

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

**КАФЕДРА ЕКОНОМІЧНОЇ КІБЕРНЕТИКИ, КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК  
ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ**

## **МОДЕЛІ ЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ**

методичні рекомендації для практичних занять та самостійної роботи  
здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти ОПП  
«Економіка» спеціальності 051 «Економіка» денної форми здобуття  
вищої освіти



**Миколаїв - 2023**

Друкується за рішенням науково-методичною комісією факультету менеджменту Миколаївського національного університету від 23.11.2023 року протокол № 4.

Укладачі:

- О. В. Шобаніна – д-р екон. наук, професор, професор кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;
- С. І. Тищенко – канд. пед. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;
- В. О. Крайній – канд. екон. наук, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;
- О.Ю. Пархоменко – канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;
- І. І. Хилько – старший викладач кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет.

Рецензенти:

Стройко Т.В. - д-р. екон. наук, професор, професор кафедри економіки та менеджменту, Миколаївський національний університет імені В.О. Сухомлинського

Борчик Є. Ю. - канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет

© Миколаївський національний аграрний університет, 2023

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	4
Перелік практичних занять та їх обсяг .....	6
Практичне заняття № 1. Аналіз лінійних двовимірних динамічних систем...	7
Практичне заняття № 2. Застосування апарату диференціальних рівнянь першого порядку для побудови найпростіших математичних моделей економічних динамічних систем з неперервним часом.....	10
Практичне заняття № 3. Аналіз нелінійних двовимірних динамічних систем	12
Практичне заняття № 4. Нелінійні динамічні системи. Модель Лотки-Вольтерра.....	15
Практичне заняття № 5. Граничні цикли в нелінійних динамічних системах	18
Практичне заняття № 6. Павутиноподібна модель ринкової рівноваги.....	20
Практичне заняття №7. Модель зростання національного доходу, ефект мультиплікатора.....	23
Завдання для самостійної роботи студентів.....	26
Питання, що винесені на самостійне опрацювання.....	26
Рекомендації щодо виконання самостійної роботи.....	28
Список рекомендованої літератури .....	31

## ВСТУП

Загальна потреба у реалізації досягнень науково-технічного прогресу найтіснішим чином пов'язана з використанням економіко-математичних методів та засобів обчислювальної техніки при розв'язанні задач із різноманітних сфер людської діяльності. Винятково важливе значення має використання цих методів у економіці. Здобувачам економічних спеціальностей закладів вищої освіти необхідно як знання можливостей застосування математичного апарату, так і розуміння тих проблем, які виникають при їх використанні. Тому при вивченні курсу основний наголос зроблено на практичну спрямованість його сучасного інструментарію.

Дисципліна «Моделі економічної динаміки» належить до циклу дисциплін професійної підготовки бакалаврів спеціальності «Економіка» освітньо-професійної програми «Економічна кібернетика».

Метою дисципліни є набуття практичних навичок та формування компетентностей із моделювання й аналізу економічних систем і процесів на макро- та мікроекономічному рівнях, а також математичних моделей динаміки розвитку економічних процесів.

Відповідно до освітньо-професійної програми підготовки здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 051 «Економіка», галузі знань 05 «Соціальні та поведінкові науки» визначені компетентності та програмні результати навчання, для формування яких використовується навчальна дисципліна «Моделі економічної динаміки»:

- здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;
- здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях;
- здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації з різних джерел;
- здатність пояснювати економічні та соціальні процеси і явища на основі теоретичних моделей, аналізувати і змістовно інтерпретувати отримані результати;
- здатність застосовувати економіко-математичні методи та моделі для вирішення економічних задач;
- здатність прогнозувати на основі стандартних теоретичних та економетричних моделей соціально-економічні процеси;
- здатність поглиблено аналізувати проблеми і явища в одній або декількох професійних сферах з врахуванням економічних ризиків та можливих соціально-економічних наслідків.

Програмні результати навчання:

- пояснювати моделі соціально-економічних явищ з погляду фундаментальних принципів і знань на основі розуміння основних напрямів розвитку економічної науки;
- застосовувати відповідні економіко-математичні методи та моделі для вирішення економічних задач;
- Усвідомлювати основні особливості сучасної світової та національної економіки, інституційної структури, напрямів соціальної, економічної та зовнішньоекономічної політики держави;
- вміти абстрактно мислити, застосовувати аналіз та синтез для виявлення ключових характеристик економічних систем різного рівня, а також особливостей поведінки їх суб'єктів;
- демонструвати гнучкість та адаптивність у нових ситуаціях, у роботі із новими об'єктами, та у невизначених умовах;
- показувати навички самостійної роботи, демонструвати критичне, креативне, самокритичне мислення.

Методичні рекомендації для практичних занять та самостійної роботи здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти складено на основі ряду відомих підручників і посібників, зокрема [1, 2, 3, 5, 7]. Автори не претендують на повноту викладу всіх питань, оскільки метою укладення методичних рекомендацій є популяризація основних моделей економічної динаміки. Особливістю укладених методичних рекомендацій є простота викладу матеріалу на основі практичної його реалізації, що орієнтований на здобувачів, що мають базові знання курсу «Математика для економістів».

### Перелік практичних занять та їх обсяг

№	Назва теми	<i>Обсяг (год.)</i>
1	Практичне заняття № 1. Аналіз лінійних двовимірних динамічних систем	4
2	Практичне заняття № 2. Застосування апарату диференціальних рівнянь першого порядку для побудови найпростіших математичних моделей економічних динамічних систем з неперервним часом	4
3	Практичне заняття № 3. Аналіз нелінійних двовимірних динамічних систем	4
4	Практичне заняття № 4. Нелінійні динамічні системи. Модель Лотки-Вольтерра	4
5	Практичне заняття № 5. Граничні цикли в нелінійних динамічних системах	4
6	Практичне заняття № 6. Павутиноподібна модель ринкової рівноваги	4
7	Практичне заняття №7. Модель зростання національного доходу, ефект мультиплікатора	6
<b>Разом</b>		<b>30</b>

## Практичне заняття № 1.

### Тема: Аналіз лінійних двовимірних динамічних систем

**Мета роботи:** отримати практичні навички в побудові фазових портретів лінійних двовимірних динамічних систем.

**Завдання.** У середовищі Microsoft Excel виконати побудову локального фазового портрету лінійної двовимірної динамічної системи в околі її особливої точки за допомогою майстра діаграм.

Лінійну двовимірну динамічну систему, задано у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \quad (1)$$

Побудова локального фазового портрету виконується в околі особливої точки системи – тобто в околі точки  $(0, 0)$ . Перетворимо систему до такого вигляду:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x_1^{t+\Delta t} - x_1^t}{\Delta t} = a_{11}x_1^t + a_{12}x_2^t \\ \frac{x_2^{t+\Delta t} - x_2^t}{\Delta t} = a_{21}x_1^t + a_{22}x_2^t \end{cases} \longrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1^{t+\Delta t} - x_1^t = \Delta t(a_{11}x_1^t + a_{12}x_2^t) \\ x_2^{t+\Delta t} - x_2^t = \Delta t(a_{21}x_1^t + a_{22}x_2^t) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1^{t+\Delta t} = x_1^t + \Delta t(a_{11}x_1^t + a_{12}x_2^t) \\ x_2^{t+\Delta t} = x_2^t + \Delta t(a_{21}x_1^t + a_{22}x_2^t) \end{cases}$$

Примітка:  $x_1^t, x_2^t$  варто читати як  $x_1$  у момент часу  $t$ ,  $x_2$  у момент часу  $t$  відповідно.

Отже, становище системи в попередній період часу  $t$  ( $x_1^t, x_2^t$ ) визначає її становище в наступний період часу  $t+\Delta t$  ( $x_1^{t+\Delta t}, x_2^{t+\Delta t}$ ). Вихідними даними для побудови діаграми, які обираються самостійно, є:

– координати початкової точки діаграми ( $x_1^t, x_2^t$ ) у період часу  $t = 0$  обираються експериментальним шляхом;

– величина  $\Delta t$  – величина кроку при переході від попереднього стану системи до наступного, для побудови діаграми рекомендоване значення складає  $\Delta t = 0,01$ ;

– значення коефіцієнтів  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ .

Обрані значення коефіцієнтів  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$  визначають тип поведінки системи, тобто її фазовий портрет:

1) експериментальним шляхом необхідно підібрати такі значення коефіцієнтів, щоб отримати всі можливі типи поведінки системи: фокус, вузол, сідло і центр;

2) для кожного типу поведінки побудувати відповідне характеристичне рівняння та знайти його корені. Зробити висновки щодо типу поведінки системи в околі особливої точки;

3) для одержання цілісної картини фазового портрету системи, розмістити на одній діаграмі Excel не менше чотирьох графіків з початковими координатами в різних чвертях.

Розміщення на одній діаграмі декількох фазових траєкторій виконується в такій послідовності:

- будується діаграма для першої фазової траєкторії (тип діаграми «Точкова» – «Точечная» російською);
- клацнути правою кнопкою миші в «Області побудови діаграми» та обрати з контекстного меню пункт «Вихідні дані...»;
- у вікні «Вихідні дані», вибрати вкладку «Ряд»;
- у полі «Ряд» натиснути кнопку «Додати» для додавання на діаграму нової фазової траєкторії;
- у полі «Значення X» та «Значення Y» ввести посилання на новий діапазон даних для  $x_1$  та  $x_2$  відповідно;
- натиснути кнопку «Додати» стільки разів, скільки рядів даних (фазових траєкторій) необхідно додати на діаграму.

