МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Інженерно-енергетичний факультет
Кафедра вищої та прикладної математики

ВИЩА МАТЕМАТИКА
КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

Завдання та методичні рекомендації
для виконання самостійної роботи здобувачами
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
ОПП «Комп'ютерні науки»
спеціальності 122 «Комп'ютерні науки»
денної та заочної форми здобуття вищої освіти

МИКОЛАЇВ – 2023

УДК 51
В55

Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету (протокол № 5 від 05.02.2024р.)

Укладач:

В.В. Поживатенко – к.ф.-м.н., старший викладач кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського національного аграрного університету.

Рецензент:

Будак В.Д. — академік НАПН України, д-р техн. наук, професор, ректор Миколаївського національного університету ім. В.О. Сухомлинського.

ЗМІСТ

1 Подвійні інтеграли **4**

1.1 Повторні інтеграли 4

1.2 Зміна порядка інтегрування 7

1.3 Обчислення подвійного інтегралу 9

1.4 Заміна змінних. Полярні координати 11

1.5 Обчислення площ 18

1.6 Обчислення об'ємів 21

1.7 Обчислення площ поверхонь 26

1.8 Прикладення подвійних інтегралів 28

2 Потрійні інтеграли **33**

2.1 Повторні інтеграли 33

2.2 Зміна порядка інтегрування 35

2.3 Заміна змінних. Циліндричні та сферичні координати 37

2.4 Обчислення об'ємів 40

2.5 Прикладення потрійних інтегралів 42

1 Подвійні інтеграли

Подвійним інтегралом від неперервної функції $f(x;y)$ по обмеженій замкненій області (P) називається границя інтегральної суми

$$\iint\limits_{(P)} f(x;y)\,dx\,dy = \lim_{\substack{\max\Delta x_i\to 0\\ \max\Delta y_k\to 0}} \sum_i \sum_k f(x_i;y_k)\,\Delta x_i\,\Delta y_k,$$

де $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$. Якщо $m \leqslant f(x;y) \leqslant M$ в області (P), то

$$mS(P) \leqslant \iint\limits_{(P)} f(x;y)\,dx\,dy \leqslant MS(P).$$

1.1 Повторні інтеграли

Якщо область інтегрування прямокутна $(P) = [a,b]\times[c,d]$, то

$$\iint\limits_{(P)} f(x;y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x;y)\,dy.$$

Якщо область інтегрування (P) задана умовами $a \leqslant x \leqslant b$, $f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x)$, то

$$\iint\limits_{(P)} f(x;y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x;y)\,dy.$$

Якщо область інтегрування (P) задана умовами $c \leqslant y \leqslant d$, $g_1(y) \leqslant x \leqslant g_2(y)$, то

$$\iint\limits_{(P)} f(x;y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x;y)\,dx.$$

Приклад 1. Записати подвійний інтеграл $\iint\limits_{(P)} f(x;y)\,dx\,dy$ у вигляді повторних інтегралів двома способами, якщо область (P) обмежена прямими $x=0$, $x=2$, $y=1$, $y=2$.

Розв'язок. Зручно представити область на графіку. Тоді можна бачити, що вона є прямокутником, сторони якого паралельні координатним осям (рис. 1.1). В цьому випадку обидві змінні x і y змінюються в постійних межах $0 \leqslant x \leqslant 2$,

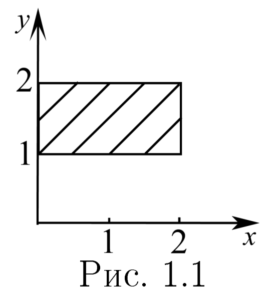

Рис. 1.1

$1 \leqslant y \leqslant 2$, а формули для обчислення подвійного інтегралу приймають відповідно вигляд:

$$\iint\limits_{(P)} f(x;y)\,dx\,dy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_1^2 f(x,y)\,dy,$$

$$\iint\limits_{(P)} f(x;y)\,dx\,dy = \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^2 f(x,y)\,dx,$$

Приклад 2. Записати подвійний інтеграл $\iint\limits_{(P)} f(x;y)\,dx\,dy$ у вигляді повторних інтегралів двома способами, якщо область (P) обмежена лініями $x \geqslant 0$, $x^2+y^2 \leqslant 4$.

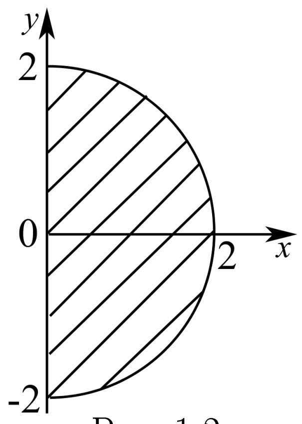

Рис. 1.2

Розв'язок. Представимо область інтегрування (P) на графіку (рис. 1.2). Розглянемо спочатку сталі межі за змінною x. Це будуть числа 0 і 2. Для кожного значення x із $[0;2]$ y приймає значення від $-\sqrt{2^2-x^2}$ до $\sqrt{2^2-x^2}$. Одержуємо:

$$\iint\limits_{(P)} f(x;y)\,dx\,dy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{-\sqrt{2^2-x^2}}^{\sqrt{2^2-x^2}} f(x;y)\,dy.$$

Якщо сталі межі взяти по y, $-2 \leqslant y \leqslant 2$, то x приймає значення від x до $\sqrt{2^2-y^2}$. Одержимо

$$\iint\limits_{(P)} f(x;y)\,dx\,dy = \int\limits_{-2}^2 dy \int\limits_0^{\sqrt{2^2-y^2}} f(x;y)\,dx.$$

Приклад 3. Записати подвійний інтеграл $\iint\limits_{(P)} f(x;y)\,dx\,dy$ у вигляді повторних інтегралів двома способами, якщо область (P) обмежена прямими $x=0$, $y-x=-1$, $y+x=1$.

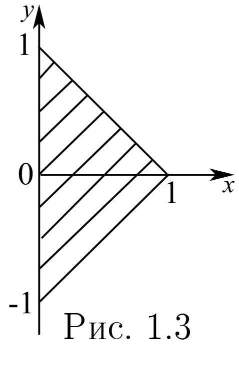

Рис. 1.3

Розв'язок. Побудуємо область інтегрування (P) (рис. 1.3). Розглянемо сталі межі інтегрування по x. Ними будуть 0 і 1. При цьому y приймає значення від $x-1$ до $-x+1$. Отже

$$\iint\limits_{(P)} f(x;y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x-1}^{-x+1} f(x;y)\,dy.$$

При виборі сталих меж по y область (P) розбиваємо на дві частини прямою $y = 0$ та знаходимо:

$$\iint\limits_{(P)} f(x;y)\,dx\,dy = \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{0}^{y+1} f(x;y)\,dx + \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{-y+1} f(x;y)\,dx.$$

Завдання та вправи для самостійної роботи студента

Записати подвійні інтеграли від функцій $f(x;y)$ по вказаним областям (P) у вигляді повторних інтегралів двома способами. Зробити креслення областей інтегрування.

1. Область (P) обмежена лініями:

$$x = -a, \quad x = a, \quad y = -b, \quad y = b.$$

2. Область (P) обмежена лініями:

$$y = 0, \quad y = x, \quad x = 5.$$

3. Область (P) є трикутником з вершинами в точках

$$(-1;-1), \quad (1;3), \quad (2;-4).$$

4. Область (P) є паралелограмом з вершинами в точках

$$(-3;1), \quad (2;1), \quad (2;4), \quad (6;4).$$

5. Область (P) обмежена лініями:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x^2 + y^2 = r^2,$$

причому $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

6. Область (P) обмежена кривою

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

7. Область (P) обмежена кривою

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

8. Область (P) задана нерівністю

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 \leqslant 4.$$

9. Область (P) обмежена лініями:

$$y = x^2, \quad x = y^2.$$

10. Область (P) задана нерівностями:

$$y - 2x \leqslant 0, \quad 2y - x \geqslant 0, \quad xy \leqslant 2.$$

11. Область (P) обмежена лініями:

$$y = x^3, \quad x + y = 10, \quad x - y = 4, \quad y = 0.$$

Знайти межі подвійного інтеграла при даних областях інтегрування (P).
1. Паралелограм зі сторонами $x = 3$, $x = 5$, $3x - 2y + 4 = 0$, $3x - 2y + 1 = 0$.
2. Трикутник зі сторонами $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$.
3. $x^2 + y^2 \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0.$
4. $x + y \leqslant 1,\ x - y \leqslant 1,\ x \geqslant 0.$
5. $y \geqslant x^2,\ y \leqslant 4 - x^2.$
6. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \leqslant 1.$
7. $(x-2)^2 + (y-3)^2 \leqslant 4.$
8. Область (P) обмежена параболами $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$.
9. Трикутник зі сторонами $y = x$, $y = 2x$ і $x + y = 6$.
10. Паралелограм зі сторонами $y = x$, $y = x + 3$, $y = -2x + 1$, $y = -2x + 5$.
11. $y - 2x \leqslant 0,\ 2y - x \geqslant 0,\ xy \leqslant 2.$
12. $y^2 \leqslant 8x,\ y \leqslant 2x,\ y + 4x - 24 \leqslant 0.$

1.2 Зміна порядка інтегрування

Приклад 1. У повторному інтегралі

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2-x} f(x,y)\,dy$$

змінити порядок інтегрування.

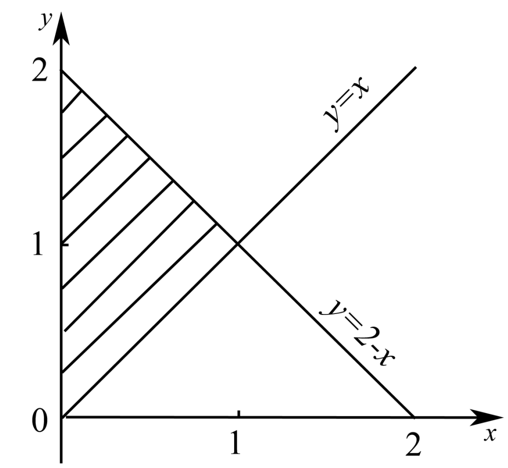

Рис. 1.4

Розв'язок. Задачу розіб'ємо на дві частини:

а) відновлення області інтегрування (P) за відомими межами даного повторного інтегралу;

б) запис повторного інтегралу зі сталими межами по y і змінними по x.

Так як внутрішній інтеграл взятий по y, то межі внутрішнього інтегралу одержані з рівнянь $y = x$ і $y = 2 - x$. Зобразимо ці прямі на кресленні (рис. 1.4). Вони складають деяку частину границі області інтегрування (P).

Розв'язуючи сумісно рівняння $y = x$ і $y = 2 - x$, знайдемо точку перетину цих прямих $(1; 1)$. Тобто абсциса x точок області (P) змінюється у межах від 0 до 1. Тоді шуканою областю (P) є фігура, що обмежена лініями $x = 0$, $y = x$, $y = 2 - x$.

Розставляючи тепер зовнішні межі інтегрування по y, а внутрішні по x, одержуємо:

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y f(x;y)\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x;y)\,dx.$$

Приклад 2. Змінити порядок інтегрування в інтегралі

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}}^x f(x;y)\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}}^1 f(x;y)\,dy.$$

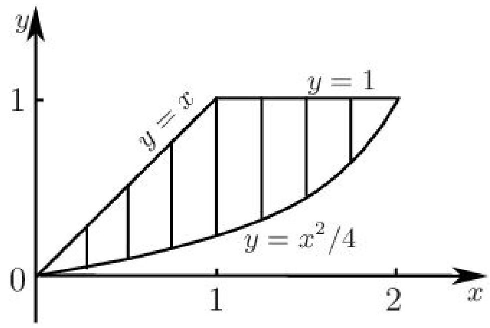

Рис. 1.5

Розв'язок. а) Відновимо область інтегрування (P). Розглядаючи обидва доданки одночасно, приходимо до висновку, що нижня межа внутрішнього інтегралу на ділянках $0 \leqslant x \leqslant 1$ і $1 \leqslant x \leqslant 2$ виражається через x однаково: $y = \dfrac{x^2}{4}$ (парабола). Верхньою ж межею на ділянці $0 \leqslant x \leqslant 1$ є пряма $y = x$, а на ділянці $1 \leqslant x \leqslant 2$ – пряма $y = 1$. Цього достатньо, щоб побудувати область (P) (рис. 1.5).

б) З креслення (рис. 1.5) бачимо, що сталими межами по y є числа 0 і 1. При цьому нижньою межею змінення x буде $x = y$, а для верхньої межі одержуємо $x = 2\sqrt{y}$. Корінь беремо з додатним знаком тому, що всі точки області (P) мають невід'ємні абсциси. Шуканий повторний інтеграл представиться у вигляді:

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{2\sqrt{y}} f(x;y)\,dx.$$

Завдання та вправи для самостійної роботи студента

Змінити порядок інтегрування в повторних інтегралах.

