

УДК 621.914

**СИНТЕЗ НАПРЯМНИХ МЕХАНІЗМІВ  
МЕТОДОМ ПАРАМЕТРИЧНИХ СІМЕЙ**

*В.П.Табацков, кандидат технічних наук, доцент  
Миколаївський державний аграрний університет  
Е.Г.Бергер, доктор технічних наук, професор  
Є.Е.Бергер, кандидат технічних наук, доцент  
Херсонський державний технічний університет*

Синтез механізмів, які забезпечують рух окремої ланки (робочого органа) по заданій криволінійній траєкторії, базується на принципі механічної реалізації графічних побудов. За цим принципом схема побудови заданої траєкторії розглядається як геометричний аналог кінематичної схеми шуканого механізму [1-3]. Отже синтез напрямного механізму потребує попереднього визначення схеми побудови заданої кривої — траєкторії ланки.

Для вирішення цієї задачі застосовано узагальнений алгебро-геометричний метод [3], за яким крива  $F$ , що задана рівнянням

$$F(x; y) = 0, \quad (1)$$

подається геометричним місцем точок перетину відповідних (Відповідними називаємо криві сімей (2), які мають однакові значення параметра  $t$ .) кривих  $(\alpha)$  і  $(\beta)$ , які належать двом однопараметричним сім'ям

$$a(x, y, t) = 0 \dots (a); b(x, y, t) = 0 \dots (b) \quad (2)$$

Вигляд рівнянь  $(\alpha)$  і  $(\beta)$  повинен бути таким, щоб виключення з них параметра  $t$  призводило до рівняння (1); в цьому разі точки перетину відповідних кривих належать до кривої  $F$ . Для виконання цієї умови перше рівняння  $(\alpha)$  може бути обране довільно, а друге —  $(\beta)$  треба визначити з сумісного вирішення рівнянь (1) і (2).

Найпоширенішим прикладом цього методу і його окремим випадком є відомий в математиці загальноприйнятій спосіб подання кривої  $F$  в параметричній формі, тобто у вигляді параметричних рівнянь

$$X = x(t) \dots\dots (a); y = y(t) \dots\dots (b). \quad (3)$$

Тут рівняння (3) виражають сім'ї прямих ліній, паралельних до осей координат; точки перетину відповідних (з однаковим  $t$ ) прямих належать  $F$ .

Крива (1) може подаватися множиною різних параметричних рівнянь (3) або рівнянь сімей (2) внаслідок довільного обрання першого рівняння (а). Це дозволяє знаходити різні схеми побудов заданої кривої  $F$ , а значить і одержувати множину різних конструкцій (кінематичних схем) напрямних механізмів.

Розглянемо приклади синтезу механізмів для відтворення кривих 2-го порядку (конічні перерізи) та 3-го порядку (клас тризубів).

1°. Еліпсограф. З канонічного рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

довільно приймаємо  $x=at \dots (a)$ ; підставивши (а) в (1), маємо  $y = b\sqrt{1-t^2} \dots (b)$ . При  $t=\cos j$  одержуємо параметричні рівняння  $x=a \cos j \dots (a)$ ;  $y=b \cdot \sin j \dots (b)$ , у яких витриває відома схема побудови точок  $M$  еліпса, що показана на рис.1а. Дійсно при  $AM=a$ ,  $BM=b$  і змінному  $j$  маємо  $X_M=AN=AM \cdot \cos j$ ;  $Y_M=KM=BM \cdot \sin j$ .

Реалізація цих побудов, тобто заміна геометричних елементів (точок і відрізів) їх механічними представниками (повзунами, шарнірами і шатуном  $ABM$ ) призводить до відомого еліптичного циркуля Леонардо да Вінчі [1].

Виконаємо такі перетворення цього механізму: закріплюємо повзун  $B$ , зв'язавши його з опорою шарнірно, і розкріплюємо напрямну  $O_x$ , надавши змогу прямолінійного переміщення площини  $xOy$ , з якою зв'язуємо заготовку – рис.1б. У результаті одержуємо “Пристрій для обробки криволінійних поверхонь” (Е.Г.Бер-

гер, Є.Е.Бергер, В.П.Табакцов Авт.св.№1771892, 1992р.), якими можуть бути еліптичні профілі, канавки або поверхні обертання.

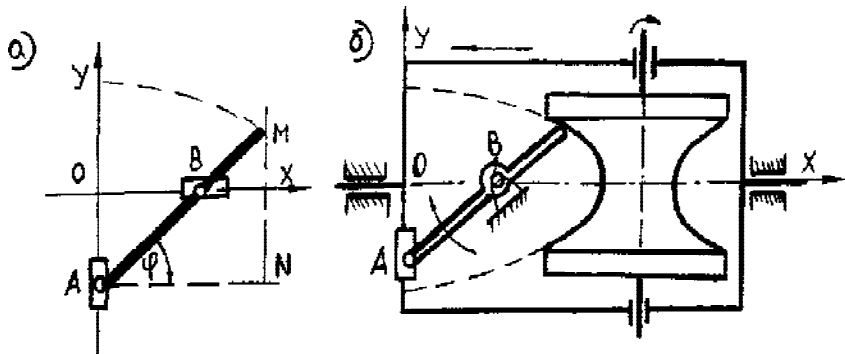


Рис. 1.