Побудований фазовий портрет має вигляд (рис. 1.).

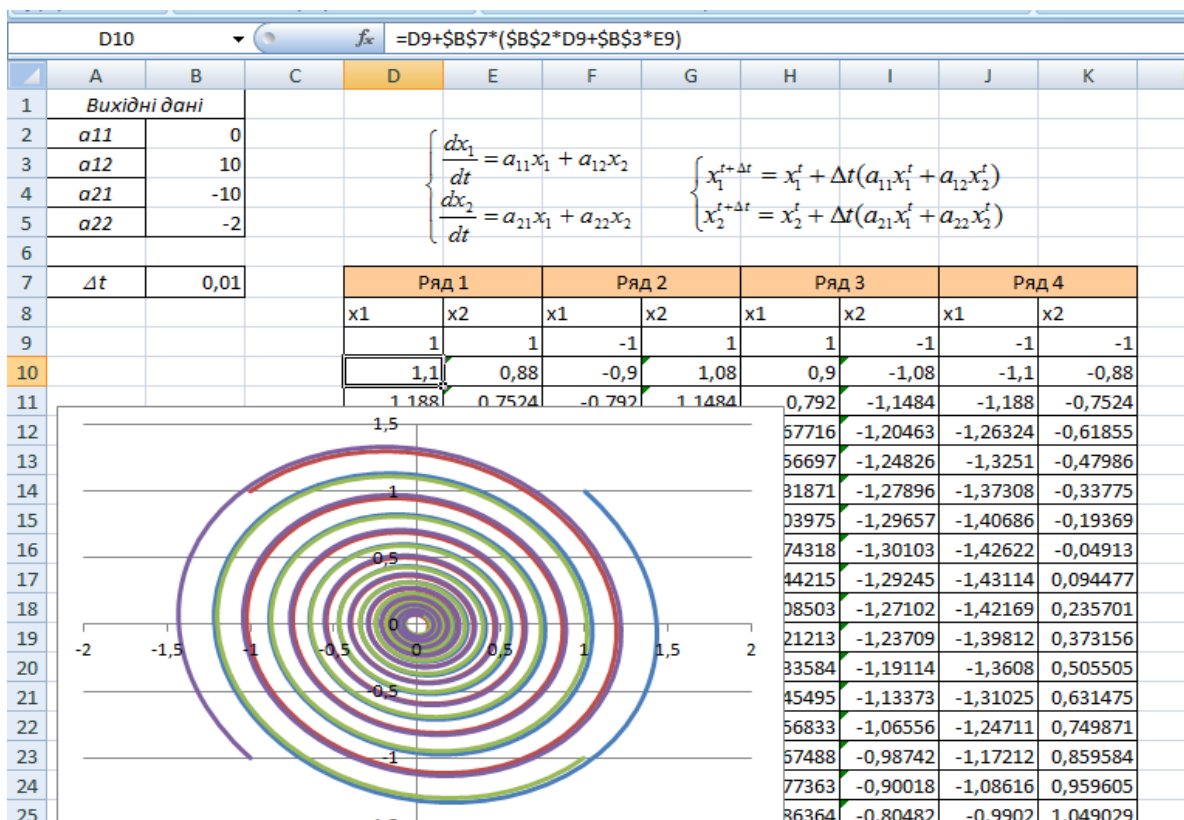


Рисунок 1. – Побудова фазового портрету в середовищі Microsoft Excel



Із рис. 1. видно, що результати аналітичного та графічного дослідження поведінки динамічної системи при заданих параметрах збігаються. Типом поведінки є стійкий фокус.

Для вихідних параметрів  $a_{11}=0$ ;  $a_{12}=10$ ;  $a_{21}=-10$ ;  $a_{22}=-2$  характеристичне рівняння має вигляд:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 10 \\ -10 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$

Вирішуючи характеристичне рівняння, отримуємо:  $-\lambda(-2-\lambda)-10(-10)=0$ , звідси маємо  $\lambda^2 + 2\lambda + 100 = 0$ .

Коренями квадратного рівняння  $\lambda_1$  та  $\lambda_2$  є:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 * 100}}{2} = -1 \pm \sqrt{-396} = -1 \pm \sqrt{396} * i \quad (3)$$

Оскільки корені характеристичного рівняння  $\lambda_1$  та  $\lambda_2$  комплексні та їх дійсна частина менше за нуль (дорівнює -1), то особлива точка або стійкий фокус, або стійкий вузол.

Прикріпити виконане практичне завдання у середовище MOODLE.

## Практичне заняття № 2.

### Тема. Застосування апарату диференціальних рівнянь першого порядку для побудови найпростіших математичних моделей економічних динамічних систем з неперервним часом

**Завдання.** Побудувати математичні моделі задач, умови яких подано нижче, надати розв'язання задачі та геометричну інтерпретацію за допомогою програмного середовища Excel.

**Задача 1.** За допомогою програмного середовища Excel побудувати графік функції, що має постійну еластичність, яка дорівнює  $k$ .

**Задача 2.** Для заданих залежностей функції попиту та пропозиції від ціни за допомогою програмного середовища Excel побудувати програму, яка визначає :

1. рівноважну ціну, тобто ціну, при якій попит та пропозиція врівноважуються;
2. еластичність попиту та пропозиції для цієї ціни;
3. зміну добутку при збільшенні ціни на  $k\%$  від рівноважної.

**Задача 3.** Швидкість знецінювання устаткування внаслідок його зносу пропорційна в кожен даний момент часу його фактичній вартості. Початкова вартість –  $A_0$ . Яка буде вартість устаткування після закінчення  $t$  років.

**Задача 4.** Нехай  $y(t)$  – кількість продукції, що випускається галуззю за час  $t$ ;  $p$  – ціна продукції. Сума інвестицій (засобів, спрямованих на розширення виробництва)  $I(t)$  пропорційна доходу  $py(t)$  з коефіцієнтом пропорційності  $m$  ( $m = \text{const}$   $0 < m < 1$ ). Збільшення швидкості випуску продукції пропорційно збільшенню інвестицій з коефіцієнтом пропорційності  $\eta$ . Потрібно знайти кількість продукції, що випускається галуззю за час  $t$ , якщо в початковий момент часу  $t=t_0$ ,  $y=y_0$ .

**Задача 5.** Нехай попит та пропозиція на товар визначаються відповідно співвідношеннями

$$Q = a_1 p' - a_2 p + a_3,$$

$$S = a_4 p' + a_5 p - a_6,$$

де  $p$  – ціна товару,  $p'$  – тенденція формування ціни (похідна ціни за часом).

**Зауваження.**  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$  – постійні, які призначаються викладачем в залежності від номеру варіанту.

Нехай також у початковий момент часу ціна  $p$  за одиницю товару складала 1 гр. од. Враховуючи вимогу відповідності попиту пропозиції, знайти закон зміни ціни в залежності від часу.

### Приклад розв'язання задачі 2.

Ґрунтуючись на емпіричних даних, встановлено вигляд функцій попиту  $D = \frac{p+8}{p+2}$  і пропозиції  $S = p + 0.5$ , де  $D, S$  – кількість товару, який купується і

пропонується на продаж відповідно в одиницю часу,  $p$  – ціна товару. Знайти:

1. рівноважну ціну, тобто ціну, при якій попит та пропозиція врівноважуються;
2. еластичність попиту та пропозиції для цієї ціни;
3. зміну доходу при збільшенні ціни на 5% від рівноважної.

Розв'язання.

1. Рівноважна ціна визначається з умови  $D=S$ .

$$\frac{p+8}{p+2} = p + 0.5.$$

Розв'язок:  $p=2$ , тобто рівноважна ціна = 2 гр.од.

2. Еластичність попиту та пропозиції знаходиться за формулою:

$$E_x(y) = \frac{x}{y} y'.$$

$$\text{Тоді } q' = \frac{-6}{(p+2)^2}; S' = 1; E_p(q) = \frac{-6p}{(p+2)(p+8)}; E_p(S) = \frac{2p}{2p+1}.$$

Для рівноважної ціни  $p=2$  маємо  $E_p(S)=0.8$ .  $E_p(q)=-0.3$ ;

Отримані значення еластичностей за абсолютною величиною менше одиниці, отже, попит, і пропозиція даного товару при рівноважній (ринковій) ціні нееластичні щодо ціни. Це означає, що зміна ціни не приведе до різкої зміни попиту та пропозиції.

4. Доход  $y$  визначається формулою  $y = D \cdot p$ . Позначимо вихідний дохід  $y_0$ . Еластичність попиту за ціною дорівнює  $E_p(D)=-0.3$ , тобто при збільшенні ціни на 1% попит зменшиться на 0.3%. Збільшення ціни на 5% від рівноважної означає зменшення попиту на 1,5%. Отже, дохід  $y$  при зміні ціни обчислюватиметься на формулою  $y = 0,985q \cdot 1,05p = 1,03435 y_0$ , тобто збільшиться.

Зробити висновки. Прикріпити виконане практичне завдання у середовище MOODLE.