1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y f(x;y)\,dx.$

2. $\int\limits_0^4 dy \int\limits_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x;y)\,dx.$

3. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x;y)\,dx.$

4. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{2x}^{6-x} f(x;y)\,dy.$

5. $\int\limits_{-6}^{2} dy \int\limits_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x;y)\,dx.$

6. $\int\limits_{0}^{3} dy \int\limits_{0}^{3-y} f(x;y)\,dx.$

7. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y}^{2-y} f(x;y)\,dx.$

8. $\int\limits_{-3}^{0} dx \int\limits_{-x}^{3} f(x;y)\,dy + \int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{x}^{3} f(x;y)\,dy.$

9. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy \int\limits_{y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x;y)\,dx + \int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} dy \int\limits_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x;y)\,dx.$

10. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{x^3} f(x;y)\,dy + \int\limits_{2}^{4} dx \int\limits_{0}^{10-x} f(x;y)\,dy + \int\limits_{4}^{7} dx \int\limits_{x-4}^{10-x} f(x;y)\,dy.$

11. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y}^{\sqrt{y}} f(x;y)\,dx.$

12. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x;y)\,dy.$

13. $\int\limits_{0}^{r} dx \int\limits_{x}^{\sqrt{2rx-x^2}} f(x;y)\,dy.$

14. $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}} f(x;y)\,dy.$

15. $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{x}^{2x} f(x;y)\,dy.$

16. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{2x}^{6-x} f(x;y)\,dy.$

1.3 Обчислення подвійного інтегралу

Приклад 1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{(P)} x^2 y\,dx\,dy$ по області (P), що представлена на рис. 1.1.

Розв'язок. Запишемо цей інтеграл у вигляді повторного інтегралу:

$$I = \iint\limits_{(P)} x^2 y\,dx\,dy = \int\limits_{0}^{2} x^2\,dx \int\limits_{1}^{2} y\,dy.$$

Так як межі інтегрування сталі і підінтегральна функція є добутком, подвійний інтеграл зводиться до двох незалежних один від одного інтегралів:

$$I = \frac{x^3}{3}\bigg|_0^2 \cdot \frac{y^2}{2}\bigg|_1^2 = \frac{2^3 - 0^3}{3} \cdot \frac{2^2 - 1^2}{2} = \frac{8}{3} \cdot \frac{4-1}{2} = \frac{8 \cdot 3}{6} = \frac{24}{6} = 4.$$

Приклад 2. Обчислити подвійний інтеграл

$$I = \iint\limits_{(P)} \sqrt{x+y}\,dx\,dy,$$

де область (P) обмежена прямими $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.

Розв'язок. Область (P) зображена на рис. 1.6.

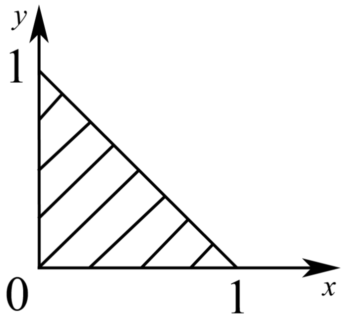

Рис. 1.6

Якщо взяти сталі межі по x, то маємо $0 \leqslant x \leqslant 1$. Тоді по y нижньою межею буде $y = 0$, а верхньою $y = 1 - x$. Відповідно одержуємо

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \sqrt{x+y}\,dy = \int\limits_0^1 \frac{2}{3}\left[(x+y)^{\frac{3}{2}}\right]\bigg|_0^{1-x} dx =$$

$$= \frac{2}{3}\int\limits_0^1 \left[(x+1-x)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}\right] dx = \frac{2}{3}\int\limits_0^1 \left(1 - x^{\frac{3}{2}}\right) dx =$$

$$= \frac{2}{3}\left(x - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)\bigg|_0^1 = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{2}{5}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}.$$

Завдання та вправи для самостійної роботи студента

Обчислити подвійні інтеграли, взяті по прямокутним областям інтегрування (P):

1. $\iint\limits_{(P)} xy\,dx\,dy \quad (0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 2).$

2. $\iint\limits_{(P)} e^{x+y}\,dx\,dy \quad (0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1).$

3. $\iint\limits_{(P)} \frac{x^2}{1+y^2}\,dx\,dy \quad (0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 2).$

4. $\iint\limits_{(P)} \frac{dx\,dy}{(x+y+1)^2} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 2).$

5. $\iint\limits_{(P)} \frac{y\,dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 2).$

6. $\iint\limits_{(P)} x\sin(x+y)\,dx\,dy \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}).$

7. $\iint\limits_{(P)} x^2y\, e^{xy}\, dx\, dy \quad (0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 2).$

8. $\iint\limits_{(P)} x^2y \cos(xy^2)\, dx\, dy \quad (0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2},\ 0 \leqslant y \leqslant 2).$

Обчислити дані повторні та подвійні інтеграли:

1. $\int\limits_3^4 dx \int\limits_1^2 \dfrac{dy}{(x+y)^2}.$

2. $\int\limits_0^a dx \int\limits_{-2\sqrt{ax}}^{2\sqrt{ax}} (x^2+y^2)\, dy.$

3. $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{a\sin\varphi}^{a} r\, dr.$

4. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\, dy.$

5. $\iint\limits_{(P)} (x-y)\, dx\, dy$, де область (P) обмежена прямими $y=0$, $y=x$, $x+y=2$.

6. $\iint\limits_{(P)} \frac{x^2}{y^2}\, dx\, dy$, де область (P) обмежена лініями $x=2$, $y=x$, $xy=1$.

7. $\iint\limits_{(P)} e^{\frac{x}{y}}\, dx\, dy$, де область (P) обмежена лініями $x=y^2$, $x=0$, $y=1$.

8. $\iint\limits_{(P)} \cos(x+y)\, dx\, dy$, де область (P) обмежена прямими $x=0$, $y=\pi$, $y=x$.

9. $\iint\limits_{(P)} \dfrac{dx\, dy}{\sqrt{ax-x^2}}$, де область (P) обмежена лініями $x=0$, $y^2=a^2-ax$.

10. $\iint\limits_{(P)} dx\, dy$, де область (P) обмежена лініями $y=2-x$, $y^2=4x+4$.

1.4 Заміна змінних. Полярні координати

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\iint\limits_{(P)} (x-y)\, dx\, dy$, де (P) – квадрат, обмежений прямими:

$$x+y=2, \quad x+y=4, \quad x-y=1, \quad x-y=3. \tag{1}$$

Розв'язок.

Зобразимо область (P) на рисунку 1.7. Можна легко побачити з рисунка, що для обчислення даного інтегралу область (P) треба розбити на дві частини, як при інтегруванні спочатку по x, а потім по y, так і навпаки. Зупинимось на одній з цих можливостей. Користуючись рисунком 1.7 знаходимо відповідні межі:

$$\iint\limits_{(P)} (x-y)\, dx\, dy = \int\limits_{3/2}^{5/2} dx \int\limits_{-x+2}^{x-1} (x-y)\, dy + \int\limits_{5/2}^{7/2} dx \int\limits_{x-3}^{-x+4} (x-y)\, dy =$$

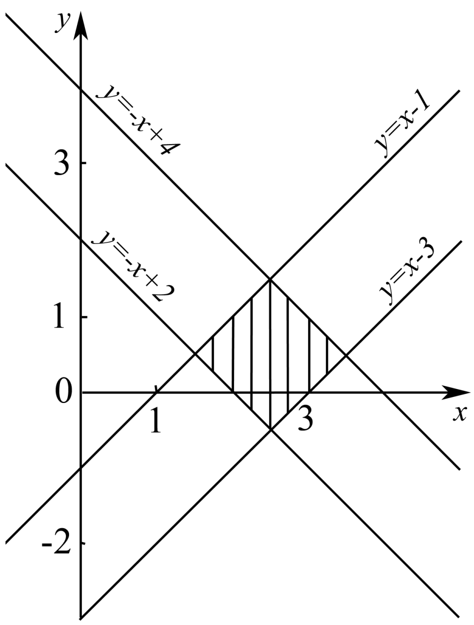

Рис. 1.7

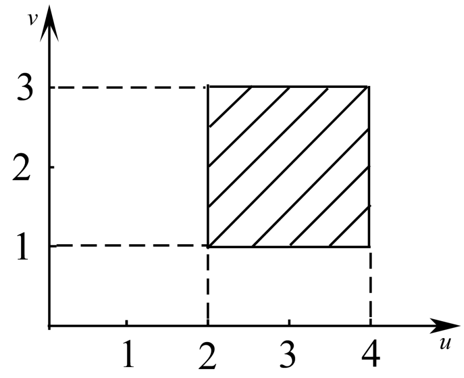

Рис. 1.8

$$= \int\limits_{3/2}^{5/2} \left(xy - \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{-x+2}^{x-1} dx + \int\limits_{5/2}^{7/2} \left(xy - \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{x-3}^{-x+4} dx =$$

$$= \int\limits_{3/2}^{5/2} \left(x(x-1) - x(-x+2) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(-x+2)^2}{2} \right) dx +$$

$$+ \int\limits_{5/2}^{7/2} \left(x(-x+4) - x(x-3) - \frac{(-x+4)}{2} + \frac{(x-3)^2}{2} \right) dx =$$

$$= \int\limits_{3/2}^{5/2} \left(2x^2 - 4x + \frac{3}{2} \right) dx + \int\limits_{5/2}^{7/2} \left(-2x^2 + 8x - \frac{7}{2} \right) dx =$$

$$= 2 \cdot \frac{x^3}{3} \Bigg|_{3/2}^{5/2} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} \Bigg|_{3/2}^{5/2} + \frac{3}{2} \cdot x \Bigg|_{3/2}^{5/2} + \left[-2 \cdot \frac{x^3}{3} \Bigg|_{5/2}^{7/2} + 8 \cdot \frac{x^2}{2} \Bigg|_{5/2}^{7/2} - \frac{7}{2} \cdot x \Bigg|_{5/2}^{7/2} \right] =$$

$$= \frac{2}{3}(2,5^3 - 1,5^3) - 2(2,5^2 - 1,5^2) + \frac{3}{2} - \frac{2}{3}(3,5^3 - 2,5^3) + 4(3,5^2 - 2,5^2) - \frac{7}{2} =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 12,25 - 2 \cdot 4 + \frac{3}{2} - \frac{2}{3} \cdot 27,25 + 4 \cdot 6 - \frac{7}{2} = 4.$$

Насправді можна скоротити обчислення шляхом введення нових змінних. Введення нових змінних приводить до нової області інтегрування, яка може бути значно простіше. В даному випадку область інтегрування стане квадратом, але зі сторонами паралельними осям координат. У загальних випадках, коли область інтегрування є паралелограмом, що утворюється взаємно паралельними прямими, і потребує поділу іноді на три частини, аналогічна заміна змінних приводить до області інтегруаання, що є прямокутником зі сторонами, що паралельні до координатних осей. Тобто в нових координатах треба взяти всього один інтеграл зі сталими межами по обом змінним.

Введемо нові змінні:

$$x + y = u, \quad x - y = v. \tag{2}$$

Тоді прямі $x+y=2$ і $x+y=4$ в системі координат xOy перетворяться в прямі $u=2$ і $u=4$ в системі координат uOv (рис. 1.8), а прямі $x-y=1$ і $x-y=3$ в прямі $v=1$ і $v=3$. Квадрат (P) перетворюється в квадрат (Q) зі сторонами паралельними координатним осям.

При перетворенні інтеграла до нових змінних треба спочатку отримати вираз x і y через u і v з рівностей (2):

$$x = \frac{u+v}{2}, \quad y = \frac{u-v}{2}.$$

Обчислимо якобіан даного перетворення:

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Маємо

$$|J| = \frac{1}{2}.$$

Так як якобіан відмінний від нуля, то обране перетворення області (P) в область (Q) буде взаємно однозначним. Крім того, як функція $f(x;y) = x - y$, так і функції $\frac{u+v}{2}$ і $\frac{u-v}{2}$ разом зі своїми частинними похідними є безперервними. Отже, знаходимо:

$$\iint\limits_{(P)} (x-y)\,dx\,dy = \iint\limits_{(Q)} \frac{1}{2} v\,du\,dv = \frac{1}{2}\int\limits_2^4 du \int\limits_1^3 v\,dv = \frac{1}{2}\int\limits_2^4 \left.\frac{v^2}{2}\right|_1^3 du =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_2^4 (3^2 - 1^2)\,du = \frac{8}{4}\int\limits_2^4 du = 2\,u|_2^4 = 2\cdot(4-2) = 4.$$

Приклад 2. Яка заміна змінних приведе криволінійний чотирикутник (P), що обмежений лініями $xy=1$, $xy=2$, $y=x+1$, $y=x-1$ $(x>0, y>0)$, до прямокутника (Q), сторони якого паралельні координатним осям?

