МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ МЕНЕДЖМЕНТУ
Кафедра економічної кібернетики, комп'ютерних наук та інформаційних технологій

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

методичні рекомендації для практичних занять та самостійної роботи здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти ОПП «Комп'ютерні науки» спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» денної форми здобуття вищої освіти

Миколаїв
2024

УДК 519.2
Т30

Друкується за рішенням науково-методичної комісії факультету менеджменту Миколаївського національного аграрного університету від 8 лютого 2024 року, протокол № 7.

Укладачі:

О. В. Шебаніна – д-р екон. наук, професор, професор кафедри економічної кібернетики, комп’ютерних наук та інформаційних технологій, Миколаївський національний аграрний університет;

С. І. Тищенко – канд. пед. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики, комп’ютерних наук та інформаційних технологій, Миколаївський національний аграрний університет;

О.Ю. Пархоменко - канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики, комп’ютерних наук та інформаційних технологій, Миколаївський національний аграрний університет;

Т.С. Кучмійова - канд. екон. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики, комп’ютерних наук та інформаційних технологій, Миколаївський національний аграрний університет;

І. І. Хилько – старший викладач доцент кафедри економічної кібернетики, комп’ютерних наук та інформаційних технологій, Миколаївський національний аграрний університет.

Рецензенти:

В. М. Дармосюк – канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет;

А. В. Швед – д-р техн. наук, доцент кафедри інженерії програмного забезпечення, Чорноморський національний університет ім. Петра Могили.

ЗМІСТ

МЕТА, ЗАВДАННЯ КУРСУ

Розв’язання багатьох практичних задач, що виникають в різних галузях діяльності людини, є неможливим без використання математичних методів. Зокрема, вивчення реальних процесів, в яких необхідно враховувати випадкові фактори, вплив яких неможливо наперед передбачувати, вимагає використання теорії ймовірностей і математичної статистики.

Дисципліна «Теорія ймовірностей та математична статистика» вивчається здобувачами вищої освіти спеціальності 122 «Комп’ютерні науки» на другому курсі і є обов’язковою компонентою освітньо-професійної програми «Комп’ютерні науки».

Мета дисципліни: опанування майбутніми фахівцями науково-методичних знань та аналітико-розрахункових навичок з теорії ймовірностей як математичної науки, що вивчає закономірності випадкових явищ, засвоєння основних математичних законів та понять, що описують такі явища; практичне застосування теорії ймовірностей та математичної статистики в моделюванні інформаційних потоків в великих базах даних.

Основними *завданнями*, що мають бути вирішені у процесі вивчення дисципліни, є отримання здобувачами вищої освіти:

– знань з теорії ймовірностей і математичної статистики щодо основних визначень, теорем, правил, доведень теорем;

– теоретичних знань та практичних навичок із застосування математико-статистичних методів в моделюванні;

– практичних навичок щодо виконання якісного і кількісного аналізу випадкових подій, випадкових величин та систем таких величин; математичної обробки статистичних даних; статистичної оцінки параметрів генеральної сукупності; статистичної перевірки гіпотез; дисперсійного та кореляційно-регресійного аналізу.

Об'єктом дисципліни є реально існуючі явища-події.

Предметом дисципліни є сукупність теоретичних, методологічних і практичних аспектів ймовірнісних закономірностей масових однорідних подій та математико-статистичних методів дослідження статистичних сукупностей.

Здобувач вищої освіти отримує варіант завдання індивідуально у викладача. Остання цифра залікової книжки утворює число ***N***, що використовується при розв’язанні задач (№№ 2, 3, 4, 5, 11). Число ***N*** є також номером варіанта для задачі №1. В задачі № 9 використовується номер групи ***β*** (β=1, 2, 3…).

Наприклад, дві останні цифри залікової книжки 09. Здобувач вищої освіти виконує задачі , де ***α=09, N=9.***

Розв’язок задач повинен бути детальним з відповідними посиланнями на питання теорії та наведенням формул, теорем, висновків, що при цьому використовувалися. Усі обчислення (в тому числі допоміжні) необхідно подавати повністю.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПРАКТИЧНИХ РОБІТ (СЕРІЯ А)

Завдання 1

Варіант 1-5

Хлібозавод випікає вироби, що мають такий розподіл: хліб «Південний» - 40%, батон «Козацький» - 20%, батон «Тернівський» - 25%, булочки – 15%. Для виробів різного виду ймовірність неякісного випікання відповідно дорівнює:

№ варіанта	Хліб «Південний»	Батон «Козацький»	Батон «Тернівський»	Булочки
1	0,05	0,1	0,15	0,06
2	0,06	0,1	0,05	0,08
3	0,04	0,08	0,1	0,05
4	0,05	0,15	0,05	0,1
5	0,04	0,12	0,08	0,1

1. Покупець придбав чотири різних хлібопекарських вироби. Визначити ймовірність того, що:

а) всі придбані вироби будуть якісними;

б) один із чотирьох виробів виявиться неякісним;

в) хоча б один із чотирьох придбаних виробів виявиться неякісним.

2. Знайти ймовірність того, що навмання придбаний довільний виріб виявиться якісним.

3. Навмання придбаний виріб виявився якісним. Якого виду найімовірніше цей хлібопекарський виріб?

Варіант 6-10

У господарстві 20 транспортних засобів: 10 вантажних автомобілів, 3 комбайни, 5 тракторів, 2 водовозки. Ймовірність заправки пальним протягом дня для кожного виду транспорту відповідно дорівнює:

№ варіанта	Вантажівка	Комбайн	Трактор	Водовозка
6	0,5	0,8	0,6	0,75
7	0,4	0,7	0,5	0,9
8	0,45	0,6	0,8	0,7
9	0,4	0,8	0,7	0,6
10	0,35	0,8	0,6	0,7

1. У полі працюють по одному транспортному засобу кожного виду. Визначити ймовірність того, що протягом дня:

а) усі транспортні засоби, що працюють у полі, будуть заправлені;

б) три із чотирьох транспортних засобів, що працюють, будуть заправлені;

в) хоча б один транспортний засіб, що працює в полі, буде заправлений.

2. Визначити ймовірність того, що довільний транспортний засіб господарства протягом дня буде заправлятися.

3. На АЗС для заправки заїхав транспортний засіб із господарства. До якого виду транспорту, найімовірніше, він відноситься?

Завдання 2

Товарознавець перевіряє ***24+N*** вироби. Ймовірність того, що виріб буде признано придатним для продажу для кожного виробу становить 0,6.

1. Знайти найвірогідніше число непридатних для продажу виробів у перевіреній партії.

2. Знайти ймовірність найвірогіднішого числа непридатних виробів. Обчислення виконати за формулами Бернуллі, Лапласа та Пуассона. Порівняти результати.

Завдання 3

Закони споживання електроенергії двома цехами молокозаводу протягом доби мають вигляд:

1-й цех			
Кількість енергії, що споживається, МВт (***X***)	830+10N – 850+10N	850+10N – 870+10N	870+10N – 890+10N
Ймовірність (***p***)	0,1	0,3	0,6
2-й цех			
Кількість енергії, що споживається, МВт (***Y***)	930+10N – 940+10N	940+10N – 950+10N	950+10N – 960+10N
Ймовірність (***p***)	0,3	0,5	0,2

Необхідно:

1. Скласти закон розподілу кількості електроенергії, що споживається протягом доби двома заводами разом.

2. Перевірити на цьому прикладі справедливість теорем про математичне сподівання та про дисперсію суми двох незалежних величин. Дисперсію обчислити двома способами.

3. Побудувати багатокутник розподілу випадкової величини та показати на графіку знайдені значення $M(X)$ та $\sigma(X)$.

4. Обчислити, використовуючи властивості математичного сподівання та дисперсії, математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини

$$V = NX + (N + 1)Y,$$

де X – кількість спожитої енергії першим цехом, $У$ – кількість спожитої енергії другим цехом.

Завдання 4

Задана інтегральна функція розподілу неперервної випадкової величини X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } & -\infty < x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{N^2}, \text{ якщо } & 0 < x \le N, \\ 1, \text{ якщо } & x > N. \end{cases}$$

Знайти:

1. Диференціальну функцію розподілу $f(x)$ цієї випадкової величини та побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$.

2. Математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ (двома способами) та середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

3. Ймовірність того, що в результаті п’яти незалежних випробувань випадкова величина X рівно три рази прийме значення, що належить інтервалу $\left(-1; \dfrac{N}{2}\right)$.

Завдання 5

Жирність молока корів у господарствах області є нормально розподілена випадкова величина X. Середня жирність молока (у %) становить $3 + 0,1N$, дисперсія жирності молока дорівнює $0,0225$.

Необхідно:

1. Знайти диференціальну та інтегральну функції розподілу випадкової величини ***X***.

2. Обчислити ймовірність того, що у навмання взятому господарстві жирність молока перевищить ***(2,5 + 0,1N)%***.

3. Знайти ймовірність того, що жирність молока в господарствах області є в межах від ***(2,7 + 0,1N)%*** до ***(3,3 + 0,1N)%***.

4. Визначити жирність молока, яку можна гарантувати відповідно до правила «трьох σ».

Завдання 6

Випадкова величина ***X*** кількості рослин льону, що уражені фузарізом, має нормальний розподіл з відомими середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 8 + 0{,}02\alpha$. Знайти з надійністю ***0,95*** точність δ, з якою вибіркове середнє оцінює невідоме математичне сподівання, якщо об'єм вибірки ***n = 400***.

Завдання 7

Кількісна ознака ***X*** генеральної сукупності має нормальний розподіл. За вибіркою об'єму ***n=16*** знайдено вибіркове середнє $\overline{x} = 20 + 0{,}2\alpha$ та виправлене середнє квадратичне відхилення ***s=1,2***. Оцінити невідоме математичне сподівання за допомогою надійного інтервалу з точністю ***0,95***.

Завдання 8

Дві неперервні незалежні випадкові величини ***X*** та ***Y*** задані графіками щільності ***f(x)*** (рис. 3.1) та ***f(y)*** (рис. 3.2).

Знайти ***M(X-Y)***, ***M(X·Y)***, ***D(3X-2Y+5)***.

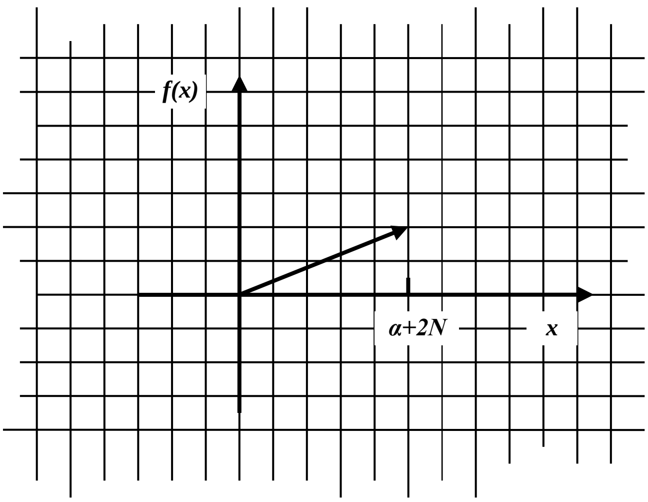

Рис. 3.1

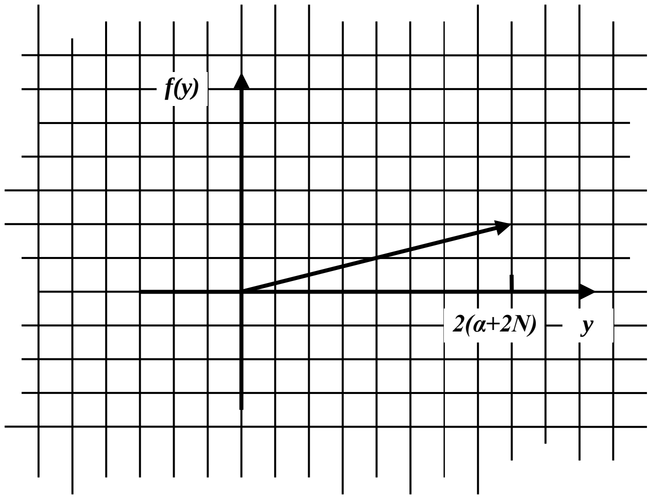

Рис. 3.2

Завдання 9

Неперервна випадкова величина X задана законом розподілу Сімпсона:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha+2\beta}\left(1-\dfrac{|x|}{\alpha+2\beta}\right), & якщо \quad x\in(-\alpha-2\beta;\alpha+2\beta);\\ 0 \qquad , & якщо \quad x\notin(-\alpha-2\beta;\alpha+2\beta).\end{cases}$$

Знайти інтегральну функцію розподілу ***F(x)*** та числові характеристики ***M(X)***, ***D(X)***, ***σ(X)***. Побудувати графіки інтегральної ***F(x)*** та диференціальної ***f(x)*** функцій розподілу.

Завдання 10

Обчислити різні види середніх величин (гармонійну, геометричну, арифметичну, квадратичну) та перевірити правило мажорантності середніх.

X_i	$3+\alpha$	$5+\alpha$	$6+\alpha$	$8+\alpha$	$10+\alpha$	$14+\alpha$
n_i	$1+\alpha$	$2+\alpha$	$3+\alpha$	$4+\alpha$	$3+\alpha$	$2+\alpha$

Завдання 11

Результати дослідження урожайності зернових у господарствах області подано в таблиці.

За цими даними:

1. Побудувати гістограму та полігон розподілу частот.
2. Розрахувати середню врожайність двома методами (звичайним та спрощеним).
3. Розрахувати медіанне та модальне значення врожайності.

4. Розрахувати показники варіації: розмах варіації, середнє лінійне відхилення, дисперсію, середнє квадратичне відхилення (звичайним та спрощеним способом), коефіцієнт варіації.

№ п.п	Межі інтервалів за урожайністю зернових культур, ц/га	Число господарств (частота)
1	***14,0+0,1N …18,0+0,1N***	***9***
2	***18,1+0,1N …22,0+0,1N***	***15***
3	***22,1+0,1N …26,0+0,1N***	***16***
4	***26,1+0,1N …30,0+0,1N***	***24***
5	***30,1+0,1N …34,0+0,1N***	***18***
6	***34,1+0,1N …38,0+0,1N***	***12***
7	***38,1+0,1N …42,0+0,1N***	***6***

Завдання 12

Використовуючи дані господарств про урожайність зернових культур та якість ґрунту, провести кореляційно-регресійний аналіз зв'язку між двома ознаками: урожайністю та якістю ґрунту:

№	Урожайність зернових культур, ц/га	Якість грунту, бали
1	***32,2 + 0,1 α***	***84 + N***
2	***35,3 + 0,1 α***	***84 + N***
3	***27,5 + 0,1 α***	***82 + N***
4	***25,1 + 0,1 α***	***71 + N***
5	***26,7 + 0,1 α***	***77 + N***
6	***18,9 + 0,1 α***	***67 + N***
7	***26,1 + 0,1 α***	***75 + N***
8	***37,7 + 0,1 α***	***82 + N***
9	***24,6 + 0,1 α***	***70 + N***
10	***26,6 + 0,1 α***	***75 + N***
11	***29,6 + 0,1 α***	***83 + N***
12	***34,7 + 0,1 α***	***86 + N***
13	***26,4 + 0,1 α***	***73 + N***
14	***18,3 + 0,1 α***	***72 + N***
15	***28,6 + 0,1 α***	***70 + N***

1.Побудувати графік кореляційної залежності між урожайністю та якістю ґрунту.

2. Знайти оцінки параметрів рівняння регресії методом найменших квадратів та побудувати її графік.

3. Перевірити адекватність побудованої моделі за ***F***-критерієм Фішера.

4. Обчислити коефіцієнт кореляції та детермінації. Перевірити значимість коефіцієнта кореляції.

5. Виконати завдання, використовуючи пакет ***Excel***.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПРАКТИЧНИХ РОБІТ (СЕРІЯ Б)

Завдання 1

Варіант 1-5

У магазин привезли партію фасованих макаронів по 0,5кг чотирьох різних виробників: 30% усіх пакетів Тернівського хлібозаводу, 40% - Первомайського, 20% - Вознесенського та 10 % - Трипільського. Ймовірність того, що вага пакета макаронів становить 500 г для відповідного заводу дорівнює:

№ варіанта	Тернів-ський	Первомай-ський	Вознесен-ський	Трипіль-ський
1	0,85	0,9	0,8	0,9
2	0,9	0,8	0,75	0,85
3	0,95	0,75	0,8	0,7
4	0,8	0,9	0,75	0,8
5	0,8	0,9	0,75	0,85

1. Товарознавець узяв по одному пакету кожного заводу. Визначити ймовірність того, що:

а) усі пакети матимуть вагу в 500г;

б) один із чотирьох пакетів буде неякісним;

в) хоча б один із чотирьох пакетів буде неякісним.

2. Знайти ймовірність того, що навмання взятий пакет матиме вагу в 500г.

3. Навмання взятий пакет є неякісним. Визначити, яким заводом найімовірніше розфасовано цей пакет.

Варіант 6-10

У групі 10 студентів: 3 відмінники, 4 вчаться на «добре», 2- на «задовільно», 1 – двієчник. Ймовірності того, що студент кожної категорії підготовлений до семінарського заняття та зможе дати відповідь на запитання, відповідно дорівнюють:

№ варіанта	На «відмінно»	На «добре»	На «задовільно»	На «незадовільно»
6	0,9	0,7	0,6	0,3
7	0,9	0,8	0,5	0,25
8	0,95	0,85	0,55	0,35
9	0,9	0,85	0,6	0,3
10	0,95	0,8	0,55	0,25

1. Викладач викликає по одному студенту кожної категорії, які дають відповіді на одне запитання. Визначити ймовірність того, що протягом дня:

а) всі студенти дадуть правильні відповіді;

б) троє із чотирьох дадуть правильні відповіді;

в) хоча б один дасть правильну відповідь.

2. Викликається навмання один студент, якому ставиться запитання. Визначити ймовірність того, що даний студент відповість на запитання.

3. Викликаний студент відповів на запитання. Необхідно визначити, до якої категорії найімовірніше всього належить даний студент.

Завдання 2

Число довгих волокон у партії бавовни становить у середньому 0,7 загальної кількості волокон.

1. За якої загальної кількості волокон найвірогідніше число довгих волокон виявиться рівним 25+N?

2. Серед відібраних волокон знайти ймовірність найвірогіднішого числа коротких волокон. Обчислення виконати за формулами Бернуллі, Лапласа та Пуассона. Порівняти результати.

Завдання 3

На двох станках фасується молочна продукція. Закони розподілу кількості бракованих пакетів, що виробляється протягом зміни на кожному із станків, мають вигляд:

1-й станок			
Кількість бракованих паків (***X***)	0	N	3N
Ймовірність (***p***)	0,3	0,6	0,1
2-й станок			
Кількість бракованих паків (***У***)	0	N	2N
Ймовірність (***p***)	0,2	0,6	0,2

Необхідно:

1. Скласти закон розподілу кількості бракованих пакетів, що виробляється протягом зміни обома станками.

2. Перевірити на цьому прикладі справедливість теорем про математичне сподівання та про дисперсію суми двох незалежних величин. Дисперсію обчислити двома способами.

3. Побудувати багатокутник розподілу випадкової величини та показати на графіку знайдені значення $M(X)$ та $\sigma(X)$.

4. Обчислити, використовуючи властивості математичного сподівання та дисперсії, математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини

$$V = NX + (N+1)Y,$$

де ***X*** – кількість бракованих пакетів, виготовлених першим станком, ***У*** – кількість бракованих пакетів, виготовлених другим станком.

Завдання 4

Задана функція розподілу $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } -\infty < x \le N, \\ \dfrac{3AN^2}{x^5}, \text{ якщо } x > N. \end{cases}$$

Знайти:

1. Значення сталої A, за якого $f(x)$ буде диференціальною функцією розподілу деякої неперервної випадкової величини X.

2. Інтегральну функцію розподілу ***F(x)*** цієї випадкової величини та побудувати графіки функцій ***f(x)*** і ***F(x)***.

3. Математичне сподівання ***M(X)***, дисперсію ***D(X)*** (двома способами) та середнє квадратичне відхилення $\boldsymbol{\sigma(X)}$.

4. Ймовірність того, що в результаті п'яти незалежних випробувань випадкова величина ***X*** рівно три рази прийме значення, що належить інтервалу $\left(-1;\frac{N}{2}\right)$.

Завдання 5

Вага дзеркальних коропів, яких виловлюють у ставках господарства, є нормально розподіленою випадковою величиною ***X***, з математичним сподіванням ***a = 500 + 0,1N*** г і середнім квадратичним відхиленням ***σ = 75***г.

