УДК 519.1
DOI: 10.32626/2308-5878.2023-24.64-69

О. В. Зеленський*, канд. фіз.-мат. наук,
А. Ю. Динич,**
В. М. Дармосюк*,** канд. фіз.-мат. наук,
М. В. Фенцур*,
П. С. Стремедловський****

*Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський,
** Відокремлений структурний підрозділ «Кам'янець-Подільський фаховий коледж» НРЗВО «Кам’янець-Подільський державний інститут» м. Кам'янець-Подільський,
*** Миколаївський національний аграрний університет, м. Миколаїв,
**** Кам'янець-Подільський ліцей № 14, м. Кам'янець-Подільський

КОМБІНАТОРНИЙ АНАЛІЗ ЛОТЕРЕЙ

Лотерея є найдавнішою та найвідомішою азартною грою, яка практикується з глибокої давнини. У своїх різних формах лотерея зберігає основну структуру та технічну процедуру, що робить її найпростішою та найпопулярнішою азартною грою: випадковим чином вибирається один об’єкт з множини (м’ячів, білетів, тарілок, листочків тощо), що містить попередньо визначені символи (числа, зображення, слова тощо), з подальшим розподілом призів для гравців, які зробили правильні прогнози щодо цього розіграшу, відповідно до деяких попередньо встановлених правил.

У наш час найпоширенішою формою лотереї є випадково вибрані числа; виграшні категорії базуються на кількості чисел, правильно передбачених на ігровому білеті. Найпопулярнішими формами цих ігор є національні та державні лотереї.

Найважливішим елементом, який сприяє захопленню публіки лотерейними іграми, є розмір призів, особливо для найвищої виграшної категорії. Можливість (фізично реальна, математично надто неймовірна) виграти великий приз – створює мотивацію зі складним психологічним корінням, яке часто не помічає практичних аспектів, таких як інвестиції в лотерейні квитки та математичні аспекти гри, особливо ймовірності виграшу.

Моделюючи гру математично доведено, що в ідеальних умовах випадковості неможливий тривалий регулярний виграш для гравців азартних ігор; тому азартні ігри не є хорошим способом заробити на життя. Більшість азартних гравців приймають цю передумову, але все ще працюють над стратегіями в надії на численні виграші в довгостроковій перспективі. Комбінаторний аналіз можна використовувати для моделювання гри в лотерею.

Ключові слова: *комбінаторні методи дослідження, комбінаторний аналіз лотерей.*

Вступ. Комбінаторний аналіз можна використовувати для моделювання гри в лотерею. Розглянемо наступну задачу: у лототроні міститься n занумерованих кульок. Під час розіграшу лотереї випадає k кульок. Гравець купує білет і записує в ньому номери шести кульок, які, на його думку, випадуть під час розіграшу. Яку найменшу кількість білетів потрібно купити гравцю, щоб гарантовано, принаймні в одному з них, вгадати щонайменше два номери? Позначимо це число через $F(n, k)$. У роботі знайдені $F(n, 2)$ для n, яке не перевищує 12, та $F(36, 6)$.

1. Знаходження $F(n, k)$.

Лема 1. Якщо $m \le n$ то $F(m, k) \le F(n, k)$.

Доведення. Припустимо протилежне, що для $m \le n$ $F(m, k) >$ $> F(n, k)$. Нехай $p = F(n, k)$. Для n кульок достатньо купити p білетів. З білетів заберемо номери кульок більші за m. Після цього деякі білети стануть незаповнені повністю. На порожні місця в білетах можна записати будь-які номери. Цих білетів достатньо, щоб гарантовано, принаймні в одному з них, вгадати щонайменше два номери, якщо у лототроні знаходиться m кульок. На порожні місця в білетах можна записати будь-які номери. Отже, ми отримали протиріччя, яке доводить, що $F(m, k) \le F(n, k)$. **Лема доведена.**

Лема 2. $F\left(3m, 2\right) \le C_m^2$.

Доведення. Поділимо кульки на n трійок $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 5, 6\}$, …, $\{3n-2, 3n-1, 3n\}$.