Розв'язок. Криволінійний чотирикутник (P) зображений на рисунку 1.9. Позначимо нові змінні через u і v. В системі координат uOv за умовою завдання прямокутник (Q) мусить бути обмеженим деякими прямими, що паралельні

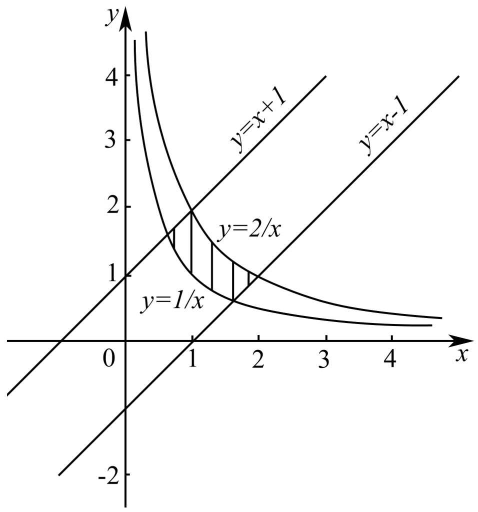

Рис. 1.9

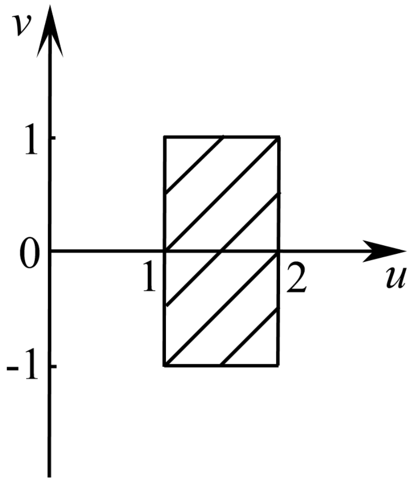

Рис. 1.10

координатним осям. Тобто $u = u_1$, $u = u_2$, $v = v_1$, $v = v_2$. З рівнянь заданих ліній

$$xy = 1, \qquad x - y = -1,$$

$$xy = 2, \qquad x - y = 1$$

бачимо, що при $xy = u$, $x - y = v$ вийде потрібне перетворення. Прямокутник (Q) буде обмежений прямими $u = 1$, $u = 2$, $v = -1$, $v = 1$ (рис. 1.10).

Отже навіть криволінійні області можна приводити до прямокутних, по яким дуже зручно інтегрувати.

Приклад 3. Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint\limits_{(P)} \sqrt{\frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}}\, dx\, dy,$$

де (P) – верхнє півколо $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

Розв'язок. Інтеграли, в яких область інтегрування складає окружність або її частини, зручніше брати в полярних координатах. Для переходу до полярних координат використовують формули:

$$x = \rho \cos\varphi, \qquad y = \rho \sin\varphi.$$

Для інтегрування в полярних координатах треба врахувати, що це криволінійні координати і, отже, треба домножити підінтегральну функцію на якобіан переходу від прямолінійних декартових координат до криволінійних полярних:

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

Зазначимо, що часто в цих інтегралах або в межах інтегрування, або в підінтегральній функції зустрічається наступна симетрична комбінація або функції від неї:

$$x^2+y^2=\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=\rho^2.$$

За допомогою відповідної заміни змінних перетворюємо інтеграл до полярних координат:

$$I=\iint\limits_{(P)}\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dx\,dy=\left[\begin{array}{c}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\end{array}\right]=\iint\limits_{(Q)}\sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\,\rho\,d\rho\,d\varphi.$$

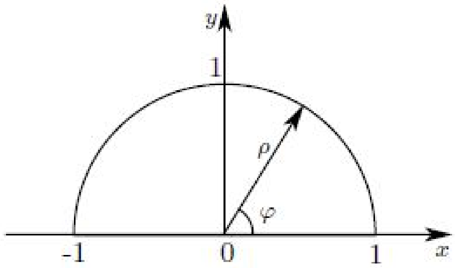

Рис. 1.11

Розглянемо область інтегрування (рис. 1.11). Рівняння її межі в полярних координатах приймає вигляд: $\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=1$, тобто $\rho^2=1$, або $\rho=1$. В межах даної області полярний кут φ змінюється від 0 до π, а полярний радіус ρ змінюється в межах від 0 до 1 (промінь, що виходить із полюса і перетинає область, входить в область при $\rho=0$, виходить з неї при $\rho=1$). Отже

$$I=\iint\limits_{(Q)}\sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\,\rho\,d\rho\,d\varphi=\int\limits_0^{\pi}d\varphi\int\limits_0^1\sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\,\rho\,d\rho=\pi\int\limits_0^1\sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\,\rho\,d\rho.$$

За допомогою заміни змінної після трохи громіздких обчислень знаходимо інтеграл

$$\int\limits_0^1\sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\,\rho\,d\rho=\left[\begin{array}{c}x=\rho^2\\ dx=2\rho\,d\rho\end{array}\right]=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx.$$

І далі

$$\int\limits_0^1\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx=\left[\begin{array}{cc}t^2=\frac{1-x}{1+x}, & 2t\,dt=-\frac{2dx}{(1+x)^2}\\ x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, & dx=\frac{-4t\,dt}{(1+t^2)^2}\end{array}\right]=-4\int\limits_1^0\frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^2}=$$

$$=2\left(-\operatorname{arctg}t+\frac{t}{1+t^2}\right)\Bigg|_1^0=\frac{\pi}{2}-1.$$

Отже:

$$I=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=\frac{\pi}{4}(\pi-2).$$

Завдання та вправи для самостійної роботи студента

Полярні координати

Перейти до полярних координат і розставити межі інтегрування.

1. $\iint\limits_{(P)} f(x;y)\,dx\,dy$, де область (P) – коло $x^2+y^2 \leqslant ax$.

2. $\iint\limits_{(P)} f(x;y)\,dx\,dy$, де область (P) є загальною частиною двох кіл $x^2+y^2 \leqslant ax$ і $x^2+y^2 \leqslant bx$.

3. $\iint\limits_{(P)} f(x;y)\,dx\,dy$, де область (P) – трикутник, обмежений прямими $y = x$, $y = -x$, $y = 1$.

4. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^x f(\sqrt{x^2+y^2})\,dy$.

5. $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x;y)\,dy$.

6. $\int\limits_0^{\frac{r}{\sqrt{1+r^2}}} dx \int\limits_0^{rx} f\left(\dfrac{y}{x}\right)\,dy + \int\limits_{\frac{r}{\sqrt{1+r^2}}}^{r} dx \int\limits_0^{\sqrt{r^2-x^2}} f\left(\dfrac{y}{x}\right)\,dy$.

7. (P) – коло:
1) $x^2+y^2 \leqslant R^2$;
2) $x^2+y^2 \leqslant ax$;
3) $x^2+y^2 \leqslant by$.

8. (P) – область, обмежена окружностями $x^2+y^2 = 4x$, $x^2+y^2 = 8x$ і прямими $y = x$, $y = 2x$.

9. (P) – область, що є спільною частиною двох кіл $x^2+y^2 \leqslant ax$ і $x^2+y^2 \leqslant by$.

10. (P) – область, обмежена прямими $y = x$, $y = 0$ і $x = 1$.

11. (P) – менший з двох сегментів, на які пряма $x + y = 2$ розтинає коло $x^2+y^2 \leqslant 4$.

12. (P) – внутрішня частина правої петлі лемніскати Бернулі

$$(x^2+y^2)^2 = a^2\,(x^2-y^2).$$

13. (P) – область, визначена нерівностями

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad (x^2+y^2)^3 \leqslant 4a^2x^2 \leqslant y^2.$$

Обчислити інтеграли після переходу до полярних координат.

1. $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)\,dy$,.

2. $\iint\limits_{(P)} \sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dx\,dy$, де (P) визначається нерівностями $x^2+y^2 \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

3. $\iint\limits_{(P)} (h-2x-3y)\,dx\,dy$, де (P) – коло $x^2+y^2 \leqslant R^2$.

4. $\iint\limits_{(P)} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy$, де (P) – коло $x^2+y^2 \leqslant Rx$.

5. $\iint\limits_{(P)} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\,dx\,dy$, де (P) – частина кільця $x^2+y^2 \geqslant 1$, $x^2+y^2 \leqslant 4$, $y \geqslant \dfrac{x}{\sqrt{3}}$, $y \leqslant x\sqrt{3}$.

6. $\iint\limits_{(P)} \sqrt{r^2-x^2-y^2}\,dx\,dy$, де (P) – коло $x^2+y^2 \leqslant rx$.

7. $\iint\limits_{(P)} y\,dx\,dy$, де (P) – верхнє півколо радіуса a з центром в точці $(a;0)$.

8. $\iint\limits_{(P)} (x^2+y^2)\,dx\,dy$, де (P) – коло $x^2+(y+2)^2 \leqslant 4$.

9. $\iint\limits_{(P)} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\,dx\,dy$, де (P) – частина кола $x^2+y^2 \leqslant 1$, що лежить в першому квадранті.

10. $\iint\limits_{(P)} dx\,dy$, де область (P) обмежена лемніскатою $(x^2+y^2)^2 = 2a^2xy$.

11. $\int\limits_0^{2a} dx \int\limits_0^{\sqrt{2ax-x^2}} dy$.

12. $\iint\limits_{(P)} \dfrac{dx\,dy}{\sqrt{(x^2+y^2+a^2-b^2)-4(a^2-b^2)\,x^2}}$, де область (P) обмежена еліпсом $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b)$.

13. Використати узагальнені полярні координати

$$x = a\,\rho\cos\varphi, \quad y = b\,\rho\sin\varphi$$

для обчислення інтегралу

$$\iint\limits_{(P)} f\left(\sqrt{9-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right)dx\,dy,$$

де (P) – лежача в першому квадранті частина еліптичного кільця, обмеженого еліпсами

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{і} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=4.$$

Інші координати

Провести вказану заміну змінних і розставити межі інтегрування.

1. $\int\limits_a^b dx \int\limits_{\alpha x}^{\beta x} f(x;y)\,dy \qquad (0<a<b, 0<\alpha<\beta)$, якщо $u=x$, $v=\dfrac{y}{x}$.

2. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f(x;y)\,dy$, якщо $u=x+y$, $v=x-y$.

3. $\iint\limits_{(P)} f(x;y)\,dx\,dy$, де (P) – область, обмежена кривою $\left(x^2+\dfrac{1}{3}y^2\right)^2 = x^2y$, якщо $x=\rho\cos\varphi$, $y=\sqrt{3}\,\rho\sin\varphi$.

4. $\iint\limits_{(P)} dx\,dy$, де область (P) обмежена параболами $y = ax^2$, $y = bx^2$ і гіперболами $xy = p$, $xy = q$, якщо $y = ux^2$, $xy = v$ (0<a<b, 0<p<q).

5. $\iint\limits_{(P)} f(x;y)\,dx\,dy$, де область (P) обмежена лініями $x = 0$, $y = 0$, $\sqrt{x}+\sqrt{y} = \sqrt{a}$ $(a > 0)$ якщо $x = u\cos^4 v$, $y = u\sin^4 v$.

6. $\int\limits_0^a dx \int\limits_{mx}^{nx} f(x;y)\,dy$, $0 < m < n$ якщо $u = x + y$, $uv = y$.

Обчислити інтеграли за допомогою вказаної заміни змінних.

1. $\iint\limits_{(P)} (x^2 + y^2)\,dx\,dy$, де (P) – область, обмежена окружностями

$$x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0 \quad \text{і} \quad x^2 + y^2 + 2x = 0.$$

Вказівка. Покласти $x + 1 = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$.

2. $\iint\limits_{(P)} xy\,dx\,dy$, де область (P) обмежена лініями $xy = 1$, $x + y = \dfrac{5}{2}$.

Вказівка. Покласти $x + y = u$, $xy = v$.

3. $\iint\limits_{(P)} e^{k(x+y)^2}\,dx\,dy$, де область (P) визначається нерівностями $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 1$.

Вказівка. Покласти $x = u - uv$, $y = uv$.

4. $\iint\limits_{(P)} dx\,dy$, де область (P) обмежена параболами $y^2 = 2x$, $y^2 = 3x$ і гіперболами $xy = 1$, $xy = 2$.

Вказівка. Покласти $xy = u$, $\dfrac{y^2}{x} = v$.

5. $\iint\limits_{(P)} x^2\,y\,dx\,dy$, де область (P) обмежена гіперболами $xy = p$, $xy = q$ $(0 < p < q)$, прямими $y = ax$, $y = bx$ $(0 < a < b)$ і розташована в першому квадранті.

Вказівка. Покласти $x = \sqrt{\dfrac{v}{u}}$, $y = \sqrt{uv}$.

1.5 Обчислення площ

Площа плоскої фігури (P) знаходиться за формулою

$$S = \iint\limits_{(P)} dx\,dy.$$

Приклад 1. Обчислити площу фігури, що лежить в першому квадранті та обмежена окружністю $x^2 + y^2 = 2ax$ параболою $y^2 = 2ax$ і прямою $x = 2a$.

Розв'язок. Зобразимо цю фігуру на рисунку (рис. 1.12).

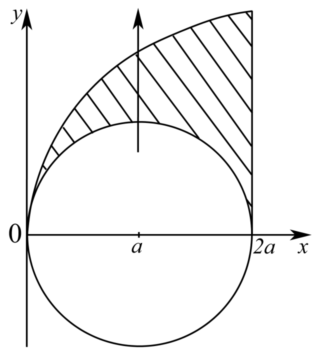

Рис. 1.12

Для обчислення площі скористаємося формулою:

$$S = \iint\limits_{(S)} dx\, dy.$$

Бачимо, що зовнішні межі інтегрування зручніше вибрати по x. Інакше довелося б фігуру розбивати на три частини та відповідно обчислювати три інтеграли. Для сталих меж по x маємо 0 і $2a$. Знизу фігура обмежена верхньою напівокружністю, рівняння якої $y = \sqrt{2ax - x^2}$. Отже, $\sqrt{2ax - x^2}$ – нижня межа інтегрування. Зверху фігура обмежена верхньою гілкою параболи, рівняння якої $y = \sqrt{2ax}$. Отже, $\sqrt{2ax}$ – верхня межа інтегрування.