### Практичне заняття № 3.

#### Тема: Аналіз нелінійних двовимірних динамічних систем

**Мета роботи:** отримати практичні навички в дослідженні нелінійних двовимірних динамічних систем.

**Завдання 1.** У середовищі Microsoft Excel виконати побудову фазового портрету нелінійної двовимірної динамічної системи в околі її особливих точок за допомогою майстра діаграм. Динамічна система має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dx_1/dt}{x_1} = a - bx_1 - \sigma x_2 \\ \frac{dx_2/dt}{x_2} = c - dx_2 - \mu x_1 \end{cases} .$$

Перетворимо систему до вигляду:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1(a - bx_1 - \sigma x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2(c - dx_2 - \mu x_1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x_1^{t+\Delta t} - x_1^t}{\Delta t} = x_1^t(a - bx_1^t - \sigma x_2^t) \\ \frac{x_2^{t+\Delta t} - x_2^t}{\Delta t} = x_2^t(c - dx_2^t - \mu x_1^t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1^{t+\Delta t} = x_1^t + \Delta t[x_1^t(a - bx_1^t - \sigma x_2^t)] \\ x_2^{t+\Delta t} = x_2^t + \Delta t[x_2^t(c - dx_2^t - \mu x_1^t)] \end{cases} .$$

На рис. 2. показано реалізацію цієї нелінійної динамічної системи для таких вихідних параметрів:  $a=5$ ;  $b=4$ ;  $c=5$ ;  $d=2$ ;  $\sigma=4$ ;  $\mu=4$ . Для обраних вихідних параметрів  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $\sigma$  та  $\mu$  розрахувати координати особливої точки, яка є єдиною точкою співіснування двох видів, за формулами:

$$x_1 = \frac{ad - \sigma c}{bd - \sigma \mu}; \quad x_2 = \frac{cb - \mu a}{bd - \sigma \mu} .$$

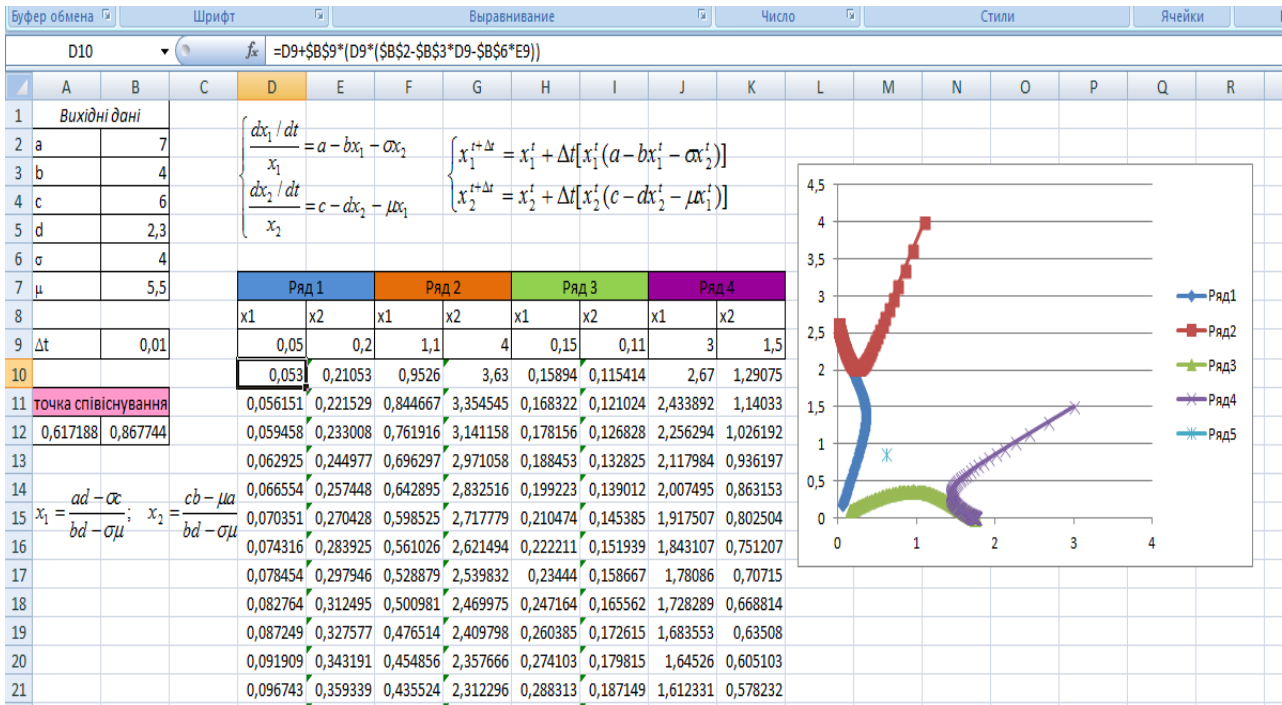


Рисунок 2. – Побудова фазового портрету нелінійної динамічної системи у середовищі Microsoft Excel

Для одержання цілісної картини фазового портрету системи, розмістити на одній діаграмі Excel не менше чотирьох фазових траєкторій.

**Завдання 2.** Провести дослідження екологічної системи з двома конкуруючими видами (наприклад, білки і бурундуки). За умовою моделі співіснування двох конкуруючих видів, популяції здійснюють вплив один на одного, виражений таким співвідношенням:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1(a - bx_1 - \sigma x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2(c - dx_2 - \mu x_1) \end{cases},$$

де  $x_1, x_2$  – чисельність білок і бурундуків відповідно;  $a=c=2$ ;  $b, d$  – коефіцієнти, що визначають вплив власної чисельності популяції на їх розвиток, тобто внутрішньовидову конкуренцію, та дорівнюють 0,01;  $\sigma, \mu$  – коефіцієнти, що визначають вплив чисельності популяції з боку суперників, тобто міжвидову конкуренцію, та становлять 0,05.

Значення коефіцієнтів (0,01 і 0,005) показують, що особини одного виду конкурують між собою за всі життєво важливі ресурси (ї харчі, і місця поширення), тоді як суперництво між різними видами (білками і бурундуками) стосується тільки харчових ресурсів, тобто менш суттєве. Узагальнені коефіцієнти є некерованими параметрами (константами),  $x_1, x_2$  – керовані параметри.

Розрахувати процеси зміни чисельності популяції за 30-50 періодів для таких початкових значень чисельності видів: а) 20 білок, 10 бурундуків; б) 10 білок, 10 бурундуків; в) 10 білок, 20 бурундуків. Побудувати діаграму. Приклад виконання завдання в середовищі Microsoft Excel наведено на рис. 3.

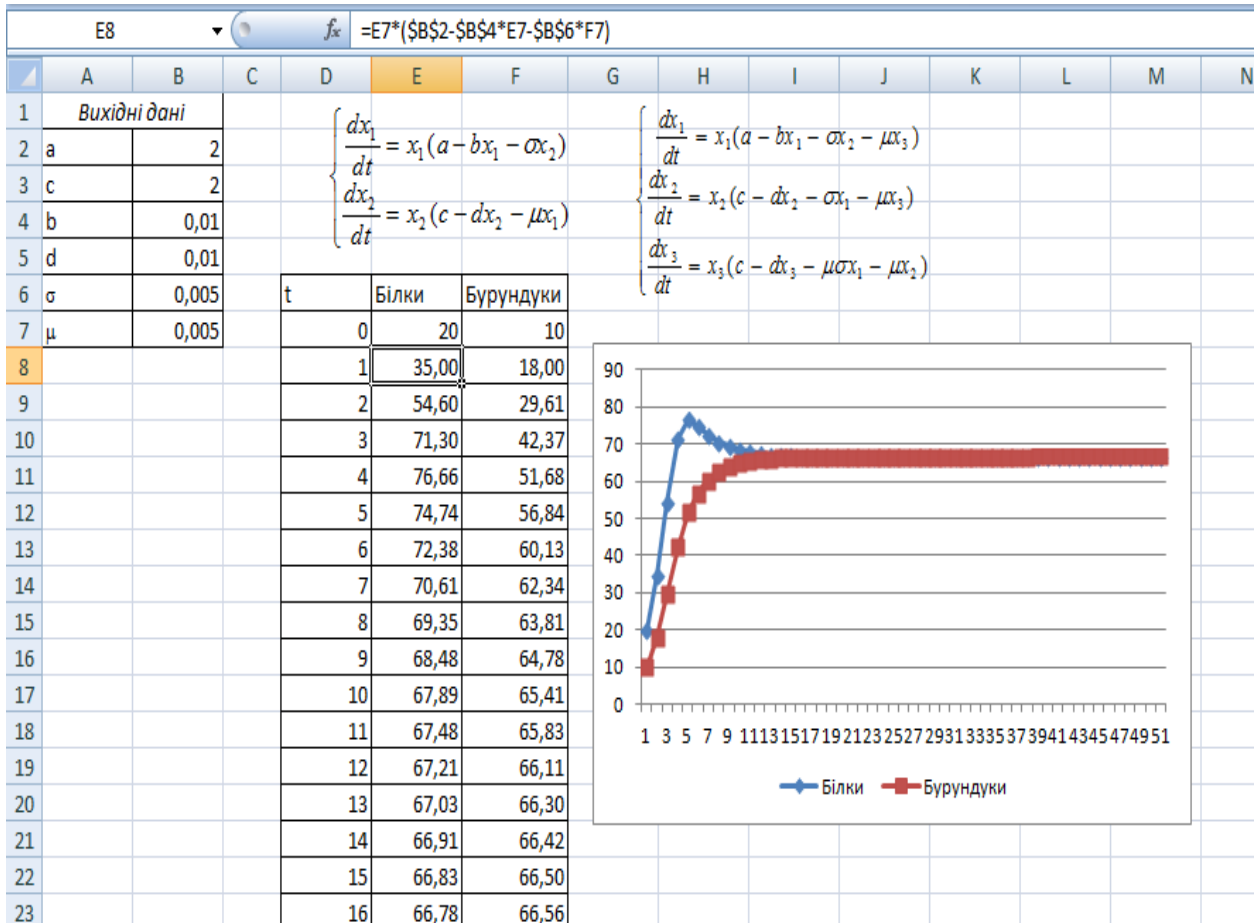


Рисунок 3. – Приклад дослідження екологічної системи з двома конкуруючими видами

Зробити висновки. Прикріпити виконане практичне завдання у середовище MOODLE.