Отже, з збільшенням кількості кульок в лототроні необхідна кількість білетів може залишитися без змін або збільшитися. Та в C_m^2 білетах запишемо дві різні трійки. Наприклад для $n = 3$ ми одержимо 3 білета: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$, $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Зрозуміло, що дві кулі, які випадуть з лототрону будуть знаходитися в якихось трійках, тому потраплять в один білет. Отже, C_m^2 білетів достатньо, щоб гарантовано вгадати дві кулі в одному білеті, тому $F\left(3m, 2\right) \le C_m^2$. **Лема доведена.**

Спочатку розглянемо випадок $k = 2$. Знайдемо $F(n, 2)$, для $2 \le n \le 12$.

Тобто, під час розіграшу лотереї випадає всього 2 кульки. Які потрібно вгадати в одному з білетів.

Твердження 1. $F(n, 2) = 1$, для $2 \le n \le 6$.

Доведення. Достатньо гравцю купити 1 білет з номерами усіх кульок, які є в лототроні. Наприклад для $n = 6$ – це буде білет $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ в якому точно будуть вгадані кульки, які випадуть, бо інших кульок немає. **Твердження 1 доведено.**

Твердження 2. $F(n, 2) = 3$, $7 \le n \le 9$.

Доведення. Спочатку доведемо, що трьох білетів достатньо. Дійсно з леми 2 випливає що, для n = 9 достатньо $C_3^2 = 3$ білетів: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$, $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Отже,

$$F(9, 2) \le 3. \quad (1)$$

Доведемо, що двох білетів мало, навіть при n = 7. В лототроні є 7 кульок, та гравець заповнює два білети. Тобто в білеті є всі номери кульок крім однієї. Не зменшуючи загальності можна вважати, що гравець заповнив білети $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ та $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Якщо з лототрону випадуть кульки «1» та «7», то їх гравець не вгадає в одному білеті. Отже, $F(7, 2) \ge 3$. Використовуючи лему 1 одержимо, що

$$F(9, 2) \ge F(8, 2) \ge F(7, 2) \ge 3. \quad (2)$$

З нерівностей (1) та (2) одержимо, що $F(9, 2) = F(8, 2) = F(7, 2) = 3$. **Твердження 2 доведено**.

Твердження 3. $F(10, 2) = 4$.

Доведення. Спочатку доведемо, що 4 білетів достатньо. Дійсно для n = 10 достатньо 4 білетів: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\{1, 2, 3, 4, 7, 8\}$, $\{1, 2, 3, 4, 9, 10\}$, $\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. В лототроні випадає дві кульки. Якщо серед них немає кульок «1-4» то обидві кульки знаходяться в четвертому білеті, в протилежному випадку в одному з перших трьох. Отже $F(10, 2) \le 4$.

Доведемо, що $F(10, 2) \ge 4$. Тобто, що 3 білетів недостатньо. Для 10 кульок є $C_{10}^2 = 45$ пар кульок. В одному білеті є $C_6^2 = 15$ пар кульок. Але для 10 кульок в лототроні будь-які два білети мають спільну пару. Наприклад білети: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ мають спільну пару кульок $\{5, 6\}$. Тому загальна кількість пар кульок в 3 білетах буде менше за 45. Отже, знайдеться пара кульок, якої не буде в жодному 3 трьох білетів. $F(10, 2) = 4$. **Твердження 3 доведено.**

Твердження 4. $F(11, 2) \ge 6$.

Доведення. Розглянемо три випадки.

Випадок 1. Кожен з 11 номерів належить не менше ніж 3 білетам. Тоді загальна кількість номерів в усіх білетах не менше за $3 \cdot 11 = 33$, тому 5 білетів недостатньо бо $5 \cdot 6 = 30 < 33$. Отже, гравцю потрібно заповнити мінімум 6 білетів. Твердження виконується.

Випадок 2. Є номер кульки, який належить тільки одному білету наприклад кулька «1» належить тільки одному білету $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, то пара кульок (1, 7) не належить жодному білету.

Випадок 3. Є номер кульки, який належить двом білетам. Якщо ці білети мають інший спільний номер наприклад $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ та $\{1, 2, 7, 8, 9, 10\}$ то пара кульок $\{1, 11\}$ не належить жодному білету.