Для площі одержуємо:

$$S = \int\limits_0^{2a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} dy = \int\limits_0^{2a} (\sqrt{2ax} - \sqrt{2ax - x^2})\, dx = \frac{8a^2}{3} - \frac{\pi a^2}{2}.$$

Приклад 2. Обчислити площу параболічного сегменту обмеженого параболою

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}$$

і віссю Ox.

Розв'язок. Знов скористаємось переходом до нових координат

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = u, \qquad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = v.$$

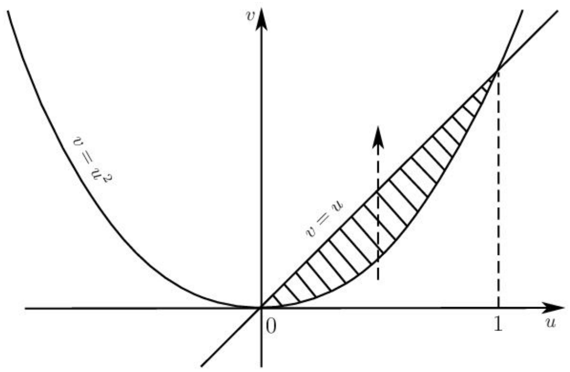

Рис. 1.13

Тоді в системі координат uOv рівняння параболи прийме звичайний вигляд $u^2 = v$ (рис. 1.13). Осі абсцис ($y = 0$) в старій системі координат буде відповідати в новій системі координат пряма $u = v$.

Для якобіану перетворення

$$x = \frac{a}{2}(u + v), \qquad y = \frac{b}{2}(u - v)$$

маємо

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{a}{2} & \frac{a}{2} \\ \frac{b}{2} & -\frac{b}{2} \end{vmatrix} = -\frac{ab}{4} - \frac{ab}{4} = -\frac{ab}{2}.$$

Візьмемо, наприклад, сталі межі по u ($0 < u < 1$). Тоді змінними межами по v будуть: u^2 – нижня, u – верхня. Отже, одержимо

$$S = \iint\limits_{(S)} dx\, dy = \int\limits_0^1 du \int\limits_{u^2}^{u} \frac{ab}{2}\, dv = \frac{ab}{2} \int\limits_0^1 v \Big|_{u^2}^{u} du =$$

$$= \frac{ab}{2}\int\limits_0^1 (u-u^2)\,du = \frac{ab}{2}\left(\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{ab}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = \frac{ab}{12}.$$

Завдання та вправи для самостійної роботи студента

Знайти площі плоских фігур, обмежені заданими кривими:

1. $xy = 4,\ x + y - 5 = 0.$

2. $x = y,\ x = 2y,\ x + y = a,\ x + 3y = a\ (a > 0).$

3. $xy = a^2,\ xy = b^2,\ y = m,\ y = n.$

4. $y = x,\ y = 5x,\ x = 1.$

5. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a},\ x + y = a.$

6. Еліпсом $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

7. $y^2 = 10x + 25,\ y^2 = -6x + 9.$

8. $x = 0,\ y = 0\ x + y = 1.$

9. $y = 2x,\ y = 3x\ x = 2.$

Полярні координати

Обчислити площі плоских фігур, обмежених заданими кривими, за допомогою перетворення до полярних координат:

1. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2\,(x^2 - y^2).$

2. $(x^2 + 2y^2)^3 = xy^4.$

3. $\left(\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}\right)^2 = x^2y.$

4. $(x^2 + y^2)^2 = a\,(x^3 - 3xy^2)\ (a > 0).$

5. $(x + y)^3 = xy\ (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0).$

Узагальнені полярні координати

1. Знайти площу фігури, обмеженою кривою

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = \frac{x^2}{h^2} - \frac{y^2}{k^2} \quad (x > 0, y > 0),$$

де параметри h і k додатні.

Вказівка. Узагальні координати вводити за формулами

$$x = \alpha\rho\cos^\gamma\varphi, \qquad y = \beta\rho\sin^\gamma\varphi,$$

де α, β і γ підбираються відповідним чином.

2. Обчислити площу фігури, обмеженою кривими

$$\sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \sqrt[4]{\frac{y}{b}} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0.$$

3. Обчислити площу фігури, обмеженою кривою

$$\left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}}\right)^{12} = \frac{xy}{c^2}.$$

Інші координати

1. Знайти площу криволінійного чотирикутника, обмеженого дугами парабол $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $y^2 = cx$, $y^2 = dx$ $(0 < a < b, 0 < c < d)$.

Вказівка. Ввести нові змінні u і v, поклавши

$$x^2 = uy, \qquad y^2 = vx.$$

1.6 Обчислення об'ємів

Об'єм тіла, обмеженого знизу областю $(P) \subset xOy$, зверху неперервною поверхнею $z = f(x;y)$, збоку прямою циліндричною поверхнею:

$$V = \iint\limits_{(P)} f(x;y)\,dx\,dy.$$

Приклад 1. Обчислити об'єм кулі, що обмежена сферою

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Розв'язок. Через симетричність даної кулі відносно координатних площин достатньо обмежитись обчисленням об'єму його восьмої частини, що розташована у першому октанті (рис. 1.14).

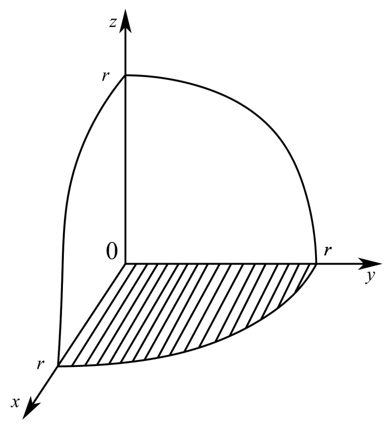

Рис. 1.14

Для того, щоб скористатись формулою

$$V = \iint\limits_{(P)} f(x;y)\,dx\,dy \tag{3}$$

для обчислення об'єму знаходимо підінтегральну функцію

$$f(x;y) = z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Знак цього виразу обрано додатним, так як розглядається частина кулі, що розташована над площиною xOy. Область інтегрування обмежена перетином площини xOy з поверхньою кулі. Щоб знайти цей перетин, покладемо в рівнянні поверхні кулі $z = 0$. Одержимо окружність $x^2+y^2 = R^2$. В нашому випадку першому октанту буде відповідати частина кола, що розташована в першому квадранті площини xOy. Взявши сталі межі інтегрування по x $(0 \leqslant x \leqslant R)$, одержимо межі по y: 0 – нижню, $\sqrt{R^2 - x^2}$ – верхню. За формулою (3) маємо:

$$\frac{1}{8}V = \int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dy.$$

Обчислимо спочатку

$$\int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dy = \left[\begin{array}{c} y=\sqrt{R^2-x^2}\sin t \\ dy=\sqrt{R^2-x^2}\cos t\,dt \end{array}\right] = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (R^2-x^2)\cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{\pi}{4}(R^2-x^2).$$

Отже,

$$\frac{1}{8}V = \frac{\pi}{4}\int\limits_0^R (R^2-x^2)\,dx = \frac{\pi R^3}{6}.$$

Звідки

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Приклад 2. Обчислити об'єм тіла, що обмежене поверхнями

$$x^2+y^2=4x, \qquad z=x, \qquad z=2x.$$

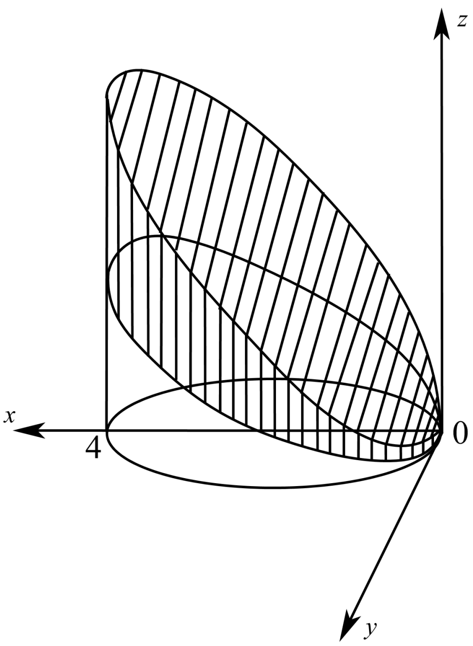

Рис. 1.15

Розв'язок. Поверхня $x^2+y^2=4x$ є круговий циліндр, ось якого паралельна осі Oz, а $z=x$ і $z=2x$ – площини, що проходять черех ось Oy під різними кутами нахилу до площини xOy. Ці площини, перетинаючи циліндр, вирізають з нього клиноподібний шар (рис. 1.15), об'єм якого і треба обчислити. Цей шар не є циліндричним брусом, і тому його об'єм не може бути обчислений безпосередньо за формулою (3). Однак його можна розглядати як різницю двох цилінричних брусів, зрізаних зверху площинами $z=2x$ і $z=x$. Межі змінення для x і y знаходимо з рівняння контура області інтегрування $x^2+y^2=4x$. Зручніше взяти постійні межі по x ($0\leqslant x\leqslant 4$). Тоді по y маємо 0 – нижня межа, $\sqrt{4x-x^2}$ – верхня межа, і шукана половина об'єму тіла представиться у вигляді:

$$\frac{1}{2}V = \int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{\sqrt{4x-x^2}} 2x\,dx - \int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{\sqrt{4x-x^2}} x\,dx = 4\pi.$$

Отже, $V=8\pi$.

Завдання та вправи для самостійної роботи студента

1. Обчислити об'єм тіла, обмеженого координатними площинами, площинами $x = 4$, $y = 4$ і параболоїдом обертання $z = x^2 + y^2 + 1$.

2. Обчислити об'єм тіла, обмеженого координатними площинами і площиною $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ (піраміда).

3. Обчислити об'єм тіла, обмеженого координатними площинами, площиною $2x + 3y - 12 = 0$ і циліндром $z = \frac{y^2}{2}$.

4. Обчислити об'єм тіла, обмеженого циліндрами $z = 4 - y^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ і площиною $z = 0$.

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого циліндрами $x^2 + y^2 = r^2$, $z = \frac{x^3}{a^2}$ і площиною $z = 0$ $(z \geqslant 0)$.

6. Обчислити об'єм тіла, розташованого в першому октанті і обмеженого гіперболічним параболоїдом $z = \frac{xy}{a}$, циліндром $x^2 + y^2 = ax$ і площиною $z = 0$.

7. Знайти об'єм тіла, вирізаного циліндром $x^2 + y^2 = rx$ зі сфери

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

8. Знайти об'єм тіла, вирізаного параболоїдом обертання $x^2+y^2 = z$ $(z \geqslant 0)$ з циліндру $x^2 + y^2 = x$.

9. Обчислити об'єм тіла, обмеженого параболоїдом $z = \frac{1}{a}\left(a^2 - x^2 - 4y^2\right)$ і площиною $z = 0$.

10. Обчислити об'єм тіла, обмеженого циліндрами $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ і площинами $z = 0$, $x + z = 6$.

11. Обчислити об'єм частин, на які еліпсоїд $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ розтинається конусом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$.

12. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z = x+y$, $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 2x$, $z = 0$ $(x > 0, y > 0)$.

Вказівка. Скористатись заміною змінних: $xy = u$, $\frac{y}{x} = v$.

13. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z = x^2 + y^2$, $x = x^2 + y^2$, $2x = x^2 + y^2$, $z = 0$.

Вказівка. Скористатись переходом до полярних координат.

14. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z = x^2 + y^2$, $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $y = \frac{x}{2}$, $y = 2x$.

15. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 - z^2 = -a^2.$$

Вказівка. Скористатись переходом до узагальнених полярних координат.

16. Обчислити об'єм тіла, обмеженого площиною $z = 0$, циліндром

$$x^2 + y^2 = 2ax$$

і поверхнею прямого кругового конуса, вершина якого розташована в початку координат, вісь співпадає з віссю Oz і кут осьового перерізу при вершині дорівнює 90°.

17. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнею кулі радіуса a і поверхнею прямого кругового циліндра, радіус поперечного перерізу якого дорівнює $\dfrac{a}{2}$ і одна з твірних якого проходить через центр кулі.

18. Знайти об'єм тіла, що міститься між параболоїдом обертання $x^2+z^2 = az$, циліндром $x^2 + y^2 = ay$ і площиною $z = 0$.

19. Обчислити об'єм тіла, яке знизу обмежено площею лемніскати

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi,$$

розташованій в площині xOy, зверху поверхнею кулі $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, а з боків циліндричною поверхнею, напрямною для якої служить лемніската.

20. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2z, \qquad x^2 + y^2 = z.$$

Вказівка. Скористатись переходом до полярних координат.

21. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$\frac{x^2}{9} + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1, \qquad \frac{x^2}{9} + y^2 + \frac{(z-2)^2}{4} = 1.$$

Вказівка. Скористатись переходом до узагальнених полярних координат.

22. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = \frac{z}{3}, \qquad x + \frac{z}{3} = 2.$$

Вказівка. Скористатись переходом до узагальнених полярних координат.

23. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$2az = x^2 + y^2, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2.$$

Вказівка. Скористатись переходом до узагальнених полярних координат.

24. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \qquad x^2 + y^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right).$$

Вказівка. Скористатись переходом до полярних координат.

25. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}, \qquad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 2.$$

Вказівка. Скористатись переходом до узагальнених полярних координат.

В наступних завданнях знайти об'єми тіл, обмежених даними поверхнями (всі параметри вважати додатними).

26. Площинами координат, площинами $x = a$, $y = b$ і еліптичним параболоїдом $z = \dfrac{x^2}{2p} + \dfrac{y^2}{2q}$.

27. Площинами $y = 0$, $z = 0$, $3x + y = 6$, $3x + 2y = 12$ і $x + y + z = 6$.

28. Параболоїдом обертання $z = x^2 + y^2$, координатними площинами і площиною $x + y = 1$.

29. Параболоїдом обертання $z = x^2 + y^2$ і площинами $z = 0$, $y = 1$, $y = 2x$ і $y = 6 - x$.

30. Координатними площинами, площиною $2x + 3y - 12 = 0$ і циліндром $z = \dfrac{y^2}{2}$.

31. Циліндром $z = 9 - y^2$, координатними площинами і площиною $3x + 4y = 12$ $(y \geqslant 0)$.

32. Циліндром $z = 4 - x^2$, координатними площинами і площиною $2x + y = 4$ $(x \geqslant 0)$.

33. Циліндром $2y^2 = x$, площинами $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{4} = 1$ і $z = 0$.

34. Еліптичним циліндром $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$, площинами $z = 12 - 3x - 4y$ і $z = 1$.

35. Циліндрами $x^2 + y^2 = R^2$ і $x^2 + z^2 = R^2$.

36. Циліндрами $z = 4 - y^2$, $y = \dfrac{x^2}{2}$ і площиною $z = 0$.

37. Циліндрами $x^2 + y^2 = R^2$, $z = \dfrac{x^3}{a^2}$ і площиною $z = 0$ $(x \geqslant 0)$.

38. Гіперболічним параболоїдом $z = x^2 - y^2$ і площинами $z = 0$, $x = 3$.

39. Гіперболічним параболоїдом $z = xy$, циліндром $y = \sqrt{x}$ і площинами $x + y = 2$, $y = 0$ і $z = 0$.

40. Параболоїдом $z = x^2 + y^2$, циліндром $y = x^2$ і площинами $y = 1$ і $z = 0$.

41. Еліптичним циліндром $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ і площинами $y = \dfrac{b}{a}x$, $y = 0$ і $z = 0$ $(x \geqslant 0)$.

42. Параболоїдом $z = \dfrac{a^2 - x^2 - 4y^2}{a}$ і площиною $z = 0$.

43. Циліндрами $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $z = e^2 - y^2$ і площиною $z = 0$.

44. Циліндром $x^2 + y^2 = 4$, площинами $z = 0$ і $z = x + y + 10$.

45. Циліндром $x^2 + y^2 = 2x$, площинами $2x - z = 0$ і $4x - z = 0$.

46. Циліндром $x^2 + y^2 = R^2$, параболоїдом $Rz = 2R^2 + x^2 + y^2$ і площиною $z = 0$.

47. Циліндрами $x^2 + y^2 = x$ і $x^2 + y^2 = 2x$, параболоїдом $z = x^2 + y^2$ і площинами $x + y = 0$, $x - y = 0$ і $z = 0$.

48. Циліндрами $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 2y$ і площинами $z = x + 2y$ і $z = 0$.

1.7 Обчислення площ поверхонь

Площа гладкої поверхні $z = f(x; y)$, проєкція якої на площину xOy – область (P):

$$S = \iint\limits_{(P)} \sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}\, dx\, dy.$$

Приклад 1. Обчислити площу той частини площини $6x+3y+2z = 12$, яка укладена в першому октанті (рис. 1.16).

Розв'язок. Для обчислення площ використовують формулу

$$S = \iint\limits_{(S)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy. \tag{4}$$

З умови завдання маємо: $z = 6 - 3x - \dfrac{3}{2}y$, $z'_x = -3$, $z'_y = -\dfrac{3}{2}$ і

$$\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \sqrt{1 + 9 + \frac{9}{4}} = \frac{7}{2}.$$

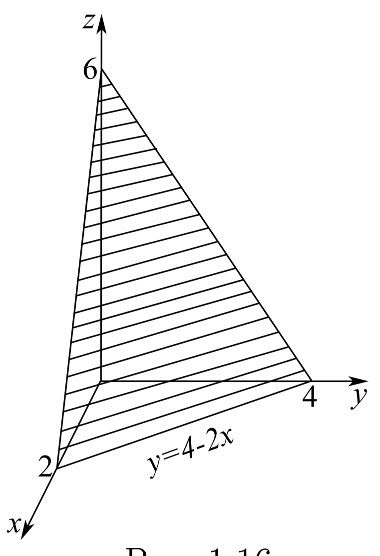

Рис. 1.16

Проєкцією данної площини на площину xOy є трикутник, обмежений координатними осями Ox, Oy і прямою $6x+3y = 12$, яку знаходимо перетином данної площини з площиною $z = 0$. Одержуємо:

$$S = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{4-2x} \frac{7}{2}\, dy = \frac{7}{2} \int\limits_0^2 y \Big|_0^{4-2x} dx =$$

$$= \frac{7}{2} \int\limits_0^2 (4 - 2x)\, dx = \frac{7}{2}(4 - x^2)\Big|_0^2 = \frac{7}{2} \cdot 4 = 14.$$

Завдання та вправи для самостійної роботи студента

1. Обчислити площу частини поверхні $z^2 = 2xy$, яка знаходиться над прямокутником, що лежить у площині xOy і обмеженим прямими $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 6$.

2. Знайти площу частини площини $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$, що міститься між координатними площинами.

3. Знайти площу частини поверхні кулі $x^2 + y^2 + z^2 = 100$, що міститься між площинами $x = -8$ і $x = 6$.

4. Обчислити площу частини поверхні конуса $z^2 = x^2 + y^2$, що лежить над площиною xOy і відрізаною площиною $z = \sqrt{2}\left(\dfrac{x}{2} + 1\right)$.

5. Обчислити повну поверхню тіла, обмеженого сферою $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ і параболоїдом $x^2 + y^2 = 2az$ $(z \geqslant 0)$.

6. Обчислити площу частини поверхні параболоїда $2z = x^2 + y^2$, вирізаної циліндром $x^2 + y^2 = 1$.

7. Обчислити площу частини поверхні параболоїда $y^2 + z^2 = 4ax$, вирізаної циліндром $y^2 = ax$ і площиною $x = 3a$.

8. Обчислити площу поверхні частини параболоїда $\dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^2}{b} = 2z$, вирізаної поверхнею $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = c^2$.

9. Обчислити площу частини сфери $x^2+y^2+z^2 = a^2$, що міститься всередені циліндра $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(b \leqslant a)$.

10. Обчислити площу частини поверхні гіперболічного параболоїда

$$z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2),$$

що вирізана площинами $x - y = \pm 1$, $x + y = \pm 1$.

11. Обчислити площу частини поверхні циліндра $x^2 + y^2 = 2ax$, що міститься між площиною xOy і конусом $x^2 + y^2 = z^2$ і розташовану в першому октанті.

12. Обчислити площу частини поверхні параболоїда $z^2 = 2px$, що вирізана параболоїдом $y^2 = 2qx$ і площиною $x = a$.

13. Обчислити площу частини поверхні циліндра $x^2 + y^2 = a^2$, що вирізана площинами $x + z = 0$, $x - z = 0$ $(x > 0, y > 0)$.

14. Центр сфери радіуса r знаходиться на поверхні прямого циліндра, радіус основи якого $\dfrac{r}{2}$. Обчислити:

а) площу частини поверхні циліндра, що вирізана сферою.

б) площу частини поверхні сфери, що вирізана циліндром.

15. Обчислити площу частини поверхні конуса $y^2 + z^2 = x^2$, розташованої всередені циліндра $x^2 + y^2 = a^2$.

16. Обчислити площу частини поверхні конуса $y^2 + z^2 = x^2$, вирізаної циліндром $x^2 = ay$.

17. Обчислити площу частини поверхні конуса $x^2 - y^2 = z^2$, розташованої в першому октанті і обмеженої площиною $y + z = a$.

18. Обчислити площу частини поверхні $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$, проєкція якої на площину xOy дає перший виток спіралі Архімеда $\rho = \varphi$.

19. Обчислити площу частини циліндричної поверхні $y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, що вирізана поверхнею, яка проєктується на площину xOy у вигляді кривої

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

20. Обчислити площу частини поверхні $x^2 + y^2 = 2az$, що міститься всередині циліндра $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$.

1.8 Прикладення подвійних інтегралів

Для обчислення маси треба мати розподіл поверхневої густини $\varrho(x, y)$:

$$m = \iint\limits_G \varrho(x, y)\, dx\, dy.$$

Для координат центру мас маємо формули:

$$x_c = \frac{\iint\limits_G x\, \varrho(x, y)\, dx\, dy}{\iint\limits_G \varrho(x, y)\, dx\, dy}, \qquad y_c = \frac{\iint\limits_G y\, \varrho(x, y) dx\, dy}{\iint\limits_G \varrho(x, y)\, dx\, dy}.$$

У випадку однорідної пластини ($\varrho = const$) маємо більш прості формули:

$$x_c = \frac{\iint\limits_G x\, dx\, dy}{\iint\limits_G dx\, dy}, \qquad y_c = \frac{\iint\limits_G y\, dx\, dy}{\iint\limits_G dx\, dy}.$$

Момент інерції пластини відносно осі y:

$$I_y = \iint\limits_G x^2\, \varrho(x, y)\, dx\, dy.$$

Момент інерції пластини відносно осі x:

$$I_x = \iint\limits_G y^2\, \varrho(x, y)\, dx\, dy.$$

Приклад 1. Знайти масу квадратної пластинки зі стороною $2a$, якщо густина матеріалу пластинки пропорційна квадрату відстані від точки перетину діагоналей і на кутах квадрата дорівнює одиниці.

Розв'язок. Пластинку краще розташувати в прямокутній системі координат таким чином, щоб точка перетину діагоналей співпала з початком координат, а сторони були паралельні координатним осям. Після цього можна скласти функцію густини $\rho(x; y)$ матеріалу пластинки за умовами завдання. Нехай $M(x; y)$

– довільна точка квадрата ($|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant a$). Тоді квадрат відстані від точки перетину діагоналей (початку координат) буде дорівнювати x^2+y^2. Отже, густина у точці M представиться у вигляді

$$\rho(M) = \rho(x;y) = k\,(x^2+y^2),$$

де k – коефіцієнт пропорційності. Щоб знайти числове значення цього коефіцієнта k, використаємо відоме значення густини на кутах квадрата. Візьмемо, наприклад, вершину кута $(a;a)$. Тоді одержимо:

$$1 = k\,(a^2+a^2),$$

звідки

$$k = \frac{1}{2a^2}.$$

Підставляючи знайдене значення k у вираз функції густини, остаточно одержимо:

$$\rho(x;y) = \frac{x^2+y^2}{2a^2}$$

і далі обчислюємо інтеграл

$$m = \frac{1}{2a^2}\iint\limits_{(S)} (x^2+y^2)\,dx\,dy.$$

Враховуючи, що підінтегральна функція парна відносно x і y (тобто густина симетрична відносно початку координат), можна обмежитись обчисленням інтеграла лише по однієї четвертої частини області (S), що розташована в першому квадранті

$$m = \frac{2}{a^2}\int\limits_0^a dx\int\limits_0^a (x^2+y^2)\,dy = \frac{2}{a^2}\int\limits_0^a \left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^a dx =$$

$$= \frac{2}{a^2}\int\limits_0^a \left(ax^2+\frac{a^3}{3}\right)\Bigg|_0^a dx = \frac{2}{a^2}\left(\frac{ax^3}{3}+\frac{a^3x}{3}\right)\Bigg|_0^a = \frac{2}{a^2}\cdot\frac{2a^4}{3} = \frac{4}{3}a^2.$$

Приклад 2. Знайти статичні моменти відносно осей координат еліпса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$$

обмеженого прямою $bx+ay=ab$ (рис. 1.17).

Розв'язок. Так як в умові завдання про густину не згадується, будемо вважати її сталою та рівною одиниці. Тоді маса фігури чисельно дорівнює її площі. Звідси одержуємо:

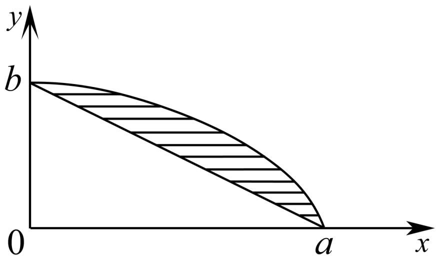

Рис. 1.17

$$m_x = \iint\limits_{(S)} y\,dx\,dy = \int\limits_0^a dx \int\limits_{\frac{b}{a}(a-x)}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y\,dy = \frac{ab^2}{6}.$$

$$m_y = \iint\limits_{(S)} x\,dx\,dy = \int\limits_0^a x\,dx \int\limits_{\frac{b}{a}(a-x)}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy = \frac{a^2b}{6}.$$

Приклад 3. Знайти центр тяжіння фігури, обмеженої двома параболами $y^2 = x$ і $x^2 = y$.