## Практичне заняття № 4.

### Тема: Нелінійні динамічні системи. Модель Лотки-Вольтерра

**Мета роботи:** навчитися будувати фазовий портрет нелінійної динамічної системи Лотки-Вольтерра.

**Завдання.** У середовищі Microsoft Excel виконати побудову фазового портрету нелінійної двовимірної динамічної системи, що має коливальний характер в околі її особливої точки, за допомогою майстра діаграм. Динамічна система має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a - bx_2 \\ x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = -c + dx_1 \\ x_2 \end{cases} \quad (1)$$

де  $a, b, c, d > 0$ .

$a$  – коефіцієнт, що визначає питому швидкість розмноження жертв;

$b$  – втрати від хижаків;

$c$  – швидкість вимирання хижаків за відсутністю жертв;

$d$  – вдалість полювання хижаків.

Наведена модель описує співіснування двох видів: хижаків та жертв ( $x_1$  – хижаки,  $x_2$  – жертви). Підібрати параметри  $a, b, c, d$  та побудувати фазовий портрет системи, приклад виконання лабораторної роботи наведено на рис. 4.

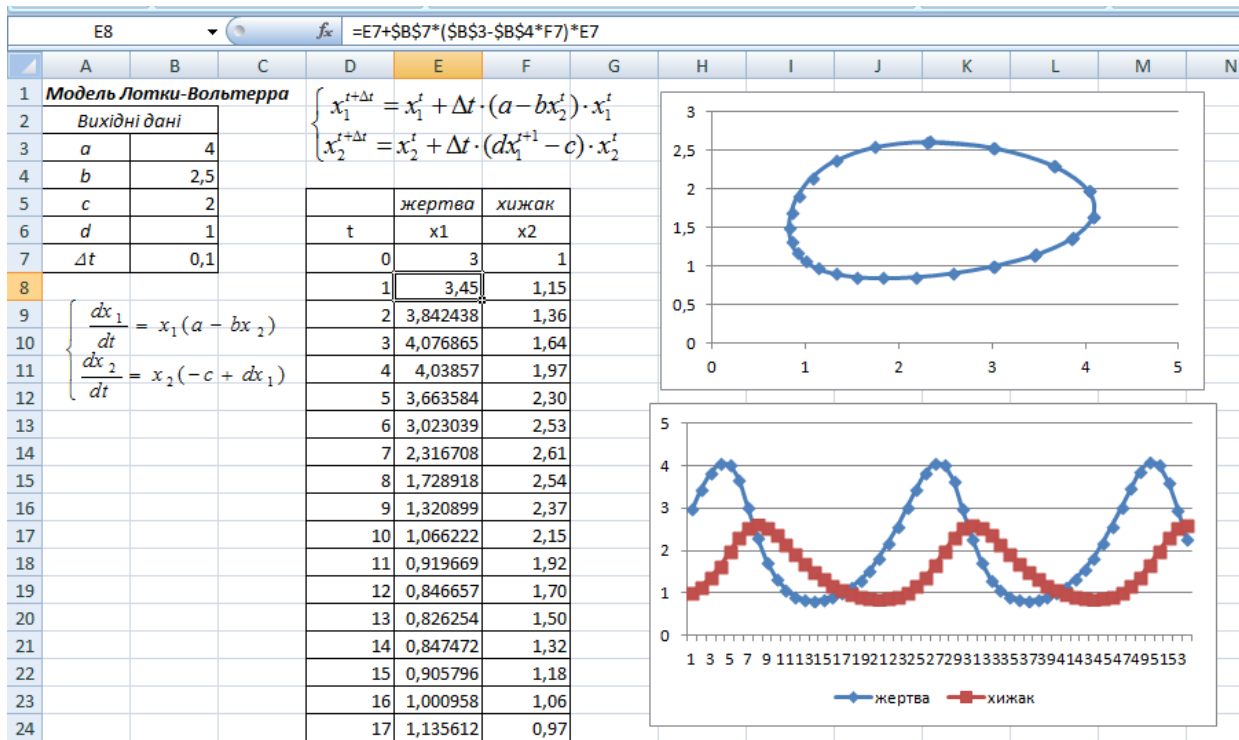


Рисунок 4. – Коливання в нелінійних системах

Усі траєкторії вихідної динамічної системи, за винятком сепаратрис сідла в особливій точці з координатами (0; 0), є замкнутими, тобто в системі мають місце коливання. На рис. 5.-6. наведено побудову фазового портрету нелінійної динамічної системи Лотки-Вольтерра з логістичною поправкою в середовищі Microsoft Excel.