Необхідно:

1. Знайти диференціальну та інтегральну функції розподілу випадкової величини ***X***.

2. Обчислити ймовірність того, що вага навмання взятого коропа, буде у межах ***425 + 0,1N***г до ***550 + 0,1N***г.

3. Знайти довірчий інтервал, в якому з ймовірністю ***0,9545*** буде знаходитися вага виловлених коропів.

4. Визначити, в яких межах, відповідно до правила «трьох ***σ***», можна практично гарантувати вагу виловленого коропа.

Завдання 6

Знайти мінімальний об'єм вибірки, за яким з надійністю ***0,975*** точність оцінки математичного сподівання генеральної сукупності з нормальним розподілом вибірковим середнім дорівнює ***δ=0,2***. Середнє квадратичне відхилення генеральної сукупності відоме і дорівнює $\boldsymbol{\sigma = 3{,}5 + 0{,}04\alpha}$.

Завдання 7

Кількісна ознака ***X*** генеральної сукупності має нормальний розподіл. За вибіркою об'єму ***n=40*** знайдено виправлене середнє квадратичне відхилення $\boldsymbol{s = 1{,}2 + 0{,}02\alpha}$. Знайти надійний інтервал, що покриває генеральне середнє квадратичне відхилення ***σ*** з надійністю ***0,95***.

З таблиці значень $\boldsymbol{q = q(\gamma, n) = q(0{,}95;40) = 0{,}24}$ (додаток 4).

Завдання 8

Дві неперервні незалежні випадкові величини ***X*** та ***Y*** задані графіками щільності ***f(x)*** (рис. 3.3) та ***f(y)*** (рис. 3.4).

Знайти ***M(X-Y)***, ***M(X·Y)***, ***D(3X-5Y+7)***.

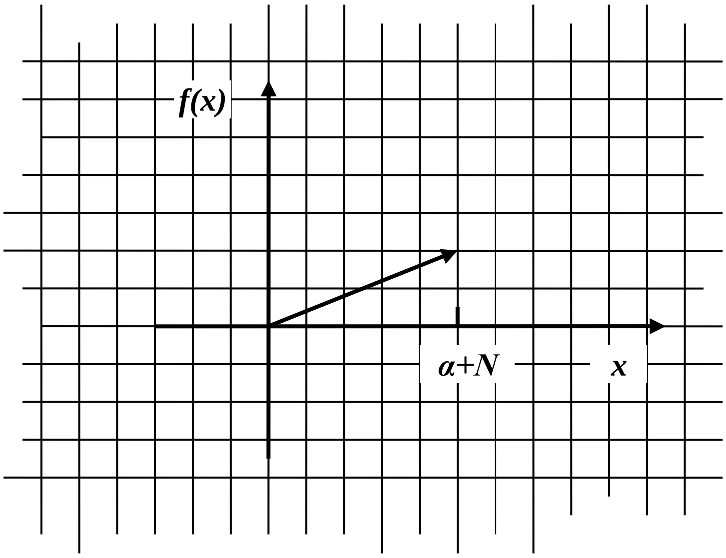

Рис. 3.3

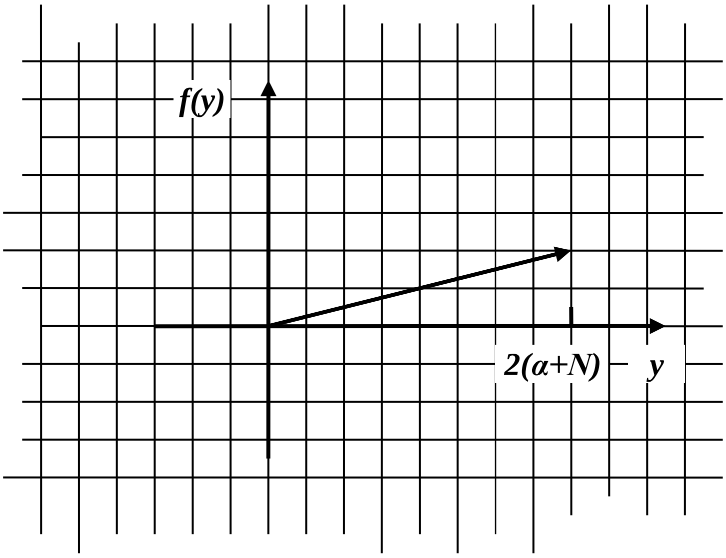

Рис. 3.4

Завдання 9

Неперервна випадкова величина X задана законом розподілу Сімпсона:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\alpha+\beta}\left(1-\dfrac{|x|}{\alpha+\beta}\right), & \text{якщо} \quad x\in(-\alpha-\beta;\alpha+\beta); \\ 0, & \text{якщо} \quad x\notin(-\alpha-\beta;\alpha+\beta). \end{cases}$$

Знайти інтегральну функцію розподілу ***F(x)*** та числові характеристики ***M(X)***, ***D(X)***, ***σ(X)***. Побудувати графіки інтегральної ***F(x)*** та диференціальної ***f(x)*** функцій розподілу.

Завдання 10

Обчислити різні види середніх величин (гармонійну, геометричну, арифметичну, квадратичну) та перевірити правило мажорантності середніх.

X_i	$3+\alpha$	$7+\alpha$	$8+\alpha$	$11+\alpha$	$12+\alpha$	$17+\alpha$
n_i	$1+\alpha$	$2+\alpha$	$3+\alpha$	$4+\alpha$	$3+\alpha$	$2+\alpha$

Завдання 11

Результати дослідження урожайності зернових у господарствах області подано в таблиці:

№ п.п	Межі інтервалів за урожайністю зернових культур, ц/га	Число господарств (частота)
1	***15,0+0,1N …19,0+0,1N***	***8***
2	***19,1+0,1N …23,0+0,1N***	***14***
3	***23,1+0,1N …27,0+0,1N***	***17***
4	***27,1+0,1N …31,0+0,1N***	***25***
5	***31,1+0,1N …35,0+0,1N***	***17***
6	***35,1+0,1N …39,0+0,1N***	***12***
7	***39,1+0,1N …43,0+0,1N***	***7***

За цими даними:

1. Побудувати гістограму та полігон розподілу частот.
2. Розрахувати середню врожайність двома методами (звичайним та спрощеним).
3. Розрахувати медіанне та модальне значення врожайності.
4. Розрахувати показники варіації: розмах варіації, середнє лінійне відхилення, дисперсію, середнє квадратичне відхилення (звичайним та спрощеним способом), коефіцієнт варіації.

Завдання 12

Використовуючи дані господарств про урожайність зернових культур та дозу внесення мінеральних добрив ґрунту провести кореляційно-регресійний аналіз та встановити вплив дози мінеральних добрив на урожайність зернових культур:

1. Побудувати графік кореляційної залежності між врожайністю та дозою внесення мінеральних добрив.

2. Знайти оцінки параметрів рівняння регресії методом найменших квадратів та побудувати її графік.

3. Перевірити адекватність побудованої моделі за ***F***-критерієм Фішера.

4. Обчислити коефіцієнт кореляції та детермінації. Перевірити значимість коефіцієнта кореляції.

5. Виконати завдання, використовуючи пакет ***Excel***.

№	Урожайність зернових культур, ц/га	Доза внесення мінеральних добрив
1	***23,6 + 0,1 α***	***1,1 + N***
2	***31,9 + 0,1 α***	***3,1 + N***
3	***35,2 + 0,1 α***	***2,8 + N***
4	***36,4 + 0,1 α***	***2,9 + N***
5	***23,6 + 0,1 α***	***1,2 + N***
6	***34,0 + 0,1 α***	***2,9 + N***
7	***38,2 + 0,1 α***	***3,0 + N***
8	***17,3 + 0,1 α***	***0,8 + N***
9	***23,8 + 0,1 α***	***0,7 + N***
10	***19,7 + 0,1 α***	***1,3 + N***
11	***24,6 + 0,1 α***	***1,4 + N***
12	***15,1 + 0,1 α***	***0,7 + N***
13	***28,6 + 0,1 α***	***1,6 + N***
14	***38,4 + 0,1 α***	***2,9 + N***
15	***22,4 + 0,1 α***	***1,3 + N***

ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАВДАНЬ

Завдання 1

У відділі 9 стрільців: 3 дуже хороших, 4 хороших та 2 посередніх. Ймовірності влучення в мішень для стрільців кожної категорії відповідно дорівнюють: $p_1 = 0,95$, $p_2 = 0,8$, $p_3 = 0,6$.

1. Викликають по одному стрільцю із кожної групи, кожен з яких робить однин постріл по мішені. Визначити ймовірність того, що:

а) усі стрільці влучать в мішень;

б) двоє із трьох вразять мішень;

в) хоча б один стрілець влучить у мішень.

2. Викликають навмання одного стрільця, який повинен зробити постріл. Визначити ймовірність того, що він влучить.

3. Після пострілу мішень вражено. Визначити, до якої групи найімовірніше належить стрілець.

Розв'язання

Введемо позначення подій:

A_1 – стрілець першої групи влучив у мішень,

A_2 – стрілець другої групи влучив у мішень,

A_3 – стрілець третьої групи влучив у мішень.

Відповідно протилежні події, тобто промахи:

$\overline{A_1}$ - стрілець першої групи промахнувся,

$\overline{A_2}$ - стрілець другої групи промахнувся,

$\overline{A_3}$ - стрілець третьої групи промахнувся.

Ймовірність протилежної події $q = 1 - p$, тому, ймовірність того, що стрілець першої групи не влучить $q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0,95 = 0,05$, відповідно ймовірність промаху для стрільця другої групи $q_2 = 1 - p_2 = = 1 - 0,8 = 0,2$. Аналогічно, $q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0,6 = 0,4.$

1. а) Нехай подія B – усі стрільці влучили у мішень.

Подія B – це одночасна поява подій A_1, A_2, A_3 і згідно із поняттям добутку подій, можемо записати:

$$B = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 .$$

Оскільки ймовірність того, що стрілець однієї з груп влучить (або ні) у мішень не залежить від того, влучать чи ні стрільці інших груп, то дані події є незалежними. Тому можемо скористатися теоремою про множення ймовірностей незалежних подій:

$$P(B) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) =$$
$$= p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0,95 \cdot 0,8 \cdot 0,6 = 0,456 .$$

Відповідь: ймовірність того, що всі стрільці влучать у мішень $p = 0,456$.

б) Подія C – двоє із трьох стрільців влучать у мішень складається із таких подій:

D – влучили перший та другий стрільці, третій – ні;

E – влучили перший та третій стрільці, другий – ні;

F – влучили другий та третій стрільці, перший – ні.

Ці події несумісні між собою, тобто ніякі дві з них не можуть відбутися одночасно, тому, згідно з принципом суми подій:

$$C = D + E + F.$$

Подія D складається із одночасної появи незалежних подій: перший влучив A_1, другий влучив A_2, третій промахнувся $\overline{A_3}$. Тому, згідно з поняттям добутку подій, можемо записати:

$$D = A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}.$$

Аналогічно, $E = A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3, \quad F = \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3.$

Використовуючи теореми додавання ймовірностей несумісних і множення незалежних подій, маємо:

$$P(C) = P(D + E + F) = P(D) + P(E) + P(F) =$$
$$= P\left(A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}\right) + P\left(A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3\right) + P\left(\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3\right) =$$
$$= P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P\left(\overline{A_3}\right) + P(A_1) \cdot P\left(\overline{A_2}\right) \cdot P(A_3) + P\left(\overline{A_1}\right) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) =$$
$$= p_1 \cdot p_2 \cdot q_3 + p_1 \cdot q_2 \cdot p_3 + q_1 \cdot p_2 \cdot p_3 =$$
$$= 0{,}95 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}4 + 0{,}95 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}6 + 0{,}05 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}442.$$

Відповідь: ймовірність того, що двоє стрільців із трьох влучать у мішень $p = 0{,}442$.

в) Подія G – «влучить хоча б один стрілець», є протилежною до події «не влучить жоден».

Нехай подія H – жоден стрілець не влучив у мішень.

Подія H складається із одночасної появи подій $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, $\overline{A_3}$ і згідно із поняттям добутку подій, можемо записати:

$$H = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}.$$

Оскільки ймовірність того, що стрілець однієї з груп влучить (або ні) у мішень не залежить від того, влучать чи ні стрільці інших груп, то дані події є незалежними. Тому можемо скористатися теоремою множення ймовірностей незалежних подій:

$$p(H) = p(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}) = p(\overline{A_1}) \cdot p(\overline{A_2}) \cdot p(\overline{A_3}) =$$
$$= q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 0{,}05 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}004$$

Отже, $p(G) = 1 - p(H) = 1 - 0{,}004 = 0{,}996.$

Відповідь: ймовірність того, що в мішень влучить хоча б один стрілець із трьох $p = 0{,}996$.

2. Нехай подія A – стрілець влучив у мішень.

Розглянемо гіпотези:

H_1 – викликали стрільця із першої групи;
H_2 – викликали стрільця із другої групи;
H_3 – викликали стрільця із третьої групи.

Згідно з теоремою про повну ймовірність

$$P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+P(H_3)\cdot P_{H_3}(A),$$

де $P(H_1)$, $P(H_2)$, $P(H_3)$ – ймовірності того, що буде викликано стрільця відповідно із першої, другої, або третьої груп.

$P_{H_i}(A)$ - ймовірність того, що мішень вражено, за умови, що це зробив стрілець i –ї групи.

Визначимо потрібні ймовірності.

Згідно з класичним означенням ймовірності $P(A)=\dfrac{m}{n}$ – відношення числа результатів сприятливих появі даної події до загального числа можливих результатів.

Оскільки у нас усього дев'ять стрільців, а до першої групи відносяться троє, то ймовірність того, що буде викликано стрільця першої групи $P(H_1)=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$. Аналогічно, $P(H_2)=\dfrac{4}{9}$; $P(H_3)=\dfrac{2}{9}$.

Перевіримо правильність знайдених ймовірностей гіпотез:

$$\sum_{i=1}^{3}P(H_i)=\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\frac{2}{9}=\frac{3+4+2}{9}=\frac{9}{9}=1.$$

Згідно з умовою задачі, ймовірність того, що стрілець першої групи влучить у мішень, $P_{H_1}(A)=0{,}95$, відповідно, другої - $P_{H_2}(A)=0{,}8$ і третьої $P_{H_3}(A)=0{,}6$.

Підставляємо отримані значення у формулу повної ймовірності:

$$P(A)=\frac{1}{3}\cdot 0{,}95+\frac{4}{9}\cdot 0{,}8+\frac{2}{9}\cdot 0{,}6=0{,}8056.$$

Відповідь: ймовірність того, що мішень буде вражено ***P(A)=0,8056***.

3. Оскільки подія вже відбулася, то розглянемо подію A – мішень вражено. Для переоцінки ймовірностей необхідно скористатися формулою Байєса:

$$p_A(H_i) = \frac{p(H_i) \cdot p_{H_i}(A)}{p(A)}.$$

Проведемо оцінювання для кожної з груп стрільців. Усі необхідні дані для цього вже є:

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0{,}95}{0{,}8056} = 0{,}3931;$$

$$P_A(H_2) = \frac{P(H_2) \cdot P_{H_2}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{9} \cdot 0{,}8}{0{,}8056} = 0{,}4414;$$

$$P_A(H_3) = \frac{P(H_3) \cdot P_{H_3}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{9} \cdot 0{,}6}{0{,}8056} = 0{,}1655.$$

Оскільки $\sum\limits_{i=1}^{3} P_A(H_i) = 0{,}3931 + 0{,}4414 + 0{,}1655 = 1$, то переоцінені гіпотези знайдено правильно. Порівняємо їх.

Бачимо, що найбільша ймовірність $P_A(H_2) = 0{,}4414$. Отже, стрілець, що вразив мішень, найімовірніше відноситься до другої групи.

Відповідь: стрілець, що вразив мішень, найімовірніше відноситься до другої групи.

Завдання 2

Випробовують ***100*** деталей. Ймовірність того, що деталь зіпсована, дорівнює ***0,1***.

1. Знайти найвірогідніше число зіпсованих деталей у перевіреній партії.

2. Знайти ймовірність найвірогіднішого числа зіпсованих деталей. Обчислення провести за формулами Бернуллі, Лапласа та Пуассона. Порівняти отримані результати.

3. Ймовірність того, що навмання взятий виріб у партії буде першого сорту, дорівнює $2/3$. Скільки одиниць цього виробу слід узяти, щоб найвірогідніше число виробів першого сорту дорівнювало б ***270***?

1. Знайти найвірогідніше число зіпсованих деталей у перевіреній партії.

Розв’язання

Оскільки всі випробовування між собою незалежні, повторюються багато разів, мають лише два можливі наслідки, ймовірності цих наслідків є сталими для всіх випробувань, то вони утворюють схему Бернуллі.

Згідно з теоремою про найвірогідніше число «успіхів» у схемі Бернуллі: $np - q \le k_0 \le np + p$.

У нашому випадку: $n = 100,\ p = 0{,}1,\ q = 1 - p = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$.

Обчислюємо:

$$np - q = 100 \cdot 0{,}1 - 0{,}9 = 9{,}1;$$

$$np + p = 100 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 = 10{,}1.$$

Отже, $9{,}1 \le k_0 \le 10{,}1$.

У нашому випадку k – число деталей повинно бути цілим числом, тому $k_0 = [np + p] = [10{,}1] = 10$.

Відповідь: найвірогідніше, що буде зіпсовано ***10*** деталей.

2. Використовуючи умову попередньої задачі, знайти ймовірність найвірогіднішого числа зіпсованих деталей. Обчислення провести за формулами Бернуллі, Лапласа та Пуассона. Порівняти отримані результати.

Розв’язання

Згідно з умовою задачі: $n = 100,\ k = 10,\ p = 0{,}1,\ q = 0{,}9$ (див. п.1).

За формулою Бернуллі, ймовірність того, що в n випробуваннях подія настане рівно k разів:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \text{ де } C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Підставивши дані, отримаємо:

$$C_{100}^{10} = \frac{100!}{10!(100-10)!} = \frac{100!}{10! \cdot 90!} =$$

$$= \frac{91 \cdot 92 \cdot 93 \cdot 94 \cdot 95 \cdot 96 \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} = 1{,}73 \cdot 10^{13};$$

$$P_{100}(10) = 1{,}73 \cdot 10^{13} \cdot 0{,}1^{10} \cdot 0{,}9^{90} = 0{,}1318.$$

Згідно з формулою Лапласа:

$$P_n(k)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x),\text{ де } x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}.$$

Підставивши вихідні дані, отримаємо:

$$\sqrt{npq}=\sqrt{100\cdot 0,1\cdot 0,9}=3; \qquad x=\frac{10-100\cdot 0,1}{3}=0;$$

Згідно з таблицями для функції Гауса $\varphi(x)=\varphi(0)=0,3989$ (*додаток 1*).

Підставивши дані, отримаємо:

$$P_n(k)=\frac{1}{3}\cdot 0,3989=0,132967.$$

За формулою Пуассона:

$$P_n(k)\approx\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda},\text{ де } \lambda=n\cdot p.$$

Підставимо: $\lambda=100\cdot 0,1=10$,

$$P_{100}(10)\approx\frac{10^{10}}{10!}\cdot e^{-10}\approx 0,124322.$$

За цими формулами отримали різні результати, однак обчислення за формулою Бернуллі в даному випадку найточніше.

Відповідь: ймовірність найвірогіднішого числа зіпсованих деталей $P_{100}(10)=0,1318$.

3. Ймовірність того, що навмання взятий виріб у партії буде першого сорту, дорівнює $2/3$. Скільки одиниць цього виробу слід узяти, щоб найвірогідніше число виробів першого сорту дорівнювало б 270?

<u>Розв'язання</u>

За умовою, $k_0=270,\ p=\frac{2}{3},\ q=\frac{1}{3}$.

Застосовуючи формулу для обчислення найвірогіднішого числа «успіхів», отримуємо $n\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\le 270\le n\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$. Звідси маємо систему:

$$\begin{cases} n\cdot\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}\le 270, \\ n\cdot\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}\ge 270; \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \dfrac{2}{3}n\le 270\dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{2}{3}n\ge 269\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Звідки $\quad 404\le n\le 405{,}5$.

Відповідь: для того, щоб найвірогідніше число виробів першого сорту дорівнювало ***270***, необхідно взяти ***404*** або ***405*** виробів.