Розв'язок. Для знаходження координат центра тяжіння (ξ, η) треба обчислити по заданій області три інтеграли, що визначають масу і статичні моменти цієї області (рис. 1.18):

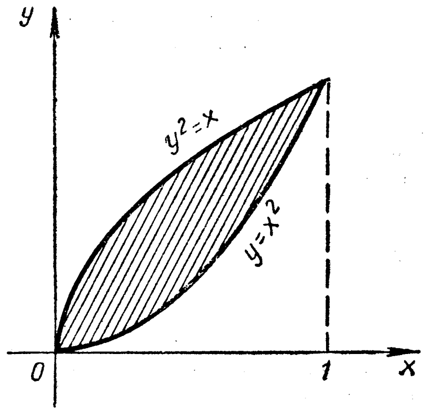

Рис. 1.18

$$m = \iint\limits_{(S)} dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} dy = \frac{1}{3},$$

$$m_x = \iint\limits_{(S)} y\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} y\,dy = \frac{3}{20},$$

$$m_y = \iint\limits_{(S)} x\,dx\,dy = \int\limits_0^1 x\,dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} dy = \frac{3}{20}.$$

Координати центру тяжіння дорівнюють:

$$\xi = \frac{m_y}{m} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{20},$$

$$\eta = \frac{m_x}{m} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{20}.$$

Отже,

$$\xi = \eta = \frac{9}{20}.$$

Приклад 4. Обчислити момент інерції площі, обмеженої параболою $y^2 = ax$ і прямою $x = a$ відносно прямої $y = -a$.

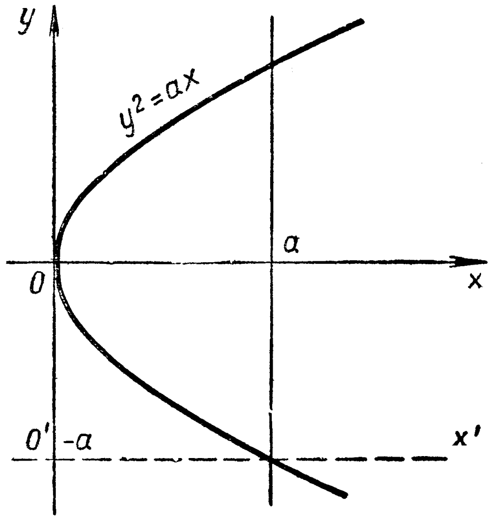

Рис. 1.19

Розв'язок. Представимо умову завдання на малюнку (рис. 1.19). Бачимо, що відстань будь-якої точки $(x;y)$ фігури (P) до осі $O'x'$ буде дорівнювати $y+a$, а квадрат відстані буде $(y+a)^2$. Отже

$$I_{x'} = \iint\limits_{(P)} (y+a)^2\,dx\,dy =$$

$$= \int\limits_0^a dx \int\limits_{-\sqrt{ax}}^{\sqrt{ax}} (y+a)^2\,dy =$$

$$= \left[\begin{array}{c} t = y+a \\ dt = dy \end{array}\right] = \int\limits_0^a dx \int\limits_{-\sqrt{ax}+a}^{\sqrt{ax}+a} t^2\,dt =$$

$$= \int\limits_0^a dx \left(\frac{(\sqrt{ax}+a)^3}{3} - \frac{(-\sqrt{ax}+a)^3}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_0^a \left[\left((ax)^{\frac{3}{2}} + 3\,(ax)\,a + 3\sqrt{ax}\,a^2 + a^3\right) -\right.$$

$$\left. - \left(-(ax)^{\frac{3}{2}} + 3\,(ax)\,a - 3\sqrt{ax}\,a^2 + a^3\right)\right]\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}\left[a^{\frac{3}{2}}\int\limits_0^a x^{\frac{3}{2}}\,dx + 3a^2\sqrt{a}\int\limits_0^a x^{\frac{1}{2}}\,dx\right] = \frac{2}{3}\left[a^{\frac{3}{2}}\cdot\left.\frac{x^{\frac{5}{2}}}{5/2}\right|_0^a + 3a^{\frac{5}{2}}\cdot\left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2}\right|_0^a\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{2}{5}a^{\frac{3}{2}}\cdot a^{\frac{5}{2}} + 3\cdot\frac{2}{3}\cdot a^{\frac{5}{2}}\cdot a^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}\left[\frac{2}{5}+\frac{10}{5}\right]a^4 = \frac{24}{15}a^4 = \frac{8}{5}a^4.$$

Завдання та вправи для самостійної роботи студента

Маса

1. Знайти масу кола, густина якого в кожній точці пропорційна відстані від цієї точки до контура кола.

2. Плоске кільце обмежене двома концентричними окружностями, радіуси яких r і R $(r < R)$. Знайти масу кільця, якщо відомо, що густина речовини зворотньо пропорційна відстані від центра окружностей і густина на окружності внутрішнього кола дорівнює одиниці.

3. На фігурі, що обмежена еліпсом $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, розподілена маса так, що густина її пропорційна відстані від осі абсцис, причому при $y=1$ вона дорівнює γ. Знайти масу всієї фігури.

4. Знайти масу прямокутної фігури, обмеженої прямими $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 3$, якщо густина в кожній точці дорівнює кубу абсциси, помноженому на квадрат ординати цієї точки.

Статичні моменти

1. Знайти статичні моменти відносно координатних осей чверті кола радіуса R.

2. Знайти статичні моменти відносно координатних осей частини площини, що обмежена лініями

$$y = x^2, \quad y + x = 2, \quad y = 0.$$

3. Знайти статичний момент півкола відносно його діаметра.

4. Знайти статичний момент кола відносно його дотичної.

5. Знайти статичний момент прямокутника зі сторонами a та b відносно сторони a.

6. Знайти статичний момент правильного шестикутника зі стороною a відносно сторони.

Центр тяжіння

Знайти координати центрів тяжіння однорідних плоских фігур:

1. Півкола радіуса R.

2. Фігури, що обмежена кривими $y = 2x^3$ і $y^2 = 2x$.

3. Фігури, що обмежена параболою $y = 2x - 3x^2$ і віссю Ox.

4. Сектора архімедової спіралі $\rho = \alpha\omega$, що одержується при зміненні ω від 0 до $\dfrac{\pi}{2}$.

5. Кругового сектора з радіусом r і кутом при вершині 2α симетричного відносно осі Ox.

6. Фігури, що обмежена синусоїдою $y = \sin x$ і прямою $x = \dfrac{\pi}{4}$.

7. Фігури, що обмежена кардіоїдою $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

8. Фігури, що обмежена замкненою кривою $y^2 = x^2 - x^4$ $(x \neq 0)$.

9. Фігури, обмеженої кривою, що задана параметричними рівняннями

$$x = a\,(t - \sin t), \quad y = a\,(1 - \cos t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

і віссю Ox.

10. Фігури, обмеженої верхньою половиною еліпса, що спирається на велику вісь.

Моменти інерції

Обчислити момент інерції однорідних плоских фігур:

1. Прямокутника зі сторонами a та b відносно його сторін.

2. Квадрата зі стороною a відносно однієї з його вершин.

3. Трикутника, обмеженого прямими $x + y = 2$, $x = 2$, $y = 2$ відносно осі Ox.

4. Півкола відносно його діаметра.

5. Кола відносно його центра.

6. Кола відносно дотичної.

7. Фігури, що обмежена кривою $(x^2+y^2)^2 = a^2\,x^2 - y^2$ відносно початку координат.

8. Еліпса з півосями a та b відносно центру.

9. Рівнобедреного трикутника з основою a і висотою h відносно вершини.

10. Коло радіуса R відносно точки, що лежить на окружності.

2 Потрійні інтеграли

Потрійним інтегралом від неперервної функції $f(x;y;z)$ по обмеженій замкненій області (V) називається границя інтегральної суми

$$\iint\limits_{(V)} f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz = \lim_{\substack{\max\Delta x_i\to 0\\ \max\Delta y_k\to 0\\ \max\Delta z_l\to 0}} \sum_i\sum_k\sum_l f(x_i;y_k;z_l)\,\Delta x_i\,\Delta y_k,\Delta z_l,$$

де $\Delta x_i = x_{i+1}-x_i$, $\Delta y_k = y_{k+1}-y_k$, $\Delta z_l = z_{l+1}-z_l$. Якщо $m \leqslant f(x;y;z) \leqslant M$ в області (V), то

$$mV(V) \leqslant \iint\limits_{(V)} f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz \leqslant MV(V).$$

2.1 Повторні інтеграли

Приклад 1. Обчислити потрійний інтеграл

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3},$$

де область (V) обмежена поверхнями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

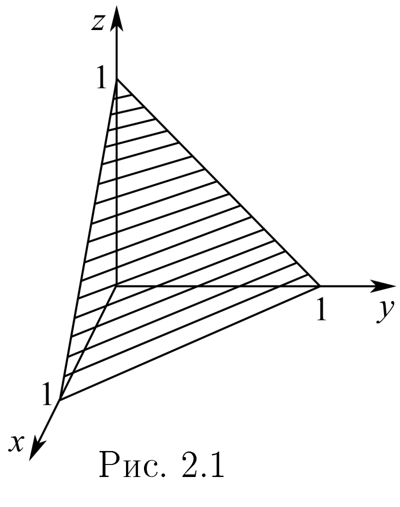

Рис. 2.1

Розв'язок. Рівняння $x+y+z=1$ являє собою площину, що відсікає на осях відрізки, рівні 1; $x=0$, $y=0$, $z=0$ – координатні площини. Область (V) є пірамідою (рис. 2.1). В цьому прикладі по будь-якій змінній можна брати постійні межі від 0 до 1. Оберемо для цього змінну x $(0 \leqslant x \leqslant 1)$. Проєкцією піраміди на площину xOy є трикутник, обмежений прямими $x=0$, $y=0$, $x+y=1$. Звідси визначаємо межі інтегрування по y $(0 \leqslant y \leqslant 1-x)$. Для змінної z нижньою межею буде $z=0$

(площина xOy), а верхньою – значення z, яке одержується із рівняння площини $x+y+z=1$, тобто $z=1-x-y$.

Тепер можна представити даний потрійний інтеграл через повторний та послідовно обчислити відповідні визначені інтеграли.

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3} = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \frac{1}{(1+x+y+z)^2}\Bigg|_0^{1-x-y} dy = -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{(1+x+y)^2}\right) dy =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(\frac{y}{4} + \frac{1}{1+x+y}\right)\Bigg|_0^{1-x} dx = -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(\frac{1-x}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x}\right) dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}x - \frac{x^2}{8} - \ln(1+x)\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{8} - \ln 2\right) = \frac{\ln 2}{2} - \frac{5}{16}.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho\, d\rho \int\limits_R^{R+\sqrt{R^2-\rho^2}} dz.$$

Розв'язок. Маємо

$$I = \varphi\big|_0^{2\pi} \int\limits_0^R \rho\, d\rho\; z\big|_R^{R+\sqrt{R^2-\rho^2}} = 2\pi \int\limits_0^R \rho\sqrt{R^2-\rho^2}\, d\rho =$$

$$= \left[\begin{array}{c} t = R^2-\rho^2 \\ dt = -2\rho\, d\rho \end{array}\right] = 2\pi \int\limits_{R^2}^0 \sqrt{t}\left(-\frac{dt}{2}\right) = -\frac{1}{2}\,2\pi \int\limits_{R^2}^0 t^{1/2}\, dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\,2\pi\,\frac{t^{3/2}}{3/2}\Bigg|_{R^2}^0 = -\frac{1}{3}\,2\pi\, t^{3/2}\Bigg|_{R^2}^0 = -\frac{1}{3}\,2\pi(-R^3) = \frac{2\pi R^3}{3}.$$

Завдання та вправи для самостійної роботи студента

Обчислити потрійні інтеграли у вказаних областях.

1. $\iiint\limits_{(V)} (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$, де $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant c$.

2. $\iiint\limits_{(V)} \rho\sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$, де $0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \rho \leqslant 2$, $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

3. $\iiint\limits_{(V)} x\,dx\,dy\,dz$, де (V) обмежена площинами $x=0$, $y=0$, $z=0$, $y=\ h$, $x+z=a$.

4. $\iiint\limits_{(V)} xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$, де (V) обмежена поверхнями $z=xy$, $y=x$, $x=1$, $z=0$.

5. $\iiint\limits_{(V)} \left(\dfrac{x^2}{p^2}+\dfrac{y^2}{q^2}+\dfrac{z^2}{r^2}\right) dx\,dy\,dz$, де (V) обмежена еліпсом $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

Обчислити потрійні інтеграли.

6. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^2 dy\int\limits_0^3 dz$.

