

УДК 539.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В.Д. Буда¹, А.Я. Григоренко², М.Ю. Борисенко¹, Е.В. Бойчук¹

¹ Николаев. нац. ун-т им. В.А. Сухомлинского
ул. Никольская, 24, г. Николаев, Украина,

² Ин-т механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины
ул. Нестерова, 3, г. Киев, Украина

Рассматриваются свободные колебания тонкой изотропной эллиптической оболочки постоянной толщины на основе метода конечных элементов реализованного на высокопроизводительном программном обеспечении для инженерного анализа – Femap.

Ключевые слова: собственные частоты, формы колебаний, метод конечных элементов, эллиптическая оболочка.

Постановка проблемы. Во многих областях техники широкое применение находят некруговые цилиндрические оболочки. Для эксплуатации таких конструкций требуются определенные условия прочности и надежности. В связи с этим особое значение приобретают надежные методы численного и экспериментального определения параметров устойчивости таких конструкций, в частности, определение резонансных частот.

В данной работе исследуются свободные колебания консольно закрепленной эллиптической цилиндрической оболочки постоянной толщины. Задачам о свободных колебаниях некруговых цилиндрических оболочек посвящено небольшое количество публикаций. В работе [1] рассматривались свободные колебания элементов оболочечных конструкций. В [2] исследовались свободные колебания некруговых цилиндрических оболочек. В [3] к изучению колебаний цилиндрических оболочек с эллиптическим поперечным сечением применялись теории оболочек высших порядков. Анализ отмеченных публикаций дает возможность сделать вывод, что не существует единой точки зрения относительно применения того или другого подхода к решению указанного класса задач.

В настоящее время широкое применение для решения задач механики набрало использование САЕ систем, которые дают пользователю возможность оценить поведение компьютерной модели изделия в реальных условиях эксплуатации, проверить дееспособность конструкции без значительных вложений времени и средств. Одной из таких систем является пре- и пост-процессор для выполнения инженерного анализа методом конечных элементов – Femap с решателем NX Nastran [4].

Целью настоящей работы является исследование свободных колебаний упругой изотропной цилиндрической оболочки эллиптического поперечного

сечения на основе программы Femap и производится их сравнение с экспериментально полученными значениями.

Исходные соотношения. Будем рассматривать задачу о собственных частотах и формах колебаний. Уравнение динамики при отсутствии внешних влияний и переменных кинематических граничных условий примет вид

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + [C]\{\dot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = 0, \quad (1)$$

где $[M]$ – матрица масс конструкции; $[C]$ – матрица коэффициентов сил вязкого демпфирования; $[K]$ – матрица жесткости; $\{q\}$ – вектор узловых смещений; точкой и двумя точками над q в уравнении обозначены первая и вторая ее производные по времени соответственно.

В случае отсутствия демпфирования уравнение (1) примет вид

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = 0. \quad (2)$$

Решение (2) можно искать в виде

$$\{q(t)\} = \{A\} \cos(\omega t + \beta), \quad (3)$$

где $\{A\}$ – вектор амплитудных значений узловых перемещений; $\omega = 2\pi f$ – круговая частота; β – фаза колебаний. После прямой подстановки (3) в (2) и сокращения на $\cos(\omega t + \beta)$ получим систему алгебраических уравнений:

$$(-\omega^2[M] + [K])\{A\} = 0. \quad (4)$$

В этой системе ненулевые значения компонент $\{A\}$ возможны лишь при условии, что

$$\det[[K] - \omega^2[M]] = 0. \quad (5)$$

Если квадратичные матрицы $[M]$ и $[K]$ положительно определены, что обычно так и есть для задачи линейной упругости, то уравнение (5) имеет N неотрицательных решений – собственных частот ω_k , причем возможные парные значения (здесь N – количество неизвестных в системе (4)).