Завдання 3

Закони розподілу двох незалежних величин мають вигляд:

X_1	10 – 12	12 – 14	14 – 16	16 – 18
P	0,1	0,3	0,4	0,2

Y_1	20 – 22	22 – 24	24 – 26
p	0,3	0,5	0,2

Необхідно:

1. Скласти закон розподілу суми двох заданих величин.

2. Перевірити на цьому прикладі справедливість теорем про математичне сподівання та дисперсію суми двох незалежних величин, обчисливши її двома способами.

3. Побудувати багатокутник розподілу випадкової величини та показати на графіку знайдені значення $M(X)$ та $\sigma(X)$.

4. Обчислити, використовуючи властивості математичного сподівання та дисперсії, числові характеристики випадкової величини $V = 3X - 2Y$.

Розв'язання

1. Визначимо середини інтервалів:

X_1	10 – 12	12 – 14	14 – 16	16 – 18
X	11	13	15	17
p	0,1	0,3	0,4	0,2

Y_1	20 – 22	22 – 24	24 – 26
Y	21	23	25
p	0,3	0,5	0,2

Складемо закон розподілу випадкової величини $Z = X + Y$.

Згідно з означенням суми двох незалежних випадкових величин величина Z набуває можливих значень:

$z_1 = 11 + 21 = 32$; $z_2 = 11 + 23 = 34$; $z_3 = 11 + 25 = 36$;
$z_4 = 13 + 21 = 34$; $z_5 = 13 + 23 = 36$; $z_6 = 13 + 25 = 38$;
$z_7 = 15 + 21 = 36$; $z_8 = 15 + 23 = 38$; $z_9 = 15 + 25 = 40$;
$z_{10} = 17 + 21 = 38$; $z_{11} = 17 + 23 = 40$; $z_{12} = 17 + 25 = 42$.

Знайдемо ймовірності можливих значень.

Для того, щоб $z = 32$, достатньо, щоб величина X набула значення $x_1 = 11$ і величина $У$ – значення $y_1 = 21$. Ймовірності цих можливих значень відповідно дорівнюють $0,1$ і $0,3$.

Оскільки ці величини X та $У$ – незалежні, то події $x_1 = 11$ та $y_1 = 21$ також незалежні, отже, ймовірність того, що вони настануть одночасно (тобто ймовірність події $z = 32$) за теоремою множення $P(z = 32) = 0,1 \cdot 0,3 = 0,03$.

Аналогічно знаходимо:

$P(z = 11 + 23 = 34) = 0,1 \cdot 0,5 = 0,05$;
$P(z = 11 + 25 = 36) = 0,1 \cdot 0,2 = 0,02$;
$P(z = 13 + 21 = 34) = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09$;
$P(z = 13 + 23 = 36) = 0,3 \cdot 0,5 = 0,15$;
$P(z = 13 + 25 = 38) = 0,3 \cdot 0,2 = 0,06$;
$P(z = 15 + 21 = 36) = 0,4 \cdot 0,3 = 0,12$;
$P(z = 15 + 23 = 38) = 0,4 \cdot 0,5 = 0,2$;
$P(z = 15 + 25 = 40) = 0,4 \cdot 0,2 = 0,08$;
$P(z = 17 + 21 = 38) = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06$;
$P(z = 17 + 23 = 40) = 0,2 \cdot 0,5 = 0,1$;
$P(z = 17 + 25 = 42) = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04$.

Серед можливих значень величини Z є декілька однакових, наприклад, $Z = 34$. Це значення отримується внаслідок настання подій ($X = 11,\ У = 23$) або ($X = 13,\ У = 21$). Ці події несумісні. Тому згідно з теоремою додавання, ймовірність значення $Z = 34$ є сумою ймовірностей цих подій: $P(Z = 34) = 0,05 + 0,09 = 0,14$.

Аналогічно визначаємо інші ймовірності.

Запишемо шуканий закон:

Z	32	34	36	38	40	42
p	$0,03$	$0,14$	$0,29$	$0,32$	$0,18$	$0,04$

Для контролю сума ймовірностей має дорівнювати одиниці:

$$0,03 + 0,14 + 0,29 + 0,32 + 0,18 + 0,04 = 1.$$

2. Згідно з теоремою про математичне сподівання суми двох незалежних величин:

$$M\,(\,X+У\,)=M\,(\,X\,)+M\,(\,У\,).$$

Знайдемо відповідні математичні сподівання за означенням:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i\,p_i\ .$$

$$M(X)=11\cdot 0{,}1+13\cdot 0{,}3+15\cdot 0{,}4+17\cdot 0{,}2=$$
$$=1{,}1+3{,}9+6+3{,}4=14{,}4\,;$$
$$M(Y)=21\cdot 0{,}3+23\cdot 0{,}5+25\cdot 0{,}2=6{,}3+11{,}5+5=22{,}8\,.$$

Для суми двох величин:

$$M(X+Y)=M(Z=X+Y)=32\cdot 0{,}03+34\cdot 0{,}14+36\cdot 0{,}29+$$
$$+38\cdot 0{,}32+40\cdot 0{,}18+42\cdot 0{,}04=$$
$$=0{,}96+4{,}76+10{,}44+12{,}16+7{,}2+1{,}68=37{,}2\,.$$

Отже, $37{,}2 = 14{,}4 + 22{,}\,8$, або $37{,}2 = 37{,}2$.

Справедливість теореми на даному прикладі доведено.
Згідно з означенням дисперсії знайдемо $D\,(\,X\,),\ D\,(\,У\,),\ D\,(\,Z\,)$.

$$D(X)=M(X-M(X))^2=$$
$$=(11-14{,}4)^2\cdot 0{,}1+(13-14{,}4)^2\cdot 0{,}3+(15-14{,}4)^2\cdot 0{,}4+$$
$$+(17-14{,}4)^2\cdot 0{,}2=3{,}24\,;$$
$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{3{,}24}=1{,}772\,;$$
$$D(Y)=M(Y-M(Y))^2=(21-22{,}8)^2\cdot 0{,}3+(23-22{,}8)^2\cdot 0{,}5+$$
$$+(25-22{,}8)^2\cdot 0{,}2=1{,}96\,;$$
$$D(Z)=M(Z-M(Z))^2=(32-37{,}2)^2\cdot 0{,}03+(34-37{,}2)^2\cdot 0{,}14+$$
$$+(36-37{,}2)^2\cdot 0{,}29+(38-37{,}2)^2\cdot 0{,}32+(40-37{,}2)^2\cdot 0{,}18+$$
$$+(42-37{,}2)^2\cdot 0{,}04=5{,}2$$

А за теоремою про дисперсію суми двох незалежних величин:

$$D\,(\,X+У\,)=D\,(\,X\,)+D\,(\,У\,).$$

Знайдемо відповідні дисперсії за спрощеною формулою:

$$D(X)=M\left(X^2\right)-M^2(X).$$

Знаходимо:

$$D(X)=11^2\cdot 0{,}1+13^2\cdot 0{,}3+15^2\cdot 0{,}4+17^2\cdot 0{,}2-14{,}4^2=$$
$$=12{,}1+50{,}7+90+57{,}8-207{,}36=3{,}24\,;$$
$$D(Y)=21^2\cdot 0{,}3+23^2\cdot 0{,}5+25^2\cdot 0{,}2-22{,}8^2=$$

$$= 132{,}3 + 264{,}5 + 125 - 519{,}84 = 1{,}96\,.$$

Для суми:

$$D(X+Y) = D(Z = X_s + Y_s) = 32^2 \cdot 0{,}03 + 34^2 \cdot 0{,}14 + 36^2 \cdot 0{,}29 +$$

$$+ 38^2 \cdot 0{,}32 + 40^2 \cdot 0{,}18 + 42^2 \cdot 0{,}04 - 37{,}2^2 =$$

$$= 30{,}72 + 161{,}84 + 375{,}84 + 462{,}08 + 288 + 70{,}56 - 1383{,}84 = 5{,}2\,.$$

Перевіряємо справедливість:

$\boldsymbol{5{,}2 = 3{,}14 + 1{,}96}$, або $\boldsymbol{5{,}2 = 5{,}2}$.

Справедливість теореми на даному прикладі доведено.

3. Побудувати багатокутник розподілу випадкової величини та показати на графіку знайдені значення ***M(X)*** та ***σ(X)***.

Для побудови багатокутника розподілу на осі ***OX*** відкладемо значення варіант, а на осі ***OУ*** – значення ймовірностей. Відповідно покажемо ***M(X)*** та ***σ(X)*** (див. рис. 2.1).

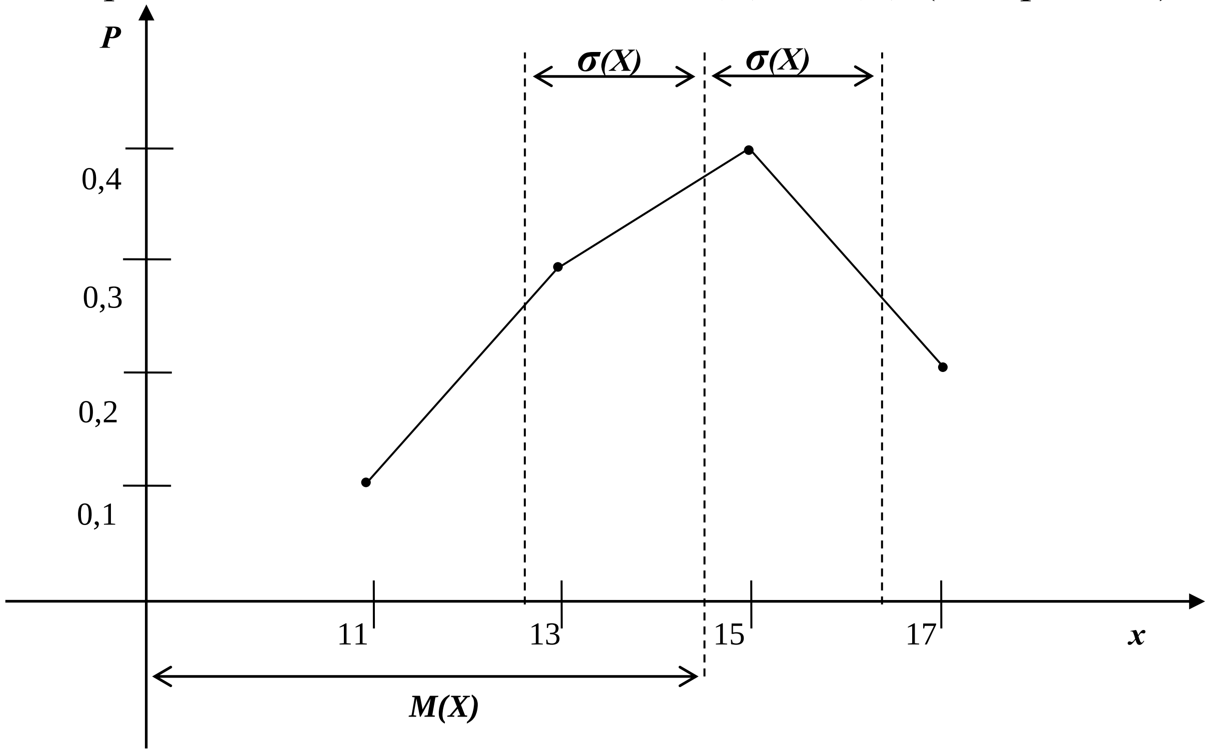

Рис. 2.1

4. Використовуючи властивості математичного сподівання та дисперсії, обчислимо числові характеристики випадкової величини $\boldsymbol{V = 3X - 2Y}$.

Використаємо такі властивості математичного сподівання:

а) математичне сподівання суми (або різниці) двох незалежних величини дорівнює сумі (або різниці) їх математичних сподівань;

б) сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання.

Отже, запишемо:

$$M(V)=M(3X-2Y)=M(3X)-M(2Y)=3M(X)-2M(Y).$$

Підставляючи числові значення, отримані в попередньому пункті, одержимо:

$$M(V)=3M(X)-2M(Y)=3\cdot 14{,}4-2\cdot 22{,}8=-2{,}4.$$

Знайдемо дисперсію.

Використаємо властивості дисперсії:

а) дисперсія суми (або різниці) двох незалежних величин дорівнює сумі дисперсій цих величин;

б) сталий множник можна виносити за знак дисперсії, підносячи його до квадрату.

Таким чином:

$$D(V)=D(3X-2Y)=D(3X)+D(2Y)=9D(X)+4D(Y)=$$
$$=9\cdot 3{,}14+4\cdot 1{,}96=36{,}1.$$

Середнє квадратичне відхилення є коренем із дисперсії $\sigma(V)=\sqrt{D(V)}=\sqrt{36{,}1}\approx 6{,}0083$.

Відповідь: $M(V)=-2{,}4$; $D(V)=36{,}1$; $\sigma(V)\approx 6{,}0083$.

Завдання 4

1. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x\le -\dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{1}{2}(1+\sin x), & \text{якщо } -\dfrac{\pi}{2}<x\le\dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{якщо } x>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Знайти:

а) диференціальну функцію розподілу $f(x)$ цієї величини та побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$;

б) числові характеристики величини X;

в) ймовірність того, що випадкова величина X в результаті трьох незалежних випробувань рівно два рази набуде значення, що належить інтервалу $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Розв'язання

а) За означенням щільності розподілу (диференціальної функції розподілу) $f(x) = F'(x)$.

Знаходимо:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ÿêùî} \quad x \le -\dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{1}{2}\cos x, & \text{ÿêùî} \quad -\dfrac{\pi}{2} < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{ÿêùî} \quad x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Побудуємо графіки функцій.

Підставимо крайні значення у функцію ***F(x)***.

Якщо $x = -\dfrac{\pi}{2}$: $F(x) = \dfrac{1}{2}\left(1 + \sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right) = \dfrac{1}{2}(1 - 1) = 0$;

якщо $x = \dfrac{\pi}{2}$: $F(x) = \dfrac{1}{2}\left(1 + \sin\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{2}(1 + 1) = 1$ (рис. 2.2).

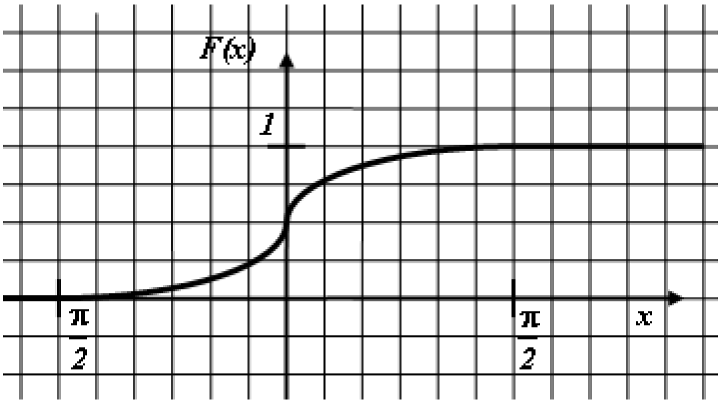

Рис. 2.2

Підставимо крайні значення у функцію ***f(x)***.

Якщо $x = -\dfrac{\pi}{2}$: $f(x) = \dfrac{1}{2}\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{2} \cdot 0 = 0$;

якщо $x = \dfrac{\pi}{2}$: $f(x) = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot 0 = 0$.

Візьмемо проміжне значення $x = 0$:

$f(x) = \dfrac{1}{2}\cos 0 = \dfrac{1}{2} \cdot 1 = \dfrac{1}{2}$ (рис. 2.3).

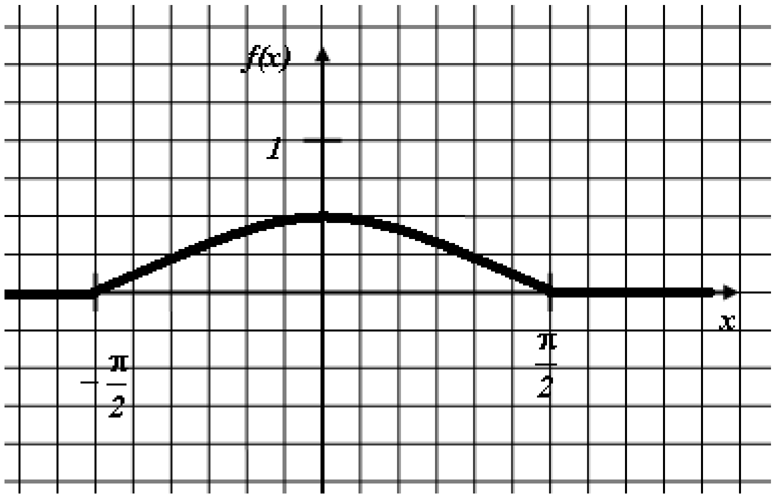

Рис. 2.3

Відповідь: диференціальна функція розподілу має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{ÿêùî} \quad x\le -\dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{1}{2}\cos x, & \text{ÿêùî} \quad -\dfrac{\pi}{2}< x\le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{ÿêùî} \quad x>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

б) Для обчислення математичного сподівання скористаємося формулою $M(X)=\int_a^b xf(x)dx$. Підставивши $a=-\frac{\pi}{2}$, $b=\frac{\pi}{2}$, $f(x)=\frac{1}{2}\cos x$, дістанемо:

$$M(X)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos x dx=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx.$$

Знайдемо інтеграл способом інтегрування за частинами:

$$\int udv = uv-\int vdu.$$

$$\int x\cos x dx=\begin{vmatrix} u=x, & du=dx \\ dv=\cos x dx, & v=\int\cos x dx=\sin x \end{vmatrix}= x\sin x-\int\sin x dx=$$

$$=x\sin x+\cos x.$$

Повернемося до обчислення:

$$M(X)=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx=\frac{1}{2}(x\sin x+\cos x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}\right)-\left(-\frac{\pi}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1+0\right)-\left(-\frac{\pi}{2}\cdot(-1)+0\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right]=0.$$

Знайдемо дисперсію за формулою:

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx-[M(X)]^2=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\cdot\frac{1}{2}\cos x dx-0^2=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x dx.$$

Інтеграл знайдемо способом інтегрування за частинами:

$$\int x^2\cos x dx=\begin{vmatrix} u=x^2, & du=2xdx \\ dv=\cos x dx, & v=\sin x\end{vmatrix}=x^2\sin x-\int 2x\sin x dx=$$

$$=x^2\sin x-2\int x\sin x dx\Rightarrow$$

$$\int x\sin x dx=\begin{vmatrix} u=x, & du=dx \\ dv=\sin x dx, & v=-\cos x\end{vmatrix}=-x\cos x+\int\cos x dx=$$

$$=-x\cos x+\sin x.$$

$$\Rightarrow x^2\sin x-2(-x\cos x+\sin x)=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x.$$

Отже,

$$D(X)=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x dx=\frac{1}{2}\left(x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\sin\frac{\pi}{2}+2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2}-2\sin\frac{\pi}{2}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\left(\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+2\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)-2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4}\cdot 1+\pi\cdot 0-2\cdot 1\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4}\cdot(-1)-\pi\cdot 0-2\cdot(-1)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4}-2+\frac{\pi^2}{4}-2\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{2}-4\right)=\frac{\pi^2}{4}-2\,.$$

Знайдемо дисперсію за означенням:

$$D(X)=\int_a^b\left(x-M(X)\right)^2 f(x)dx=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(x-0\right)^2\cdot\frac{1}{2}\cos x dx=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos x dx=\frac{\pi^2}{4}-2$$

Даний інтеграл було обчислено вище, тому $D(X)=\dfrac{\pi^2}{4}-2$.

Обчислимо середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-2}=\sqrt{\frac{\pi^2-8}{4}}=\frac{\sqrt{\pi^2-8}}{2}.$$

Відповідь: $M(X)=0;\ D(X)=\dfrac{\pi^2}{4}-2;\ \sigma(X)=\dfrac{\sqrt{\pi^2-8}}{2}$.

в) Визначимо ймовірність того, що в результаті випробування X набуде значення з інтервалу $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Скористаємося формулою: $P\left(a<X<b\right)=\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Підставляючи дані, отримаємо:

$$P\left(0<X<\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x dx=\frac{1}{2}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}-\sin 0\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

За формулою Бернуллі ймовірність того, що в n випробуваннях подія настане рівно k разів:

$$P_n\left(k\right)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k},\ \text{де}\ C_n^k=\frac{n!}{k!\cdot\left(n-k\right)!}.$$

У нашому випадку $n = 3$, $k = 2$, $p = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Підставляємо та обчислюємо:

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!\cdot(3-2)!} = \frac{3!}{2!\cdot 1!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 1} = 3;$$

$$p = \frac{\sqrt{2}}{4} = 0,3536; \quad q = 1 - p = 1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0,6464;$$

$$P_3(2) = 3\cdot 0,3536^2\cdot 0,6464^1 = 0,2425.$$

Відповідь: ймовірність того, що випадкова величина X у результаті трьох незалежних випробувань рівно два рази набуде значення, що належить інтервалу $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$: $P_3(2) = 0,2425$.