7. $\int\limits_0^a dx\int\limits_0^b dy\int\limits_0^c (x+y+z)\,dz$.

8. $\int\limits_0^a dx\int\limits_0^x dy\int\limits_0^y xyz\,dz$.

9. $\int\limits_0^a dx\int\limits_0^x dy\int\limits_0^{xy} x^3y^3z\,dz$.

10. $\int\limits_0^{e-1} dx \int\limits_0^{e-x-1} dy \int\limits_e^{x+y+e} \dfrac{\ln(z-x-y)}{(x-e)(x+y-e)}\,dz$.

11. $\iiint\limits_{(V)} \dfrac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z+a)^3}$, де (V) – область обмежена площинами

$$x=0, \quad y=0, \quad z=0, \quad x+y+z=a \quad (a\geqslant 0).$$

12. $\iiint\limits_{(V)} xy\,dx\,dy\,dz$, де (V) – область обмежена гіперболічним параболоїдом $z=xy$ і площинами $x+y=1$ і $z=0$ $(z\geqslant 0)$.

13. $\iiint\limits_{(V)} y\cos(z+x)\,dx\,dy\,dz$, де (V) – область обмежена циліндром $y=\sqrt{x}$ і площинами $y=0$, $z=0$ і $x+z=\dfrac{\pi}{2}$.

2.2 Зміна порядка інтегрування

Приклад 1. Змінити порядок інтегрування в інтегралі

$$\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz,$$

де область (V) обмежена поверхнями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Розв'язок. Один з можливих варіантів представлення інтегралу по цій області у вигляді повторного ми бачили у Прикладі 1 попереднього пункту, але у випадку потрійного інтеграла таких варіантів взагалі шість. Користуючись рис. 2.1 знаходимо:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} f(x;y;z)\,dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dz \int\limits_0^{1-x-z} f(x;y;z)\,dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{1-y} dx \int\limits_0^{1-x-y} f(x;y;z)\,dz = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{1-y} dz \int\limits_0^{1-y-z} f(x;y;z)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^1 dz \int\limits_0^{1-z} dx \int\limits_0^{1-x-z} f(x;y;z)\,dy = \int\limits_0^1 dz \int\limits_0^{1-z} dy \int\limits_0^{1-y-z} f(x;y;z)\,dx.$$

В цьому випадку дуже допомагає достатньо висока симетрія області інтегрування, але, як це можна було бачити у випадку повійних інтегралів, у випадку різного порядку інтегрування область інтегрування розділяється не завжди на рівну кількість частин. Для потрійних інтегралів область інтегрування тривимірна, що може значно ускладнювати уявлення як саме ця область розділяється на частини.

Приклад 2. Різними способами розставити межі інтегрування в потрійному інтегралі

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{x+y} f(x;y;z)\,dz$$

Розв'язок. Незважаючи на те, що ця задача відрізняється від попередньої лише розташуванням однієї з площин, вона значно складніша і приводить до необхідності розділяти область інтегрування при різних порядках інтегрування по відповідним змінним.

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x} dz \int\limits_0^{1-x} f(x;y;z)\,dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{1} dz \int\limits_{z-x}^{1-x} f(x;y;z)\,dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{1-y} dx \int\limits_0^{x+y} f(x;y;z)\,dz =$$

$$= \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{y} dz \int\limits_0^{1-y} f(x;y;z)\,dx + \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{1} dz \int\limits_{z-y}^{1-y} f(x;y;z)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^1 dz \int\limits_0^z dx \int\limits_{z-x}^{1-x} f(x;y;z)\,dy + \int\limits_0^1 dz \int\limits_z^1 dx \int\limits_0^{1-x} f(x;y;z)\,dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dz \int\limits_0^z dy \int\limits_{z-y}^{1-y} f(x;y;z)\,dx + \int\limits_0^1 dz \int\limits_z^1 dy \int\limits_0^{1-y} f(x;y;z)\,dx =$$

Завдання та вправи для самостійної роботи студента

Розставити межі інтегрування, якщо інтегрування проводити в послідовності: а) x, y, z; б) y, x, z; в) z, x, y.

1. $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz$, де область (V) обмежена поверхнями $x^2+y^2=1$, $z=0$, $z=1$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$.

2. $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz$, де область (V) обмежена поверхнею $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

3. $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz$, де область (V) обмежена площинами $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $(a>0,\ b>0,\ c>0)$.

4. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{x^2+y^2} f(x;y;z)\,dz.$

Різними способами розставити межі інтегрування в наступних потрійних інтегралах:

5. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} f(x;y;z)\,dz.$

6. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{1-x-y} f(x;y;z)\,dz.$

7. $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x;y;z)\,dz.$

8. $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{-1}^{-\sqrt{x^2+y^2}} f(x;y;z)\,dz.$

2.3 Заміна змінних. Циліндричні та сферичні координати

Приклад 1. Обчислити інтеграл

$$I = \iiint\limits_{(V)} (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz,$$

де область інтегрування V обмежена поверхнями $x^2+y^2=2z$, $z=2$.

Розв'язок. В задачах з такою симетрією зручно перейти до циліндричних координат:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z.$$

$$0 \leqslant \rho < +\infty, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty.$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \rho.$$

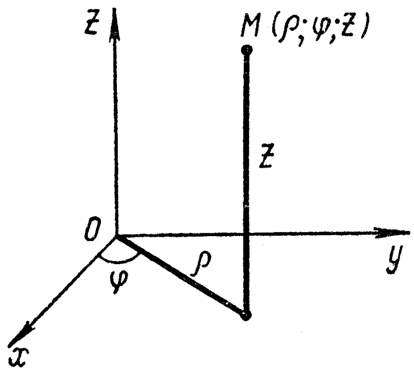

Рис. 2.2

Параболоїд $x^2 + y^2 = 2z$, перетинаючи площину $z = 2$, вирізає з неї окружність $x^2 + y^2 = 4$, тому маємо межі по новим змінним: $0 \leqslant \varrho \leqslant 2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $\dfrac{\rho^2}{2} \leqslant z \leqslant 2$. Після заміни змінних одержуємо:

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^3\,d\rho \int\limits_{\frac{\rho^2}{2}}^2 dz =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^2 \rho^3 \left(2 - \frac{\rho^2}{2}\right)\,d\rho = \frac{16}{3}\pi.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл

$$I = \iiint\limits_{(V)} x^2\,dx\,dy\,dz,$$

якщо V – куля $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$.

Розв'язок. В задачах з такою симетрією зручно перейти до сферичних координат:

$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \quad z = \rho\cos\theta.$$

$$0 \leqslant \rho < +\infty, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \rho^2\sin\theta.$$

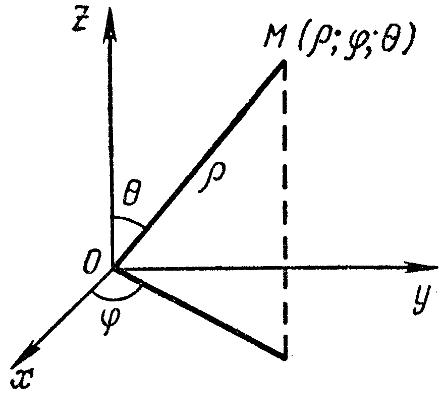

Рис. 2.3

Переходимо до сферичних координат:

$$I = \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi \int_0^R \rho^4\, d\rho =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{R^5}{5}\int_0^{\pi}\sin^3\theta\, d\theta \left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{\pi R^5}{5}\int_0^{\pi}\sin^2\theta\sin\theta\, d\theta = \left[\begin{array}{c} t=\cos\theta \\ dt = -\sin\theta\, d\theta \end{array}\right] =$$

$$= \frac{\pi R^5}{5}\int_{-1}^{1}(1-t^2)\, dt = \frac{\pi R^5}{5}\left(t - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{\pi R^5}{5}\cdot\frac{4}{3} = \frac{4}{15}\pi R^5.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл

$$I = \iiint\limits_{(V)} dx\, dy\, dz,$$

де область інтегрування V – замкнена множина з межею $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

Розв'язок. В задачах з такою симетрією зручно перейти до узагальнених сферичних координат:

$$x = a\rho\sin\theta\cos\varphi, \quad y = b\rho\sin\theta\sin\varphi, \quad z = c\rho\cos\theta.$$

$$0 \leqslant \rho < +\infty, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = abc\,\rho^2\sin\theta.$$

Тоді маємо:

$$I = abc\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta \int_0^1 \rho^2\, d\rho = abc\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Завдання та вправи для самостійної роботи студента

Перейти до циліндричних або сферичних координат і розставити межі інтегрування в пострійних інтегралах.

1. (V) – область, обмежена циліндром $x^2+y^2=R^2$ і площинами $z=0$, $z=1$, $y=x$ і $y=x\sqrt{3}$.

2. (V) – частина кулі $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$, що лежить в першому октанті.

3. (V) – частина кулі $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$, що лежить всередені циліндра $(x^2+y^2)^2 = R^2(x^2-y^2)$ $(x \geqslant 0)$.

4. (V) – загальна частина двох куль $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$ і $x^2+y^2+(z-R)^2 \leqslant R^2$.

Обчислити потрійні інтеграли за допомогою переходу до цилінричних або сферичних координат.

1. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_0^a dz.$

2. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int\limits_0^a z\sqrt{x^2+y^2}dz.$

3. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_0^{R^2-x^2-y^2} x^2+y^2dz.$

4. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_0^{1-x^2-y^2} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz.$

5. $\iiint\limits_{(V)} dx\,dy\,dz$, де область (V) визначається нерівностями

$$z \geqslant 0, \qquad r^2 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2.$$

6. $\iiint\limits_{(V)} \dfrac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$, де область (V) – куля $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$.

7. $\iiint\limits_{(V)} \dfrac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$, де область (V) – циліндр $x^2+y^2 \leqslant 1,\ -1 \leqslant x \leqslant 1$.

2.4 Обчислення об'ємів

Об'єм тіла (V):

$$V = \iiint\limits_{(V)} dx\,dy\,dz.$$

Приклад 1. Знайти об'єм тіла, обмеженого еліпсоїдом

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Розв'язок. Цього разу на відміну від розв'язку в попередньому пункті обчислимо відповідний потрійний інтеграл в прямокутних декартових координатах. Зручно скористатись симетрією еліпсоїда відносно координатних осей і розглядати його восьму частину, що знаходиться в першому октанті. Візьмемо постійні межі по змінній x $(0 \leqslant x \leqslant a)$. Проєкція еліпсоїда на площину xOy буде еліпсом

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Тоді межі інтегрування y знаходимо як $\left(0\leqslant y\leqslant b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)$. Безпосередньо з формули еліпсоїду знаходимо межі по z $\left(0\leqslant z\leqslant c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right)$. Далі проводимо трохи громіздкі обчислення:

$$V=\iiint\limits_{(V)}dx\,dy\,dz=8\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}dy\int\limits_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}dz=$$

$$=8c\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy=\begin{bmatrix} y=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,b\sin t\\ dy=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,b\cos t\,dt\end{bmatrix}=$$

$$=8c\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\frac{b^2}{b^2}\sin^2 t}\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,b\cos t\,dt=$$

$$=8bc\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cos t\,dt=$$

$$=8bc\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\cos^2 t\,dt=8bc\int\limits_0^a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=$$

$$=8bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_0^a\cdot\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=8bc\left(a-\frac{a^3}{3a^2}\right)\cdot\frac{\pi}{4}=$$

$$=2\pi bc\left(a-\frac{a}{3}\right)=2\pi bc\cdot\frac{2}{3}a=\frac{4}{3}\pi abc.$$

Приклад 2. Обчислити об'єм тіла, що обмежене поверхнями $hz=x^2+y^2$, $z=h$ (рис. 2.4).

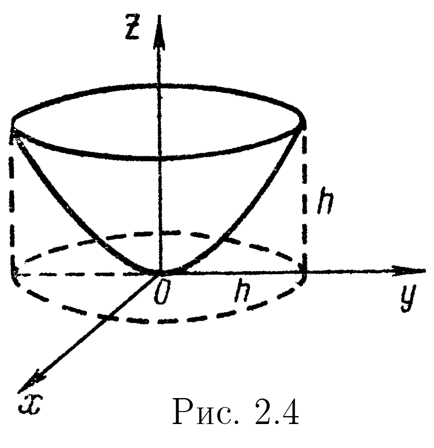

Рис. 2.4

Розв'язок. Дане тіло обмежене знизу параболоїдом

$$z=\frac{x^2+y^2}{h},$$

зверху площиною $z=h$ і проєктується в коло $x^2+y^2\leqslant h^2$ в площині xOy. Переходимо до циліндричних координат, враховуючи, що рівняння параболоїда тепер буде мати вигляд $z=\dfrac{\rho^2}{h}$.

Об'єм тіла дорівнює

$$V = \iiint\limits_{(V)} dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{(V)} \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{h} \rho\,d\rho \int\limits_{\frac{\rho^2}{h}}^{h} =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^{h} \rho\,d\rho \cdot z \Bigg|_{\frac{\rho^2}{h}}^{h} = 2\pi \int\limits_0^{h} \rho\,d\rho \left(h - \frac{\rho^2}{h}\right) = 2\pi \int\limits_0^{h} \left(h\rho - \frac{\rho^3}{h}\right) d\rho =$$

$$= 2\pi \left(\frac{h\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4h}\right)\Bigg|_0^{h} = 2\pi \left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{4}\right) = \frac{\pi h^3}{2}.$$

Завдання та вправи для самостійної роботи студента

Обчислити за допомогою потрійного інтеграла об'єми тіл, що обмежені вказаними поверхнями:

1. $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$.

