МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Інженерно-енергетичний факультет
Кафедра вищої та прикладної математики

ВИЩА МАТЕМАТИКА
Кратні і криволінійні інтеграли
Завдання та методичні рекомендації для самостійної роботи
здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
ОПП «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»
спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»
для денної та заочної форм навчання

Миколаїв
2024

УДК 517.37
В41

Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету (протокол № 3 від 11.11.2024 р.)

Укладачі:
Є. Ю. Борчик – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої та прикладної математики, МНАУ

Рецензенти:
Р.В. Дінжос – д.т.н., проректор з наукової роботи, професор кафедри фізики та математики ЧНУ імені Петра Могили;
О. С. Садовий – к.т.н, доцент кафедри електроенергетики, електротехніки та електромеханіки, Миколаївський національний аграрний університет.

ВСТУП

Вища математика як навчальна дисципліна є фундаментальним нормативним курсом, найвагомішою базовою складовою якісної підготовки висококваліфікованих фахівців у вищих навчальних закладах освіти III-IV рівнів акредитації.

У методичних рекомендаціях запропоновано завдання для самостійної роботи студентів за програмою з вищої математики для здобувачів вищої освіти ступеня "Бакалавр" спеціальності 141 “Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка” .

Матеріал даного посібника складається з основних теоретичних відомостей, розрахункових завдань та методичних рекомендацій. Розрахункові завдання розподілено на групи за тематикою та методами розв’язання. В методичних рекомендаціях пропонуються приклади розв’язання задач з кожної теми з повним обґрунтуванням. Розглядаються наступні теми:

Тема 1. Подвійний інтеграл та його обчислення.

Тема 2. Заміна змінних у подвійному інтегралі.

Тема 3. Потрійні інтеграли та їх обчислення.

Тема 4. Криволінійні інтеграли I роду.

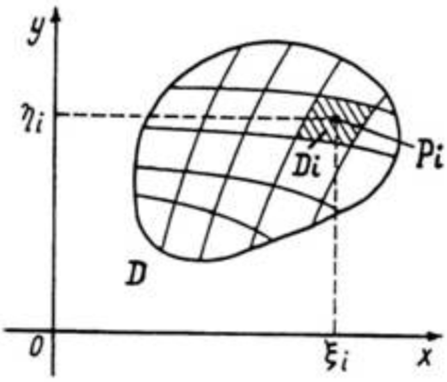
Тема 5. Криволінійні інтеграли II роду.

.

Тема 1. Подвійний інтеграл та його обчислення

1.1 Основні теоретичні відомості

Нехай межа області D складається зі скінченної кількості кривих, заданих рівняннями вигляду $y = f(x)$ або $x = \phi(y)$, де $f(x)$ і $\phi(y)$ – неперервні функції. Такою областю, наприклад, є замкнений многокутник, границя якого складається зі скінченного числа відрізків, що представляють собою графіки неперервних функцій вигляду $y = kx + b$ або $x = a$.



Розіб'ємо область D довільним чином на n частин $i\ D_i$, які не мають спільних внутрішніх точок і площі яких дорівнюють ΔS_i, $i = 1,2,...,n$ (рис.1). У кожній області $i\ D_i$ візьмемо довільну точку $P(\xi_i, \eta_i)$ і утворимо суму

$$I_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{\infty} f(\xi_1, \eta_1) \Delta S_i, \qquad (1)$$

яку назвемо інтегральною сумою для функції

Означення. Якщо інтегральна сума (1) при $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d(D_i) \to 0$ має скінченну границю I, яка не залежить ні від способу розбиття області D на частинні області D_i, ні від вибору точок P_i в них, то ця границя називається *подвійним інтегралом від функції* $f(x, y)$ по області D.

Таким чином, за означенням

$$I = \int\int_D f(x, y) dx\, dy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, \Delta S_i, \qquad (2)$$

У цьому випадку функція $f(x, y)$ називається інтегрованою в області D, D – областю інтегрування, x і y – змінними інтегрування, dS (або $dxdy$) – елементом площі.

Геометричний зміст подвійного інтеграла. Якщо функція $f(x,y) > 0$, то $V = \iint\limits_D f(x, y) dx\, dy$, де V – об'єм циліндричного тіла, обмеженого зверху поверхнею $z = f(x, y) \ge 0$, знизу – замкненою обмеженою областю D площини Oxy, з боків – циліндричною поверхнею, напрямна якої збігається з межею області D, а твірні паралельні осі Oz.

Механічний зміст подвійного інтеграла. Довільну функцію $f\,(x,y)$ можна тлумачити як густину. Якщо $f\,(x, y) > 0$, то

$$m = \iint\limits_D f\left(x, y\right) dx\, dy ,$$

де m – маса пластинки з густиною $f\,(x, y)$ в точці $(x, y) \in D$.

Зауважимо, що якщо $f\,(x, y)$ набуває від'ємних значень, то можна сказати, наприклад, що $f\,(x, y)$ –густина електрики, розподіленої в області D , тобто ввести в розгляд від'ємні маси. Тоді у цьому випадку можливо доцільніше говорити не про "механічний", а про фізичний зміст інтеграла.

Обчислення подвійного інтегралу зводиться до обчислення *повторних* інтегралів.

Розглянемо область D, яка обмежена знизу лінією $y = \varphi_1(x)$, зверху – лінією $y = \varphi_2(x)$ і з боків відрізками прямих $x = a$, $x = b$ $(a < b)$. В окремих випадках один з цих відрізків (а може, й обидва) перетворюється в точку (рис. 2).

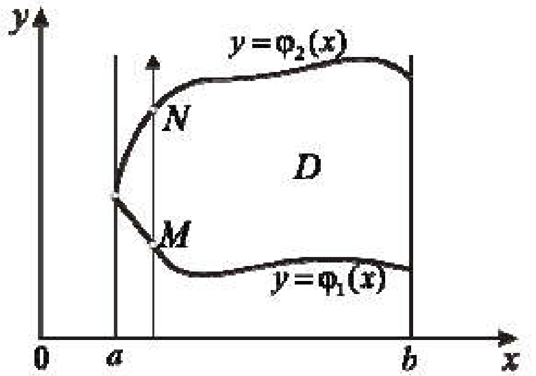


Рис.2

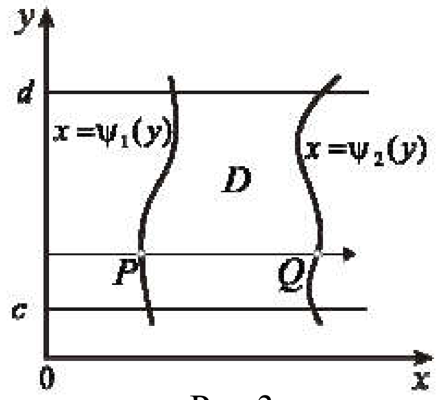


Рис.3

Означення. Область D називають правильною (простою) відносно осі OX, якщо будь-яка пряма, яка паралельна осі OY і проходить всередині $[a, b]$, перетинає межу області тільки у двох точках (на рис. 1 – у точках M і N).

У цьому випадку перехід від подвійного інтеграла до повторного можна записати за допомогою формули

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \ . \qquad (3)$$

Інтеграл у правій частині називається *повтрним*.

Аналогічно можна сформулювати означення області D, яка є правильною відносно осі OY. Розглянемо область D, яка обмежена лініями: $x = \psi_1(y)$ (ліворуч), $x = \psi_2(y)$ (праворуч), $y = c$, $y = d$ $(c < d)$ (рис. 3).

Означення. Область D називають правильною (простою) відносно осі OY, якщо будь-яка пряма, яка паралельна осі OX і проходить всередині відрізка $[c, d]$, перетинає межі області тільки в двох точках (на рис. 3 це точки P і Q).

Зауважимо, що область D, правильну і відносно осі OX, і відносно осі OY, називають просто правильною.

Формула переходу від подвійного до повторного інтеграла буде мати вигляд

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \qquad (4)$$

Якою з формул (3) або (4) користуватися – розглянемо пізніше. А зараз уважно розглянемо обидві формули й запам'ятаємо деякі важливі *правила переходу від подвійного до повторного інтеграла*.

1. Межі інтегрування в зовнішньому інтегралі (в обох формулах)
завжди числа.
2. Межі інтегрування у внутрішньому інтегралі зазвичай змінні: причому у формулі (3) межі інтегрування – це функції від x, а у формулі (4) – функції від y.