2. Задано функцію розподілу $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } -\infty < x \le 1, \\ \dfrac{3A}{x^4}, \text{ якщо } x > 1. \end{cases}$$

Знайти:

а) Значення сталої A, за якого $f(x)$ буде диференціальною функцією розподілу деякої неперервної випадкової величини X.

б) Інтегральну функцію розподілу $F(x)$ цієї випадкової величини та побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$.

в) Математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

г) Ймовірність того, що в результаті шести незалежних випробувань випадкова величина X рівно два рази набуде значення, що належить інтервалу $(2;4)$.

Розв'язання

а) Згідно з властивістю щільності функції розподілу $f(x)$, невластивий інтеграл від щільності розподілу ймовірностей випадкової величини у нескінчених межах дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

У нашому випадку функція набуває ненульового значення на інтервалі $(1;+\infty)$. Тому $\int\limits_1^{\infty} \frac{3A}{x^4}dx = 1$.

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{3A}{x^4}dx = 3A\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^4}dx = 3A\int\limits_1^{\infty} x^{-4}dx = 3A \lim_{b\to\infty}\int\limits_1^{b} x^{-4}dx =$$

$$= 3A \lim_{b\to\infty} \frac{x^{-3}}{-3}\Bigg|_1^b = -\lim_{b\to\infty} \frac{A}{x^3}\Bigg|_1^b = -\lim_{b\to\infty} \frac{A}{b^3} + \frac{A}{1} = 0 + A = A.$$

Враховуючи, що $\int\limits_1^{\infty} \frac{3A}{x^4}dx = 1$ та $\int\limits_1^{\infty} \frac{3A}{x^4}dx = A$, отримаємо $A = 1$.

Таким чином, диференціальна функція розподілу має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \; -\infty < x \le 1, \\ \frac{3}{x^4}, \text{ якщо } \; x > 1. \end{cases}$$

Відповідь: значення сталої A, за якого $f(x)$ буде диференціальною функцією розподілу неперервної випадкової величини X: $A=1$.

б) Знайдемо інтегральну функцію розподілу $F(x)$.

Згідно з означенням, $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

На проміжку $-\infty < x \le 1$ маємо:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dx = 0 \cdot \int\limits_{-\infty}^{x} dx = 0.$$

На проміжку $x > 1$ одержимо:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{1} f(x)dx + \int\limits_1^{x} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{1} 0dx + \int\limits_1^{x} \frac{3}{x^4}dx = 0 + 3\int\limits_1^{x} x^{-4}dx =$$

$$= 3 \cdot \frac{x^{-3}}{-3}\Bigg|_1^x = -\frac{1}{x^3}\Bigg|_1^x = -\frac{1}{x^3} + 1 = 1 - \frac{1}{x^3}.$$

Остаточно запишемо:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } -\infty < x \le 1, \\ 1 - \dfrac{1}{x^3}, \text{ якщо } x > 1. \end{cases}$$

Побудуємо графіки функцій ***f(x)*** та ***F(x)*** (рис. 2.4 та 2.5).

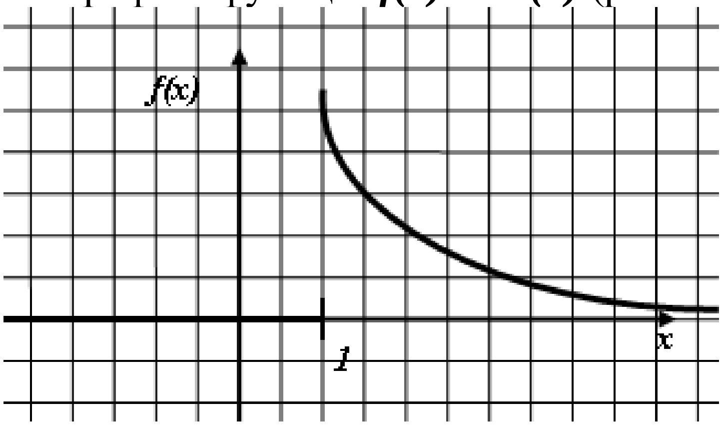

Рис. 2.4

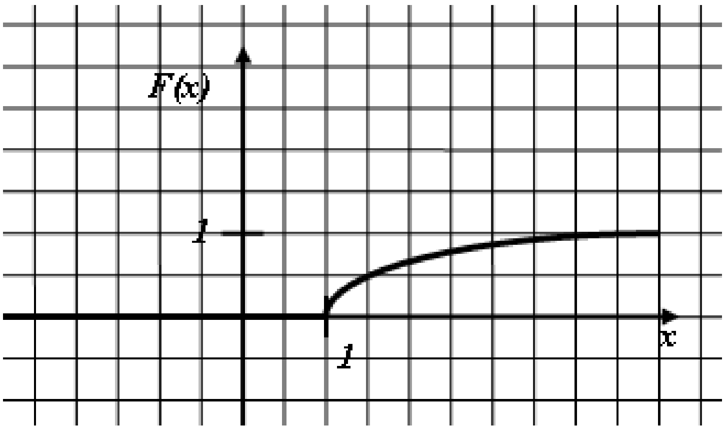

Рис. 2.5

Відповідь: інтегральна функція розподілу має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } -\infty < x \le 1, \\ 1 - \dfrac{1}{x^3}, \text{ якщо } x > 1. \end{cases}$$

в) Знайдемо математичне сподівання згідно з формулою:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{3}{x^4}dx = \int_1^{\infty} \frac{3}{x^3}dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{3}{x^3}dx =$$

$$= 3\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^3}dx = 3\lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-3}dx = 3\lim_{b\to\infty}\left.\frac{x^{-2}}{-2}\right|_1^b = -\frac{3}{2}\lim_{b\to\infty}\left.\frac{1}{x^2}\right|_1^b =$$

$$= -\frac{3}{2}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{1}\right) = -\frac{3}{2}\cdot(-1) = \frac{3}{2}.$$

Дисперсія неперервної випадкової величини:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f(x)dx - M^2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot\frac{3}{x^4}dx - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \int_1^{\infty}\frac{3}{x^2}dx - \frac{9}{4} =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{3}{x^2}dx - \frac{9}{4} = 3\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{1}{x^2}dx - \frac{9}{4} = 3\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) - \frac{9}{4} = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

.

Середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866.$$

Відповідь: $M(X) = \frac{3}{2}$; $D(X) = \frac{3}{4}$; $\sigma(X) \approx 0{,}866$.

г) Визначимо ймовірність того, що в результаті шести незалежних випробувань випадкова величина X рівно два рази набуде значення, що належить інтервалу $(2;4)$.

Спочатку знайдемо ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення з інтервалу $(2;4)$.

Скористаємося формулою: $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$.

Підставляючи дані, отримаємо:

$$P(2 < X < 4) = \int_2^4 \frac{3}{x^4}dx = 3\cdot\left.\frac{x^{-3}}{-3}\right|_2^4 = -\left.\frac{1}{x^3}\right|_2^4 = -\frac{1}{4^3}+\frac{1}{2^3} =$$

$$= -\frac{1}{64}+\frac{1}{8} = \frac{-1+8}{64} = \frac{7}{64} \approx 0{,}1094.$$

За формулою Бернуллі ймовірність того, що в n випробуваннях подія настане рівно k разів:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \text{ де } C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

У нашому випадку $n = 6$, $k = 2$, $p=0,1094$.

Ймовірність протилежної події $q=1-p=1-0,1094=0,8906$.

Підставляємо та обчислюємо:

$$C_6^2 = \frac{6!}{2! \cdot (6-2)!} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 15;$$

$$P_6(2) = 15 \cdot 0,1094^2 \cdot 0,8906^4 = 0,1129.$$

Відповідь: ймовірність того, що в результаті шести незалежних випробувань випадкова величина X рівно два рази прийме значення, що належить інтервалу $(2;4)$: $P_6(2) = 0,1129$.

Завдання 5

Зріст дорослих чоловіків у деякій місцевості є нормально розподіленою випадковою величиною з математичним сподіванням ***170***см і дисперсією ***36***. Для цієї випадкової величини необхідно:

1) знайти диференціальну та інтегральну функції розподілу;

2) знайти ймовірність того, що зріст навмання вибраного чоловіка буде в інтервалі від ***165*** до ***175***см;

3) визначити граничне відхилення зросту навмання вибраного дорослого чоловіка від середнього зросту, яке можна гарантувати з імовірністю ***0,95***. Визначити також інтервал, в якому з ймовірністю ***0,95*** цей зріст знаходиться;

4) знайти інтервал для значення зросту навмання вибраного дорослого чоловіка, який можна гарантувати згідно з «правилом трьох сигм».

Розв'язання

1) Щільність розподілу (диференціальна функція розподілу) для випадкової величини, що розподілена нормально, має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Згідно з умовою задачі $a=170$, $\sigma^2 = 36$.

Підставивши вихідні дані, отримаємо:

$$f(x) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-170)^2}{2\cdot 36}} = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-170)^2}{72}}.$$

Нормальна функція розподілу (інтегральна) має вигляд:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}} dz.$$

Використовуючи початкові дані, отримаємо:

$$F(x) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(z-170)^2}{72}} dz.$$

Відповідь:

диференціальна функція розподілу $f(x) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-170)^2}{72}}$;

інтегральна функція розподілу $F(x) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(z-170)^2}{72}} dz$.

2) Ймовірність того, що випадкова величина потрапить в інтервал від α до β:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Підставляємо вихідні дані:

$$\frac{\beta - a}{\sigma} = \frac{175 - 170}{6} = \frac{5}{6} = 0{,}833;$$

$$\frac{\alpha - a}{\sigma} = \frac{165 - 170}{6} = -\frac{5}{6} = -0{,}833.$$

За таблицями функції Лапласа знаходимо:

$\Phi(0{,}833) \approx 0{,}2967$; $\Phi(-0{,}833) \approx -0{,}2967$ (*додаток 2*).

Підставивши у формулу, отримаємо:

$$P(165 < X < 170) = \Phi(0,833) - \Phi(-0,833) = 0,2967 - (-0,2967) =$$
$$= 0,2967 + 0,2967 = 0,5934 .$$

Відповідь: ймовірність того, що зріст навмання вибраного чоловіка буде в інтервалі від ***165*** до ***175***см: $P(165 < X < 170) = 0,5954$.

3) Довірчий інтервал, в який із ймовірністю ***0,95*** потрапляє середнє значення зросту, знайдемо, скориставшись формулою:

$$P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Використовуючи початкові дані:

$$P(|X - 170| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{6}\right) = 0,95 .$$

Отже, маємо: $2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{6}\right) = 0,95$, звідки $\Phi\left(\frac{\varepsilon}{6}\right) = 0,475$.

За таблицями функції Лапласа знаходимо $\frac{\varepsilon}{6} = 1,96$ (*додаток 2*).

Отже, $\varepsilon = 1,96 \cdot 6 = 11,76$.

Звідси, $|X - 170| < 11,76$, або

$$-11,76 < X - 170 < 11,76 ;$$

$$-11,76 + 170 < X < 11,76 + 170 ;$$

$$158,24 < X < 181,76 .$$

Таким чином, середній зріст дорослого чоловіка із ймовірністю ***0,95*** знаходиться в межах від ***158,24*** до ***181,76*** см.

Відповідь: граничне відхилення зросту навмання вибраного дорослого чоловіка від середнього зросту, яке можна гарантувати з імовірністю ***0,95***: $\varepsilon = 11,76$.

Інтервал, в якому з ймовірністю ***0,95*** знаходиться середній зріст дорослого чоловіка $(158,24; 181,76)$.

4) Згідно «правила трьох сигм»,

$$\left| X - a \right| < 3\sigma .$$

Підставляємо початкові дані:

$$\left| X - 170 \right| < 3 \cdot 6 .$$

Отже, $-18 < X - 170 < 18$, або $170 - 18 < X < 170 + 18$.

Маємо: $152 < X < 188$.

Відповідь: інтервал, у якому знаходиться зріст навмання вибраного чоловіка, можна гарантувати згідно з «правилом трьох сигм»: ***(152; 188)***.

Завдання 6

1. Випадкова величина ***X*** **–** кількості рослин пшениці, що уражені деякою хворобою, має нормальний розподіл з відомими середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 8$. Знайти з надійністю ***0,95*** точність ***δ***, з якою вибіркове середнє оцінює невідоме математичне сподівання, якщо об'єм вибірки ***n = 400***.

Розв'язання

Точність оцінки ***δ*** знаходимо за формулою $\delta = \dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}}$, де ***t*** визначимо з рівності $\Phi(t) = \dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{0{,}95}{2} = 0{,}475.$

У таблиці значень функції Лапласа (*додаток 2*) знаходимо відповідне значення ***0,475***, функція набуває його за значення аргументу ***t=1,96***. Підставимо вихідні дані у формулу для знаходження точності оцінки:

$$\delta = \frac{1{,}96 \cdot 8}{\sqrt{400}} = \frac{1{,}96 \cdot 8}{20} = 0{,}784 .$$

Таким чином, точність, з якою вибіркове середнє оцінює невідоме математичне сподівання, $\delta = 0{,}784$.

Відповідь: точність оцінки, з якою вибіркове середнє оцінює невідоме математичне сподівання $\delta = 0{,}784$.

2. Знайти мінімальний об'єм вибірки, за якого з надійністю ***0,975*** точність оцінки математичного сподівання генеральної сукупності з нормальним розподілом і вибірковим середнім дорівнює $\delta=0,2$. Середнє квадратичне відхилення генеральної сукупності відоме і дорівнює $\sigma = 2$.

Розв'язання

З рівності $\delta = \dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}}$ виходить, що для того, щоб забезпечити задану точність оцінки необхідно, щоб число n - об'єм вибірки, задовольняло нерівність:

$$ї \geq \frac{t^2\sigma^2}{\delta^2} .$$

У таблиці значень функції Лапласа (*додаток 2*) знаходимо, що $\Phi(2,241) = \dfrac{0,975}{2} = 0,4875$, отже параметр $t = 2,24$.

Підставляючи у формулу, маємо:

$$\frac{t^2\sigma^2}{\delta^2} = \frac{2,24^2 \cdot 2^2}{0,2^2} = 497,76 .$$

Отже, мінімальне число, яке задовольняє цю нерівність,– $n=498$.

Відповідь: необхідний мінімальний об’єм вибірки – $n = 498$.

Завдання 7

1. Кількісна ознака X генеральної сукупності має нормальний розподіл. За вибіркою об'єму $n=16$ знайдено вибіркове середнє $\overline{x} = 10$ та виправлене середнє квадратичне відхилення $s = 0,8$. Оцінити невідоме математичне сподівання за допомогою надійного інтервалу з надійністю $0,95$.

Розв'язання

Надійний інтервал має вигляд $\left(\overline{x} - \dfrac{t_\gamma s}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + \dfrac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}\right)$.

За таблицею значень $t_\gamma = t(\gamma; n) = t(0,95;13) = 2,13$ (*додаток 3*).

Підставляючи вихідні дані, матимемо інтервал: $\left(10-2,13\cdot\frac{0,8}{4};\;\; 10+2,13\cdot\frac{0,8}{4}\right)$ або $(9,574;\; 10,426)$.

Відповідь: надійний інтервал, що оцінює невідоме математичне сподівання, має вигляд $(9,574;\; 10,426)$.

2. Кількісна ознака X генеральної сукупності має нормальний розподіл. За вибіркою об'єму $n = 40$ знайдено виправлене середнє квадратичне відхилення $s=2$. Знайти надійний інтервал, що покриває генеральне середнє квадратичне відхилення σ з надійністю $0,95$.

Розв'язання

Надійний інтервал, що покриває середнє квадратичне відхилення з заданою надійністю, має вигляд:

$$s(1-q)<\sigma<s(1+q).$$

Значення q знаходимо з таблиці значень функції (*додаток 4*):

$$q=q(\gamma;n)\Rightarrow q(0,95;36)=0,24.$$

Підставляючи вихідні дані, одержимо:

$$2(1-0,24)<\sigma<2(1+0,24) \quad \text{або} \quad 1,52<\sigma<2,56.$$

Відповідь: надійний інтервал, що покриває генеральне середнє квадратичне відхилення σ з надійністю $0,95$ має вигляд: $(1,52\; ;\; 2,56)$.

Завдання 8

Дві неперервні незалежні випадкові величини X та Y задані графіками щільності $f(x)$ (рис. 2.6) та $f(y)$ (рис. 2.7).

Знайти $M(X+Y)$, $M(X\cdot Y)$, $D(2X-3Y+4)$.

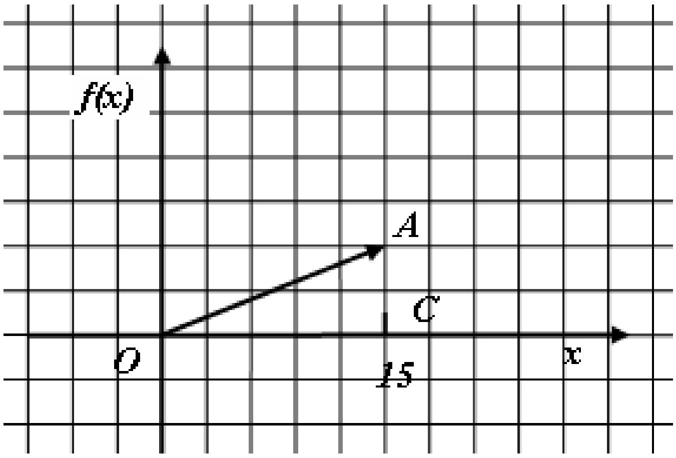

Рис. 2.6

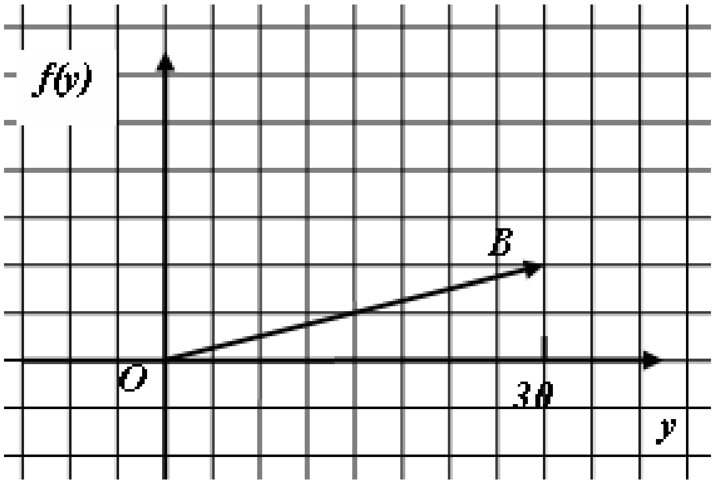

Рис. 2.7

Розв'язання

Спочатку визначимо аналітичний вираз для функцій ***f(x)*** та ***f(y)***.

Згідно з рисунком 5.6, для $x<0$ та $x>15$, значення функції $f(x)=0$.

Визначимо значення функції на проміжку $0 \le x \le 15$. Для цього необхідно знайти рівняння прямої ***OA***. Щоб визначити рівняння прямої, необхідно знати на цій прямій координати двох точок. Координати початку координат точки ***O (0;0)***. Знайдемо координати точки ***A***.

Згідно з визначенням щільності розподілу, площа фігури, що обмежена функцією розподілу, дорівнює ***1***. У нашому випадку фігура, що обмежена функцією – прямокутний трикутник.

З одного боку за визначенням $S_{\Delta OCA} = 1$, з іншого, $S_{\Delta OCA} = \frac{1}{2} \cdot OC \cdot AC$. Згідно з малюнком, ***OC=15***. Враховуючи все вищесказане, маємо $S_{\Delta OCA} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot AC = 1$.

Отже, $\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot AC = 1$. Звідси, $AC = \frac{2}{15}$.

Таким чином, координати точки $A\left(15; \frac{2}{15}\right)$.

Рівняння прямої лінії через дві точки: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

Маємо дві точки: ***O(0;0)*** та $A\left(15; \frac{2}{15}\right)$.