При выполнении условия (5) одно из уравнений (4) является следствием остальных. Потому каждому значению ω_k соответствует определенное соотношение между амплитудами A_{ki} . Другими словами все амплитуды вектора могут быть выражены через одну из них. Соотношения между амплитудами A_{ki} определяют k -ту собственную форму колебаний.

Из уравнений (4) следует, что все степени свободы в процессе колебаний с собственной частотой ω_k совершают синхронное движение. Таким образом, конфигурация конструкции не меняет своей базовой формы, а меняются только амплитуды.

Имея N значений собственных частот ω_k , решение системы (2) можно искать в виде линейной комбинации из N выражений (3)

$$\{q(t)\} = \sum_{k=1}^N \{A_k\} \cos(\omega_k t + \beta_k). \quad (6)$$

То есть изменение формы линейной упругой конструкции со временем есть линейной комбинацией всех ее собственных форм.

Поскольку значения компонент собственных векторов $\{A_k\}$ могут быть найдены не однозначно, а с точностью до постоянного множителя, то обычно их нормируют по правилу:

$$\{A_k\}^T [M] \{A_k\} = 1. \quad (7)$$

Доказано что собственные векторы $\{A_k\}$ ортогональны относительно матриц $[M]$ и $[K]$, то есть

$$\{A_k\}^T [M] \{A_m\} = 0, \quad \{A_k\}^T [K] \{A_m\} = 0, \quad k \neq m. \quad (8)$$

Еще можно отметить, что обычно ищутся не все корни уравнения (5), несколько (обозначим как N_α) наименьших значений, поскольку только при низших собственных частотах амплитуды колебаний имеют относительно большие значения. Иначе говоря, несколько первых собственных частот и форм колебаний достаточно для получения удовлетворительного приближения решения (6). Для этого разработано несколько алгоритмов, лучшие из них используются в NX Nastran.

Методика решения. С помощью Femap была построена геометрия оболочки в виде цилиндрической поверхности эллиптического сечения с размерами: высота $h = 120 \text{ мм}$, большая полуось $a = 51,8 \text{ мм}$, малая полуось $a = 37,295 \text{ мм}$. Оболочка консольно закреплялась по одному из контуров. В качестве изотропного материала выбиралась сталь 40X (модуль Юнга $E = 214 \text{ ГПа}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0,26$, плотность $\rho = 7820 \text{ кг/м}^3$). Разбивка производилась *plate*-элементами постоянной толщины $d = 2 \text{ мм}$ и содержала 33396 узлов и 33120 элементов. Далее производился анализ частот и форм свободных колебаний.

Для сравнения оболочка задавалась также как объемное тело с разбивкой на *solid*-элементы, что на частотах и формах колебаний никак не отразилось.

Введение в расчет балясины, совместно с которой выточена оболочка, приводит к снижению частот. В этом случае закрепление производилось по боковой поверхности нижней части балясины (как в экспериментальной установке), в то время как верхняя часть балясины в моделировании способна совершать небольшие колебания. В эксперименте же перемещения балясины отсутствуют. Поэтому рационально моделировать консольно защемленную оболочку без балясины.

Результаты. С помощью вышеописанной методики исследовался спектр резонансных колебаний консольно защемленной изотропной оболочки постоянной толщины (рис. 1).

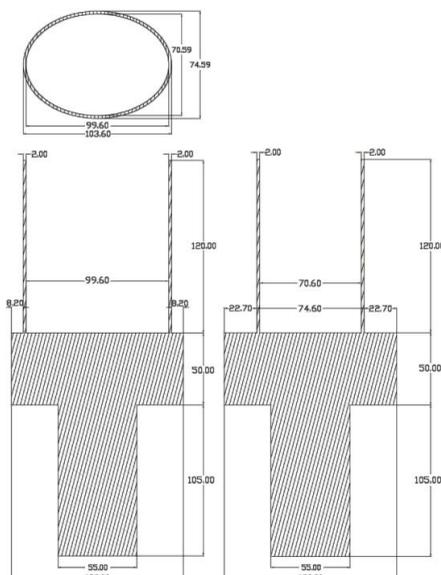


Рис. 1. Геометрия оболочки.