Пункт 2 можна сформулювати інакше: у формулі (3) зовнішній інтеграл залежить від змінної x, тоді межі інтегрування внутрішнього інтеграла – це функції від x. У формулі (4) зовнішній інтеграл залежить від змінної y, тоді й межі інтегрування внутрішнього інтеграла –це функції від y.

Зауваження. Необов'язково у внутрішньому інтегралі обидві межі будуть функціями. Достатньо часто одна із меж є функцією, а друга – сталою. Більше того, якщо область D є прямокутником із сторонами, паралельними осям координат, то всі чотири межі інтегрування і в (3), і в (4) будуть сталими.

1.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Нехай задано подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, де область D обмежена лініями $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$. Перейти від подвійного інтеграла до повторного.

Розв'язання: Побудуємо область D (рис. 4). Спочатку скористуємося формулою (3).

Дивимося на рисунок: x змінюється від 0 до 2. Ці числа й будуть межами інтегрування в зовнішньому інтегралі: $\int\limits_0^2 dx$. Тепер знайдемо межі інтегрування у внутрішньому інтегралі. Для цього проведемо довільну вертикальну пряму (головне, щоб вона перетинала межі області D).

Проводимо її *знизу вгору*. Тоді наша пряма спочатку перетне лінію $y = 0$ (це нижня межа), а потім лінію $y = x^2$ (це верхня межа). І внутрішній інтеграл буде мати вигляд $\int_0^{x^2} f(x,y)dy$.

А тепер запишемо разом зовнішній та внутрішній інтеграли й одержимо рівність

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy \qquad (5)$$

Перевіримо: межі зовнішнього інтеграла – числа. Межі внутрішнього (тут тільки верхня межа) залежать від x.

А тепер скористаємося формулою (4). Зовнішній інтеграл у цій формулі залежить від змінної y. Нижня межа цього інтеграла дорівнює нулю. Для визначення його верхньої межі розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} y = x^2 \\ x = 2 \end{cases}$. Звідси $y = 4$ – верхня межа. Тобто зовнішній інтеграл буде мати вигляд $\int_0^4 dy$ (рис. 5).

Тепер знайдемо межі інтегрування у внутрішньому інтегралі. Для цього проведемо горизонтальну пряму (*зліва направо*). Перша лінія, яку перетне наша пряма, і буде нижньою межею: $y = x^2$. Але, увага: межі інтегрування повинні залежати від y, тому знайдемо з рівняння x: $x = \pm\sqrt{y}$, де $x = \sqrt{y}$ – права гілка параболи, $x = -\sqrt{y}$ – ліва гілка. Нам потрібна права гілка, тому нижня межа $x = \sqrt{y}$. Далі наша пряма перетне лінію $x = 2$. Тому внутрішній інтеграл буде мати вигляд $\int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y)dx$. Тепер запишемо разом зовнішній та внутрішній інтеграли й одержимо рівність

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^4 dy \int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y)dx.$$

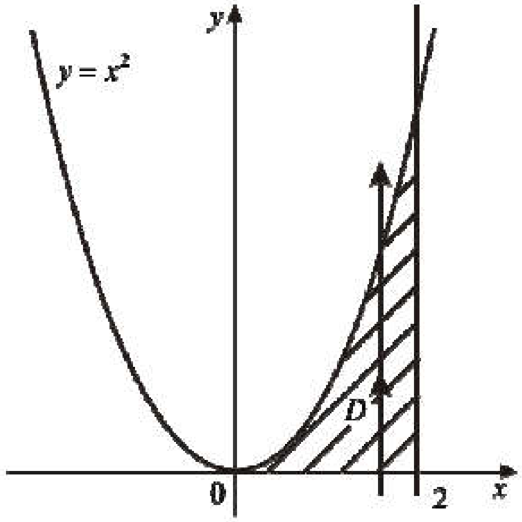


Рис.4

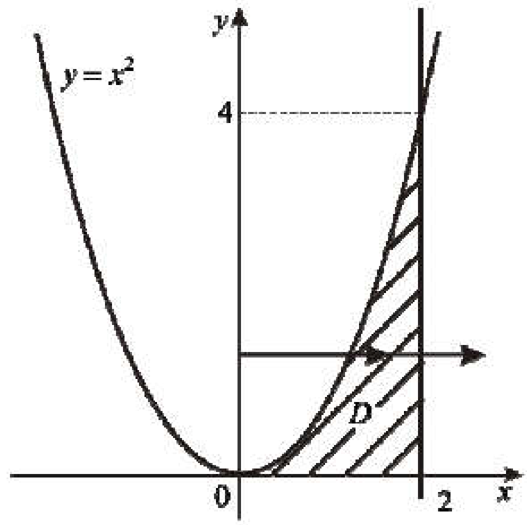


Рис.5

Приклад 2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D dxdy$ по заданій області D:

$0 \le x \le\ 2,\ \ -1 \le y \le 3.$

Розв'язання: Маємо найпростіший приклад. Область D – прямокутник із сторонами, паралельними осям координат (рис. 6). Переходимо від заданого подвійного інтеграла до повторного, тобто розставляємо межі інтегрування. У цьому випадку не має значення, яка змінна буде в зовнішньому інтегралі, а яка – у внутрішньому. Нехай, наприклад, зовнішній інтеграл буде залежати від змінної x (формула (3)):

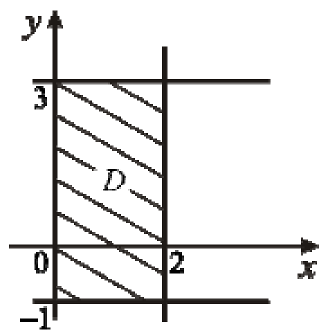


Рис.6

$$\iint\limits_D dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{-1}^3 dy = \int\limits_0^2 dx \cdot y\,|_{-1}^{3} = \int\limits_0^2 dx[3-(-1)] = 4\int\limits_0^2 dx = 4 \cdot x\,|_{-1}^{3} = 8.$$

Приклад 2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D xdxdy$

по заданій області D:

$-1 \le x \le 2,\ \ 0 \le y \le 2.$

Розв'язання: У цьому прикладі область D теж прямокутник (рис. 7). Тут теж не має значення, яка змінна буде розташована в зовнішньому, а яка – у внутрішньому інтегралах (застосуємо формулу (4)):

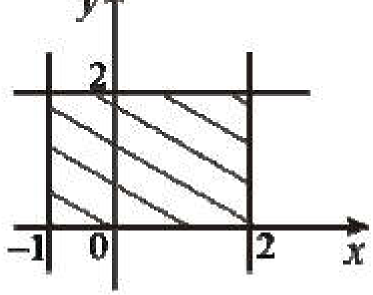


Рис.7

$$\iint\limits_D xdxdy = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{-1}^2 xdx = \int\limits_0^2 dy \cdot \frac{x^2}{2}\,|_{-1}^{2} = \int\limits_0^2 dy[2-\frac{1}{2}] = \frac{3}{2}\int\limits_0^2 dy = 3.$$

Приклад 3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$ по області D:

$-2 \le x \le 0, \quad 1 \le y \le 2.$

Розв'язання: Як завжди, починаємо з рисунка (рис. 8).

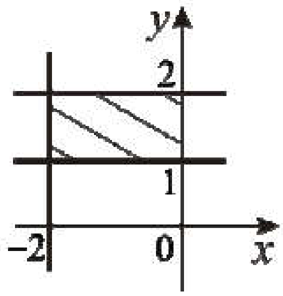


Рис.8

$$\iint\limits_D (x+2y)dxdy = \int\limits_{-2}^{0} dx \int\limits_{1}^{2} (x+2y)dy =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \textit{виконуємо} \quad \textit{внутрішнє} \\ \textit{інтегрування} \quad \textit{по} \quad y, \\ \textit{вважаючи} \quad x \ \textit{сталою} \end{matrix} \right\} = \int\limits_{-2}^{0} dx \left[x \cdot y \,|_1^2 + 2 \cdot \frac{y^2}{2} \,|_1^2 \right] \cdot =$$

$$= \int\limits_{-2}^{0} dx[(2x-x)+3] = \int\limits_{-2}^{0} (x+3)dx] = \frac{x^2}{2} \,|^0_{-2} + 3x \,|_{-2}{}^0 = -2+6=4.$$

Приклад 4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D xdxdy$ по області D:

$y^2 = x$, $y = 0$, $x = 4$, $y \ge 0$.