Підставимо їх координати в рівняння прямої:

$$\frac{x - 0}{15 - 0} = \frac{y - 0}{\frac{2}{15} - 0};$$

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{\frac{2}{15}}; \qquad \frac{2}{15} x = 15y; \qquad y = \frac{2}{15^2} x.$$

Таким чином, можемо записати аналітичний вираз для функції ***f(x)***:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{2}{15^2} x, & 0 \le x \le 15; \\ 0, & x > 15. \end{cases}$$

Аналогічно визначаємо вираз для функції ***f(y)***:

$$f(y)=\begin{cases} 0, & y<0; \\ \dfrac{2}{30^2}x, & 0\le y\le 30; \\ 0, & y>30. \end{cases}$$

Використовуючи властивості математичного сподівання, можемо записати, що ***M(X+Y)=M(X)+M(Y)***.

Знайдемо математичне сподівання кожної випадкової величини.

$$M(X)=\int_a^b x\cdot f(x)dx=\int_0^{15} x\cdot\frac{2}{15^2}xdx=\frac{2}{15^2}\int_0^{15}x^2dx=\frac{2}{15^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{15}=$$

$$=\frac{2}{15^2}\cdot\left(\frac{15^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right)=\frac{2}{15^2}\cdot\frac{15^3}{3}=\frac{2\cdot 15}{3}=2\cdot 5=10;$$

$$M(Y)=\int_a^b y\cdot f(y)dy=\int_0^{30} y\cdot\frac{2}{30^2}ydy=\frac{2}{30^2}\int_0^{30}y^2dy=\frac{2}{30^2}\cdot\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^{30}=$$

$$=\frac{2}{30^2}\cdot\left(\frac{30^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right)=\frac{2}{30^2}\cdot\frac{30^3}{3}=\frac{2\cdot 30}{3}=2\cdot 10=20.$$

Підставляємо отримані значення:

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y)=10+20=30.$$

Відповідно, використовуючи властивості математичного сподівання та знайдені раніше значення, маємо:

$$M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y)=10\cdot 20=200.$$

Знайдемо дисперсії випадкових величин ***X*** ·та ***У***.

$$D(X)=\int_a^b x^2\cdot f(x)dx-M^2(X)=\int_0^{15}x^2\cdot\frac{2}{15^2}xdx-10^2=$$

$$= \frac{2}{15^2}\int_0^{15} x^3 dx - 100 = \frac{2}{15^2}\cdot\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^{15} - 100 = \frac{2}{15^2}\cdot\left(\frac{15^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right) - 100 =$$

$$= \frac{2}{15^2}\cdot\frac{15^4}{4} - 100 = \frac{2\cdot 15^2}{4} - 100 = \frac{15^2}{2} - 100 = \frac{225}{2} - 100 =$$

$$= \frac{225-200}{2} = \frac{25}{2} = 12{,}5;$$

$$D(Y) = \int_a^b y^2 \cdot f(y)dy - M^2(Y) = \int_0^{30} y^2 \cdot \frac{2}{30^2} y dy - 20^2 =$$

$$= \frac{2}{30^2}\int_0^{30} y^3 dy - 400 = \frac{2}{30^2}\cdot\frac{y^4}{4}\Bigg|_0^{30} - 400 = \frac{2}{30^2}\cdot\left(\frac{30^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right) - 400 =$$

$$= \frac{2}{30^2}\cdot\frac{30^4}{4} - 400 = \frac{2\cdot 30^2}{4} - 400 = \frac{30^2}{2} - 400 = \frac{900}{2} - 400 =$$

$$= 450 - 400 = 50.$$

Скориставшись властивостями дисперсії та знайденими значеннями, отримаємо:

$$D(2X - 3Y + 4) = D(2X) + D(3Y) + D(4) = 2^2 D(X) + 3^2 D(Y) + 0 =$$

$$= 4D(X) + 9D(Y) = 4\cdot 12{,}5 + 9\cdot 50 = 50 + 450 = 500.$$

Відповідь: $M(X+Y) = 30$; $M(X\cdot Y) = 200$;
$D(2X - 3Y + 4) = 500$.

Завдання 9

Неперервна випадкова величина X задана законом розподілу Сімпсона:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{22}\left(1-\dfrac{|x|}{22}\right), & \text{якщо} \quad x\in(-22;22);\\ 0, & \text{якщо} \quad x\notin(-22;22).\end{cases}$$

Знайти інтегральну функцію розподілу ***F(x)*** та числові характеристики ***M(X)***, ***D(X)***, ***σ(X)***. Побудувати графіки інтегральної ***F(x)*** та диференціальної ***f(x)*** функцій розподілу.

Розв'язання

а) Розіб'ємо числову вісь на чотири проміжки:

$$x<-22;$$
$$-22\le x<0;$$
$$0\le x\le 22;$$
$$x>22.$$

На першому і останньому проміжках функція ***f(x)*** дорівнює ***0***.

На другому проміжку $-22\le x<0$ змінна x набуває від'ємних значень, тому розкриваємо знак модуля і міняємо при цьому знак. Отже, функція на цьому проміжку набуде значення:

$$f(x)=\frac{1}{22}\left(1-\frac{|x|}{22}\right)=\frac{1}{22}\left(1-\frac{-x}{22}\right)=\frac{1}{22}\left(1+\frac{x}{22}\right).$$

На третьому проміжку $0\le x\le 22$ змінна x набуває додатних значень, тому знак модуля просто опускається. І функція на цьому проміжку матиме вигляд:

$$f(x)=\frac{1}{22}\left(1-\frac{|x|}{22}\right)=\frac{1}{22}\left(1-\frac{x}{22}\right).$$

Отже, аналітичний вираз функції:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<-22;\\ \dfrac{1}{22}\left(1+\dfrac{x}{22}\right), & -22\le x<0;\\ \dfrac{1}{22}\left(1-\dfrac{x}{22}\right), & 0\le x\le 22;\\ 0, & x>22.\end{cases}$$

За означенням інтегральна функція розподілу

$$F(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

Знайдемо значення ***F(x)*** на кожному проміжку.

1) $x<-22$: $\quad F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0dx=0\int_{-\infty}^{x} dx=0$.

2) $-22\le x<0$:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{-22} 0dx+\int_{-22}^{x}\frac{1}{22}\left(1+\frac{x}{22}\right)dx=0+\frac{1}{22}\int_{-22}^{x}\left(1+\frac{x}{22}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{22}\left(x+\frac{x^2}{2\cdot 22}\right)\Bigg|_{-22}^{x}=\frac{1}{22}\left(x+\frac{x^2}{2\cdot 22}\right)-\frac{1}{22}\left(-22+\frac{(-22)^2}{2\cdot 22}\right)=$$

$$=\frac{1}{22}\left(x+\frac{x^2}{2\cdot 22}\right)+1-\frac{1}{2}=\frac{1}{22}\left(x+\frac{x^2}{44}\right)+\frac{1}{2}.$$

3) $0\le x\le 22$:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{-22} 0dx+\int_{-22}^{0}\frac{1}{22}\left(1+\frac{x}{22}\right)dx+\int_{0}^{x}\frac{1}{22}\left(1-\frac{x}{22}\right)dx=$$

$$=0+\frac{1}{22}\int_{-22}^{0}\left(1+\frac{x}{22}\right)dx+\frac{1}{22}\int_{0}^{x}\left(1-\frac{x}{22}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{22}\left(x+\frac{x^2}{2\cdot 22}\right)\Bigg|_{-22}^{0}+\frac{1}{22}\left(x-\frac{x^2}{2\cdot 22}\right)\Bigg|_{0}^{x}=$$

$$=\frac{1}{22}\left(0+\frac{0^2}{2\cdot 22}\right)-\frac{1}{22}\left(-22+\frac{(-22)^2}{2\cdot 22}\right)+\frac{1}{22}\left(x-\frac{x^2}{2\cdot 22}\right)-0=$$

$$=-\frac{1}{22}\cdot(-22)+\left(-\frac{1}{22}\right)\cdot\left(\frac{22^2}{2\cdot 22}\right)+\frac{1}{22}\left(x-\frac{x^2}{2\cdot 22}\right)=$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{22}\left(x-\frac{x^2}{2\cdot 22}\right)=\frac{1}{22}\left(x-\frac{x^2}{44}\right)+\frac{1}{2}.$$

4) $x>22$:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{-22}0dx+\int_{-22}^{0}\frac{1}{22}\left(1+\frac{x}{22}\right)dx+\int_{0}^{22}\frac{1}{22}\left(1-\frac{x}{22}\right)dx+\int_{22}^{x}0dx=$$

$$=0+\frac{1}{22}\int_{-22}^{0}\left(1+\frac{x}{22}\right)dx+\frac{1}{22}\int_{0}^{x}\left(1-\frac{x}{22}\right)dx+0=$$

$$=\frac{1}{22}\left(x+\frac{x^2}{2\cdot 22}\right)\Bigg|_{-22}^{0}+\frac{1}{22}\left(x-\frac{x^2}{2\cdot 22}\right)\Bigg|_{0}^{22}=$$

$$=\frac{1}{22}\left(0+\frac{0^2}{2\cdot 22}\right)-\frac{1}{22}\left(-22+\frac{(-22)^2}{2\cdot 22}\right)+$$

$$+\frac{1}{22}\left(22+\frac{22^2}{2\cdot 22}\right)-\frac{1}{22}\left(0+\frac{0^2}{2\cdot 22}\right)=$$

$$=-\frac{1}{22}\cdot(-22)+\left(-\frac{1}{22}\right)\cdot\left(\frac{22^2}{2\cdot 22}\right)+\frac{1}{22}\left(22-\frac{22^2}{2\cdot 22}\right)=$$

$$=-\frac{1}{22}\cdot(-22)+\left(-\frac{1}{22}\right)\cdot\left(\frac{22^2}{2\cdot 22}\right)+\frac{1}{22}\cdot 22-\frac{1}{22}\cdot\frac{22^2}{2\cdot 22}=$$

$$=1-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}=1.$$

Таким чином, отримали вираз функції $F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x < -22; \\ \dfrac{1}{22}\left(x+\dfrac{x^2}{44}\right)+\dfrac{1}{2}, & -22 \le x < 0; \\ \dfrac{1}{22}\left(x-\dfrac{x^2}{44}\right)+\dfrac{1}{2}, & 0 \le x \le 22; \\ 1\quad, & x > 22. \end{cases}$$

б) Побудуємо графіки функцій ***f(x)*** та ***F(x)*** (рис.2.8, рис.2.9.)

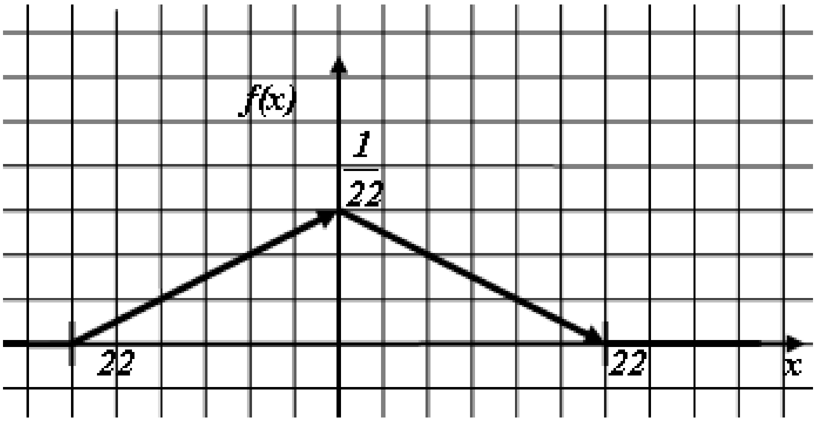

Рис. 2.8

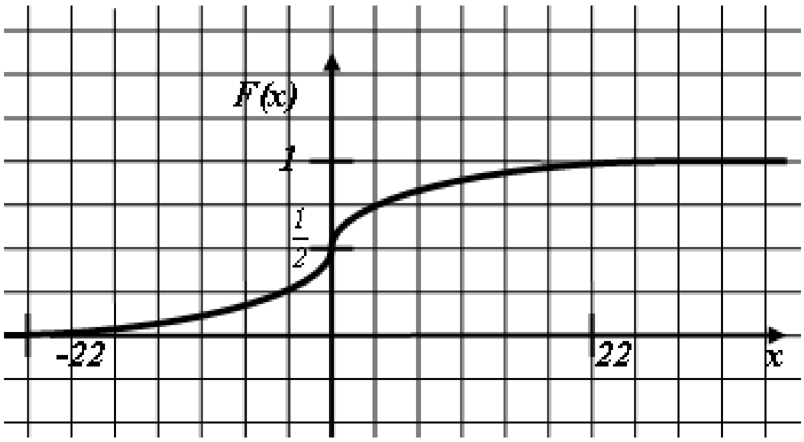

Рис. 2.9

в) Знайдемо числові характеристики випадкової величини.

Математичне сподівання:

$$M(X)=\int_a^b x\cdot f(x)dx=\int_{-22}^{0} x\cdot\frac{1}{22}\left(1+\frac{x}{22}\right)dx+\int_{0}^{22} x\cdot\frac{1}{22}\left(1-\frac{x}{22}\right)dx=$$

$$= \frac{1}{22}\int_{-22}^{0}\left(x+\frac{x^2}{22}\right)dx+\frac{1}{22}\int_{0}^{22}\left(x-\frac{x^2}{22}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{22}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3\cdot 22}\right)\Bigg|_{-22}^{0}+\frac{1}{22}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3\cdot 22}\right)\Bigg|_{0}^{22} =$$

$$= -\frac{1}{22}\left(\frac{(-22)^2}{2}+\frac{(-22)^3}{3\cdot 22}\right)+\frac{1}{22}\left(\frac{22^2}{2}-\frac{22^3}{3\cdot 22}\right) =$$

$$= -\frac{22}{2}+\frac{22}{3}+\frac{22}{2}-\frac{22}{3} = 0\,.$$

Дисперсію:

$$D(X) = \int_a^b x^2\cdot f(x)dx - M^2(X) =$$

$$= \int_{-22}^{0} x^2\cdot\frac{1}{22}\left(1+\frac{x}{22}\right)dx+\int_{0}^{22} x^2\cdot\frac{1}{22}\left(1-\frac{x}{22}\right)dx - 0 =$$

$$= \frac{1}{22}\int_{-22}^{0}\left(x^2+\frac{x^3}{22}\right)dx+\frac{1}{22}\int_{0}^{22}\left(x^2-\frac{x^3}{22}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{22}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4\cdot 22}\right)\Bigg|_{-22}^{0}+\frac{1}{22}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4\cdot 22}\right)\Bigg|_{0}^{22} =$$

$$= -\frac{1}{22}\left(\frac{(-22)^3}{3}+\frac{(-22)^4}{4\cdot 22}\right)+\frac{1}{22}\left(\frac{22^3}{3}-\frac{22^4}{4\cdot 22}\right) =$$

$$= \frac{1}{22}\cdot\frac{22^3}{3}-\frac{1}{22}\cdot\frac{22^4}{4\cdot 22}+\frac{1}{22}\cdot\frac{22^3}{3}-\frac{1}{22}\cdot\frac{22^4}{4\cdot 22} =$$

$$= \frac{22^2}{3}-\frac{22^2}{4}+\frac{22^2}{3}-\frac{22^2}{4} = \frac{2\cdot 22^2}{3}-\frac{2\cdot 22^2}{4} =$$

$$=\frac{2\cdot 22^2\cdot 4-2\cdot 22^2\cdot 3}{12}=\frac{2\cdot 22^2\cdot(4-3)}{12}=\frac{2\cdot 22^2}{12}=\frac{22^2}{6}.$$

Середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{22^2}{6}}=\frac{22}{\sqrt{6}}\approx 8{,}9815.$$

Відповідь: $M(X)=0$; $D(X)=\frac{22^2}{6}$; $\sigma(X)\approx 8{,}9815$.

Завдання 10

Обчислити різні види середніх величин (гармонічну, геометричну, арифметичну, квадратичну) та перевірити правило мажорантності середніх.

X_i	4	6	7	9	11	15
n_i	1	2	3	4	3	2

Розв'язання

Внесемо розрахунки в таблицю 2.1

Таблиця 2.1

Дані для розрахунку різних видів середніх

X_i	n_i	$\frac{n_i}{X_i}$	$Ln\ X$	$n\cdot Ln\ X$	$X\cdot n$	X^2	$X^2\cdot n$
4	1	0,25	1,386294	1,386294	4	16	16
6	2	0,333333	1,791759	3,583519	12	36	72
7	3	0,428571	1,945912	5,83773	21	49	147
9	4	0,444444	2,197225	8,788898	36	81	324
11	3	0,272727	2,397895	7,19368	33	121	363
15	2	0,133333	2,70805	5,4161	30	225	450
Сума	***15***	***1,86241***	***12,42713***	***32,206221***	***136***	***528***	***1372***

1) Обчислимо середню гармонійну за формулою $\bar{x}_{гарм}=\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i}{\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{x_i}}$.

$$\bar{x}_{гарм}=\frac{1+2+3+4+3+2}{\frac{1}{4}+\frac{2}{6}+\frac{3}{7}+\frac{4}{9}+\frac{3}{11}+\frac{2}{15}}=\frac{15}{1{,}86241}\approx 8{,}05408.$$

2) Обчислимо середню геометричну

$$\overline{x}_{геом} = \sqrt[\sum n_i]{x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot x_3^{n_3} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k}}\,.$$

Підставимо вихідні дані:

$$\overline{x}_{геом} = \sqrt[15]{4^1 \cdot 6^2 \cdot 7^3 \cdot 9^4 \cdot 11^3 \cdot 15^2}$$

Корінь будь-якого степеня можна обчислити за допомогою логарифмування. Прологарифмуємо обидві частини рівняння:

$$\ln \overline{x}_{геом} = \ln\left(4^1 \cdot 6^2 \cdot 7^3 \cdot 9^4 \cdot 11^3 \cdot 15^2\right)^{1/15}.$$

За властивостями логарифмів:

$$\ln \overline{x}_{геом} = \frac{1}{15}\ln\left(4^1 \cdot 6^2 \cdot 7^3 \cdot 9^4 \cdot 11^3 \cdot 15^2\right) =$$

$$= \frac{1}{15}\left(\ln 4^1 + \ln 6^2 + \ln 7^3 + \ln 9^4 + \ln 11^3 + \ln 15^2\right) =$$

$$= \frac{1}{15}\left(1\ln 4 + 2\ln 6 + 3\ln 7 + 4\ln 9 + 3\ln 11 + 2\ln 15\right) = 2{,}147082\,.$$

Тоді, $\overline{x}_{геом} = e^{2{,}147082} \approx 8{,}55984$.

3) Обчислимо середню арифметичну $\overline{x}_{арифм} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$.

$$\overline{x}_{арифм} = \frac{4\cdot 1 + 6\cdot 2 + 7\cdot 3 + 9\cdot 4 + 11\cdot 3 + 15\cdot 2}{15} = \frac{136}{15} \approx 9{,}06667\,.$$

4) Обчислимо середню квадратичну $\overline{x}_{квадр} = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}}$.

$$\overline{x}_{квадр} = \sqrt{\frac{4^2\cdot 1 + 6^2\cdot 2 + 7^2\cdot 3 + 9^2\cdot 4 + 11^2\cdot 3 + 15^2\cdot 2}{15}} \approx 9{,}56382$$

.

5) Одержані середні розміщуються в такому порядку:

$$8{,}05408 < 8{,}55984 < 9{,}06667 < 9{,}56382\,,$$

що відповідає вимогам властивості мажорантності середніх:

$$\bar{x}_{гарм} < \bar{x}_{геом} < \bar{x}_{арифм} < \bar{x}_{квадр}.$$

Відповідь: $\bar{x}_{гарм} \approx 8{,}05408$; $\bar{x}_{геом} \approx 8{,}55984$; $\bar{x}_{арифм} \approx 9{,}06667$;
$\bar{x}_{квадр} \approx 9{,}56382$. Одержані середні розміщуються відповідно до правила мажорантності середніх: $\bar{x}_{гарм} < \bar{x}_{геом} < \bar{x}_{арифм} < \bar{x}_{квадр}$.

Завдання 11

Результати дослідження урожайності зернових у господарствах області представлено в таблиці 2.2:

Таблиця 2.2

№ п.п	Межі інтервалів за урожайністю зернових культур, ц/га	Число господарств (частота)
1	***14,0 …18,0***	***5***
2	***18,1 …22,0***	***7***
3	***22,1 …26,0***	***9***
4	***26,1 …30,0***	***14***
5	***30,1 …34,0***	***7***
6	***34,1 …38,0***	***5***
7	***38,1 …42,0***	***3***

За цими даними:

1. Побудувати гістограму та полігон розподілу частот.

2. Розрахувати середню врожайність двома методами (звичайним та спрощеним).

3. Розрахувати медіанне та модальне значення врожайності.

4. Розрахувати показники варіації: розмах варіації, середнє лінійне відхилення, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт варіації.