Якщо кулька «1» належить двом білетам, які не мають інших спільних номерів крім «1» то не зменшуючи загальності, можна вважати, що це білети $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ та $B = \{1, 7, 8, 9, 10, 11\}$. Припустимо, протилежне, щоб всі пари кульок можна накрити 5 білетами. Тоді крім білетів A та B можна використати, ще 3 білета C_1, C_2, C_3 якими потрібно накрити 25 пар кульок (x, y) де $x \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ та $y \in \{7, 8, 9, 10, 11\}$. В 3 білетах сумарно знаходиться 18 номерів кульок, тому серед номерів $\{2 .. 11\}$, буде два номери, які знаходяться рівно в одному білеті. Нехай це будуть номери $u \in C_1$ та $v \in C_2$. Якщо $u \leq 6$, а $v > 6$, то пари (u, v) не має в жодному білеті. Ми отримали протиріччя. Якщо $u \leq 6$, а $v \leq 6$, то не зменшуючи загальності будемо вважати, що $u = 2$ та $c = 3$. В білеті C_1 має міститися пари (2, 7), (2, 8), (2, 9), (2, 10), (2, 11) тому $C_1 = \{2, 7, 8, 9, 10, 11\}$. Аналогічно $C_2 = \{3, 7, 8, 9, 10, 11\}$. Залишилось не накритих 15 пар (x, y) де $x \in \{4, 5, 6\}$ та $y \in \{7, 8, 9, 10, 11\}$, та один білет C_3. Ми отримали протиріччя, бо в білеті C_3 не може бути 8 номерів кульок (4…11). Випадок $u \geq 7$, та $v \geq 7$ розглядається аналогічно. Протиріччя доводить, припущення що всі пари кульок можна накрити 5 білетами невірне. $F(11, 2) \geq 6$. **Твердження 4 доведено.**

Твердження 5. $F(11, 2) = F(12, 2) = 6$.

Доведення. З леми 2 випливає, що для $n = 12$ достатньо $C_4^2 = 6$ білетів: {1, 2, 3, 4, 5, 6}, {1, 2, 3, 7, 8, 9}, {4, 5, 6, 7, 8, 9}, {1, 2, 3, 10, 11, 12}, {4, 5, 6, 10, 11, 12}, {7, 8, 9, 10, 11, 12}. Тобто виконується нерівність

$$F(12, 2) \leq 6. \tag{3}$$

З леми 1 слідує, що $F(12, 2) \geq F(11, 2)$, з твердження 4, що $F(11, 2) \geq 6$ тому

$$F(12, 2) \geq F(11, 2) \geq 6. \tag{4}$$

З нерівностей (3) та (4) слідує, що $F(12, 2) = F(11, 2) = 6$. **Твердження 5 доведено.**

Використаємо попередні твердження для знаходження $F(36, 6)$.

Теорема. $F(36, 6) = 9$.

Доведення. Спочатку доведемо, що $F(36, 6) \leq 9$. Тобто доведемо, що достатньо 9 білетів. 36 кульок поділимо на 5 проміжків: [1..6], [7..12], [13..18], [19..27],[28..36]. Оскільки з лототрону випадає 6 кульок, то за принципом Діріхле принаймні дві кульки потраплять в один проміжок. З твердження 1 слідує, що $F(6, 2) = 1$, з твердження 2 слідує, що $F(9, 2) = 3$. Оскільки потрібно накрити 3 проміжки довжиною 6 та 2 проміжки довжиною 9 достатньо $3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 9$ білетів. Дійсно гравець придбавши 9 білетів та заповнивши їх наступним чином {1, 2, 3, 4, 5, 6}, {7, 8, 9, 10, 11, 12}, {13, 14, 15, 16, 17, 18}, {19, 20, 21, 22, 23, 24}, {19, 20, 21, 25, 26, 27}, {22, 23, 24, 25, 26, 27}, {28, 29, 30, 31, 32, 33}, {28, 29, 30, 34, 35, 36}, {31, 32, 33, 34, 35, 36} гарантовано отримає принаймні дві кульки в одному білеті.

Доведемо, що $F(36, 6) \geq 9$. Припустимо протилежне, що достатньо 8 білетів. В 8 білетах всього знаходиться 48 номерів кульок. Деякі з них зустрічаються в білетах тільки один раз. Розглянемо декілька випадків.

Випадок 1. Серед даних 8 білетів є не більше *23* кульок, які зустрічаються по 1 разу, тоді принаймні 13 кульок зустрічаються не менше 2 раз. У такому разі сумарна кількість кульок у 8 білетах буде принаймні $23 + 2 \cdot 13 = 49$, що перевищує 48, що неможливо.