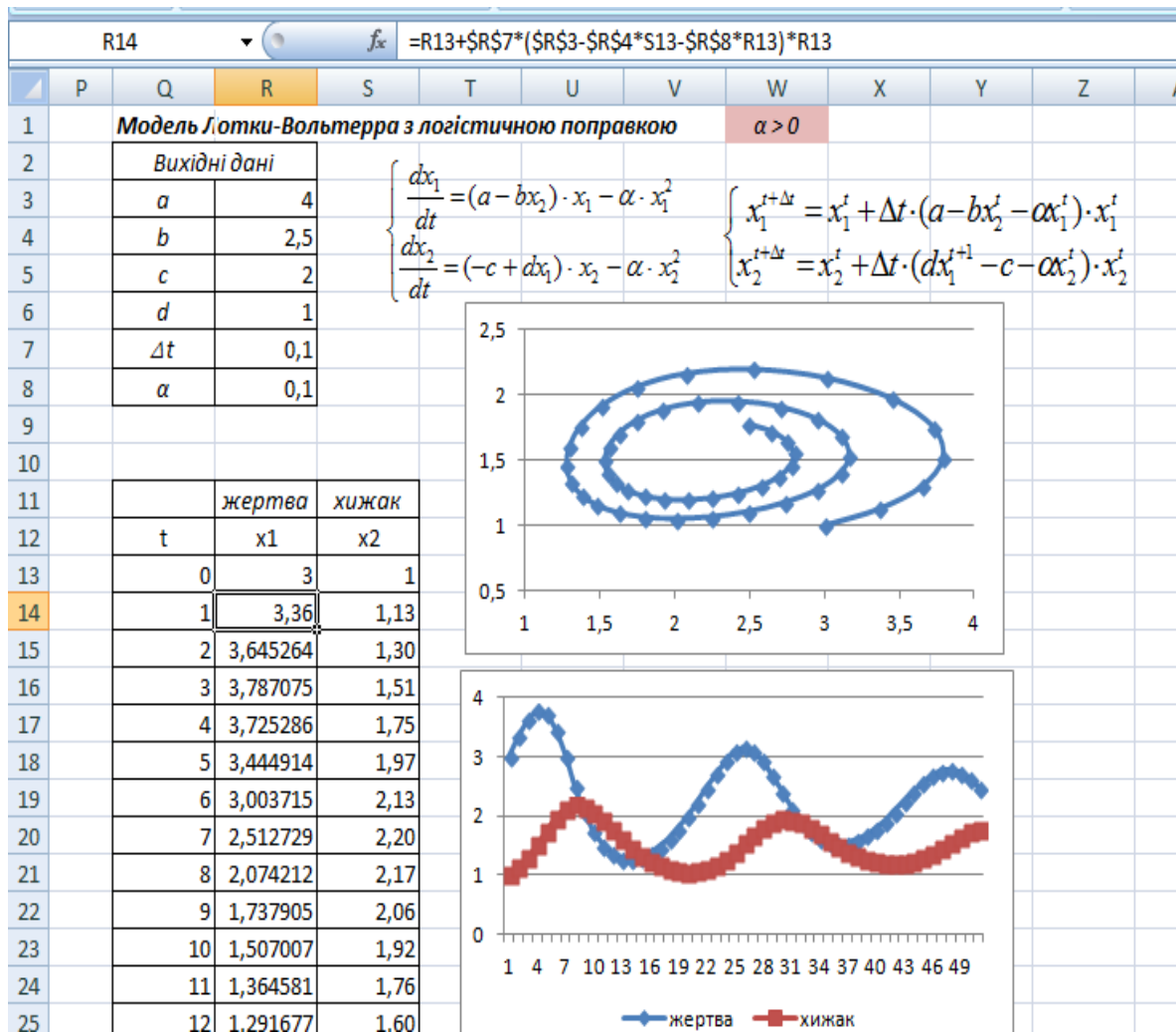


Рисунок 5. – Модель Лотки-Вольтерра з логістичною поправкою більше нуля



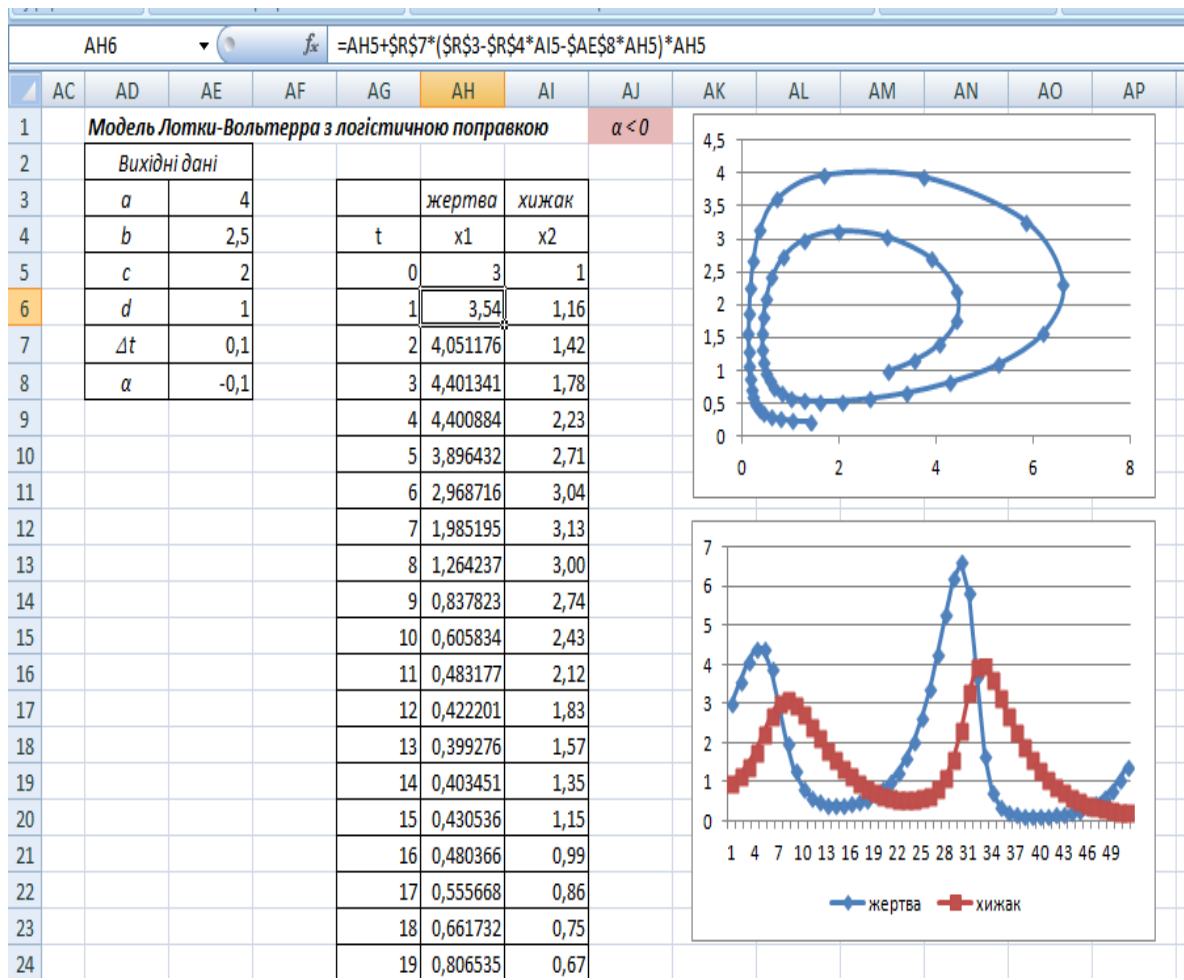


Рисунок 6. – Модель Лотки-Вольтерра з логістичною поправкою менше нуля

Зробити висновки. Прикріпити виконане практичне завдання у середовище MOODLE.

## Практичне заняття № 5.

### Тема: Граничні цикли в нелінійних динамічних системах

**Мета роботи:** навчитися будувати фазовий портрет нелінійної динамічної системи з граничним циклом.

**Завдання.** У середовищі Microsoft Excel виконати побудову фазового портрету нелінійної двовимірної динамічної системи, яка має граничний цикл, за допомогою майстра діаграм.

Динамічна система має вигляд: 
$$\begin{cases} \frac{dx_1/dt}{x_1} = \left( r - \frac{x_1}{k} \right) - \frac{wx_2}{d + x_1} \\ \frac{dx_2/dt}{x_2} = s \left( 1 - j \frac{x_2}{x_1} \right) \end{cases}.$$

Розрахувати координати особливої точки (точки перетину ізоклін); точки перетину ізоклін з осями координат.

Побудувати фазовий портрет системи для таких вхідних параметрів:

$$r = 1; s = 0,25; k = 7; d = 1; w = 1,5; j = 0,5.$$

Фазовий портрет повинен складатись як мінімум з двох траєкторій. Перша траєкторія починається в околі особливої точки і наближується до граничного циклу з середини. Друга траєкторія починається і наближається до граничного циклу іззовні.

Приклад виконання побудови моделі конкуруючих видів Холлінга-Теннера у середовищі Microsoft Excel наведено на рис. 7.

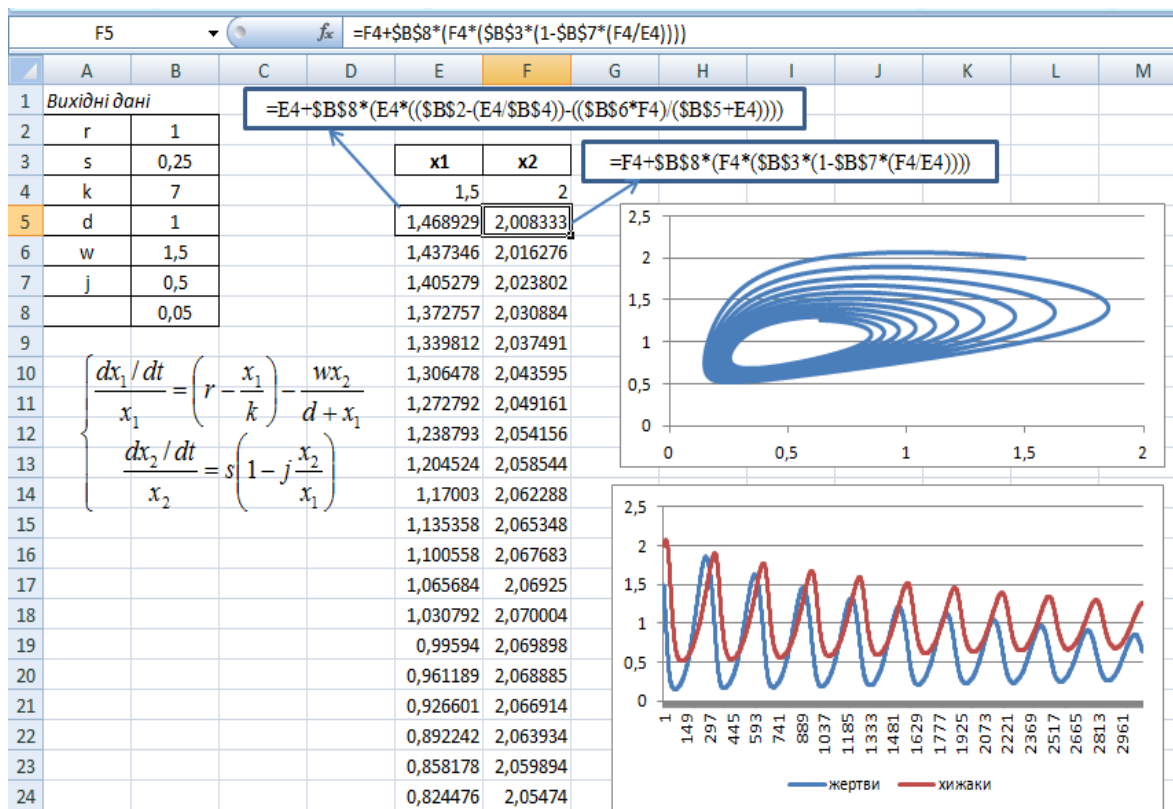


Рисунок 7. – Реалізація моделі конкуруючих видів Холлінга-Теннера

Зробити висновки. Прикріпити виконане практичне завдання у середовище MOODLE.

## Практичне заняття № 6.

### Тема: Павутиноподібна модель ринкової рівноваги

**Мета роботи:** дослідити динаміку цін та пропозиції та навчитися визначати рівноважну ціну.

**Завдання.** Для заданих параметрів функції попиту та пропозиції розрахувати:

- рівноважну ціну  $p_e$ , що встановлюється в системі;
- динаміку зміни з часом ціни;
- динаміку зміни з часом попиту та пропозиції.

Динаміку зміни цін, попиту та пропозиції показати графічно. Зробити висновки з приводу стабільності системи. Визначити умову біфуркації, коли тип поведінки ціни, попиту та пропозиції змінюється зі згасаючих коливань на вибухові, або навпаки.

Вихідні дані для виконання роботи наведено в таблиці 1.