2<sup>0</sup>. Гіперболограф. Для визначення схеми побудови гіперболи, заданої рівнянням

$$x \cdot y = a^2, \quad (6)$$

обираємо  $x = \frac{a}{t} \dots (\alpha)$ ; при цьому з (1)  $y = a \cdot t \dots (\beta)$ .

При  $t = \operatorname{tg} \varphi$  маємо  $x = \frac{a}{\operatorname{tg} \varphi} \dots (\alpha \Gamma)$ ;  $y = a \cdot \operatorname{tg} \varphi \dots (\beta \Gamma)$ .

Розглянемо побудови на рис.2а. Якщо з точки С ( $ON=NC=a$ ) провести довільний промінь  $CM$  під кутом  $\varphi$  і відкласти  $AB=a$ , одержимо точку  $M$ , координати якої

$X_M = BM = \frac{a}{\operatorname{tg} \varphi}$ ;  $Y_M = OB = NA = a \cdot \operatorname{tg} \varphi$  підпорядковуються рівнянням  $(\alpha \Gamma)$  і  $(\beta \Gamma)$ .

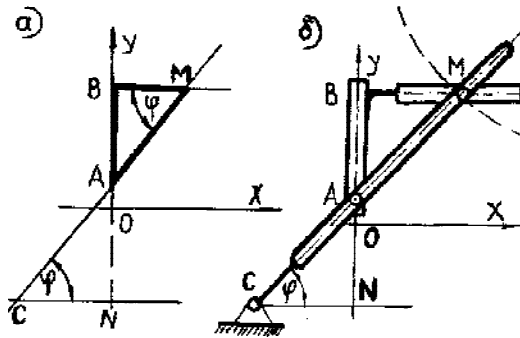


Рис. 2.

Замінюючи в даних побудовах точки  $C$ ,  $A$  і  $M$  шарнірами, промінь  $CM$  — кулісою, а відрізок  $AB$  — повзуном, довжиною  $AB=a$ , одержуємо гіперболограф за рис.2б (Бергер Е.Г., Табацков В.П., Бергер Є.Е. Авт. св. №799965,1981р.). В механізмі передбачається регулювання та фіксація кутів  $ANC=ABM \neq 900$ , що дозволяє відтворювати також і нерівнобічні гіперболи [4].

3<sup>0</sup>. Параболограф. Метод дозволяє також одержувати механізми для огинання кривих; шуканий механізм має реалізувати побудову прямих, дотичних до заданої кривої.

Нехай квадратична парабола задана рівнянням

$$y^2 = 2\rho \cdot x, \quad (7)$$

при цьому рівняння дотичної прямої в довільній точці  $M(x_1; y_1)$  має вигляд

$$y \cdot y_1 = \rho(x + x_1). \quad (8)$$

При змінних координатах  $x_1$ ,  $y_1$  воно виражає двопараметричну сім'ю прямих, які обгинають параболу; два змінних параметра зв'язані залежністю (7).

Для зведення рівняння (8) до однопараметричного введемо параметр  $t$ , який дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної прямої

$ABM$ , тобто  $t = \operatorname{tg}\varphi = OB:OA$  (рис.3а.). З рівняння (8) при

$x=0$  і  $y=0$  знаходимо  $OB = \rho \frac{x_1}{y_1} = \frac{y_1}{2}$ ;  $OA = -x_1$ , звідки

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y_1}{2x_1} = \frac{\rho}{y_1}$ . Тепер рівняння сім'ї прямих, дотичних до параболи, в однопараметричній формі можна записати у вигляді

$$y \cdot \frac{\rho}{2 \cdot \operatorname{tg}\varphi} = \operatorname{tg}\varphi \cdot x. \quad (9)$$

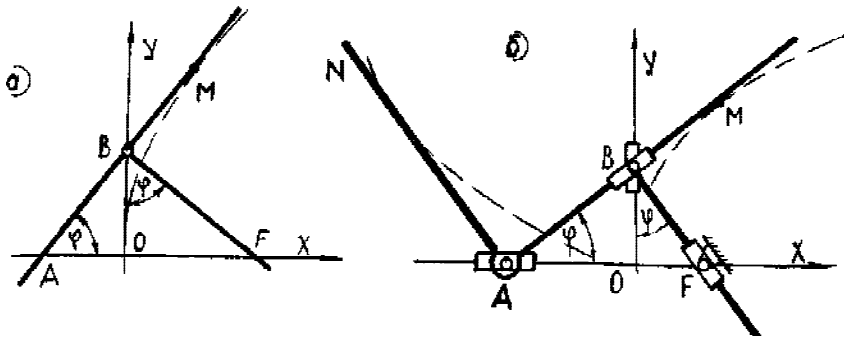


Рис. 3.