Розв'язання

1. Відобразимо варіаційний ряд розподілу господарств за врожайністю зернових культур у вигляді гістограми. Для цього відкладемо значення інтервалів (за урожайністю x_i, ц/га) на осі абсцис, а кількість n_i об'єктів (частоти) – на осі ординат (рис. 2.10)

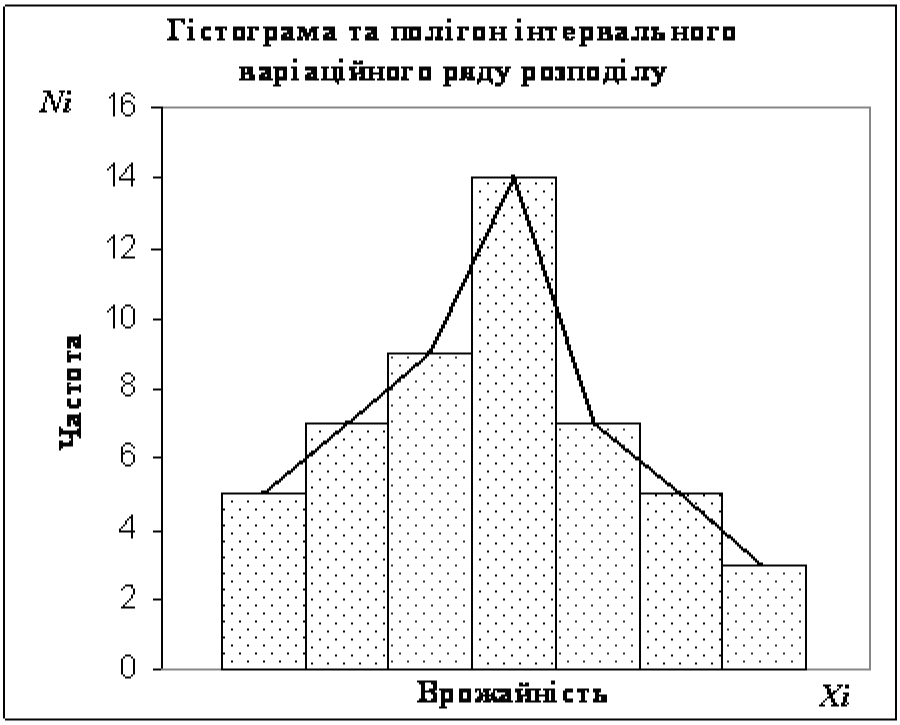

Рис. 2.10

Побудуємо на цьому ж малюнку полігон розподілу, з'єднуючи середини верхніх частин прямокутників гістограми.

2. Розрахуємо середню врожайність звичайним способом як середню арифметичну зважену.

Середня арифметична зважена обчислюється за формулою:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{\sum n_i}.$$

Складемо додаткову таблицю 2.3.

Середину кожного інтервалу визначаємо так: додаємо початок інтервалу та його кінець і ділимо навпіл.

Добуток $x_i n_i$ шукаємо як добуток відповідних стовпчиків.

Підставляємо дані:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{\sum n_i} = \frac{1352}{50} = 27{,}04 \text{ ц/га}.$$

Розрахуємо середню врожайність зернових культур методом відліку від умовного початку. За умовний початок відліку візьмемо середнє значення інтервалу, що має найбільшу частоту. В нашому випадку $x_0 = 28{,}0$ ***ц\га***. Довжина кожного інтервалу $h=4{,}0$ ***ц\га.***

Таблиця 2.3

Дані для розрахунку середньої арифметичної зваженої в інтервальному ряді розподілу

№ п.п	Врожайність, ц/га	Середина інтервалу врожайності x_i, ц/га	Число господарств n_i	Добуток $x_i \cdot n_i$
1	***14,0 …18,0***	***16,0***	***5***	***80***
2	***18,1 …22,0***	***20,0***	***7***	***140***
3	***22,1 …26,0***	***24,0***	***9***	***216***
4	***26,1 …30,0***	***28,0***	***14***	***392***
5	***30,1 …34,0***	***32,0***	***7***	***224***
6	***34,1 …38,0***	***36,0***	***5***	***180***
7	***38,1 …42,0***	***40,0***	***3***	***120***
	Усього	-	***50***	***1352***

Для спрощення розрахунків від кожного значення x_i віднімаємо x_0. Потім одержані відхилення розділимо на величину інтервалу, в результаті чого одержимо відхилення варіант від умовного початку, визначене на кожному інтервалі (x'). Усі потрібні розрахунки зведемо в таблиці 2.4.

Таблиця 2.4

Дані для розрахунку середньої арифметичної в інтервальному ряді розподілу методом відліку від умовного початку

№ п.п	Урожайність, ц/га	Середина інтервалу врожай-ності x_i, ц/га	Число госпо-дарств n_i	Відхилення від умовного початку		Добуток $x'_i \cdot n_i$
				$x_i - x_0$ *ц/га*	$x'_i = \frac{x_i - x_0}{h}$ в інтервалах	
1	***14,0 …18,0***	***16,0***	***5***	***-12***	***-3***	***-15***
2	***18,1 …22,0***	***20,0***	***7***	***-8***	***-2***	***-14***
3	***22,1 …26,0***	***24,0***	***9***	***-4***	***-1***	***-9***
4	***26,1 …30,0***	***28,0***	***14***	***0***	***0***	***0***
5	***30,1 …34,0***	***32,0***	***7***	***4***	***1***	***7***
6	***34,1 …38,0***	***36,0***	***5***	***8***	***2***	***10***
7	***38,1 …42,0***	***40,0***	***3***	***12***	***3***	***9***
	Всього	-	***50***			***-12***

Середнє арифметичне методом відліку від умовного початку обчислюємо за формулою: $\overline{x} = \overline{x'} \cdot h + x_0$.

Розрахуємо умовну (зменшену) середню

$$\overline{x'} = \frac{\sum x'_i \cdot n_i}{\sum n_i} = \frac{\sum \left(\frac{x_i - x_0}{h} \right) \cdot n_i}{\sum n_i} = \frac{-12}{50} = -0{,}24 .$$

Підставляємо отримані значення в формулу:

$$\overline{x} = \overline{x'} \cdot h + x_0 = -0{,}24 \cdot 4{,}0 + 28{,}0 = 27{,}04 \text{ ц/га.}$$

Відповідь: розрахунки середньої врожайності двома методами (звичайним і спрощеним) дали один і той самий результат $\overline{x} = 27{,}04$ ***ц/га.***

3. Для розрахунку медіани складемо таблицю 2.5, за даними якої знайдемо медіанний інтервал, для чого попередньо побудуємо ряд накопичених частот. На кожному інтервалі накопичена частота утворюється додаванням частоти даного інтервалу до накопиченої частоти попереднього інтервалу. Наприклад, на другому інтервалі частота ***7*** плюс накопичена частота першого ***5***, отримаємо накопичену частоту на другому інтервалі ***12***.

Таблиця 2.5.

Дані для розрахунку моди і медіани в інтервальному ряді розподілу господарств за врожайністю зернових культур

№ п.п	Урожайність, ц/га	Число господарств n_i	Накопичена частота S_i
1	***14,0 …18,0***	***5***	***5***
2	***18,1 …22,0***	***7***	***12***
3	***22,1 …26,0***	***9***	***21***
4	***26,1 …30,0***	***14***	***35***
5	***30,1 …34,0***	***7***	***42***
6	***34,1 …38,0***	***5***	***47***
7	***38,1 …42,0***	***3***	***50***

Медіанним є інтервал ***26,1 …30,0***, оскільки на цей інтервал приходиться перша накопичена частота, що перевищує половину всього об’єму сукупності (***35*** перевищує $\sum n_i : 2 = 50 : 2 = 25$).

Розрахуємо медіанне значення врожайності зернових культур:

$$Me = x_0 + h \cdot \frac{0,5\sum n_i - S_{Me-1}}{n_{Me}} = 26,1 + 4 \cdot \frac{25-21}{14} = 27,24 \text{ ц/га},$$

де $x_0 = 26,1$ – нижня межа медіанного інтервалу,

$h = 4,0$ – довжина інтервалу;

$0,5\sum n_i = 25$ - половина суми накопичених частот;

$S_{Me-1} = 21$ - сума накопичених частот інтервалу, що передує медіанному;

$n_{Me} = 14$ - частота медіанного інтервалу.

Розрахуємо модальне значення врожайності.

Оскільки інтервал ***26,1 …30,0*** має найбільшу частоту, в ньому міститься мода.

$$Mo = x_0 + h \cdot \frac{n_{Mo} - n_{Mo-1}}{(n_{Mo} - n_{Mo-1}) + (n_{Mo} - n_{Mo+1})} =$$

$$= 26,1 + 4 \cdot \frac{14-9}{(14-9)+(14+7)} = 27,77 \text{ ц/га},$$

де $x_0 = 26,1$ – нижня межа модального інтервалу,

$h = 4,0$ – довжина інтервалу;

$n_{Mo} = 14$, $n_{Mo-1} = 9$, $n_{Mo+1} = 7$ - відповідно частоти модального, передмодального і післямодального інтервалів.

Відповідь: медіана $Me = 27,24$ ***ц/га***, мода $Mo = 27,77$ ***ц/га***.

4. Розрахуємо показники варіації (розмах варіації, середнє лінійне відхилення, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт варіації).

Для розрахунку необхідних показників варіації складемо додаткову таблицю 2.6.

Розмах варіації $R = x_{max} - x_{min} = 42,0 - 14,0 = 28,0$ ***ц/га***.

Середнє лінійне відхилення

$$\bar{d} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}| \cdot n_i}{\sum n_i} = \frac{263,68}{50} = 5,2736 \text{ ц/га.}$$

Дисперсія

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i}{\sum n_i} = \frac{2129,92}{50} = 42,5984.$$

Середнє квадратичне відхилення

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum\left(x_i - \overline{x}\right)^2 \cdot n_i}{\sum n_i}} = \sqrt{\frac{2129{,}92}{50}} = \sqrt{42{,}5984} = 6{,}53 \text{ ц/га}.$$

Коефіцієнт варіації

$$V = \frac{\sigma}{\overline{x}} \cdot 100\% = \frac{6{,}53}{27{,}04} \cdot 100\% = 24{,}15\%.$$

Урожайність зернових культур у заданій сукупності коливається в межах ± ***6,53 ц/га*** або на ***24,15%*** по відношенню до середньої врожайності.

Відповідь: середнє лінійне відхилення $\overline{d} = 5{,}2736$ ***ц/га***; дисперсія $\sigma^2 = 42{,}5984$; середнє квадратичне відхилення $\sigma = 6{,}53$ ***ц/га***; коефіцієнт варіації $V = 24{,}15\%$.

Таблиця 2.6

Дані для розрахунку середнього лінійного і середнього квадратичного відхилення

№ п.п	Урожайність, ц/га	Середина інтервалу врожайності x_i, ц/га	Число господарств n_i	Середнє лінійне відхилення		Середнє квадратичне відхилення	
				$\lvert x_i - \overline{x}\rvert$	$\lvert x_i - \overline{x}\rvert \cdot n_i$	$(x_i - \overline{x})^2$	$(x_i - \overline{x})^2 \cdot n_i$
1	***14,0 …18,0***	***16,0***	***5***	***11,04***	***55,20***	***121,88***	***609,41***
2	***18,1 …22,0***	***20,0***	***7***	***7,04***	***49,28***	***49,56***	***346,93***
3	***22,1 …26,0***	***24,0***	***9***	***3,04***	***27,36***	***9,24***	***83,17***
4	***26,1 …30,0***	***28,0***	***14***	***0,96***	***13,44***	***0,92***	***12,91***
5	***30,1 …34,0***	***32,0***	***7***	***4,96***	***34,72***	***24,60***	***172,21***
6	***34,1 …38,0***	***36,0***	***5***	***8,96***	***44,80***	***80,28***	***401,41***
7	***38,1 …42,0***	***40,0***	***3***	***12,96***	***38,88***	***167,96***	***503,99***
	Усього	***-***	***50***	***-***	***263,68***	***-***	***2129,92***

Завдання 12

Використовуючи дані господарств про урожайність зернових культур та дозу внесення мінеральних добрив ґрунту, провести кореляційно-регресійний аналіз та встановити вплив дози мінеральних добрив на урожайність зернових культур:

Таблиця 2.7

№	Урожайність зернових культур, ц/га	Доза внесення мінеральних добрив
1	***23,6***	***1,1***
2	***31,9***	***3,1***
3	***35,2***	***2,8***
4	***36,4***	***2,9***
5	***23,6***	***1,2***
6	***34,0***	***2,9***
7	***38,2***	***3,0***
8	***17,3***	***0,8***
9	***23,8***	***0,7***
10	***19,7***	***1,3***
11	***24,6***	***1,4***
12	***15,1***	***0,7***
13	***28,6***	***1,6***
14	***38,4***	***2,9***
15	***22,4***	***1,3***

1. Побудувати графік кореляційної залежності між урожайністю та дозою внесення мінеральних добрив.
2. Знайти оцінки параметрів рівняння регресії методом найменших квадратів та побудувати її графік.
3. Перевірити адекватність побудованої моделі за ***F***-критерієм Фішера.
4. Обчислити коефіцієнт кореляції та детермінації. Перевірити значимість коефіцієнта кореляції.
5. Виконати завдання, використовуючи пакет ***Excel***.

Розв’язання

1. Для визначення виду аналітичної залежності між урожайністю зернових культур та дозою внесення мінеральних добрив побудуємо графік – кореляційне поле (рис.2.11). На осі абсцис нанесемо значення факторної ознаки (незалежної змінної ***X*** – дози внесення мінеральних добрив), а на осі ординат – результативної ознаки (залежної змінної ***У*** – урожайності зернових культур).

Використовуючи фактичні значення ***X*** та ***У***, побудуємо задані 15 точок $(x_i\,;y_i)$, що утворюють кореляційне поле.

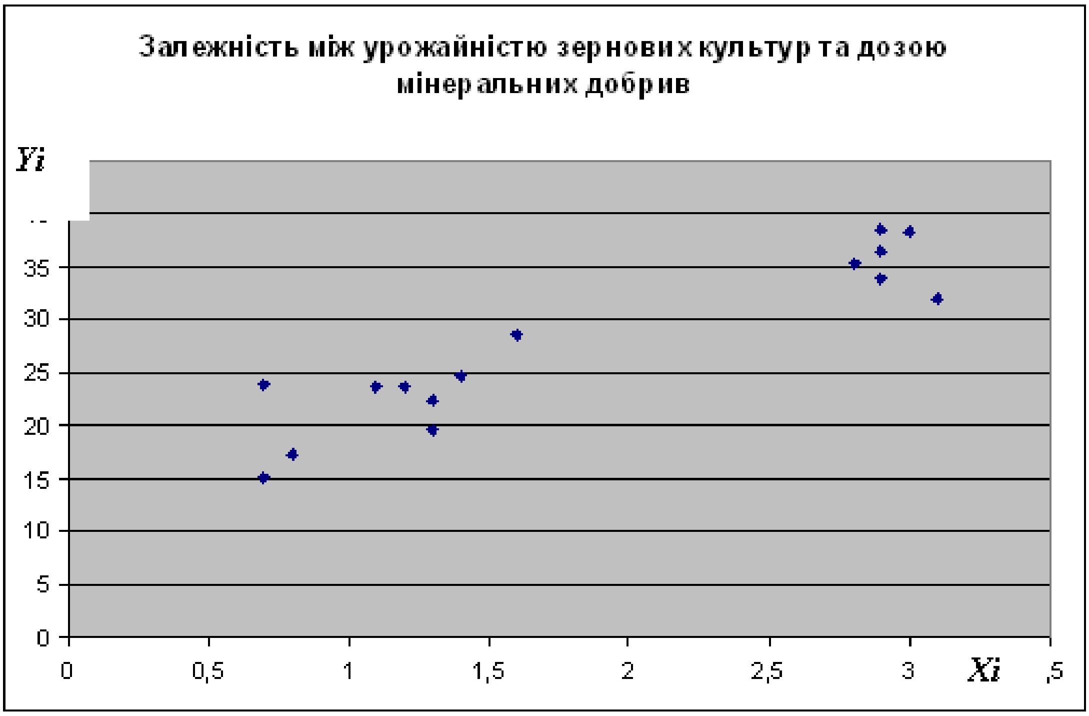

Рис. 2.11

Графік показує, що зв'язок близький до лінійного і тому залежність можна виразити у вигляді рівняння парної лінійної регресії $\bar{y}_x = b_1x + b_0$.

2. Рівняння прямої лінії регресії $\bar{y}_x = b_1x + b_0$.

Параметри рівняння лінії регресії b_1 та b_0 знайдемо за методом найменших квадратів, використовуючи систему:

$$\begin{cases} \sum y = b_0n + b_1\sum x, \\ \sum yx = b_0\sum x + b_1\sum x^2. \end{cases}$$

Усі необхідні для розв'язання системи рівнянь дані внесемо до таблиці 2.8.

Одержані дані підставляємо в систему:

$$\begin{cases} 412{,}8 = 15b_0 + 27{,}7b_1, \\ 857{,}85 = 27{,}7b_0 + 63{,}85b_1. \end{cases}$$

Таблиця 2.8

Розрахунок даних для визначення показників кореляційного зв'язку

№	Урожайність зернових культур, ц/га y	Доза внесення мінеральних добрив x	Розрахункові величини			
			yx	y^2	x^2	Очікуване (теоретичне) значення урожайності, ц/га $\bar{y}$
1	***23,6***	***1,1***	***25,96***	***556,96***	***1,21***	***21,90142***
2	***31,9***	***3,1***	***98,89***	***1017,61***	***9,61***	***36,95119***
3	***35,2***	***2,8***	***98,56***	***1239,04***	***7,84***	***34,69373***
4	***36,4***	***2,9***	***105,56***	***1324,96***	***8,41***	***35,44621***
5	***23,6***	***1,2***	***23,32***	***556,96***	***1,44***	***22,65391***
6	***34,0***	***2,9***	***98,6***	***1156,0***	***8,41***	***35,44621***
7	***38,2***	***3,0***	***114,6***	***1459,24***	***9,0***	***36,1987***
8	***17,3***	***0,8***	***13,84***	***299,29***	***0,64***	***19,64395***
9	***23,8***	***0,7***	***16,66***	***566,44***	***0,49***	***18,89146***
10	***19,7***	***1,3***	***25,61***	***388,09***	***1,69***	***23,4064***
11	***24,6***	***1,4***	***34,44***	***605,16***	***1,96***	***24,15888***
12	***15,1***	***0,7***	***10,57***	***228,01***	***0,49***	***18,89146***
13	***28,6***	***1,6***	***45,76***	***817,96***	***2,56***	***25,66386***
14	***38,4***	***2,9***	***111,36***	***1474,56***	***8,41***	***35,4621***
15	***22,4***	***1,3***	***29,12***	***501,76***	***1,69***	***23,4064***
Сума	***412,8***	***27,7***	***857,85***	***12192,04***	***63,85***	***412,8***
Сер.зн.	***27,52***	***1,8467***	***57,19***	***812,8027***	***4,2567***	***27,52***

Параметри рівняння регресії можна визначити за формулами:

$$b_1 = \frac{n\sum yx - \sum y \cdot \sum x}{n\sum x^2 - \sum x \cdot \sum x} = \frac{15 \cdot 857{,}85 - 412{,}8 \cdot 27{,}7}{15 \cdot 63{,}85 - 27{,}7 \cdot 27{,}7} \approx 7{,}5249;$$

або $$b_1 = \frac{\overline{yx} - \overline{y} \cdot \overline{x}}{\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2} = \frac{57{,}19 - 27{,}52 \cdot 1{,}8467}{4{,}2567 - \left(1{,}8467\right)^2} \approx 7{,}5249;$$

$$b_0 = \bar{y} - b \cdot \bar{x} = 27{,}52 - 7{,}5249 \cdot 1{,}8467 \approx 13{,}624$$

або безпосередньо розв'язавши систему, наприклад, методом віднімання.