Розв'язання: Будуємо область D (рис. 9). Умова $y \ge 0$ вказує, що потрібно розглядати верхню частину області.

Переходимо до повторного інтеграла за допомогою формули (3). Межі зовнішнього інтеграла від 0 до 4. Знайдемо межі внутрішнього інтеграла. Для цього проведемо пряму, паралельну осі OY, знизу вгору. Нижня межа – лінія $y = 0$. Верхня межа – лінія $y^2 = x$ або $y = \pm\sqrt{x}$. Тут $y = \sqrt{x}$ рівняння верхньої гілки параболи, а $y = -\sqrt{x}$ – рівняння нижньої гілки параболи. Ми ибираємо рівняння $y = \sqrt{x}$ – верхня межа інтегрування. Тоді

$$\iint\limits_D xdxdy = \int\limits_0^4 xdx \int\limits_0^{\sqrt{x}} dy.$$

Далі обчислюємо повторний інтеграл:

$$\int\limits_0^4 xdx \int\limits_0^{\sqrt{x}} dy = \int\limits_0^4 xdx \cdot y \,|_0^{\sqrt{x}} = \int\limits_0^4 x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} \,|_0^4 = \frac{2}{5}(\sqrt{4})^5 = \frac{64}{5}.$$

А тепер спробуємо перейти в цьому прикладі до повторного інтеграла за допомогою формули (4). Знайдемо межі зовнішнього інтеграла – тепер він залежатиме від змінної y (рис. 10).

Тут доведеться знайти точку перетину параболи $y^2 = x$ і прямої $x = 4$. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y^2 = x \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm 2 \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow (4,2)$$

А тому межі зовнішнього інтеграла: 0 і 2.

Для знаходження меж внутрішнього інтеграла проведемо пряму, паралельну осі OX, зліва направо. Тоді нижня межа – це лінія $y^2 = x$, верхня межа – це лінія $x = 4$. Запишемо відповідний повторний інтеграл: $\int_0^2 dy \int_{y^2}^4 dx$.

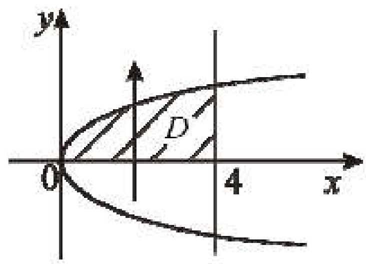


Рис.9

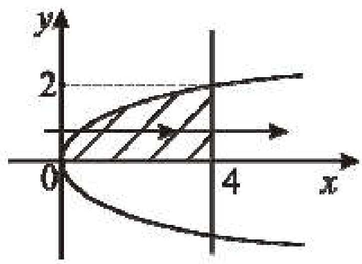


Рис.10

Зрозуміло, що цей повторний інтеграл ми обчислювати не будемо, тому що результат буде той самий: 64/ 5.

Приклад 5. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D xydxdy$ по області D:

$y = 1/x$, $y = x$, $x = 1$, $x = 2$.

Розв'язання: Будуємо область D (рис. 11). Розглянемо обидва варіанти розстановки меж інтегрування. За формулою (3): область D проста відносно осі OX, тобто пряма, паралельна осі OY, проведена знизу вгору, перетне межі області по лініях: $y = 1/x$ і $y = x$. Тоді

$$\iint_D xydxdy = \int_1^2 xdx \int_{1/x}^{x} ydy .$$

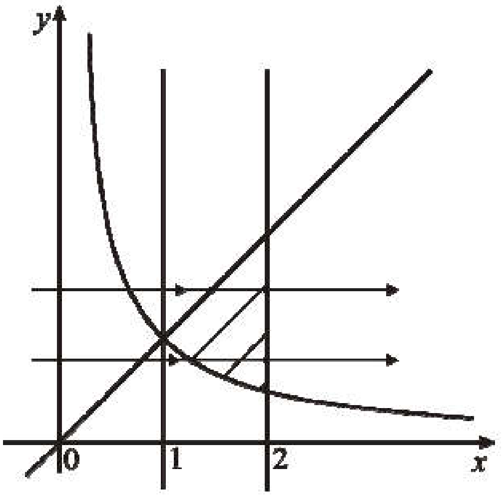
За формулою (4): область D не є простою відносно осі OY, тому що пряма, паралельна осі OX (проведена зліва направо), може перетнути межі області по лініях $y = 1/x$ і $x = 2$ або по лініях $y = x$ і $x = 2$ (рис. 11).

Тому розділимо область D на дві частини горизонтальною прямою, яка проходить через точку M (рис. 12). Крім того, у цьому варіанті доведеться знайти координати точок M , M_1 , M_2 . Для цього розв'яжемо відповідні системи рівнянь.

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{x} \\ x = x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1.$$ Координати точки M (1;1).

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{x} \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{2}.$$ Координати точки M (2;1/2).

$$\begin{cases} y = x \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow y = 2.$$ Координати точки M (2;2).



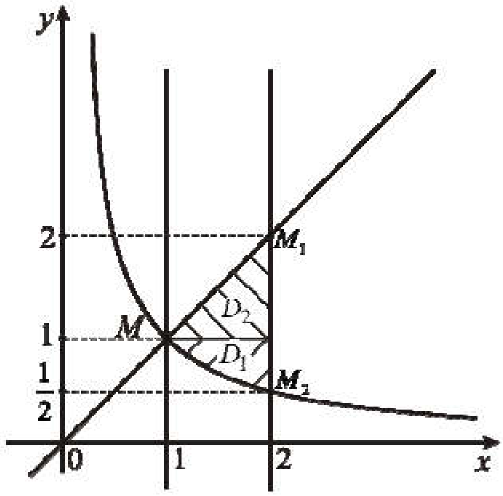


Рис.11 Рис.12

Тому $\iint\limits_D xydxdy = \underbrace{\int\limits_{1|2}^{1} ydy \int\limits_{1|y}^{2} xdx}_{D_1} + \underbrace{\int\limits_{1}^{2} ydy \int\limits_{y}^{2} xdx}_{D_2}$. Зрозуміло, що ми виберемо перший варіант.

$$\iint\limits_D xydxdy = \int\limits_1^2 xdx \int\limits_{1|x}^{x} ydy = \int\limits_1^2 xdx \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_{1/x}^{x} = \frac{1}{2}\int\limits_1^2 x(x^2 - \frac{1}{x^2})dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_1^2 (x^3 - \frac{1}{x})dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}\Big|_1^2 - \ln|x|\,\Big|_1^2\right] = \frac{1}{2}\left[4 - \frac{1}{4} - \ln 2\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{15}{4} - \ln 2\right].$$

3 Завдання для самостійного розв'язання

1. Змінити порядок інтегрування в повторних інтегралах:

$$1)\ \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy;\ 2)\ \int\limits_0^1 dy \int\limits_{e^y}^{e} f(x,y)dx;\ 3)\ \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{2y} f(x,y)dx;$$

$$4)\ \int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy + \int\limits_1^4 dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{1} f(x,y)dy.$$

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D y^2 dxdy$ по області D: $y = x$, $y = 0, x + y =$ $=2$.

3. Обчислити площу області D, обмежену заданими лініями: $y = x^3$, $y = x$.

Тема 2. Заміна змінних у подвійному інтегралі

2.1 Основні теоретичні відомості

Нехай подвійний інтеграл перетворюється від прямокутних координат x, y до криволінійних координат u, v, які зв'язані з прямокутними координатами співвідношеннями $x=x(u,v)$, $y= y(u,v)$, де функції $x(u,v)$ та $y(u,v)$ мають неперервні частинні похідні в області D' площини $uO'v$ і визначник перетворення (*якобіан*) в області D' не перетворюється в нуль:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

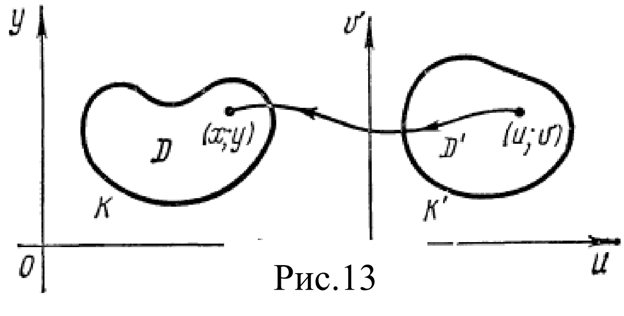


Рис.13

При цьому встановлюється взаємно однозначна в обидві сторони неперервна відповідність між точками області D площини xOy і точками області D' площини $uO'v$ (рис.13) .