2. $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, $y = x$, $y = x^2$.

3. $az = x^2 + y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}\,(a > 0)$.

4. $x + y + z = a$, $x + y + z = 2a$, $x + y = z$, $x + y = 2z$.

5. $y^2 = 4a^2 - 3ax$, $y^2 = ax$, $z = \pm h$.

6. $\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 2 \cdot \dfrac{x}{a}$, $x = a$.

7. Циліндрами $z = 4 - y^2$ і $z = y^2 + 2$ і площинами $x = -1$ і $x = 2$.

8. Параболоїдами $z = x^2 + y^2$ і $z = x^2 + 2y^2$ і площинами $y = x$, $y = 2x$ і $x = 1$.

9. Параболоїдами $z = x^2 + y^2$ і $z = 2x^2 + 2y^2$, циліндром $y = x^2$ і площиною $y = x$.

10. Циліндрами $z = \ln(x + 2)$ і $z = \ln(6 - x)$ і площинами $x = 0$, $x + y = 2$ і $x - y = 2$.

2.5 Прикладення потрійних інтегралів

Якщо маємо деяке тіло з об'ємною густиною $\rho(x, y, z)$, яка є безперервною функцією, то потрійний інтеграл

$$\iiint\limits_{V} \rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

що взятий по всьому об'єму, що припадає на це тіло, представляє собою масу даного тіла.

Координати центру мас деякого тіла, що має об'ємну густину $\rho(x, y, z)$, виражаються формулами:

$$x_c = \frac{\iiint\limits_V x\rho(x, y, z)dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_V \rho(x, y, z)dx\,dy\,dz};$$

$$y_c = \frac{\iiint\limits_V y\rho(x, y, z)dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_V \rho(x, y, z)dx\,dy\,dz};$$

$$z_c = \frac{\iiint\limits_V z\rho(x, y, z)dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_V \rho(x, y, z)dx\,dy\,dz}.$$

Якщо тіло однорідне, тобто $\rho(x, y, z) = const$, то ці вирази приймають більш простий вигляд:

$$x_c = \frac{\iiint\limits_V x\,dv}{\iiint\limits_V dv}; \quad y_c = \frac{\iiint\limits_V y\,dv}{\iiint\limits_V dv}; \quad z_c = \frac{\iiint\limits_V z\,dv}{\iiint\limits_V dv}.$$

Для моментів інерції відносно координатних осей тіла з об'ємною густиною $\rho(x, y, z)$ маємо:

$$I_z = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)dx\,dy\,dz,$$

$$I_y = \iiint\limits_V (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)dx\,dy\,dz,$$

$$I_x = \iiint\limits_V (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dx\,dy\,dz.$$

Момент інерції відносно початку координат має вигляд

$$I_0 = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dx\,dy\,dz.$$

Для моментів інерції відносно координатних площин тіла з об'ємною густиною $\rho(x, y, z)$ маємо:

$$I_{xy} = \iiint\limits_V z^2\rho(x, y, z)dx\,dy\,dz,$$

$$I_{yz}=\iiint\limits_V x^2\rho(x,y,z)dx\,dy\,dz,$$

$$I_{zx}=\iiint\limits_V y^2\rho(x,y,z)dx\,dy\,dz.$$

Момент інерції відносно деякої прямої має вигляд

$$I_l=\iiint\limits_V r^2\rho(x,y,z)dx\,dy\,dz,$$

де r – відстань від змінної точки тіла (x,y,z) до прямої l. Маємо також співвідношення:

$$I_x=I_{xy}+I_{xz},\qquad I_y=I_{yx}+I_{yz},\qquad I_z=I_{zx}+I_{zy}$$

і

$$I_0=I_{xy}+I_{yz}+I_{zx}.$$

Приклад 1. Знайти масу прямокутного паралелепіпеду $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant b$, $0\leqslant z\leqslant c$, якщо густина в точці $(x;y;z)$ пропорційна сумі координат цієї точки.

Розв'язок. В даному випадку $\rho(x;y;z)=k(x+y+z)$. Отже, одержимо:

$$m=k\int\limits_0^a dx\int\limits_0^b dy\int\limits_0^c (x+y+z)\,dz=k\int\limits_0^a dx\int\limits_0^b \left((x+y)\,z+\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^c=$$

$$=k\int\limits_0^a dx\int\limits_0^b\left[(x+y)\,c+\frac{c^2}{2}\right]dy=k\int\limits_0^a dx\int\limits_0^b\left[\left(xc+\frac{c^2}{2}\right)+cy\right]dy=$$

$$=k\int\limits_0^a dx\left(\left[xc+\frac{c^2}{2}\right]y+\frac{c}{2}\,y\right)\Bigg|_0^b=k\int\limits_0^a\left[\left(xc+\frac{c^2}{2}\right)b+\frac{cb^2}{2}\right]dx=$$

$$=k\int\limits_0^a\left(xcb+\frac{c^2b}{2}+\frac{cb^2}{2}\right)dx=k\left(\frac{x^2}{2}\,cb+\left[\frac{c^2b}{2}+\frac{cb^2}{2}\right]\right)\Bigg|_0^a=$$

$$=k\left[\frac{a^2bc}{2}+\frac{ab^2c}{2}+\frac{abc^2}{2}\right]=\frac{k}{2}\,abc\,(a+b+c).$$

Приклад 2. Знайти центр тяжіння однородного тіла, обмеженого поверхнями $x+y+z=a$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

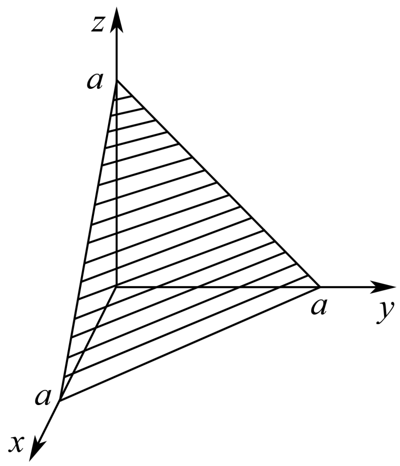

Рис. 2.5

Розв'язок. Так як тіло однорідне, то у виразах для координат центра тяжіння зникає густина:

$$x_C = \frac{m_x}{m} = \frac{\iiint\limits_{(V)} x\,dV}{\iiint\limits_{(V)} dV},$$

$$y_C = \frac{m_y}{m} = \frac{\iiint\limits_{(V)} y\,dV}{\iiint\limits_{(V)} dV},$$

$$z_C = \frac{m_z}{m} = \frac{\iiint\limits_{(V)} z\,dV}{\iiint\limits_{(V)} dV}.$$

Спочатку знайдемо відповідні величини:

$$m = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^{a-x} dy \int\limits_0^{a-x-y} dz = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^{a-x} (a-x-y)\,dy = \int\limits_0^a dx \left((a-x)\,y - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{a-x} =$$

$$= \int\limits_0^a \left[(a-x)(a-x) - \frac{(a-x)^2}{2}\right] dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^a (a-x)^2\,dx = \frac{a^3}{6},$$

$$m_x = \int\limits_0^a x\,dx \int\limits_0^{a-x} dy \int\limits_0^{a-x-y} dz = \int\limits_0^a x\,dx \int\limits_0^{a-x} (a-x-y)\,dy =$$

$$= \int\limits_0^a x\,dx \left((a-x)\,y - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{a-x} = \frac{1}{2}\int\limits_0^a x\,(a-x)^2\,dx = \frac{a^4}{24},$$

$$m_y = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^{a-x} y\,dy \int\limits_0^{a-x-y} dz = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^{a-x} y\,(a-x-y)\,dy =$$

$$= \int\limits_0^a dx \int\limits_0^{a-x} \left[(a-x)\,y - y^2\right] dy = \int\limits_0^a dx \left((a-x)\,\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{a-x} =$$

$$= \int\limits_0^a dx \left[\frac{(a-x)^3}{2} - \frac{(a-x)^3}{3}\right] = \frac{1}{6}\int\limits_0^a (a-x)^3\,dx = \frac{a^4}{24},$$

$$m_z = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^{a-x} dy \int\limits_0^{a-x-y} z\,dz = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^{a-x} dy\ \frac{z^2}{2}\bigg|_0^{a-x-y} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{a-x} (a-x-y)^2\,dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{a-x} [(a-x)^2 - 2\,(a-x)\,y + y^2]\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^a \left((a-x)^2\,y - 2\,(a-x)\,\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3}\right)\bigg|_0^{a-x} dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^a \frac{(a-x)^3}{3}\,dx =$$

$$= \frac{1}{6}\int\limits_0^a (a-x)^3\,dx = \frac{a^4}{24}.$$

Для координат центра тяжіння маємо:

$$x_C = \frac{m_x}{m} = \frac{a^4/24}{a^3/6} = \frac{a}{4},$$

$$y_C = \frac{m_y}{m} = \frac{a^4/24}{a^3/6} = \frac{a}{4},$$

$$z_C = \frac{m_z}{m} = \frac{a^4/24}{a^3/6} = \frac{a}{4}.$$

Завдання та вправи для самостійної роботи студента

Маса

1. Із октанту кулі $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant r^2$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$ вирізано тіло, обмежене координатними площинами і площиною $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ $(a \leqslant c,\ b \leqslant c)$. Знайти масу цього тіла, якщо густина його в кожній точці $(x; y; z)$ пропорційна аплікаті цієї точки.

2. Визначити масу піраміди, що утворена площинами $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, якщо густина в кожній її точці пропорційна аплікаті цієї точки.

3. Визначити масу тіла, обмеженого поверхнями $z = h$ і $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, якщо густина в кожній точціпропорційна аплікаті цієї точки.

4. Обчислити масу тіла, обмеженого прямим круглим циліндром радіуса R, висоти H, якщо його густина в будь-якій точці пропорційна квадрату відстані цієї точки від центру основи циліндра.

5. Визначити масу сферичного шару між поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ і $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, якщо густина в кожній його точці зворотньо пропорційна відстані точки від початку координат.

Статичні моменти

Знайти статичні моменти однорідних тіл.

1. Прямокутного паралелепіпеду з ребрами a, b і c відносно його граней.

2. Прямого круглого конуса (радіус основи R, висота H) відносно площини, що проходить через вершину паралельно основі.

3. Тіла, обмеженого еліпсоїдом $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ і площиною xOy, відносно цієї площини.

Центр тяжіння

Знайти центри мас однорідних тіл, обмежених даними поверхнями.

1. Площинами $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=2$, $y=4$ і $x+y+z=8$.

2. Еліпсоїдом $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ і координатними площинами (а саме тіло, що розташовано в першому октанті).

3. Циліндром $z=\dfrac{y^2}{2}$ і площинами $x=0$, $y=0$, $z=0$ і $2x+3y-12=0$.

4. Циліндрами $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$ і площинами $z=0$ і $x+z=6$.

5. Параболоїдом $z=\dfrac{x^2+y^2}{2a}$ і сферою $x^2+y^2+z^2=3a^2$ $(a \geqslant 0)$.

6. Сферою $x^2+y^2+z^2=R^2$ і конусом $z\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{x^2+y^2}$ (кульовий сектор).

7. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z$.

Моменти інерції

Знайти моменти інерції однорідних тіл з масою, рівною M.

1. Прямокутного паралелепіпеду з ребрами a, b і c відносно кожного з ребер і відносно центру мас.

2. Кулі радіуса R відносно дотичної.

3. Еліпсоїда $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ відносно кожної із трьох його осей.

4. Прямого круглого циліндра (радіус основи R, висота H) відносно діаметра основи і відносно діаметра його середнього перерізу.

Література

[1] Бубняк Т. І. Вища математика: навчальний посібник / Т. І. Бубняк. – Львів: Новий світ-2000, 2023. – 436 с.

[2] Казановський В. І. Вища математика: навчальний посібник / В. І. Казановський, А. Г. Африканова, Н. А. Виштакалюк, О. Л. Дрозденко. – К.: Аграрна освіта, 2014. – 367с.

[3] Коляда Р. В. Вища математика / Р. В. Коляда, І. О. Мельник, О. М. Мельник. – Львів: Магнолія-2006, 2023. – 342с.

[4] Лозовий Б. Л. Практикум з вищої математики: навчальний посібник / Б. Л. Лозовий, Я. С. Пушак, О. Є. Шабат. – Львів: Магнолія-2006, 2023. – 385с.

[5] Прикладна математика: навчальний посібник / уклад. О. В. Шебаніна, В. П. Клочан, І. В. Клочан та ін. – Миколаїв: МНАУ, 2018. – 164 с. URL:https://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/8623

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА. КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

Методичні рекомендації

Укладач: **Поживатенко** Віталій Володимирович

Формат 60x84 1/16. Ум. друк. арк. 2,0.
Тираж 20 прим. Зам. №______

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.