Таблиця 1 – Вихідні дані

Показник	Умовне позначення	Значення
Постійна величина в лінійній залежності попиту	$a$	$= 750 + N*20$
Постійна величина в лінійній залежності пропозиції	$a_1$	80
Показник	Умовне позначення	Значення
Кут нахилу ліній попиту	$b$	-25
Кут нахилу ліній пропозиції	$b_1$	$= 10 + N$
Ціна в початковий момент часу	$P_0$	$= 100 - N*3$

де  $N$  – номер студента за журналом

Приклад виконання.

Визначимо рівноважну ціну, що встановлюється в системі з часом. Для

цього скористаємося формулою (8.10):  $p_e = \frac{a_1 - a}{b - b_1} = \frac{80 - 1130}{-25 - 23} = 21,88$ .

Приклад побудови павутино подібної моделі в середовищі Microsoft Excel наведено на рис. 8.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1				$p_t = \frac{a_1 - a + b_1 p_{t-1}}{b}$				$D_t = a + b p_t$		$S_t = a_1 + b_1 p_{t-1}$		
2	Вихідні дані						Час	Ціа	Попит	Пропозиція		
3	a	1130					t	pt	D(t)	S(t)		
4	a1	80					0	43	55	-		
5	b	-25					1	2,44	1069	1069		
6	b1	23					2	39,76	136,12	136,12		
7	p0	43					3	5,43	994,3696	994,3696		
8							4	37,01	204,78	204,779968		
9							5	7,95	931,2024	931,2024294		
10	рівноважна ціна	21,88			$p_e = \frac{a_1 - a}{b - b_1}$		6	34,68	262,8938	262,8937649		
11							7	10,09	877,7377	877,7377363		
12	$\left  \frac{b_1}{b} \right $	-0,92	<1				8	32,72	312,0813	312,0812826		
13							9	11,90	832,4852	832,48522		
14							10	31,05	353,7136	353,7135976		
15	Отже, точка рівноваги є стабільною						11	13,43	794,1835	794,1834902		
16							12	29,64	388,9512	388,951189		
17							13	14,73	761,7649	761,7649061		

Рисунок 8. – Реалізація павутиноподібної моделі у середовищі Microsoft Excel

Динаміку зміни з часом ціни, попиту та пропозиції наведено на рис. 8.4.

Згідно з отриманими графіками (рис. 8.4) маємо затухаючі коливання, тобто стан рівноваги стійкий.

Умова стабільності в павутиноподібній моделі виконується

$$\left| \frac{23}{-25} \right| < 1; \quad |-0,92| < 1, \quad \text{тобто } |23| < |-25|, \quad \text{тож точка рівноваги є стабільною.}$$

Також, за інших рівних умов, якщо змінимо значення коефіцієнта  $b_1$ , наприклад, з 23 на 27, то тип поведінки цін, попиту та пропозиції зміниться з

затухаючих коливань на вибухові. Такий самий результат можна отримати і при зміні коефіцієнта  $b$ , наприклад з -25 на -20.

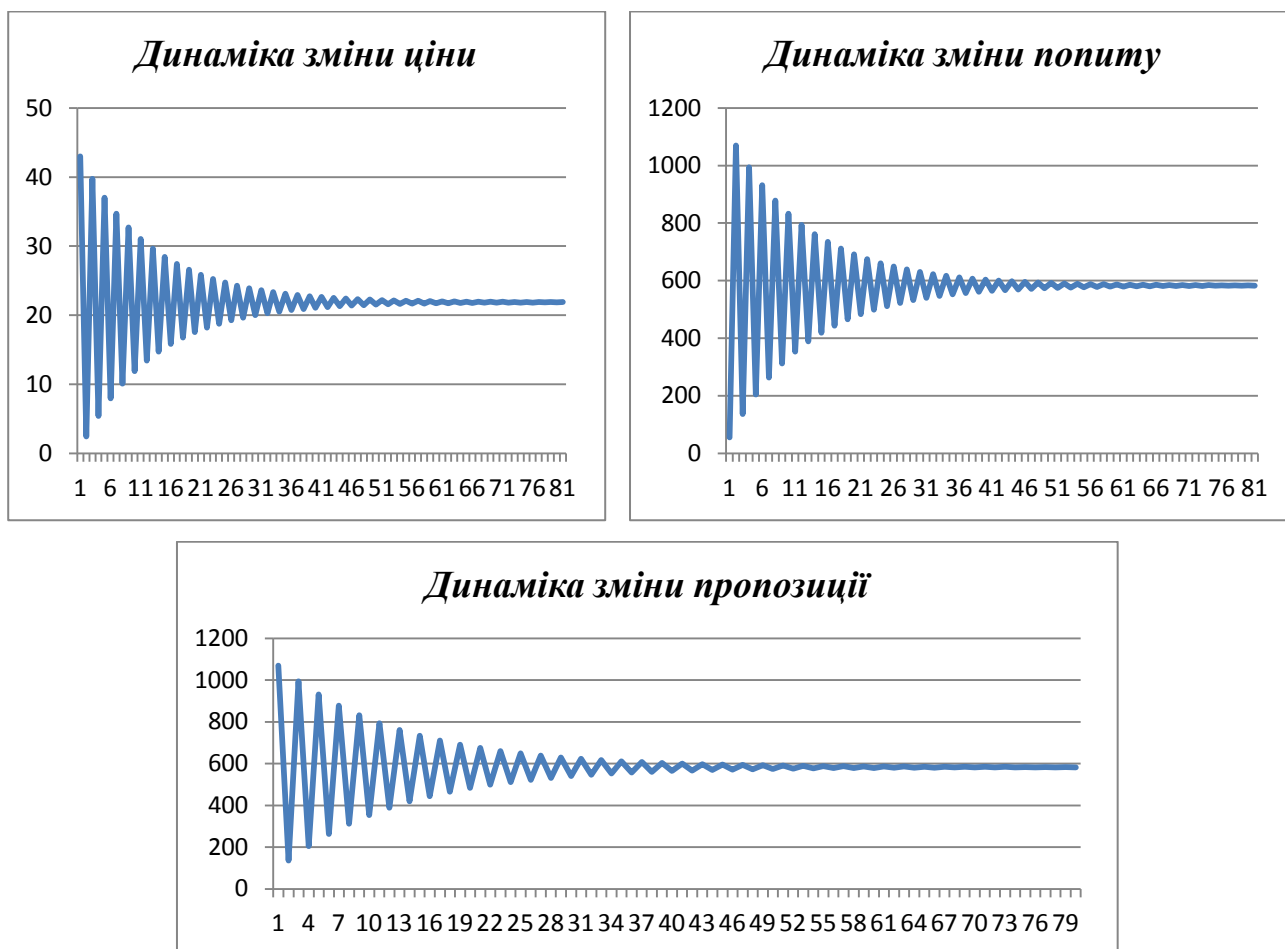


Рисунок 9. – Динаміка зміни ключових показників павутиноподібної моделі

Зробити висновки. Прикріпити виконане практичне завдання у середовище MOODLE.

## Практичне заняття №7.

### Тема: Модель зростання національного доходу, ефект мультиплікатора

**Мета роботи:** ознайомитися з моделлю зростання національного доходу та навчитися визначати рівноважне значення національного доходу.

**Завдання.** Для моделі зростання національного доходу (випадок залежності інвестицій від обсягу національного доходу), рівняння:

$$I_t = hY_{t-1} + I_0 + \Delta I \quad 0 < h < 1. \quad (1)$$

Тоді рівняння  $\Delta Y = \frac{1}{1-b} \Delta I$ . буде мати вигляд:

$$Y_t - (b+h)Y_{t-1} = a + I_0 + \Delta I. \quad (2)$$

Розв'язком різницевого рівняння  $Y_t - bY_{t-1} = a + I_0 + \Delta I$ . є:

$$Y_t = A(b+h)^t + \frac{a + I_0 + \Delta I}{1-b-h}. \quad (2)$$

У середовищі Microsoft Excel розрахувати:

- рівноважне значення національного доходу, що встановлюється в системі для всіх  $\Delta I$ ;
- визначити величину мультиплікатора системи;
- показати, яким чином величина мультиплікатора впливає на приріст національного доходу зі зростанням інвестицій;
- показати процес ітераційного наближення розрахункового значення національного доходу від  $Y_0$  до  $Y$  рівноважного, для всіх  $\Delta I$ ; зазначений процес показати графічно. Вихідні дані наведено в таблиці 2.

Таблиця 2. – Вихідні дані

Показник	Умовне позначення	Значення
Коефіцієнт моделі	$a$	120
Гранична схильність населення до споживання	$b$	0,9
Обсяг інвестицій у початковий момент часу	$I_0$	$= 220 + 10N$
Національний дохід у початковий момент часу	$Y_0$	$= 5000 - 20N$
Гранична схильність населення до інвестування	$h$	0,05
Приріст обсягу інвестицій	$\Delta I_1$	0
Приріст обсягу інвестицій	$\Delta I_2$	50
Приріст обсягу інвестицій	$\Delta I_3$	100

де  $N$  – номер студента по журналу

Приклад виконання.

За вхідні дані візьмемо такі значення:  $a = 120$ ,  $b = 0,9$ ,  $I_0 = 410$ ,  $Y_0 = 4620$ ,  $h = 0,05$ ,  $\Delta I_1 = 0$ ,  $\Delta I_2 = 50$ ,  $\Delta I_3 = 100$ .