Формула перетворення подвійного інтегралу в цьому випадку має вид:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D^1} f(x(u,v), y(u,v))\left|J\right|dudv.$$

Для випадку полярних координат

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

2.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Обчислити $\iint_D (x+y)^3(x-y)^2 dxdy$, де область D – квадрат, обмежений прямими $x+y=1$, $x–y=1$, $x+y=3$, $x–y=-1$ (рис. 14).

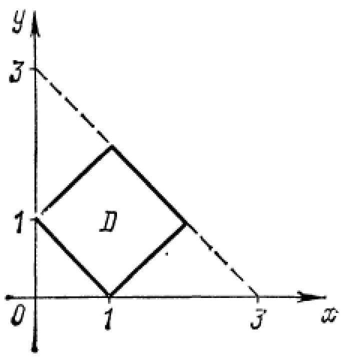


Рис.14

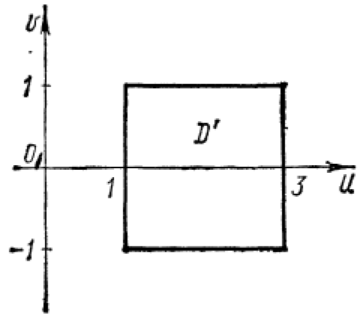


Рис.15

Розв’яза… о заміну: $x+y=u$, $x–y=v$. Звідси $x=(1/2)(u+v)$, $x=(1/2)(u-v)$. Тоді якобіан перетворення

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad |J| = \frac{1}{2}.$$

Таким чином, $\iint_D (x+y)^3(x-y)^2 dxdy = \dfrac{1}{2}\iint_{D^1} u^3v^2 dudv$. Оскільки область D' теж є квадратом (рис.15), то

$$\iint_D (x+y)^3(x-y)^2 dxdy = \frac{1}{2}\int_1^3 u^3 du \int_{-1}^1 v^2 dv =$$

$$\frac{1}{2}\int_1^3 u^3 \left[\frac{1}{3}v^3\right]_{-1}^1 du = \frac{1}{6}\int_1^3 u^3(1+1)du = \frac{1}{12}u^4 \Big|_1^3 = \frac{20}{3}.$$

Приклад 2. Переходячи до полярних координат, обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, якщо D – I чверть круга $x^2+y^2 \le a^2$.

Розв'язання: Перейдемо до полярних координат: $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$. Маємо

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \iint\limits_D \sqrt{\rho^2\cos\varphi^2+\rho^2\sin\varphi^2}\,\rho d\rho d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{01}^{a} \rho^2 d\rho = \frac{1}{3}\int\limits_0^{\pi/2} \rho^3 \Big|_0^a d\varphi = \frac{a^3}{3}\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{\pi a^3}{3}.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy$, якщо G – I чверть круга $x^2+y^2 \le 1$.

Розв'язання: Перетворимо інтеграл до полярних координат за формулами $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$. Тоді $x^2+y^2=\rho^2$.

Як видно (рис.16) в області G ρ змінюється в межах від 0 до 1, а φ – від 0 до $\dfrac{\pi}{2}$. Тобто, область G перетворюється в прямокутник $\{(\rho,\varphi)\,|\,0\le\rho\le 1; 0\le\varphi\le\pi/2\}$. Маємо

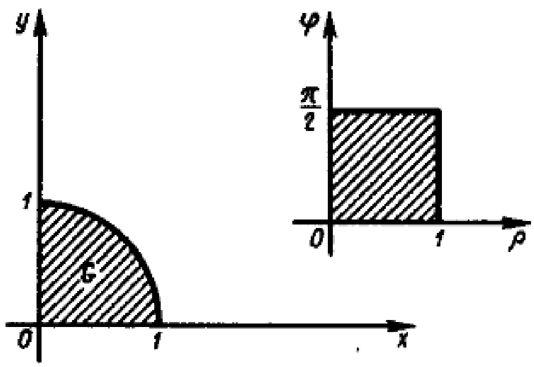


Рис.16

$$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 e^{\rho^2}\rho d\rho = \frac{1}{2}(e-1)\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{1}{2}(e-1)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}(e-1).$$

2.3 Завдання для самостійного розв'язання

1. Обчислити $\iint\limits_D dxdy$, якщо область D обмежена лініями $xy=1$, $xy=2$, $y=x$, $y=3x$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 2dxdy$ по області D: $x^2+y^2=9$, $y\ge 0$ (перейти в полярну систему координат).

3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ по області D: $x^2+y^2=4$, $x\le 0$, $y\le 0$ (перейти в полярну систему координат).

4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D xdxdy$ по області D:

$x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=4$ (перейти в полярну систему координат).

Тема 3. Потрійні інтеграли та їх обчислення

3.1 Основні теоретичні відомості

Означення 1. Інтегральною сумою для функції $\rho=f(x,y,z)$ в області Ω називається сума

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta\upsilon_i,$$

яка будується за алгоритмом, аналогічним алгоритму побудови інтегральної суми для функції $z=f(x,y)$, тільки просторова область Ω в даному випадку ділиться на малі просторові підобласті ω_i довільними поверхнями, $\Delta\upsilon_i$ – це об'єми підобластей , а точки P_i мають координати $P_i(x_i,y_i,z_i)$.

Означення 2. Для кожної неперервної в замкненій області Ω функції $\rho=f(x,y,z)$ існує границя інтегральної суми $\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta\upsilon_i$ при умові, що число малих підобластей $\Delta\upsilon_i$ прямує до нескінченності ($n\to\infty$), а діаметр кожної з них прямує до нуля $(d_i\to 0)$. Ця границя називається **потрійним інтегралом** від функції $\rho=f(x,y,z)$ по області Ω і позначається так:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta\upsilon_i=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz.$$

Фізичний зміст. Потрійний інтеграл дорівнює масі неоднорідного тіла Ω, якщо підінтегральна функція $\rho=f(x,y,z)$ є щільністю цього тіла

$$m_\Omega=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz.$$

Геометричний зміст. Потрійний інтеграл від функції $\rho=1$ на області Ω дорівнює об'єму просторового тіла Ω.

$$V_\Omega=\iiint\limits_{\Omega} 1dxdydz.$$

Обчислення потрійного інтегралу, аналогічно обчисленню подвійного, зводиться до обчислення повторних інтегралів.

Будемо вважати, що просторова область Ω проектується на площину Oxy у правильну відносно осі Ox плоску область D. Межа області Ω перетинається будь-якою вертикальною прямою, проведеною через довільну точку області D і паралельно осі Oz , не більше, ніж у двох точках. Нехай нижня межа описується рівнянням $z = h_1(x, y)$, а верхня – рівнянням $z=\varphi_2(x,y)$ ($h_1(x, y) < h_2(x, y)$ для $(x, y) \in D$). Якщо при цьому в області D

площини Oxy x змінюється в межах від a до b, і область D обмежена кривими $y=\varphi_1(x)$ та $y=\varphi_2(x)$, тоді потрійний інтеграл обчислюється за формулою

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b \{ \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} [\int\limits_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)dz]dy\}dx \qquad (6)$$

Формулу (6) записують у формі

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} dy \int\limits_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)dz \qquad (7)$$

Зауваження 1. Кожний з трьох інтегралів інтегрується за однією змінною (саме змінна інтегрування розташована під знаком диференціала), інші літери в цей час виконують роль сталих величин, причому порядок інтегрування такий: внутрішній, проміжний, зовнішній.

Зауваження 2. По аналогії з подвійним інтегралом в потрійному інтегралі можна змінити порядок інтегрування.

3.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Обчислити потрійний інтеграл по області Ω, де Ω − область, обмежена координатними площинами xOy (z = 0), yOz (x = 0), xOz (y = 0) і похилою площиною P з рівнянням $x + y + z = 1$.

Розв'язання: Намалюємо в просторовій системі координат піраміду Ω, яка має вершини в точках O(0,0,0), A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1) (похила площина P відсікає на осях координат відповідно відрізки a =1, b =1, c =1) (рис. 17).