Для сравнения свободные частоты колебаний так же определялись экспериментально, путем наблюдения интерферограмм возбуждаемой оболочки в реальном времени. Резонансные частоты приведены в сравнительной табл. 1, а формы колебаний на некоторых частотах представлены на рис. 2, где n – количество узлов вдоль образующей, m – количества узлов по окружности.

Таблица 1.

n	m	$f_{\text{теорет}} \text{ (Гц)}$	$f_{\text{экспер}} \text{ (Гц)}$	$\varepsilon \text{ (\%)}$
0	2	1711	1720	0,52%
0	3	2161	2303	6,17%
2	4	4911	4772	2,91%
0	5	6154	5580	10,29%
3	4	7946	8132	2,29%
1	6	8978	9478	5,28%
3	6	11663	12058	3,28%
2	7	13033	12978	0,42%

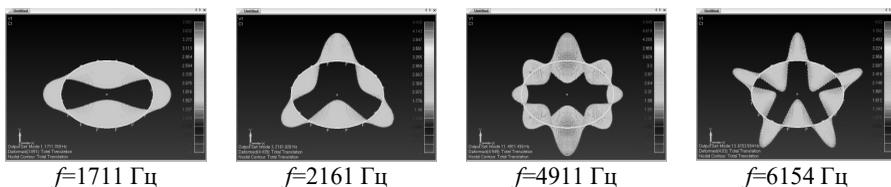


Рис. 2. Формы колебаний на первых четырех частотах.

Выводы. Моделирование оболочки в виде консольно защемленной по одному из контуров цилиндрической поверхности эллиптического сечения достаточно надежно отображает условия проводимого эксперимента.

Экспериментально полученные частоты и частоты, рассчитанные с помощью Nastran, отличаются не более чем на 11%, для некоторых значений различие составляет меньше 1%.

Достаточно высокое совпадение экспериментальных и теоретических частот указывает на высокую достоверность обеих методик исследования.

***Будак В.Д., Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В.* Визначення власних частот еліптичної оболонки постійної товщини методом скінченних елементів**

Розглядаються вільні коливання тонкої ізотропної еліптичної оболонки постійної товщини на основі методу скінченних елементів реалізованого на високопродуктивному програмному забезпеченні для інженерного аналізу – Femap.

Ключові слова: власні частоти, форми коливань, метод скінченних елементів, еліптична оболонка.

***Budak V.D., Grigorenko A.Ya., Borisenko M.Yu., Boychuk O.V.* Natural frequencies of an elliptic shell of constant thickness Determination by the finite element method**

Natural vibrations of a thin isotropic elliptical shell of constant thickness are considered on the basis of finite element method realized on a high-performance software for engineering analysis – Femap.

Key words: natural frequencies, vibration modes, finite element method, elliptic shell.

1. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций / Я.М. Григоренко, Е.И. Беспалова, А.Б. Китайгородский, А.И. Шинкарь – Киев: Наук. думка, 1986. – 171 с.
2. Григоренко А.Я. Исследование свободных колебаний некруговых цилиндрических оболочек с помощью метода сплайн-коллокации / А.Я. Григоренко, С.В. Пузырев, Е.А. Волчек // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – 54, № 3. – С. 60-69.
3. Hayek Sabih I. Vibration of elliptic cylindrical shells: higher order shell theory / Sabih I. Hayek, Jeffrey E. Boisvert // J. Acoust. Soc. Amer. – 2010. – Vol. 128, No. 3. – P. 1063–1072.
4. Рудаков К.Н. FEMAP 10.2.0. Геометрическое и конечно-элементное моделирование конструкций / К.Н. Рудаков – К.: НТУУ «КПИ», 2011. – 317с.