Розрахуємо рівноважне значення національного доходу, що встановлюється в системі для всіх  $\Delta I$ :

$$\text{– для випадку } \Delta I_1 = 0: Y_p = \frac{a + I_0 + \Delta I}{1 - b - h} = \frac{120 + 410 + 0}{1 - 0,9 - 0,05} = 10600;$$

$$\text{– для випадку } \Delta I_2 = 50: Y_p = \frac{120 + 410 + 50}{1 - 0,9 - 0,05} = 11600;$$

$$\text{– для випадку } \Delta I_3 = 100: Y_p = \frac{120 + 410 + 100}{1 - 0,9 - 0,05} = 12600.$$

Розрахуємо величину мультиплікатора системи:

$$\Delta Y = \frac{1}{1 - b - h} = \frac{1}{1 - 0,9 - 0,05} = 20.$$



Вплив мультиплікатора на приріст національного доходу зі зростанням інвестицій та процес ітераційного наближення розрахункового значення національного доходу від  $Y_0$  до  $Y$  рівноважного, для всіх  $\Delta I$  визначено в системі Microsoft Excel, результати розрахунку наведено на рис. 9.1.

Для визначення значення обсягів споживання в наступний період часу використовується формула:  $C_t = a + bY_{t-1}$ , зміну обсягу інвестицій в економіку визначаємо за допомогою формули:  $I_t = hY_{t-1} + I_0 + \Delta I$ . Рівень національного доходу  $Y$  в момент часу  $t$  визначається як сума споживання та інвестування:  $Y_t = C_t + I_t$ .

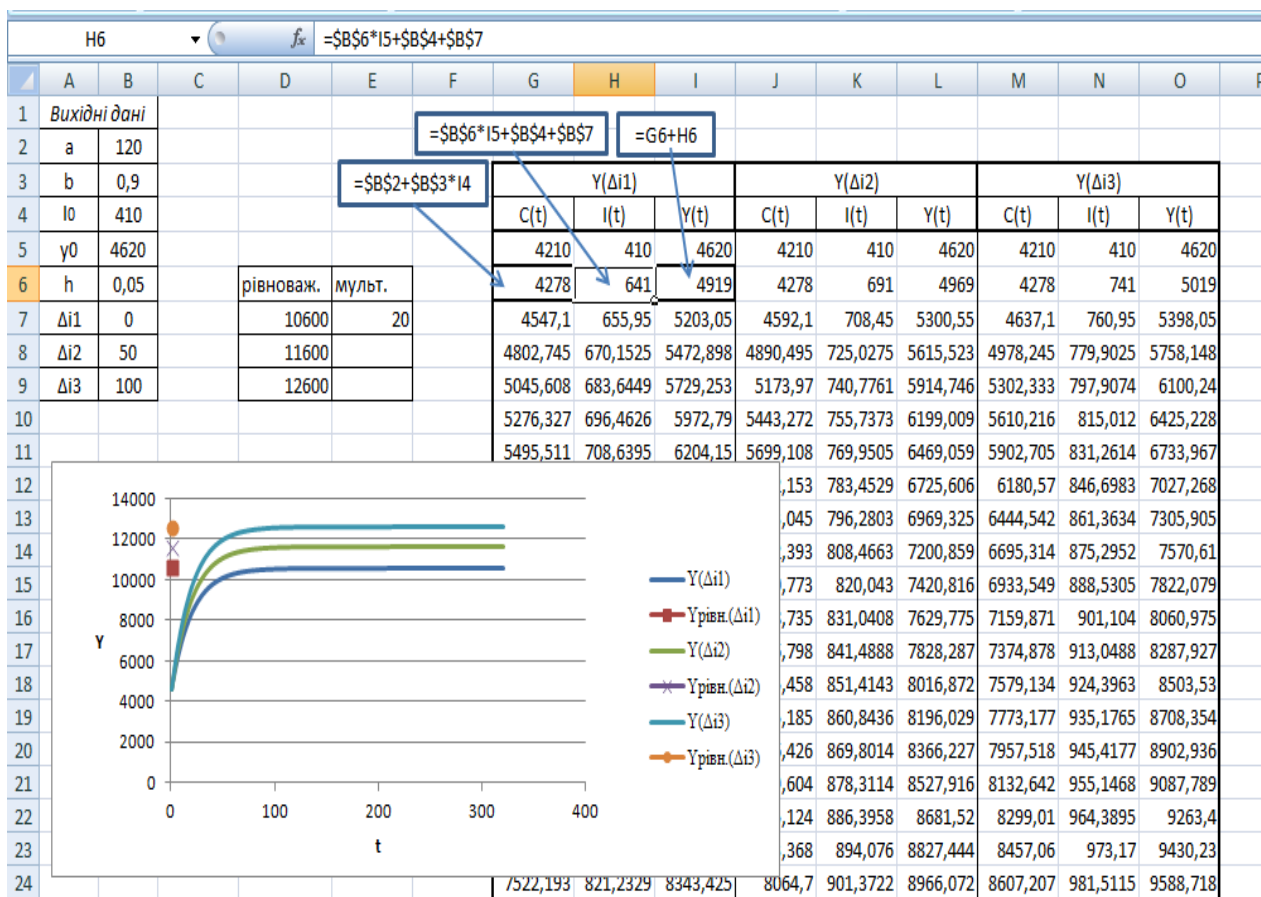


Рисунок 10. – Реалізація моделі національного доходу

Умова  $b + h < 1 \rightarrow 0,9 + 0,05 < 1$  виконується, отже система буде прагнути до стану рівноваги. Наближення системи до стану рівноваги при різних значеннях  $\Delta I$  показано на графіку, що побудовано в середовищі Microsoft Excel.

Зробити висновки. Прикріпити виконане практичне завдання у середовище MOODLE.

## Завдання для самостійної роботи студентів

Самостійна робота є основним засобом засвоєння студентом навчального матеріалу у час, вільний від обов'язкових навчальних занять.

Самостійна робота студента над засвоєнням навчального матеріалу з навчальної дисципліни може виконуватися у бібліотеці, навчальних кабінетах, лабораторіях і комп'ютерних класах, а також у домашніх умовах та передбачає:

вивчення лекційного матеріалу по темі – 20 год;

опрацювання літератури по темі – 10 год;

підготовку до лабораторних робіт;

підготовку до модульних контрольних робіт;

роботу за персональним комп'ютером по темі;

роботу в глобальній комп'ютерній мережі Інтернет.

} 24 год

### Питання, що винесені на самостійне опрацювання

№ з/п	Питання курсу	Кількість годин	Рекомендована література	Форма контролю
1	<b>Тема 1. Принципи моделювання економічних процесів.</b> Поняття моделі, системи. Засоби виробництва, виробничі фонди, виробнича функція. Виробничо-технологічна структура економічної системи Організаційно-господарська структура. Міжгалузевий господарський комплекс	8	[1-4]	Опитування, МКР №1
2	<b>Тема 2. Лінійні динамічні моделі макроекономіки з неперервним та дискретним часом.</b> Різницеве рівняння. Методи розв'язку різницевих рівнянь. Моделі фінансових операцій: приклади, аналіз. Модель ринкового регулювання (Муза).	10	[1-4]	Опитування, МКР №1
3	<b>Тема 3. Рівновага та нерівновага, стійкість та нестійкість лінійних динамічних моделей.</b> Теорема Раусса-Гурвіца. Методика Маршала як стабілізуючий засіб при аналізі павутиноподібної моделі ринкової рівноваги. Адаптивні очікування як засіб стабілізації траєкторії динамічної моделі.	10	[1-4]	Опитування, МКР №1
4	<b>Тема 4. Нелінійні динамічні економічні системи</b>	10	[1-4]	Опитування

	та їх моделі. Двохсекторні, три секторні та $n$ -секторні моделі економічного зростання. Моделювання обмінних процесів в соціально-економічних системах. Моделювання еволюції та самоорганізації нерівноважних економічних систем. Моделі економічних циклів Гудвіна. Вплив флуктуацій на динаміку споживчих потреб.			ння, МКР №1
5	<b>Тема 5. Мало секторна нелінійна динамічна модель макроекономіки.</b>	8		
6	<b>Тема 6. Економічні цикли. Просторова модель міжрегіональної торгівлі.</b>	10		
7	<b>Тема 7. Аналіз та синтез динамічних систем.</b> Якісний аналіз обмінних процесів в соціально-економічних системах. Якісний аналіз структури фазового портрету моделей економічного розвитку.		[1-4]	Опитування, МКР №1
8	<b>Тема 8. Стохастичні моделі економічної динаміки.</b> Приклади використання стохастичних диференціальних рівнянь при моделюванні економічних систем. Приклади використання випадкових процесів при моделюванні економічних систем (фінансовий менеджмент, страхування). Моделювання арбітражу на ринку за допомогою мартингальних мір. Модель розрахунку вартості опціонів на основі мартингальної теорії (модель Блека- Шоулса). Модель валютної паніки.	10	[1-4]	Опитування, МКР №2
9	<b>Тема 9. Моделі економічних змін. Синергетичний підхід у моделюванні та аналізі економічних процесів.</b> Технологічна концепція моделі суспільного розвитку. Нерівноважна модель годинника Шумпетера. Моделювання ієрархії зв'язків між мікро-макроекономікою і синергетика.	10	[1-4]	Опитування, МКР №2
<b>Всього</b>		<b>86</b>		

### **Рекомендації щодо виконання самостійної роботи**

Самостійна робота – форма організації навчального процесу, яка має на меті поглибити, узагальнити та закріпити знання, які студенти отримують у процесі навчання, а також застосувати ці знання при вирішенні практичних задач.