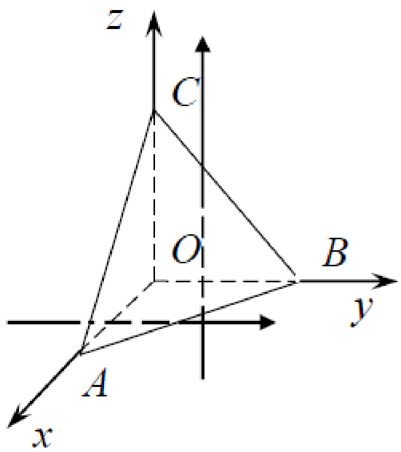


Рис.17

Далі діємо за схемою:

1) проектуємо тіло Ω (піраміду) на площину xOy – проекція D це трикутник OAB;

2) проектуємо трикутник OAB на вісь Ox– проекція це сегмент [0;1] – проміжок інтегрування зовнішнього інтеграла (за аргументом x);

3) через довільну точку інтервалу (0;1) будуємо в площині xOy стрілку паралельно осі Oy і відмічаємо ординати точок «входу» і «виходу» з області D (нижня межа – це вісь Ox, тобто y = 0; а верхня межа – пряма AB, яка є лінією перетину площини P і площини xOy (z =0), тобто розв'язком системи

$\begin{cases} x+y+z=1, \\ z=0; \end{cases}$ звідки $x+y=1$ і $y=1-x$).

Таким чином, $\varphi_1(x)=0$, $\varphi_2(x)=1-x$;

4) проводимо далі стрілку паралельно осі Oz так, щоб вона перетнула область Ω (піраміду) і відмічаємо аплікати точок «входу» і «виходу» (нижня межа – це площина xOy, тобто $z = 0$, а верхня межа – це площина P: $x + y + z=1$, звідки $z=1-x-y$.

Таким чином, $h_1(x,y)=0$, $h_2(x,y)=1-x-y$;

5) обчислимо інтеграл

$$\iiint\limits_{\Omega} xyzdxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} xyzdz = \int\limits_0^1 xdx \int\limits_0^{1-x} ydy \left(\frac{z^2}{2} \Big|_0^{1-x-y} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 xdx \int\limits_0^{1-x} y(1-x-y)^2 dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 xdx \int\limits_0^{1-x} [(1-x)^2 y - 2(1-x)y^2 + y^3]dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 xdx \left((1-x)^2 \frac{y^2}{2} - 2(1-x)\frac{y^3}{3} + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{1-x} = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x(1-x)^4 (\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4})dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{6-8+3}{12} \int\limits_0^1 x(1-x)^4 dx = \frac{1}{24}\int\limits_0^1 x(1-x)^4 dx = \begin{vmatrix} t=1-x \\ dt=-dx \\ t_1=1, t_2=0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{24}\int\limits_1^0 (1-t)t^4 dt = \frac{1}{24}\int\limits_0^1 (t^4 - t^5)dt = \frac{1}{24}\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^6}{6} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{24}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{720}$$

3.3 Завдання для самостійного розв'язання

1. Обчислити інтеграл $\iiint\limits_{\Omega} (x+y-z)dxdydz$, де Ω – паралелепипед, обмежений плщинами $x=-1$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=2$.

2. Обчислити інтеграл $\iiint\limits_{\Omega} (x+y+z)dxdydz$, де Ω – піраміда, обмежена площиною $x+y+z=1$ і координатними площинами $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Тема 4. Криволінійні інтеграли І роду

4.1 Основні теоретичні відомості

Нехай функція $f(x, y)$ визначена й неперервна в деякій області D, яка містить гладку криву $L = AB$. Нехай крива L задається рівнянням $y = y(x)$.

Розіб'ємо дугу AB довільним чином на n елементарних дуг точками $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ ($A = A_0$ $B = A_n$). Позначимо довжини елементарних дуг через ΔS_1, ΔS_2, … ΔS_n. На кожній елементарній дузі виберемо по довільній точці $M_i(x_i, y_i)$ і помножимо значення функції $f(x, y)$ в точці M_i на довжину дуги:

$f(x_i, y_i) \cdot \Delta S_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Утворимо суму

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta S_i,$$

яку називають інтегральною сумою.

Границя інтегральної суми за умовою, що $\max \Delta S_i \to 0$, називається криволінійним інтегралом I роду:

$$\lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta S_i = \int_{AB} f(x, y) dS = \int_{L} f(x, y) dS,$$

Тут dS – диференціал дуги.

Криволінійні інтеграли I роду мають властивості, аналогічні властивостям визначеного інтеграла. Але

$$\int_{AB} f(x, y) dS = \int_{BA} f(x, y) dS.$$

Тобто криволінійний інтеграл I роду не залежить від напрямку інтегрування.

Обчислення криволінійних інтегралів I роду зводиться до обчислення визначених інтегралів.

1. Якщо крива L задана рівнянням $y = y(x)$, $x \in [a, b]$, то

$$\int_{L} f(x, y) dS = \int_{a}^{b} f[x, y(x)] \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx. \qquad (8)$$

2. Якщо крива L задана в параметричному вигляді $\begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \end{cases}$, $t_1 \le t \le t_2$

,то

$$\int_{L} f(x, y) dS = \int_{t_1}^{t_2} f[x(t), y(t)] \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt. \qquad (9)$$

4.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L ydl$, де L – дуга параболи $y^2 = x$ від точки $O(0;\,0)$ до точки $A(1;1)$.

Розв'язання: Користуємося формулою (8):

Тут $y = \sqrt{x}$. Тоді $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ і $\dfrac{4x+1}{4x}$.

Тепер обчислимо інтеграл:

$$\int\limits_L ydl = \int\limits_0^1 \sqrt{x}\sqrt{\frac{4x+1}{4x}}dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \sqrt{4x+1}dx =$$

$$= \frac{1}{8}\frac{\sqrt{(4x+1)^3}}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{12}(\sqrt{5}-1) = \frac{5\sqrt{5}-1}{12}.$$

Приклад 2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L y^2 dl$, де дуга L – частина кола $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Розв'язання: Користуємося формулою (8):

$x'(t) = -a\sin t$, $y'(t) = a\cos t, [x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 = a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t = a^2$,

$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dl = adl$.

Тоді

$$\int\limits_L y^2 dl = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2 tadt = a^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 tdt = a^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}dt =$$

$$= \frac{a^3}{2}(t - \frac{1}{2}\sin 2t)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^3}{2}(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\pi + \frac{1}{2}\sin 0) = \frac{a^3}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{a^3\pi}{4}.$$

4.3 Завдання для самостійного розв'язання

1. Обчислити $\int\limits_{AB}(x-y)dS$, де AB – відрізок прямої від $A(0,0)$ до $B(4,3)$.

2. Обчислити $\int\limits_{AB} \frac{y}{\sqrt{x}} dS$, де AB – дуга напівкубічної параболи $y^2 = \left(\frac{4}{9}\right) x^3$ від $A(3, 2\sqrt{3})$ до $A(8, 32\frac{\sqrt{2}}{3})$.

3. Обчислити $\int\limits_{L} y dl$, де L – дуга кола $x = \cos t, \quad y = \sin t \quad (0 \le t \le \pi)$.

Тема 5. Криволінійні інтеграли ІІ роду

5.1 Основні теоретичні відомості

Нехай функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ неперервні в точках дуги AB гладкої кривої L, яка задається рівнянням $y = \varphi(x)$ $(a \le x \le b)$.

Інтегральною сумою для функцій $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ за координатами називається сума виду

$$\sum_{i=1}^{n} [P(x_i, y_i) \cdot \Delta x_i + Q(x_i, y_i) \cdot \Delta y_i],$$

де Δx_i та Δy_i – проекції елементарної дуги на осі Оx та Оy.

Криволінійним інтегралом ІІ роду від виразу $P(x, y) \cdot dx + Q(x, y) \cdot dy$ за напрямом дуги AB називається границя інтегральної суми при умові, що $\max \Delta x_i \to 0$ та $\max \Delta y_i \to 0$.

$\int\limits_{AB} P(x, y) dx = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} P(x_i, y_i) \cdot \Delta x_i$ – криволінійний інтеграл за координатою x.

