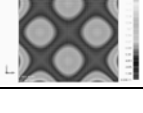
Форми вільних коливань отримані різними авторами

	Форми за Рітцом	Рисунки Хладні	Експеримент	FEMAP
1A	$u_1 v_1$ 			
2S	$u_0 v_2 - v_0 u_2$ 			
3S	$u_0 v_2 + v_0 u_2$ 			
4SA	$u_1 v_2 - v_1 u_2$ 			
5SA	$u_0 v_3 - v_0 u_3$ 			

Також проводився розрахунок на власні частоти прямокутні пластини вибраної геометрії при інших фізико-механічних параметрах. В якості матеріалів, крім алюмінію, вибирались сталь ($E = 212$ ГПа, $\nu = 0,3$, $\rho = 7800$ кг/м³) і мідь ($E = 110$ ГПа, $\nu = 0,35$, $\rho = 8920$ кг/м³). Розраховані частоти наведенні в табл. 3.

Таблиця 3

Частоти і форми вільних коливань квадратної пластини при різних фізико-механічних параметрах

n	$f_{\text{алюм.}}, \text{ Гц}$	$f_{\text{сталь}}, \text{ Гц}$	$f_{\text{мідь}}, \text{ Гц}$	Форми коливань
1A	512	525	349	
2S	748	767	511	
3S	949	964	658	
4SA	1328	1359	908	
5SA	2364	2409	1631	
6S	2428	2484	1663	
7A	2637	2700	1804	
8A	2980	3037	2056	
9SA	4022	4111	2759	
10S	4504	4596	3102	

Проведений чисельний розрахунок частот та форм вільних коливань квадратної пластини з вільними краями з різних матеріалів.

Отримані чисельні результати добре узгоджуються з результатами отриманими чисельно та експериментально іншими авторами, що дає змогу зробити висновок про ефективність запропонованого чисельного підходу.

Для аналізу впливу характеристик матеріалу на динамічні характеристики розглянуто три матеріали (сталь, алюміній і мідь). Аналізуючи отримані дані, можна зробити висновок про те, що частоти вільних коливань при однакових геометричних параметрах пластини із сталі і алюмінію мають незначну відмінність через невелику відмінність швидкості розповсюдження об'ємного розширення, яка залежить від модуля Юнга і густини матеріалу. Частоти для пластини з міді, при ідентичній геометрії, в середньому в 1,46 разів менші відповідних частот оболонок із сталі.

Список використаних джерел

1. Будак В. Д. Определение собственных частот эллиптической оболочки постоянной толщины методом конечных элементов / В. Д. Будак, А. Я. Григоренко, М. Ю. Борисенко, Е. В. Бойчук // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2014. — 57, № 1. — С. 145—152.
2. Мелешко В. В. Изгибные колебания упругих прямоугольных пластин со свободными краями: от Хладни (1809) и Ритца (1990) до наших дней / В. В. Мелешко, С. О. Папков // Акустичний вісник. — 2009. — 12, № 4. — С. 34—51.
3. Рудаков К. М. FEMAP. Геометричне та скінченно-елементне моделювання конструкцій у MSC. visual Nastran for Windows. Посібник. — К. : НТУУ «КПІ», 2005. — 218 с.
4. Chladni E.-F.-F. Trait'e d'acoustique. — Paris: Courcier, 1809. — 375 p.
5. Ma C.-C., Huang C.-H. Experimental whole-field interferometry for transverse vibration of plates // J. Sound Vib. — 2004. — 271. — P. 493—506.
6. Ritz W. Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien R'andern // Ann. Physik. — 1909. — 4 Folge, 28. — P. 737—786.

Maxim BORISENKO, Olena BOYCHUK, Irina BORISENKO, Yuriy ROGOVTSOV
Mykolaiv

COMPUTER MODELING OF FREE VIBRATIONS OF THIN PLATES WITH DIFFERENT MATERIALS

In this paper thin square plates with various physical and mechanical properties with the free edges is investigated. Plate geometry modeling and numerical calculations of natural frequencies and free oscillations forms were made by finite element method implemented in FEMAP software with NASTRAN solver. Comparative analysis the calculated natural frequencies of a square plate with frequencies obtained numerically and experimentally by other authors.

Key words: square plate, circular plate, finite element method, FEMAP, natural frequencies, free oscillations forms.

Максим БОРИСЕНКО, Елена БОЙЧУК, Ирина БОРИСЕНКО, Юрий РОГОВЦОВ
г. Николаев

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТОНКИХ ПЛАСТИН С РАЗНЫХ МАТЕРИАЛОВ

В работе исследуется тонкая квадратная пластина с разными физико-механическими характеристиками со свободными краями. Моделирование геометрии и численный расчет частот и форм свободных колебаний пластин выполнено методом конечных элементов, который реализован с помощью компьютерной программы FEMAP с решателем NASTRAN. Проводится сравнительный анализ рассчитанных собственных частот квадратной пластины с частотами, которые получены численно и экспериментально другими авторами.

Ключевые слова: квадратная пластина, метод конечных элементов, FEMAP, собственные частоты, формы свободных колебаний.

Стаття надійшла до редколегії 27.09.2016