Випадок 2. Серед даних 8 білетів є принаймні *25* кульок, що зустрічаються по 1 разу, і ці кульки знаходяться принаймні у 6 з 8 куплених білетах. Тоді з цих 6 білетів можна вибрати по одній кульці. Нехай ми вибрали кульки a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 і якщо всі ці 6 кульок випадуть з лототрону, то зрозуміло, що гравець не вгадає 2 кульки в одному білеті, бо вони знаходяться в різних білетах, причому кожна з цих кульок тільки в одному білеті.

Випадок 3. Серед даних 8 білетів є принаймні *25* кульок, що зустрічаються по 1 разу, і ці кульки знаходяться принаймні у 5 з 8 куплених білетах. Тоді вибираємо з цих 5 білетів по одній кульці a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 та додаємо до них одну кульку b_1, яка не зустрічається у цих 5 білетах. У 5 білетах знаходиться не більше 30 різних кульок тому кулька b_1 точно існує. Якщо кульки a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1 випадуть з лототрону, то гравець не одержить дві кульки в одному білеті.

Випадок 4. Серед даних 8 білетів є 24 кульки, які зустрічаються по 1 разу, і ці кульки знаходяться в 5 або в 6 з 8 куплених білетах. Цей випадок розглядається аналогічно до випадку 3.

Випадок 5. Серед даних 8 білетів є 24 кульки, які зустрічаються по 1 разу, і ці кульки знаходяться в 4 з 8 куплених білетах. Тобто 4 білети складаються тільки з кульок, які зустрічаються по одному разу. Тоді у кожному з цих 4 білетів вибираємо по одній кульці a_1, a_2, a_3, a_4,. Серед інших вибираємо кульку, що зустрічається двічі b_1. Якщо припустити, що кульки b_1 не можливо вибрати, то 12 кульок зустрічаються щонайменше тричі. Та загальна кількість в 8 білетах не менше за $24 + 3 \cdot 12 = 60$. Отримали протиріччя $48 \geq 60$. Отже, 4 білета складаються з кульок, що зустрічаються по одному разу, ще два білета містять кульку b_1, лишається ще два білета з яких ми вибираємо кульку c_1, яка не зустрічалася раніше з кулькою b_1. Сформуємо видачу лототрону наступним чином – кульки a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, c_1. Зрозуміло, що у такому разі гравець не отримає дві кульки в одному білеті.

Отже, ми розглянули всі випадки в кожному з яких 8 білетів недостатньо $F(36, 6) = 9$. **Теорема доведена.**

Висновки. У роботі досліджується лотереї методами комбінаторного аналізу. Знайдені найменша кількість лотерейних квитків достатньо для гарантованого вгадування k кульок: $F(n, 2)$ для $2 \le n \le 12$ та $F(36, 6)$.

Список використаних джерел:

1. Henz N. The distribution of spaces on Lottery tickets. *Fibonacci Quarterly*. 1995. Vol. 33. P. 426-431.
2. Brouwer A. I., Vorhoeven M. Turan Theory and the Lotto Problem. *Math Centrum Tracts*. 1995. Vol. 106. P. 99-105.
3. Зеленський О. В., Динич А. Ю. Елементи дискретної математики: навч. посіб. для студентів та магістрантів фіз.-мат. спец. 2023. 152 с.

COMBINATORY ANALYSIS OF LOTTERIES

Lottery is by far the oldest and the most widely known game of chance, having been practiced since antiquity. In its various forms, the lottery preserves a basic structure and technical procedure that makes it the easiest and most popular game of chance: the random draw from an urn of some objects (balls, tickets, lots, plates, slips, etc.) containing predefined symbols (numbers, images, words, etc.), followed by the distribution of prizes for players who made correct predictions regarding this draw, according to some pre-established rules.

Nowadays, the most prevalent form of lottery is that with randomly selected numbers; winning categories are based on the number of numbers correctly predicted on the playing ticket. The most popular forms of these games are the national and state lotteries.

But the most important element contributing to the public's fascination with lottery games is the amount of the prizes, especially for the highest winning category. The possibility (physically real, mathematically too improbable) of getting «the big hit» – winning the big prize – provides a motivation with complex psychological roots that often overlooks the practical aspects, such as the investments in lottery tickets and the mathematical aspects of the game, especially the winning probabilities.

It has been proven mathematically that in ideal conditions of randomness, no long-term regular winning is possible for players of games of chance; therefore, gambling is not a good way to make a living. Most gamblers accept this premise, but still work on strategies in hopes of multiple wins over the long run.

Key words: *combination research methods, cosbinatory analysis of lotteries.*

Отримано: 13.11.2023