$\int\limits_{AB} Q(x, y) dx = \lim\limits_{\max \Delta y_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} Q(x_i, y_i) \cdot \Delta y_i$ – криволінійний інтеграл за координатою y.

$\int\limits_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int\limits_{AB} P(x, y) dx + \int\limits_{AB} Q(x, y) dy$ – повний криволінійний інтеграл

Криволінійний інтеграл ІІ роду є робота , яку здійснює змінна сила $\mathbf{F} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ на криволінійному шляху AB (механічний зміст).

Криволінійний інтеграл ІІ роду на відміну від криволінійного інтегралу І роду змінює свій знак на протилежний при зміні напряму шляху інтегрування:

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,\,y)dy = -\int_{BA} P(x,y)dx + Q(x,\,y)dy\,.$$

Криволінійний інтеграл II роду зводиться до визначеного інтегралу за формулою:

1. Якщо крива інтегрування AB задана функцією $y=\varphi(x),\quad a\le x\le b$, то

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,\,y)dy = \int_a^b \{P[x,\varphi(x)] + \varphi'(x)Q[x,\varphi(x)]\}dx\,.$$

2. Якщо крива інтегрування AB задана функцією $x=\psi(y),\quad c\le y\le d$, то

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,\,y)dy = \int_c^d \{\psi'(y)P[\psi(y),y] + Q[\psi(y),y]\}dy\,.$$

3. Якщо крива інтегрування AB задана параметричними рівняннями $x=x(t),\ y=y(t)\quad t_1\le t\le t_2$, то

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,\,y)dy = \int_{t_1}^{t_2} \{P[x(t),y(t)]x'(t) + Q[x(t),y(t)]y'(t)\}dt\,.$$

5.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB} \frac{x}{y}dx$ вздовж лінії $y=5x$ від точки $A(1;\,5)$ до точки $B(2;10)$.

Розв'язання: Зводимо криволінійний інтеграл до визначеного за допомогою рівняння лінії $y=5x$, вздовж якої здійснюється інтегрування

$$\int_{AB} \frac{x}{y}dx = \int_1^2 \frac{x}{5x}dx = \left\{\begin{array}{l} \textit{під знаком інтеграла перейшли} \\ \textit{до змінної } x, \textit{тому для меж інтегрування} \\ \textit{вибираємо абсциси точок } (1,5)\ i\ (2,10) \end{array}\right\} =$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{5}dx = \frac{1}{5}x\Big|_1^2 = \frac{1}{5}.$$

Приклад 2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB} (4x-3)dy$ вздовж лінії $x=y+1$ від точки $A(0;\,-1)$ до точки $B(1;0)$.

Розв'язання:

$$\int_{AB}(4x-3)dy=\begin{Bmatrix} x=y+1.\ \textit{Під знаком інтеграла перейдемо} \\ \textit{до змінної } y, \textit{тому для меж інтегрування} \\ \textit{вибиремо ординати точок } (0,-1)\ i\ (1,0) \end{Bmatrix}=$$

$$=\int_{-1}^{0}[4(y+1)-3]dy=\int_{-1}^{0}(4y+1)dy=2y^2\Big|_{-1}^{0}+y\Big|_{-1}^{0}=-2+1=-1.$$

Приклад 3. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L ydx-(2x+y)dy$ вздовж лінії L – відрізка прямої від точки $A(2;6)$ до точки $B(1;3)$.

Розв'язання: У цьому прикладі рівняння лінії L знайдемо за допомогою рівняння прямої, яка проходить через дві точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-x_1}\Rightarrow\frac{x-2}{1-2}=\frac{y-6}{3-6}\Rightarrow\frac{x-2}{-1}=\frac{y-6}{-3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x-6=y-6\Rightarrow 3x-y=0.$$

Таким чином, рівняння лінії L: $3x-y=0$.

Тут практично однаково можна перейти і до змінної x, і до змінної y. Розглянемо обидва варіанти.

Перейдемо в підінтегральному виразі до змінної x. Для цього рівняння лінії L запишемо у вигляді $y=3x$. Знайдемо диференціал: $dy=3dx$. Тоді

$$\int_L ydx-(2x+y)dy=\int_L 3xdx-(2x+3x)3dx=$$

$$=\begin{Bmatrix} \textit{За умовою прикладу, інтегрування повинно здійснюватися} \\ \textit{по вілрізку прямої від т. } A(2;6) \textit{ до т. } B(1;3) \textit{ Тому межі} \\ \textit{інтегрування будуть від } 2 \textit{ до } 1 \end{Bmatrix}=$$

$$=\int_{2}^{1}3xdx-15xdx=-\int_{2}^{1}12xdx=-6x^2\Big|_{2}^{1}=-6+24=18.$$

Тепер спробуємо перейти в підінтегральному виразі до змінної y. Для цього рівняння лінії L запишемо у вигляді: $x = y/3$. Знайдемо диференціал: $dx = \frac{1}{3}dy$. Тоді

$$\int_L ydx - (2x + y)dy = \int_L y \cdot \frac{1}{3}dy - (2 \cdot \frac{1}{3}y + y)dy =$$

$$= \{\textit{Тут межі інтегрування будуть від } 2 \textit{ до } 1\} =$$

$$= \int_6^3 \frac{1}{3}ydy - \frac{5}{3}ydy = -\frac{4}{3}\int_6^3 ydy = -\frac{4}{3} \cdot \frac{y^2}{2}\Bigg|_6^3 = -\frac{2}{3}(9 - 36) = 18.$$

Зрозуміло, що при розв’язанні цього прикладу необхідно буде самому вирішувати, до якої змінної потрібно перейти в підінтегральному виразі.

Приклад 4. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L y(x-y)dx + xdy$ вздовж лінії L: від точки $A(1;2)$ до точки $B(0;0)$.

Розв’язання: У цьому прикладі краще перейти в підінтегральному виразі до змінної y $\left(x = \frac{1}{4}y^2\right)$. Якщо переходити до змінної x, то потрібно буде записати рівняння лінії L у вигляді $y = 2\sqrt{x}$ і подальше розв’язання буде, мабуть, довшим.

$$\int_L y(x-y)dx + xdy = \left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{4}y^2 \\ dx = \frac{1}{2}ydy \end{array}\right\} = \int_2^0 y\left(\frac{1}{4}y^2 - y\right) \cdot \frac{1}{2}ydy + \frac{1}{4}y^2dy =$$

$$\int_2^0 \left(\frac{1}{8}y^4 - \frac{1}{2}y^3\right)dy + \frac{1}{4}y^2dy = \int_2^0 \left(\frac{1}{8}y^4 - \frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{4}y^2\right)dy =$$

$$= \frac{y^5}{40}\Bigg|_2^0 - \frac{y^4}{8}\Bigg|_2^0 + \frac{y^3}{12}\Bigg|_2^0 = -\frac{32}{40} + 2 - \frac{8}{12} = \frac{8}{15}.$$

Приклад 5. Обчислити криволінійний інтеграл $\oint\limits_L (y-2)dx + x^2dy$, де L – контур фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $y = 9$.

Розв'язання: Маємо замкнений контур (рис. 18). Якщо про напрямок інтегрування в умові нічого не сказано, то інтегрування проводимо в додатному напрямку (проти годинникової стрілки). Як і в попередньому прикладі, інтегруємо по кожній лінії окремо, а потім додаємо одержані результати.