З (9) маємо  $OB = \frac{\rho}{2 \cdot \operatorname{tg}\varphi}$ , звідки  $OF = OB \cdot \operatorname{tg}\varphi = \frac{\rho}{2}$ , тобто

$OF$  не залежить від  $\varphi$ : при зміні кута  $\varphi$ , всі прями  $BF \perp AB$  проходять через постійну точку  $F$  (фокус параболи). Звідки випливає схема побудови довільної прямої сім'ї (9): якщо з точки

$F\left(\frac{\rho}{2}, 0\right)$ , яка є фокусом параболи, проводити довільні прями  $FB$ , то при зміні кута  $\varphi$  всі прями  $BM$  перпендикулярні  $FB$ , будуть дотичними до параболи (7).

Механічна реалізація цих побудов призводить до парабологра-

фа за рис.3б. (Бергер Е.Г., Табацков В.П., Бергер Є.Е. Авт. св. №799966,1981р.).

Легко доказати, що друге плече  $AN$  прямокутного важеля, що введено в конструкцію, буде обгинати полукубічну параболу. Дійсно, при параметрі  $t = tg\varphi$  рівняння сім'ї прямих  $AN$  має вигляд

$$y = -\frac{1}{t} \left( x - \frac{\rho}{2 \cdot t^2} \right). \quad (10)$$

Продиференціюємо (10) по змінному параметру  $t$ , звідки  $t = -\frac{2x}{3y}$ . Підставивши  $t$  в (10), одержимо рівняння полукубічної параболи у вигляді

$$y^2 = c \cdot x^3, \quad (11)$$

де  $c = \frac{8}{27\rho}$ .

4°. Механізм для відтворення тризубів. Нехай потрібними траєкторіями руху є криві, задані рівнянням

$$axy = x^3 + bx^2 + acx + a^2b. \quad (12)$$

Перетворимо (12) до вигляду  $y - \frac{a}{x} \cdot b - c = \frac{x}{a}(x + b)$  і запишемо рівняння параметричних сімей в формі

$$\frac{a}{x} = t \text{ або } x = \frac{a}{t}K(\alpha); \quad y - (t \cdot b + c) = \frac{1}{t}(x + b)K(\beta). \quad (13)$$

Розглянемо схему побудов прямих, що належать до сімей (13) при довільному куті  $\varphi$  ( $t = tg\varphi$ ) рис.4а. В системі  $xOy$  зафіксуємо точку  $C(o, c)$  і дві прями  $\rho$  і  $l$  так, що  $CK = a$ ,  $CN = b$ . Якщо через  $C$  провести довільну пряму  $BCA$  (змінний кут  $\varphi$ ), вона перетинає криві  $a$  і  $b$  в точках  $A$  і  $B$  з координатами

$x_A = KA = \frac{a}{\operatorname{tg}\varphi}$ ;  $x_B = -b$ ;  $y_B = b \cdot \operatorname{tg}\varphi + c$ . Отже пряма  $AM$ , паралельна  $Oy$ , належить до  $(\alpha)$ , а пряма  $BM$ , перпендикулярна до  $AB$ , має кутовий коефіцієнт  $K = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}$  і проходить через точку  $B(x_B; y_B)$ , тобто належить до  $(\beta)$ .

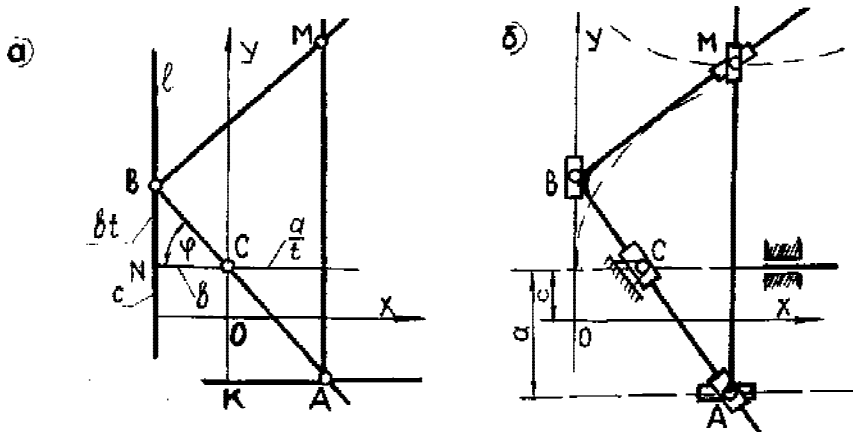


Рис. 4

Реалізація цих побудов виконується механізмом за рис.4б. (Бергер Е.Г., Табацков В.П., Бергер Є.Е. Авт. св. №1638034,1983р.). Порівнюючи його з попереднім (рис.3а.) можна бачити, що важіль  $BM$  цього механізму обгинає квадратичну параболу  $p$ .

#### ЛІТЕРАТУРА

1. И.И. Артоболевский. Теория механизмов для воспроизведения плоских кривых. АН СССР. – М., 1959, -253с.
2. Э.Г. Бергер. Теория механизмов для воспроизведения и обгибания плоских кривых. Канд. дисс. Днепропетровск, 1970, -198с.
3. В.В. Добровольский. Теория механизмов для образования плоских кривых. АН СССР. – М., 1953, -145с.
4. Матеріали патентної літератури.