Розділимо перше рівняння (кожен доданок) на коефіцієнт за b_1, в нашому випадку на ***15***. Друге рівняння розділимо на ***27,7***.

$$\begin{cases} 15b_0 + 27{,}7b_1 = 412{,}8 \,|: 15, \\ 27{,}7b_0 + 63{,}85b_1 = 857{,}85 \,|: 27{,}7; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_0 + 1{,}8467b_1 = 27{,}52, \\ b_0 + 2{,}3051b_1 = 30{,}9693. \end{cases}$$

Віднімемо друге рівняння від першого, тобто віднімемо відповідні пари членів:

$$b_0 - b_0 + (1{,}8467 - 2{,}3051)b_1 = 27{,}52 - 30{,}9693 \text{ або}$$

$$-0{,}4584b_1 = -3{,}4493.$$

З останнього рівняння знаходимо b_1: $b_1 = -3{,}4493 : (-0{,}4584)$;

$$b_1 = 7{,}5247.$$

Знайдемо коефіцієнт b_0, підставивши знайдене значення b_1 в будь-яке, наприклад, у перше рівняння системи.

$$b_0 = 27{,}52 - 1{,}8467b_1 = 27{,}52 - 1{,}8467 \cdot 7{,}5247 = 13{,}6241.$$

Відхилення від розрахованих безпосередньо за формулами значень отримані за рахунок округлень.

Отже, підставивши отримані дані в рівняння регресії, маємо:

$$\bar{y}_x = 13{,}624 + 7{,}5249x \; -$$

рівняння регресії (кореляційне рівняння), що виражає зв'язок між урожайністю зернових культур та дозою мінеральних добрив.

Розглянемо його економічну інтерпретацію.

Коефіцієнт регресії $b_1 = 7{,}5249$ показує, що за підвищення дози мінеральних добрив на одиницю, урожайність зернових культур в середньому за заданою сукупністю господарств збільшиться на ***7,5249ц/га***.

Використовуючи рівняння регресії, можна розрахувати очікувані (розрахункові, теоретичні) значення урожайності ($\bar{y}_x$) за різних значень внесення дози мінеральних добрив. Для цього замість x у рівняння регресії ставимо конкретне значення. Наприклад,

$$\bar{y}_{x=2,8} = 13{,}624 + 7{,}5249 \cdot 2{,}8 = 34{,}69373.$$

Отримані розрахункові значення врожайності внесемо в таблицю 2.8.

Для побудови лінії регресії $\bar{y}_x = 13{,}624 + 7{,}5249x$ нанесемо на рисунок дві точки $M_1(0{,}7;18{,}89146)$ і $M_2(3{,}1;36{,}95119)$ та проведемо через них пряму лінію (рис. 2.12).

Відповідь: рівняння лінії регресії $\bar{y}_x = 13{,}624 + 7{,}5249x$.

3. Перевіримо адекватність побудованої моделі за ***F***-критерієм Фішера.

Складемо додаткову таблицю 2.9.

Таблиця 2.9

Дані для розрахунку коефіцієнта Фішера

№	y	x	$\bar{y}_{x_i}$	$\bar{y}_{x_i} - \bar{y}$	$(\bar{y}_{x_i} - \bar{y})^2$	$\bar{y}_{x_i} - y_i$	$(\bar{y}_{x_i} - y_i)^2$
1	*23,6*	*1,1*	*21,9014*	*-5,6185*	*31,5684*	*-1,6985*	*2,8851*
2	*31,9*	*3,1*	*36,9511*	*9,4311*	*88,9473*	*5,0511*	*25,514*
3	*35,2*	*2,8*	*34,6937*	*7,1737*	*51,4623*	*-0,5062*	*0,2563*
4	*36,4*	*2,9*	*35,4462*	*7,9262*	*62,8248*	*-0,9537*	*0,9097*
5	*23,6*	*1,2*	*22,6539*	*-4,8660*	*23,6788*	*-0,9460*	*0,8950*
6	*34*	*2,9*	*35,4462*	*7,9262*	*62,8248*	*1,4462*	*2,0915*
7	*38,2*	*3*	*36,1987*	*8,6787*	*75,3198*	*-2,0013*	*4,0051*
8	*17,3*	*0,8*	*19,6439*	*-7,8760*	*62,0321*	*2,3439*	*5,4941*
9	*23,8*	*0,7*	*18,8914*	*-8,6285*	*74,4516*	*-4,9085*	*24,0937*
10	*19,7*	*1,3*	*23,4064*	*-4,1136*	*16,9217*	*3,7063*	*13,7373*
11	*24,6*	*1,4*	*24,1588*	*-3,3611*	*11,2971*	*-0,4411*	*0,1946*
12	*15,1*	*0,7*	*18,8914*	*-8,6285*	*74,4516*	*3,7914*	*14,375*
13	*28,6*	*1,6*	*25,6638*	*-1,8561*	*3,4452*	*-2,9361*	*8,6209*
14	*38,4*	*2,9*	*35,4462*	*7,9262*	*62,8248*	*-2,9537*	*8,7249*
15	*22,4*	*1,3*	*23,4064*	*-4,1136*	*16,9217*	*1,0064*	*1,0128*
$\sum$	*412,8*	*27,7*	*412,8*		*718,9729*		*112,8111*
Ср	*27,52*	*1,8467*	*27,52*				

Обчислимо розрахункове значення критерію Фішера:

$$F_{розр} = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{y}_{x_i} - \bar{y}\right)^2}{1}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{y}_{x_i} - y_i\right)^2}{n-2}},$$

де $\boldsymbol{n}$ – число дослідів.

Підставимо отримані дані в формулу:

$$F_{розр} = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{y}_i - \bar{y}\right)^2}{1}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{y}_i - y_i\right)^2}{n-2}} = \frac{(15-2)\cdot 718{,}9729}{112{,}8111} \approx 82{,}8522 .$$

Знайдемо табличне значення коефіцієнта Фішера за $\boldsymbol{k_1=1}$, $\boldsymbol{k_2=13}$ чисел ступенів вільності (*додаток 5*): $F_{табл} = 4{,}7$.

Оскільки розрахункове значення Фішера більше ніж табличне (***82,85>4,7***), то розглянута математична модель адекватна експериментальним даним.

Відповідь: побудована математична модель адекватна експериментальним даним.

4. Визначимо тісноту зв’язку між ознаками, що вивчаємо (урожайністю та дозою внесення мінеральних добрив).

Для цього розрахуємо лінійний коефіцієнт кореляції:

$$r = \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} \cdot \sqrt{\overline{y^2} - (\bar{y})^2}} .$$

Усі необхідні для розрахунку дані візьмемо із таблиці 2.9.

$$r = \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} \cdot \sqrt{\overline{y^2} - (\bar{y})^2}} =$$

$$= \frac{57{,}19 - 1{,}8467 \cdot 27{,}52}{\sqrt{4{,}2567 - (1{,}8467)^2} \cdot \sqrt{812{,}8027 - (27{,}52)^2}} = 0{,}9297 .$$

Коефіцієнт кореляції показує, що між урожайністю та дозою внесення мінеральних добрив має місце тісний прямий зв'язок.

Коефіцієнт детермінації $r^2 = (0,9297)^2 = 0,8644$ показує, що ***86,44%*** загальної варіації урожайності обумовлено дозою внесення мінеральних добрив, а інша частина (***13,56%***) – іншими випадковими факторами, які в даній задачі не враховані.

Перевіримо значимість коефіцієнта кореляції. Для цього обчислимо t-статистику:

$$t = r_{xy}\sqrt{\frac{n-2}{1-r_{xy}^2}} = 0,9297\sqrt{\frac{15-2}{1-0,8644}} \approx 9,103\,.$$

За заданої ймовірності ***P=0,95*** і ***k=13*** числа ступенів вільності, знайдемо табличне значення критерію $t_{pk}=2,16$ (*додаток 6*).

Оскільки $|t| \geq |t_{Pk}|$ (***9,103>2,16***), то коефіцієнт кореляції є значимим.

Відповідь: коефіцієнт кореляції $r = 0,9297$; коефіцієнт детермінації $r^2 = 0,8644$. Обчислений коефіцієнт кореляції є значимим.

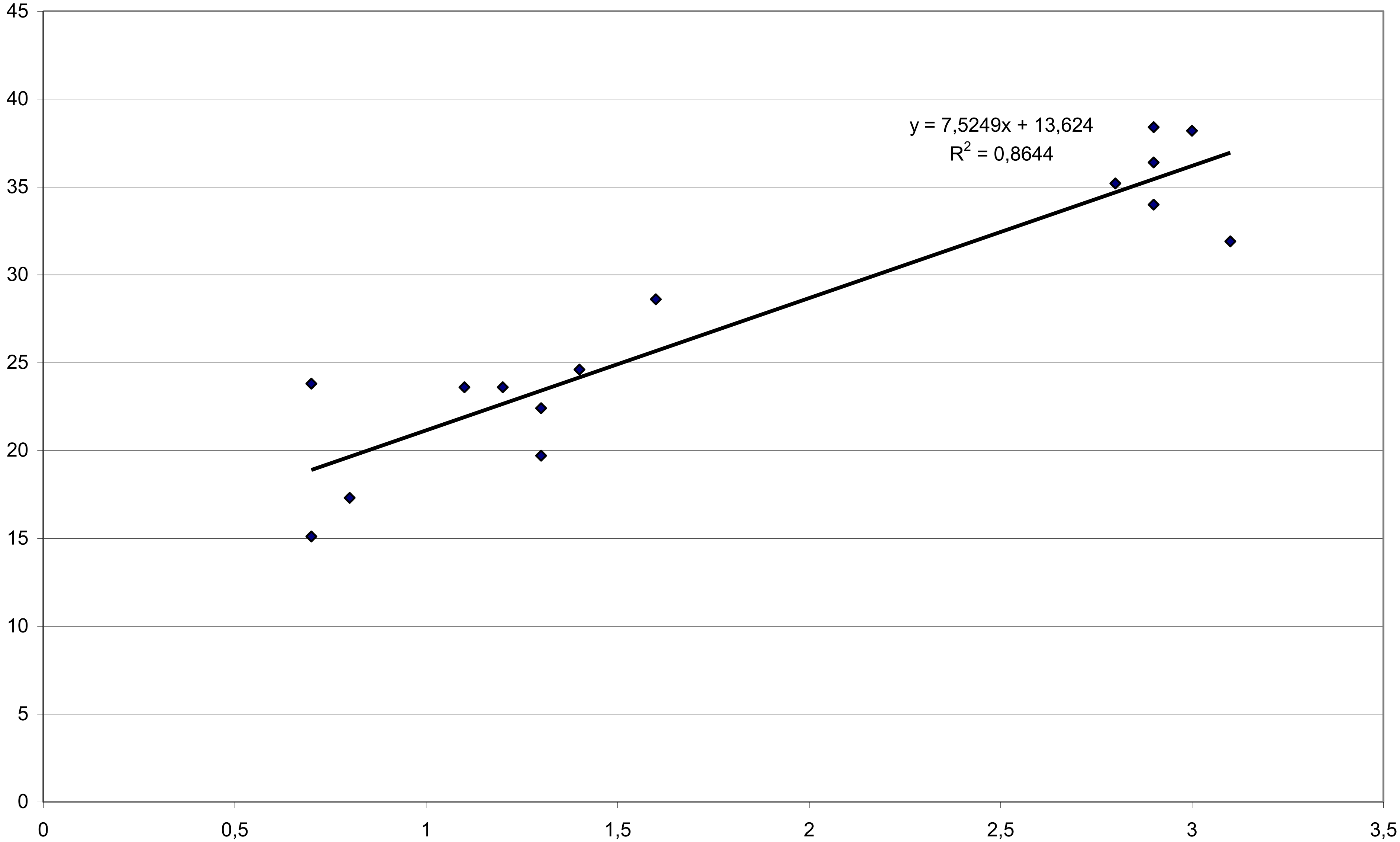

Рис. 2.12.Графік залежності урожайності зернових культур від дози внесення мінеральних добрив

5. Знайдемо параметри рівняння регресії та коефіцієнт кореляції за допомогою електронної таблиці ***Excel***.

Для цього використаємо функції ЛИНЕЙН та КОРРЕЛ.

1. Внесемо відомі значення ***x*** та ***y*** в таблицю.
2. Виділяємо дві комірки ***A21:B21*** (рівняння регресії має два параметра).
3. Вносимо формулу. Для цього

- ставимо знак «=»;
- вводимо російськими буквами назву функції ЛИНЕЙН;
- відкриваємо дужку;
- вносимо адреси комірок ***A2:A16*** (значення ***y***);
- ставимо крапку з комою «;»;
- вносимо адреси комірок ***B2:B16*** (значення ***x***);
- натискаємо одночасно такі клавіші ***Ctrl+Shift+Enter*** (оскільки за формулою буде обчислено два параметри).

Для обчислення теоретичного (регресійного) значення ***y***:

- ставимо курсор у комірку ***C2***;
- вводимо формулу: =***A21*B2+B21***;
- оскільки значення параметрів регресії не міняються для всіх значень ***x***, то необхідно зробити абсолютні посилання, тобто формула набуде вигляду: =***$A$21*B2+$B$21***;
- копіюємо отриману формулу в комірки ***C3 – C16***.

Для обчислення коефіцієнта кореляції вводимо в комірку ***A23*** формулу: =КОРРЕЛ(***A2:A16;B2:B16***).

- вибираємо тип діаграми «Точкова» та виконуємо необхідні кроки для оформлення діаграми.

Можна просто натискати «Далі» та на останньому кроці натиснути «Готово».

Для побудови лінії тренда на готовій діаграмі:

- вибираємо будь-яку точку фактичних даних на малюнку (лівою кнопкою миші);
- не переміщуючи мишку, натискаємо праву кнопку;
- у додатковому меню, що з’явилося, вибираємо «Добавити лінію тренда»;
- обираємо тип лінії – «Лінійна» та параметри «Показувати рівняння лінії на малюнку».

Таблиця 2.10

Формули для обчислення параметрів регресії в Excel

Для побудови графіка фактичних даних:

- виділяємо за допомогою мишки комірки ***A2:B16***;

	A	B	C
1	y	x	Y^
2	23,6	1,1	=$A$22*B2+$B$22
3	31,9	3,1	=$A$22*B3+$B$22
4	35,2	2,8	=$A$22*B4+$B$22
5	36,4	2,9	=$A$22*B5+$B$22
6	23,6	1,2	=$A$22*B6+$B$22
7	34	2,9	=$A$22*B7+$B$22
8	38,2	3	=$A$22*B8+$B$22
9	17,3	0,8	=$A$22*B9+$B$22
10	23,8	0,7	=$A$22*B10+$B$22
11	19,7	1,3	=$A$22*B11+$B$22
12	24,6	1,4	=$A$22*B12+$B$22
13	15,1	0,7	=$A$22*B13+$B$22
14	28,6	1,6	=$A$22*B14+$B$22
15	38,4	2,9	=$A$22*B15+$B$22
16	22,4	1,3	=$A$22*B16+$B$22
17	=СУММ(A2:A16)	=СУММ(B2:B16)	=СУММ(C2:C16)
18	=A17/15	=B17/15	
19			
20	B1	B0	
21	=ЛИНЕЙН(A2:A16;B2:B16)		
22			
23	=КОРРЕЛ(A2:A16;B2:B16)		

- на панелі інструментів вибираємо піктограму «Майстер діаграм»;

Результати розрахунків в ***Excel*** показано в таблиці 2.11.

Таблиця 2.11

Результати розрахунків в *Excel*

	A	B	C
1	y	x	Y^
2	23,6	1,1	21,90142
3	31,9	3,1	36,95119
4	35,2	2,8	34,69373
5	36,4	2,9	35,44621
6	23,6	1,2	22,65391

7	34	2,9	35,44621
8	38,2	3	36,19870
9	17,3	0,8	19,64395
10	23,8	0,7	18,89146
11	19,7	1,3	23,40640
12	24,6	1,4	24,15888
13	15,1	0,7	18,89146
14	28,6	1,6	25,66386
15	38,4	2,9	35,44621
16	22,4	1,3	23,40640
17	412,8	27,7	412,8
18	27,52	1,846666667	
19			
20	b1	b0	
21	7,524887115	13,62404179	
22	r		
23	0,929717421		

Схема поточного і підсумкового контролю знань

№ змістового модулю	Кількість годин		Форма контролю	Кількість заходів	Оцінка		Сума	
	ЛК	ПЗ			min	max	min	max
1	10	6	***Аудиторна робота:***					
			– опитування на заняттях;	2	1	1	**2**	**2**
			– виконання практичних завдань;	2	1	2	**2**	**4**
			Самостійна робота:					
			– опрацювання окремих питань тем;	2	0	0,5	**0**	**1**
			– виконання лабораторних робіт;	2	0,5	1	**1**	**2**
			– підготовка презентацій;	1	1	2	**1**	**2**
			Разом:				**6**	**11**
2	12	6	***Аудиторна робота:***					
			– опитування на заняттях;	2	1	1	**2**	**2**
			– виконання практичних завдань;	2	1	2	**2**	**4**
			– контрольна робота;	1	3	5	**3**	**5**
			Самостійна робота:					
			– опрацювання окремих питань тем;	2	0	0,5	**0**	**1**
			– тестування в moodle;	2	0,5	1	**1**	**2**
			– підготовка тез доповіді на конференцію;	1	1	1	**1**	**1**
			– виконання лабораторних робіт;	4	0,5	1	**2**	**4**
			***Разом*:**				**11**	**19**
3	10	4	***Аудиторна робота:***					
			– опитування на заняттях;	2	1	1	**2**	**2**
			– виконання практичних завдань;	1	2	2	**2**	**2**
			Самостійна робота:					
			– опрацювання окремих питань тем;	2	0	0,5	**0**	**1**
			– підготовка презентацій;	1	0	1	**0**	**1**
			– виконання лабораторних робіт;	4	0,5	1	**2**	**4**
			Разом:				**6**	**10**
4	8	4	***Аудиторна робота:***					
			– опитування на заняттях;	2	1	1	**2**	**2**
			– виконання практичних завдань;	2	1	2	**2**	**4**

			– контрольна робота;	1	1	4	**3**	**4**
			Самостійна робота:					
			– опрацювання окремих питань тем;	2	0	0,5	**0**	**1**
			– тестування в moodle;	2	0,5	1	**1**	**2**
			– виконання лабораторних робіт;	4	0,5	1	**2**	**4**
			– підготовка наукової статті;	1	3	3	**3**	**3**
			Разом:				**13**	**20**
Всього по дисципліні							**60**	**100**

ПИТАННЯ ДЛЯ ПІДСУМКОВОГО КОНТРОЛЮ «ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ»

1. Предмет теорії ймовірностей. Поняття події. Класифікація подій.
2. Відносна частота та статистична ймовірність.
3. Сполучення, розміщення, перестановки.
4. Класичне визначення ймовірності. Його обмеженість. Геометрична ймовірність.
5. Поняття суми подій. Ймовірність суми несумісних подій.
6. Повна група подій. Ймовірність суми повної групи подій.
7. Протилежні події. Ймовірність появи протилежної події. Вірогідні і неможливі події та їх ймовірності.
8. Незалежні події. Ймовірність добутку незалежних подій.
9. Залежні події. Ймовірність добутку залежних подій.
10. Ймовірність суми сумісних подій.
11. Формула повної ймовірності.
12. Формула Байєса.
13. Повторні незалежні випробування. Формула Бернуллі.
14. Геометричний закон розподілу ймовірностей.

15. Пуассонівський закон розподілу ймовірностей.
16. Знаходження наймовірнішого числа подій.
17. Числові характеристики дискретних випадкових величин.
18. Числові характеристики неперервних випадкових величин.
19. Властивості математичного сподівання.
20. Властивості дисперсії.
21. Біноміальний закон розподілу ймовірностей.
22. Рівномірний закон розподілу ймовірностей.
23. Щільність ймовірностей (диференціальна функція) і її властивості.
24. Закон великих чисел. Теорема Чебишова.
25. Функція розподілу ймовірностей (інтегральна функція) та її властивості.
26. Нормальний закон розподілу випадкової величини.
27. Теорема Муавра-Лапласа.
28. Правило трьох сигм для нормального закону.
29. Асиметрія і ексцес.
30. Кореляційний момент. Коефіцієнт кореляції та його властивості.

«МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА»

1. Вибіркова середня, вибіркова дисперсія, вибіркове середнє квадратичне відхилення.
2. Емпіричні моменти.
3. Загальний алгоритм перевірки правильності нульової гіпотези.
4. Двовимірний статистичний розподіл вибірки та його числові характеристики.