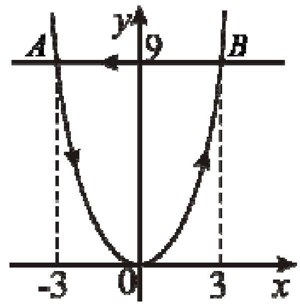


Рис.18

Почнемо, наприклад, з лінії AOB:

$$\int\limits_{AOB} (y-2)dx + x^2dy = \begin{Bmatrix} y = x^2 \\ dy = 2xdx \end{Bmatrix} =$$

$$= \int\limits_{-3}^{3} (x^2-2)dx + x^2 2xdx = \int\limits_{-3}^{3} (2x^3 + x^2 - 2)dx =$$

$$= \frac{x^4}{2}\Big|_{-3}^{3} + \frac{x^3}{3}\Big|_{-3}^{3} - 2x\Big|_{-3}^{3} = \frac{81}{2} - \frac{81}{2} + 9 + 9 - (6+6) = 6.$$

Інтегруємо по прямій BA:

$$\int\limits_{BA} (y-2)dx + x^2dy = \begin{Bmatrix} y = 9 \\ dy = 0 \end{Bmatrix} = \int\limits_{3}^{-3} (9-2x)dx = 7x\Big|_{3}^{-3} = -21 - 21 = -42.$$

Таким чином:

$$\oint\limits_L = \oint\limits_{AOBA} = \int\limits_{AOB} + \int\limits_{BA} = 6 - 42 = -36.$$

Приклад 6. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L xdy$ вздовж лінії

$$L: \begin{cases} y = 4\sin t \\ x = 2\cos t \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi.$$

Розв'язання: Тут крива L задана в параметричному вигляді, і в цьому випадку завжди в підінтегральному виразі здійснюється перехід до змінної t (інших варіантів немає).

$$\int_L xdy = \left\{\begin{matrix} y = 4\sin t \Rightarrow dy = 4\cos tdt \\ x = 2\cos t \end{matrix}\right\} = \int_0^{\pi} 2\cos t \cdot 4\cos tdt = 8\int_0^{\pi} \cos^2 tdt =$$

$$8\int_0^{\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = 4\int_0^{\pi}(1+\cos 2t)dt = 4\left(t\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi} \right) = 4\pi.$$

5.3 Завдання для самостійного розв'язання

1. Обчислити $\int\limits_{AB}(x-y)dx$, де AB – відрізок прямої від $A(0,0)$ до $B(4,3)$.

2. Обчислити $\int\limits_{AB}(x^2-y^2)dx + xydy$, де AB – відрізок прямої від $A(1,1)$ до $B(4,3)$.

3. Обчислити $\int\limits_L (x-y)^2dx + (x+y)^2dy$, якщо L – ламана OAB, $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(4,2)$.

4. Обчислити $\int\limits_L ydx - (y+x^2)dy$, якщо L – дуга параболи $y = 2x - x^2$, яка розташована над віссю Ox і пробігає за ходом годинникової стрілки.

5. Обчислити $\int\limits_L ydx + 2xdy$, якщо L – контур ромба, що пробігається проти ходу годинникової стрілки, сторони ромба лежать на прямих $x/3 + y/2 = \pm 1, \quad x/3 - y/2 = \pm 1$.

6. Обчислити $\int\limits_L 2xdy - 3ydx$, якщо L – контур трикутника з вершинами $A(1,2)$, $B(3,1)$, $C(2,5)$, який пробігається проти ходу годинникової стрілки.

7. Обчислити $\int\limits_L \frac{dy}{x} - \frac{dx}{y}$, якщо L – I чверть кола $x = r\cos t,\ y = rsint$, що пробігається проти ходу годинникової стрілки.

8. Обчислити $\int\limits_L x^2 y dy - y^2 x dx$, якщо $x = \sqrt{\cos t}$, $y = \sqrt{\sin t}$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

Завдання для виконання контрольної роботи

Завдання 1.

Варіант №1

1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2+y}}^{0} f\,dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0} f\,dx$.

2. Обчислити $\iint\limits_D \left(12\,x^2\,y^2 + 16\,x^3 y^3\right) dx\,dy$; $\quad D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}$.

3. Обчислити $\int\limits_L \left(2\,y - 6\,x\,y^3\right)dx + \left(2\,x - 9\,x^2 y^2\right)dy$; $\quad L:\ x=\frac{1}{2}y^2$ від т.O (0; 0) до т.A (2; 2).

Варіант №2

1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f\,dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f\,dx$.

2. Обчислити $\iint\limits_D \left(9\,x^2\,y^2 + 48\,x^3 y^3\right) dx\,dy$; $\quad D: x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^2$.

3. Обчислити $\int\limits_{AB} \left(\frac{x}{y} - 2\right) dx - x^2 y\,dy$, де AB – ломана ACB, A (2; 1), C (2; 4), B (3; 4).

Варіант №3

1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y} f\,dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y^2}} f\,dx$.

2. Обчислити $\iint\limits_D \left(36\,x^2\,y^2 - 96\,x^3 y^3\right) dx\,dy$; $\quad D: x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3$.

3. Обчислити $\int\limits_{AB} x\,y\,dx + \frac{y}{x}dy$, де AB – ломана ACB, A (1; 2), C (5; 2), B (5; 4).

Варіант №4

1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} f\,dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y}} f\,dx$.

2. Обчислити $\iint\limits_D \left(18\,x^2\,y^2 + 32\,x^3 y^3\right) dx\,dy$; $\quad D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}$.

3. Обчислити $\int\limits_{AB} x\,y\,dx - x^2\,dy$; $\quad y=\frac{1}{x}$ від т.A (1/2; 2) до т.B (1/3; 3).

Варіант №5

1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} f\,dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x}^{0} f\,dy$.

2. Обчислити $\iint\limits_{D} \left(27x^2y^2 + 48x^3y^3\right) dx\,dy$;

$D: x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt[3]{x}$.

3. Обчислити $\int\limits_{AB} (x - 2y)dx - \frac{x}{y}dy$, де AB: $y = x^3$ від $A\,(1;\,1)$ до $B\,(2;4)$.

Варіант №6

1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{0}^{1/\sqrt{2}} dy \int\limits_{0}^{\arcsin y} f\,dx + \int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} dy \int\limits_{0}^{\arccos y} f\,dx$

2. Обчислити $\iint\limits_{D} \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right) dx\,dy$; $D: x = 1,\ y = \sqrt[3]{x},\ y = -x^2$.

3. Обчислити $\int\limits_{L} \left(x^2 + y^2\right)^3 ds$; $L: \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$.

Варіант №7

1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2+y}} f\,dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{-y}} f\,dx$

2. Обчислити $\iint\limits_{D} \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right) dx\,dy$; $D: x = 1,\ y = x^3,\ y = -\sqrt{x}$.

3. Обчислити $\int\limits_{AB} x\,dy - (y-1)dx$; $AB: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$, від A (1; 0) до B(0;1).

Варіант №8

1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f\,dx + \int\limits_{1}^{e} dy \int\limits_{-1}^{-\ln y} f\,dx$

2. Обчислити $\iint\limits_{D} \left(27x^2y^2 + 48x^3y^3\right) dx\,dy$; $D: x = 1,\ y = \sqrt{x},\ y = -x^3$.

3. Обчислити $\int\limits_{L} y\,ds$; L: $y^2 = 2px$, відсічена параболою $x^2 = 2py$.

Варіант №9

1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f\,dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{x^2} f\,dy$

2. Обчислити $\iint\limits_{D} \left(4xy + 3x^2y^2\right) dx\,dy$; $D: x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt{x}$.

3. Обчислити $\int\limits_{AB} (1 + x)dy + y\,dx$; AB: $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$, від A(0; 2) до B(2; 0).

Варіант №10

1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f\,dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f\,dy$

2. Обчислити $\iint\limits_{D} \left(12xy + 9x^2y^2\right) dx\,dy$; $D: x = 1,\ y = \sqrt{x},\ y = -x^2$.

3. Обчислити $\int\limits_{AB} \operatorname{arctg}\frac{y}{x} ds$; AB: $y = 2x$, від A (0; 0) до B (1; 2).

Варіант №11

1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{1-x^2}^{1} f\,dy + \int\limits_{1}^{e} dx \int\limits_{\ln x}^{1} f\,dy$

2. Обчислити $\iint\limits_{D} \left(8xy + 9x^2y^2\right) dx\,dy$; $D: x = 1,\ y = \sqrt[3]{x},\ y = -x^3$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл вздовж шляху L
$\int\limits_{L} -x\cos y\,dx + y\sin x\,dy$ вздовж відрізка, з'єднуючого точки (0; 0) та (π;2π).

Варіант №12

1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt[3]{y}} f\,dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{2-y} f\,dx$

2. Обчислити $\iint\limits_{D} \left(24xy + 18x^2y^2\right) dx\,dy$; $D: x = 1,\ y = x^3,\ y = -\sqrt[3]{x}$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл вздовж шляху L
$\int\limits_{L} xy\,dx + (y - x)dy$ вздовж відрізка, з'єднуючого точки (0; 0) та (1; 1).