При самостійної роботи оцінюванні має бути в першу чергу врахована здатність студента застосовувати теоретичні знання при виконанні практичних завдань, а також повнота і правильність розв'язання запропонованих задач.

### **Зростання виробництва в умовах конкуренції.**

Розглянемо випадок коли має місце насиченість ринку збуту (конкуренція). В даному випадку вартість є змінною величиною і залежить від кількості виробленої продукції  $P=P(Q)$ .

Очевидно, що функція ціни буде спадаючою функцією (зі зростанням об'ємів виробництва, вартість на ринку буде зменшуватись). Як відомо спадаюча функція характеризується умовою

$$\frac{\partial p}{\partial Q} < 0$$

Отримаємо наступну динамічну модель зростання виробництва в умовах конкуренції:

$$\frac{dQ}{dt} = \alpha \cdot p(Q) \cdot Q, \quad \alpha = l \cdot m \quad (1)$$

З математичної точки зору (1) є нелінійним звичайно диференціальним рівнянням першого порядку, що дозволяє відокремлення змінних.

З точки зору економічної динаміки не обов'язково знаходити точний розв'язок рівняння (1), а повністю достатньо провести якісний аналіз даного рівняння.

Як відомо, характер поведінки кривих характеризується знаком другої похідної.

Із рівняння (1) видно, що:

$$\frac{dQ}{dt} > 0.$$

Це означає, що  $Q = Q(t)$ , яка характеризує об'єми виробництва, є зростаючою.

З'ясуємо, яким є характер такого зростання. Продиференціюємо праву і ліву частини рівняння (1):

$$Q'' = \alpha \cdot (P'(Q) \cdot Q' \cdot Q + P(Q) \cdot Q') = \alpha \cdot Q' \cdot (P'(Q) \cdot Q + P(Q)) = \alpha \cdot Q' \cdot Q \cdot \left( P'(Q) + \frac{P(Q)}{Q} \right)$$

Отриманий результат можна перетворити враховуючи означення еластичності попиту  $E(P) = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q}$ . Значення  $Q''$ , можна записати так:

$$Q'' = \alpha \cdot Q' \cdot P(Q) \cdot \left( \frac{dP}{dQ} \cdot \frac{P}{Q} + 1 \right) = \alpha \cdot Q' \cdot P(Q) \cdot \left( \frac{1}{E} + 1 \right),$$

Оскільки  $\frac{dQ}{dP} > 0, E(P) < 0$  остаточно отримаємо:

$$Q'' = \alpha \cdot Q' \cdot P(Q) \cdot \left( 1 - \frac{1}{|E|} \right). \quad (2)$$

Із співвідношення (2) випливає що при еластичному попиту ( $|E| > 1$ ) друга похідна буде додатна ( $Q'' > 0$ ). Відповідна ділянка графіка що характеризує динаміку зростання виробництва в умовах конкуренції є вгнутою вниз (U). З економічної точки зору це означає прогресуючий ріст. Відповідно при нееластичному попиту  $Q'' < 0$  крива є гнутою вгору (∩), що означає уповільнений ріст (насиченість ринку).

Розглянемо на прикладі аналіз поведінки зростання виробництва в умовах конкуренції. Розглянемо приклад для випадку лінійної залежності  $P(Q)$ .

$$P(Q) = a - b \cdot Q, \quad a, b = \text{const}, \quad a > 0, b > 0.$$

Тоді рівняння (2.4) буде мати вигляд:

$$Q' = \alpha \cdot (a - b \cdot Q) \cdot Q \quad (3)$$

З останнього запису видно, що  $Q' = 0$ , коли  $a - b \cdot Q = 0$ , або це є врівноважений стаціонарний стан. Це означає що при  $Q = \frac{a}{b}$  функція отримає постійне

значення і настає насиченість ринку збуту.  $\frac{a}{b}$  - є асимптотою нашого графіка.

Характер зростання, як було видно вище

$$Q'' = \alpha \cdot (a \cdot Q' - 2b \cdot Q \cdot Q') = \alpha Q' \cdot (a - 2ba)$$

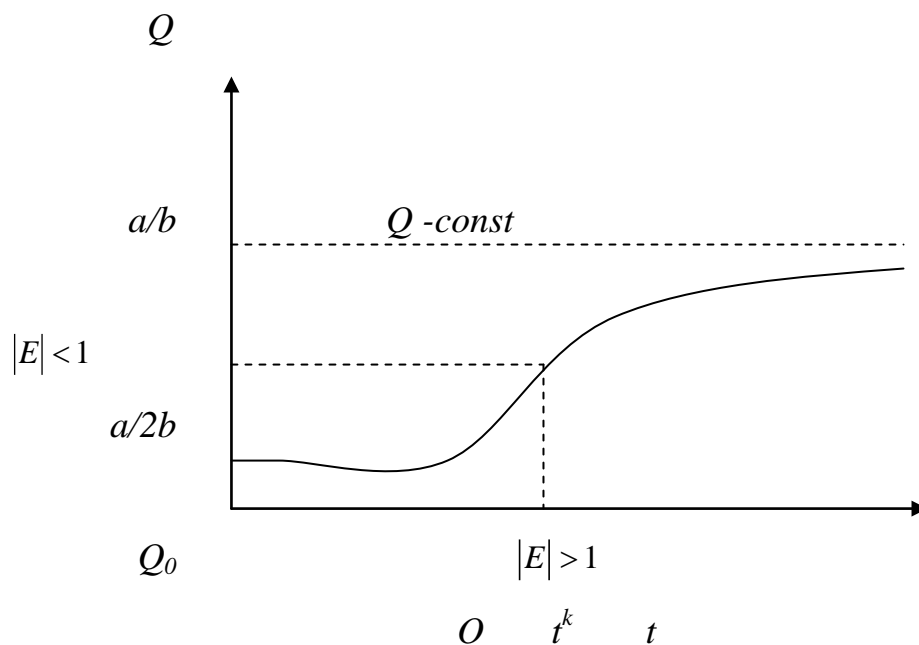
Характер зростання з'ясуємо по знаку 2-ї похідної

$$Q'' > 0, \text{ коли } a - 2bQ > 0, \text{ або } Q < \frac{a}{2b} \text{ (U)}$$

Відповідна ділянка графіка що характеризує динаміку зростання виробництва в умовах конкуренції є вгнутою вниз (U). З економічної точки зору це означає прогресуючий ріст. Попит еластичний  $|E| > 1$

$$Q'' < 0, \text{ коли } a - 2bQ < 0, \text{ або } Q > \frac{a}{2b}$$

При нееластичному попиту ( $|E| < 1$ )  $Q'' < 0$  крива є гнутою вгору (∩), що означає уповільнений ріст (насиченість ринку).



Дана крива, що відображає динаміку виробництва в умовах конкуренції називається логістичною кривою. Це є одним з частинних розв'язків (одна з інтегральних кривих) диференціального рівняння (3).

## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

### Основна:

1. Кочура Є.В., Косарев В.М. Моделювання макроекономічної динаміки : навч. посіб. Дніпропетровськ : ДУЕП, 2003. 236 с.
2. Лавінський Г.В., Бушуєва І.В., Пшенишнюк О.С., Устенко С.В. Моделювання економічної динаміки : навч. посіб. Київ : ЕКМО, 2003. 128с.
3. Бродський Ю.Б., Молодецька К.В. Моделювання економічної динаміки : підручник. Житомир : ЖНАЕУ, 2016. 132 с.
4. Бродський Ю.Б., Малютіна В.П. Економіко-математичне моделювання : консп. лекцій. Житомир : ЖНАЕУ, 2010. 116 с.
5. Лисенко Ю.Г., Петренко В.Л., Тимохін В.Н., Філіппов А.В. Економічна динаміка : навч. посіб. Донецьк : ДОНГУ, 2010. 176 с.
6. Гладка О. М., Карпович І. М., Сінчук А. М. Моделі економічної динаміки для фахівців з інформаційних технологій : Навчальний посібник. Рівне : РДГУ, 2019. 158 с.
7. Акулов М.Г., Тютюніков І.Є., Куперштейн Л.М., Ткаченко М. І. Моделювання економічної динаміки : навч. посібни / під ред. М.Г. Акулова. Вінниця : ВФЕУ, 2017. 310 с

### Додаткова:

1. Бродський Ю.Б., Молодецька К.В., Николук О.М. Системний аналіз в економіці : навч. посіб. Житомир : ЖНАЕУ, 2014. 174 с.
2. Лаврінський Г.В., Пшенишнюк О.С., Устинко С.В., Шарапов О.Д. Моделювання економічної динаміки : навч. посіб. Київ : Атака, 2006. 276 с.
3. Моделювання економічної динаміки : навч. посіб. / Т.С. Клебанова та ін. Харків : ІНЖЕК, 2004. 244 с.

Навчальне видання

## **МОДЕЛІ ЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ**

Методичні рекомендації

**Укладачі:**

**Шебаніна** Олена В'ячеславівна  
**Тищенко** Світлана Іванівна  
**Крайній** Володимир Олексійович та ін.

Формат 60x84 1/16. Ум. друк. арк. 2,29  
Тираж 50 прим. Зам. № \_\_

Надруковано у видавничому відділі  
Миколаївського національного аграрного університету  
54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.