5. Інтервальний статистичний розподіл вибірки та його числові характеристики.
6. Побудова довірчого інтервалу для $\overline{X}_{\tilde{A}}$ при невідомому значенні $\sigma_{\tilde{A}}$ із заданою надійністю γ.
7. Побудова довірчих інтервалів із заданою надійністю γ для $D_{\tilde{A}}, \sigma_{\tilde{A}}$.
8. Дискретний статистичний розподіл вибірки та її числові характеристики.
9. Перевірка правильності нульової гіпотези про рівність двох дисперсій.
10. Множинна лінійна регресія.
11. Область прийняття гіпотези. Критична область. Критична точка.
12. Двофакторний дисперсійний аналіз.
13. Парний статистичний розподіл вибірки та його числові характеристики.
14. Перевірка гіпотез про достовірність відмінностей між дисперсіями за допомогою F-критерія.
15. Побудова довірчого інтервалу для $\overline{X}_{\tilde{A}}$ за допомогою нерівності Чебишова із заданою надійністю γ.
16. Степеневі середні. Правило мажорантності.
17. Перевірка правильності непараметричних статистичних гіпотез.
18. Параметричні статистичні гіпотези.
19. Предмет математичної статистики. Її місце в системі статистичних дисциплін. Завдання математичної статистики.
20. Показники варіації ознак.
21. Основні вимоги до статистичних оцінок.
22. Методи визначення точкових статистичних оцінок.
23. Однофакторний дисперсійний аналіз.

24. Статистичні гіпотези: нульова й альтернативна, проста і складна.
25. Перевірка правильності нульової гіпотези про значення генеральної середньої.
26. Нелінійна регресія.
27. Інтервальні статистичні оцінки для параметрів генеральної сукупності.
28. Побудова довірчого інтервалу для r_{xy} генеральної сукупності із заданою надійністю γ.
29. Алгоритм рішення однофакторної моделі.
30. Визначення коефіцієнтів регресії (ρ_{yx}, ρ_{xy}) через коефіцієнт кореляції.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ТА ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Барковський В., Барковська Н., Лопатін О. Теорія ймовірностей та математична статистика : навч. посібник. Київ : Центр навчальної літератури, 2019. 424 с.
2. Герич М. С., Синявська О. О. Математична статистика [Електронний ресурс] : навчальний посібник. Ужгород : ДВНЗ "УжНУ", 2021. 146 с. URL: https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/handle/lib/34910.
3. Гончаров О. А., Князь І. О., Хоменко О. В. Теорія ймовірностей і математична статистика [Електронний ресурс] : навчальний посібник. Суми : СумДУ, 2022. 174 с. URL: https://essuir.sumdu.edu.ua/handle/123456789/90490.
4. Жалдак М. І., Кузьміна Н. М., Михалін Г. О. Теорія ймовірностей та математична статистика : підручник. Київ : НПУ імені М.П. Драгоманова, 2020. 750 с.
5. Кармелюк Г. І. Теорія ймовірностей та математична статистика : посібник з розв'язування задач. Київ : Центр навчальної літератури, 2020. 576 с.
6. Вигоднер І. В., Білоусова Т. П., Ляхович Т. П. Теорія ймовірностей та математична статистика : навчальний посібник. Одеса : Гельветика, 2019. 336 с.
7. Найко Д. А., Шевчук О. Ф. Теорія ймовірностей та математична статистика [Електронний ресурс] : навчальний посібник. Вінниця : ВНАУ, 2020. 382 с. URL: http://repository.vsau.org/getfile.php/24513.pdf.

8. Огірко О. І., Галайко Н. В. Теорія ймовірностей та математична статистика: навчальний посібник. Львів : ЛьвДУВС, 2017. 292 с.
9. Теорія ймовірностей [Електронний ресурс] : навч. посіб. / уклад. О. В. Барабаш, А. П. Мусієнко, О. В. Свинчук. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 193 с. URL: https://ela.kpi.ua/handle/123456789/42046

Допоміжна література

1. Статистична перевірка гіпотез [Електронний ресурс]. *Твоя медична енциклопедія*. URL: http://surl.li/ryfwc.
2. Жерновий Ю. В. Теорія ймовірностей та математична статистика: тексти лекцій для студентів нематематичних спеціальностей. Львів, 2008. 101 с. URL: http://zyurvas.narod.ru/Lekcyi_z_TIMS/Lekcii_z_TIMS.pdf.
3. Жлуктенко В. І., Наконечний С. І. Теорія ймовірностей і математична статистика: навчально-методичний посібник у 2-х частинах. Ч. 1. Теорія ймовірностей. Київ : КНЕУ, 2000. 304 с.
4. Жлуктенко В. І., Наконечний С. І. Теорія ймовірностей і математична статистика: навчально-методичний посібник у 2-х частинах. Ч. 2. Математична статистика. Київ : КНЕУ, 2001. 336 с.
5. Медведєв М. Г., Пащенко І. О. Теорія ймовірностей та математична статистика: підручник. Київ : Кондор, 2008. 536 с.

ДОДАТКИ

Додаток 1

Значення функції Гауса $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3667
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3521	3503	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3392	3271	3251	3230	3209	3287	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2903	2780	2756	2832	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2689	2565	2541	2516	2592	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1682	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	100969	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551

x	***0***	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0476	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0191	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0090	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток 2

Значення функції Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	*Ф (x)*	*x*	*Ф (x)*	*x*	*Ф (x)*	*x*	*Ф (x)*
0,00	0,0000	**0,34**	0,1331	**0,68**	0,2517	**1,02**	0,3461
0,01	0,0040	**0,35**	0,1368	**0,69**	0,2549	**1,03**	0,3485
0,02	0,0080	**0,36**	0,1406	**0,70**	0,2580	**1,04**	0,3508
0,03	0,0120	**0,37**	0,1443	**0,71**	0,2611	**1,05**	0,3551
0,04	0,0160	**0,38**	0,1480	**0,72**	0,2642	**1,06**	0,3554
0,05	0,0199	**0,39**	0,1517	**0,73**	0,2673	**1,07**	0,3577
0,06	0,0239	**0,40**	0,1554	**0,74**	0,2703	**1,08**	0,3599
0,07	0,0279	**0,41**	0,1591	**0,75**	0,2734	**1,09**	0,3621
0,08	0,0319	**0,42**	0,1628	**0,76**	0,2764	**1,10**	0,3643
0,09	0,0359	**0,43**	0,1664	**0,77**	0,2794	**1,11**	0,3665
0,10	0,0398	**0,44**	0,1700	**0,78**	0,2823	**1,12**	0,3686
0,11	0,0438	**0,45**	0,1736	**0,79**	0,2852	**1,13**	0,3708
0,12	0,0478	**0,46**	0,1772	**0,80**	0,2881	**1,14**	0,3729
0,13	0,0517	**0,47**	0,1808	**0,81**	0,2910	**1,15**	0,3749
0,14	0,0557	**0,48**	0,1844	**0,82**	0,2939	**1,16**	0,3770
0,15	0,0596	**0,49**	0,1879	**0,83**	0,2967	**1,17**	0,3790
0,16	0,0636	**0,50**	0,1915	**0,84**	0,2995	**1,18**	0,3810
0,17	0,0675	**0,51**	0,1950	**0,85**	0,3023	**1,19**	0,3830
0,18	0,0714	**0,52**	0,1985	**0,86**	0,3051	**1,20**	0,3849
0,19	0,0753	**0,53**	0,2019	**0,87**	0,3078	**1,21**	0,3869
0,20	0,0793	**0,54**	0,2054	**0,88**	0,3106	**1,22**	0,3883
0,21	0,0832	**0,55**	0,2088	**0,89**	0,3133	**1,23**	0,3907
0,22	0,0871	**0,56**	0,2123	**0,90**	0,3159	**1,24**	0,3925
0,23	0,0910	**0,57**	0,2157	**0,91**	0,3186	**1,25**	0,3944
0,24	0,0948	**0,58**	0,2190	**0,92**	0,3212	**1,26**	0,3962
0,25	0,0987	**0,59**	0,2224	**0,93**	0,3238	**1,27**	0,3980
0,26	0,1026	**0,60**	0,2257	**0,94**	0,3264	**1,28**	0,3997
0,27	0,1064	**0,61**	0,2291	**0,95**	0,3289	**1,29**	0,4015
0,28	0,1103	**0,62**	0,2324	**0,96**	0,3315	**1,30**	0,4032
0,29	0,1141	**0,63**	0,2357	**0,97**	0,3340	**1,31**	0,4049
0,30	0,1179	**0,64**	0,2389	**0,98**	0,3365	**1,32**	0,4066
0,31	0,1217	**0,65**	0,2422	**0,99**	0,3389	**1,33**	0,4082
0,32	0,1255	**0,66**	0,2454	**1,00**	0,3413	**1,34**	0,4099
0,33	0,1293	**0,67**	0,2486	**1,01**	0,3438	**1,35**	0,4115

x	*Ф (x)*	*x*	*Ф (x)*	*x*	*Ф (x)*	*x*	*Ф (x)*
1,36	0,4131	**1,67**	0,4525	**1,98**	0,4761	**2,58**	0,4951
1,37	0,4147	**1,68**	0,4535	**1,99**	0,4767	**2,60**	0,4953
1,38	0,4162	**1,69**	0,4545	**2,00**	0,4772	**2,62**	0,4956
1,39	0,4177	**1,70**	0,4554	**2,02**	0,4783	**2,64**	0,4959
1,40	0,4192	**1,71**	0,4564	**2,04**	0,4793	**2,66**	0,4961
1,41	0,4207	**1,72**	0,4573	**2,06**	0,4803	**2,68**	0,4963
1,42	0,4222	**1,73**	0,4582	**2,08**	0,4812	**2,70**	0,4965
1,43	0,4236	**1,74**	0,4591	**2,10**	0,4821	**2,72**	0,4967
1,44	0,4251	**1,75**	0,4599	**2,12**	0,4830	**2,74**	0,4969
1,45	0,4265	**1,76**	0,4608	**2,14**	0,4838	**2,76**	0,4971
1,46	0,4219	**1,77**	0,4616	**2,16**	0,4846	**0,78**	0,4973
1,47	0,4292	**1,78**	0,4625	**2,18**	0,4854	**2,80**	0,4974
1,48	0,4306	**1,79**	0,4633	**2,20**	0,4861	**2,82**	0,4976
1,49	0,4319	**1,80**	0,4641	**2,22**	0,4868	**2,84**	0,4977
1,50	0,4332	**1,81**	0,4649	**2,24**	0,4875	**2,86**	0,4979
1,51	0,4345	**1,82**	0,4656	**2,26**	0,4881	**2,88**	0,4980
1,52	0,4357	**1,83**	0,4664	**2,28**	0,4887	**2,90**	0,4981
1,53	0,4370	**1,84**	0,4671,	**2,30**	0,4893	**2,92**	0,4982
1,54	04382	**1,85**	0,4678	**2,32**	0,4898	**2,94**	0,4984
1,55	0,4394	**1,86**	0,4686	**2,34**	0,4904	**2,96**	0,4985
1,56	0,4406	**1,87**	0,4693	**2,36**	0,4909	**2,98**	0,4986
1,57	0,4418	**1,88**	0,4699	**2,38**	0,4913	**3,00**	0,49865
1,58	0,4429	**1,89**	0,4706	**2,40**	0,4918	**3,20**	0,49931
1,59	0,4441	**1,90**	0,4713	**2,42**	0,4922	**3,40**	0,49966
1,60	0,4452	**1,91**	0,4719	**2,44**	0,4927	**3,60**	0,499841
1,61	0,4463	**1,92**	0,4726	**2,46**	0,4931	**3,80**	0,499928
1,62	0,4474	**1,93**	0,4732	**2,48**	0,4934	**4,00**	0,499968
1,63	0,4484	**1,94**	0,4738	**2,50**	0,4938	**4,50**	0,499997
1,64	0,4495	**1,95**	0,4744	**2,52**	0,4991	**5,00**	0,499997
1,65	0,4505	**1,96**	0,4750	**2,54**	0,4945		
1,66	0,4515	**1,97**	0,4756	**2,56**	0,4948		

Значення $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n	***γ***			***n***	***γ***		
	0,95	**0,99**	**0,999**		**0,95**	**0,99**	**0,999**
5	2,78	4,60	8,61	**20**	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	**25**	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	**30**	2,045	2,756	3,656
8	2,37	3,50	5,41	**35**	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	**40**	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	**45**	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	**50**	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	**60**	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	**70**	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	**80**	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	**90**	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	**100**	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	**120**	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97		1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Значення $q = q(\gamma, n)$

n	γ			***n***	γ		
	0,95	**0,99**	**0,999**		**0,95**	**0,99**	**0,999**
5	1,37	2,67	5,64	**20**	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	**25**	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	**30**	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	**35**	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	**40**	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	**45**	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	**50**	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,50	**60**	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	**70**	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	**80**	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	**90**	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	**100**	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	**150**	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	**200**	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	**250**	0,089	0,120	0,162

Додаток 5

Критичні точки розподілу Фішера (F-розподілу)

Рівень значущості 0,05									
k_2 \ k_1	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***12***	***24***	∞
1	164,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	244,9	249,0	254,3
2	18,5	9,2	19,2	19,3	19,3	19,3	19,4	19,5	19,5
3	10,1	9,6	9,3	9,1	9,0	8,9	8,7	8,6	8,5
4	7,7	6,9	6,6	6,4	6,3	6,2	5,9	5,8	5,6
5	6,6	5,8	5,4	5,2	5,1	5,0	4,7	4,5	4,4
6	6,0	5,1	4,8	4,5	4,4	4,3	4,0	3,8	3,7
7	5,6	4,7	4,4	4,1	4,0	3,9	3,6	3,4	3,2
8	5,3	4,5	4,1	3,8	3,7	3,6	3,3	3,1	2,9
9	5,1	4,3	3,9	3,6	3,5	3,4	3,1	2,9	2,7
10	5,0	4,1	3,7	3,5	3,3	3,2	2,9	2,7	2,5
11	4,8	4,0	3,6	3,4	3,2	3,1	2,8	2,6	2,4
12	4,8	3,9	3,5	3,3	3,1	3,0	2,7	2,5	2,3
13	4,7	3,8	3,4	3,2	3,0	2,9	2,6	2,4	2,2
14	4,6	3,7	3,3	3,1	3,0	2,9	2,5	2,3	2,1
15	4,5	3,7	3,3	3,1	2,9	2,8	2,5	2,3	2,1
16	4,5	3,6	3,2	3,0	2,9	2,7	2,4	2,2	2,0
17	4,5	3,6	3,2	3,0	2,8	2,7	2,4	2,2	2,0
18	4,4	3,6	3,2	2,9	2,8	2,7	2,3	2,1	1,9
19	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,8
20	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,8
22	4,3	3,4	3,1	2,8	2,7	2,6	2,2	2,0	1,8
24	4,3	3,4	3,0	2,8	2,6	2,5	2,2	2,0	1,7
26	4,2	3,4	3,0	2,7	2,6	2,4	2,1	1,9	1,7
28	4,2	3,3	2,9	2,7	2,6	2,4	2,1	1,9	1,6
30	4,2	3,3	2,9	2,7	2,5	2,4	2,1	1,9	1,6
40	4,1	3,2	2,9	2,6	2,5	2,3	2,0	1,8	1,5
60	4,0	3,2	2,8	2,5	2,4	2,3	1,9	1,7	1,4
120	3,9	3,1	2,7	2,5	2,3	2,2	1,8	1,6	1,3
∞	3,8	3,0	2,6	2,4	2,2	2,1	1,8	1,5	1,0

		Рівень значущості 0,01								
k_2 \ k_1	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***8***	***12***	***24***	∞
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5981	6106	6234	6366
2	98,5	99,0	99,2	99,3	99,3	99,4	99,3	99,4	99,5	99,5
3	34,1	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,5	27,1	26,6	26,1
4	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	14,8	14,4	13,9	13,5
5	16,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	10,3	9,9	9,5	9,0
6	13,7	10,9	9,8	9,2	8,8	8,5	8,1	7,7	7,3	6,9
7	12,3	9,6	8,5	7,9	7,5	7,2	6,8	6,5	6,1	5,7
8	11,3	8,7	7,6	7,0	6,6	6,4	6,0	5,7	5,3	4,9
9	10,6	8,0	7,0	6,4	6,1	5,8	5,5	5,1	4,7	4,3
10	10,0	7,6	6,6	6,0	5,6	5,4	5,1	4,7	4,3	3,9
11	9,7	7,2	6,2	5,7	5,3	5,1	4,7	4,4	4,0	3,6
12	9,3	6,9	6,0	5,4	5,1	4,8	4,5	4,2	3,8	3,4
13	9,1	6,7	5,7	5,2	4,9	4,6	4,3	4,0	3,6	3,2
14	8,9	6,5	5,6	5,0	4,7	4,5	4,1	3,8	3,4	3,0
15	8,7	6,4	5,4	4,9	4,6	4,3	4,0	3,7	3,3	2,9
16	8,5	6,2	5,3	4,8	4,4	4,2	3,9	3,6	3,2	2,8
17	8,4	6,1	5,2	4,7	4,3	4,1	3,8	3,5	3,1	2,7
18	8,3	6,0	5,1	4,6	4,3	4,0	3,7	3,4	3,0	2,6
19	8,2	5,9	5,0	4,5	4,2	3,9	3,6	3,3	2,9	2,4
20	8,1	5,9	4,9	4,4	4,1	3,9	3,6	3,2	2,9	2,4
22	7,9	5,7	4,8	4,3	4,0	3,8	3,5	3,1	2,8	2,3
24	7,8	5,6	4,7	4,2	3,9	3,7	3,3	3,0	2,7	2,2
26	7,7	5,5	4,6	4,1	3,8	3,6	3,3	3,0	2,6	2,1
28	7,6	5,5	4,6	4,1	3,8	3,5	3,2	2,9	2,5	2,1
30	7,6	5,4	4,5	4,0	3,7	3,5	3,2	2,8	2,5	2,0
40	7,3	5,2	4,3	3,8	3,5	3,3	3,0	2,7	2,3	1,8
60	7,1	5,0	4,1	3,7	3,3	3,1	2,8	2,5	2,1	1,6
120	6,9	4,8	4,0	3,5	3,2	3,0	2,7	2,3	2,0	1,4
∞	6,6	4,6	3,8	3,3	3,0	2,8	2,5	2,2	1,8	1,0

Додаток 6

Критичні точки розподілу Стьюдента (t-розподілу)

Число ступенів свободи, *k*	Рівень значущості, α						
	0,20	***0,10***	***0,05***	***0,02***	***0,01***	***0,002***	***0,001***
1	3,08	6,31	12,7	31,82	63,66	127,32	636,62
2	1,89	2,92	4,30	6,97	9,93	14,09	31,60
3	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84	7,45	12,94
4	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60	5,60	8,61
5	1,48	2,02	2,57	3,37	4,03	4,77	6,86
6	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71	4,32	5,96
7	1,42	1,90	2,36	3,00	3,50	4,03	5,41
8	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36	3,83	5,04
9	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25	3,69	4,78
10	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17	3,58	4,59
11	1,36	1,80	2,20	2,72	3,11	3,50	4,44
12	1,36	1,78	2,18	2,68	3,05	3,43	4,32
13	1,35	1,77	2,16	2,65	3,01	3,37	4,22
14	1,34	1,76	2,14	2,62	2,98	3,33	4,14
15	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95	3,29	4,07
16	1,34	1,75	2,12	2,58	2,92	3,25	4,02
17	1,33	1,74	2,11	2,57	2,90	3,22	3,97
18	1,33	1,73	2,10	2,55	2,88	3,20	3,92
19	1,33	1,73	2,09	2,54	2,86	3,17	3,88
20	1,33	1,73	2,09	2,53	2,85	3,15	3,85
21	1,32	1,72	2,08	2,52	2,83	3,14	3,82
22	1,32	1,72	2,07	2,51	2,82	3,12	3,79
23	1,32	1,71	2,07	2,50	2,81	3,10	3,77
24	1,32	1,71	2,06	2,49	2,80	3,09	3,75
25	1,32	1,71	2,06	2,48	2,79	3,08	3,73
26	1,32	1,71	2,06	2,48	2,78	3,07	3,71
27	1,31	1,70	2,05	2,47	2,77	3,06	3,69
28	1,31	1,70	2,05	2,47	2,76	3,05	3,67
29	1,31	1,70	2,04	2,46	2,76	3,04	3,66
30	1,31	1,70	2,04	2,46	2,75	3,03	3,65
40	1,30	1,68	2,02	2,42	2,70	2,97	3,55
60	1,30	1,67	2,00	2,39	2,66	2,91	3,46
120	1,29	1,66	1,98	2,36	2,62	2,86	3,37
∞	1,28	1,64	1,96	2,33	2,58	2,81	3,29

Навчальне видання

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Методичні рекомендації

Укладачі:

Шебаніна Олена В'ячеславівна
Тищенко Світлана Іванівна
Пархоменко Олександр Юрійович
Кучмійова Тетяна Сергіївна
Хилько Іван Іванович

Формат 60х84 1/16. Ум. друк. арк. 2.94.
Наклад 50 прим. Зам. № _____

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.