Варіант №13

1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{0}^{\pi/4} dy \int\limits_{0}^{\sin y} f\,dx + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} dy \int\limits_{0}^{\cos y} f\,dx$

2. Обчислити $\iint\limits_{D} \left(12\,x\,y + 27\,x^2 y^2\right) dx\,dy$; $\quad D: x = 1,\; y = x^2,\; y = -\sqrt[3]{x}$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл вздовж шляху L

$\int\limits_{L} x\,y\,dx + (y - x)\,dy$ вздовж дуги параболи $y = x^2$, з'єднуючої точки (0; 0) та (1; 1).

Варіант №14

1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{-(2+x)}^{0} f\,dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{\sqrt[3]{x}}^{0} f\,dy$

2. Обчислити $\iint\limits_{D} \left(8\,x\,y + 18\,x^2 y^2\right) dx\,dy$; $\quad D: x = 1,\; y = \sqrt[3]{x},\; y = -x^2$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл вздовж шляху L

$\int\limits_{L} x\,y\,dx + (y - x)\,dy$ вздовж дуги параболи $y = x^2$, з'єднуючої точки (0; 0) та (1; 1).

Варіант №15

1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} f\,dx + \int\limits_{1}^{e} dy \int\limits_{\ln y}^{1} f\,dx$

2. Обчислити $\iint\limits_{D} \left(\frac{4}{5}\,x\,y + \frac{9}{11}\,x^2 y^2\right) dx\,dy$; $\quad D: x = 1,\; y = x^3,\; y = -\sqrt{x}$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл вздовж шляху L

$\int\limits_{L} x\,y\,dx + (y - x)\,dy$ вздовж дуги кубічної параболи $y = x^3$, з'єднуючої точки (0; 0) та (1; 1).

Варіант №16

1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f\,dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{0} f\,dx$

2. Обчислити $\iint\limits_{D} \left(\frac{4}{5}\,x\,y + 9\,x^2 y^2\right) dx\,dy$; $\quad D: x = 1,\; y = \sqrt{x},\; y = -x^3$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{L} 2\,x\,y\,dx + x^2\,dy$ вздовж дуги параболи $y = x^2$, з'єднуючої точки (0; 0) та (1; 1).

Варіант №17

1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-y}^{0} f\,dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f\,dx$

2. Обчислити $\iint\limits_D \left(24\,x\,y - 48\,x^3 y^3\right) dx\,dy$; $D: x = 1,\; y = x^2,\; y = -\sqrt{x}$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L (2x + y)\,dx - x^3\,dy$ вздовж дуги параболи $y = x^2$, з'єднуючої точки (0; 0) та (1; 1).

Варіант №18

1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{y^3} f\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f\,dx$

2. Обчислити $\iint\limits_D \left(6\,x\,y + 24\,x^3 y^3\right) dx\,dy$; $D: x = 1,\; y = \sqrt{x},\; y = -x^2$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L y\,dx - x\,dy$ вздовж еліпса

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases},\quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Варіант №19

1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_0^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f\,dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f\,dy$

2. Обчислити $\iint\limits_D \left(4\,x\,y + 16\,x^3 y^3\right) dx\,dy$; $D: x = 1,\; y = \sqrt[3]{x},\; y = -x^3$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L y\,dx + x\,dy$ вздовж дуги кола

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases},\quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

Варіант №20

1. Змінити порядок інтегрування $\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^{0} f\,dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{-y}}^{0} f\,dx$.

2. Обчислити $\iint_D \left(12x^2y^2 + 16x^3y^3\right) dx\,dy$; $D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}$.

3. Обчислити $\int_L \left(2y - 6xy^3\right)dx + \left(2x - 9x^2y^2\right)dy$; $L:\ x = \frac{1}{2}y^2$ від т.O (0; 0) до т.A (2; 2).

Варіант №21

1. Змінити порядок інтегрування $\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f\,dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f\,dx$.

2. Обчислити $\iint_D \left(9x^2y^2 + 48x^3y^3\right) dx\,dy$; $D: x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^2$.

3. Обчислити $\int_{AB} \left(\frac{x}{y} - 2\right)dx - x^2y\,dy$, де AB – ломана ACB, A (2; 1), C (2; 4), B (3; 4).

Варіант №22

1. Змінити порядок інтегрування $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{y} f\,dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} dy \int_{0}^{\sqrt{2-y^2}} f\,dx$.

2. Обчислити $\iint_D \left(36x^2y^2 - 96x^3y^3\right) dx\,dy$; $D: x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3$.

3. Обчислити $\int_{AB} xy\,dx + \frac{y}{x}dy$, де AB – ломана ACB, A (1; 2), C (5; 2), B (5; 4).

Варіант №23

1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} f\, dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x}^{0} f\, dy$.

2. Обчислити $\iint\limits_{D} \left(27x^2 y^2 + 48x^3 y^3\right) dx\, dy$;

$D: x = 1,\ \ y = x^2,\ y = -\sqrt[3]{x}$.

3. Обчислити $\int\limits_{AB} (x - 2y)\, dx - \dfrac{x}{y} dy$, де AB: $y = x^3$ від A (1; 1) до B (2;4).

Варіант №24

1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{0}^{1/\sqrt{2}} dy \int\limits_{0}^{\arcsin y} f\, dx + \int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} dy \int\limits_{0}^{\arccos y} f\, dx$

2. Обчислити $\iint\limits_{D} \left(18x^2 y^2 + 32x^3 y^3\right) dx\, dy$; $D: x = 1,\ \ y = \sqrt[3]{x},\ y = -x^2$.

3. Обчислити $\int\limits_{L} \left(x^2 + y^2\right)^3 ds$; L: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$.

Варіант №25

1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2+y}} f\, dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{-y}} f\, dx$

2. Обчислити $\iint\limits_{D} \left(18x^2 y^2 + 32x^3 y^3\right) dx\, dy$; $D: x = 1,\ \ y = x^3,\ y = -\sqrt{x}$.

3. Обчислити $\int\limits_{AB} x\, dy - (y-1)\, dx$; AB: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$, від A (1; 0) до B(0;1).

Варіант №26

1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f\, dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{x^2} f\, dy$

2. Обчислити $\iint\limits_{D} \left(4xy + 3x^2 y^2\right) dx\, dy$; $D: x = 1,\ \ y = x^2,\ y = -\sqrt{x}$.

3. Обчислити $\int\limits_{AB}(1+x)\,dy + y\,dx$; AB: $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$, від А(0; 2) до В(2; 0).

Варіант №27

1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f\,dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f\,dy$

2. Обчислити $\iint\limits_{D}\left(12\,x\,y + 9\,x^2 y^2\right)dx\,dy$; $D: x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^2$.

3. Обчислити $\int\limits_{AB} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\,ds$; AB: $y = 2\,x$, від А (0; 0) до В (1; 2).

Варіант №28

1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{1-x^2}^{1} f\,dy + \int\limits_{1}^{e} dx \int\limits_{\ln x}^{1} f\,dy$

2. Обчислити $\iint\limits_{D}\left(8\,x\,y + 9\,x^2 y^2\right)dx\,dy$; $D: x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл вздовж шляху L

$\int\limits_{L} -x\cos y\,dx + y\sin x\,dy$ вздовж відрізка, з'єднуючого точки (0; 0) та (π;2π).

Варіант №29

1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} f\,dx + \int\limits_{1}^{e} dy \int\limits_{\ln y}^{1} f\,dx$

2. Обчислити $\iint\limits_{D}\left(\dfrac{4}{5}x\,y + \dfrac{9}{11}x^2 y^2\right)dx\,dy$; $D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл вздовж шляху L

$\int\limits_{L} x\,y\,dx + (y-x)\,dy$ вздовж дуги кубічної параболи $y = x^3$, з'єднуючої точки (0; 0) та (1; 1).

Завдання 2. Задана піраміда яка обмежена координатними площинами і площиною P, визначеною рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$. Зобразити цю піраміду і знайти її об’єм за допомогою потрійного інтеграла.

№	*A*	*B*	*C*	*D*
1	1	2	1	-2
2	2	-1	2	-2
3	2	1	1	-4
4	-1	2	2	-4
5	2	-3	2	-6
6	3	2	3	-6
7	-1	2	1	-4
8	1	1	2	-4
9	1	1	3	-3
10	-1	1	2	-4
11	2	2	-1	-2
12	2	1	-2	-2
13	2	1	1	-4
14	2	-2	-1	-4
15	2	3	-2	-6
16	1	2	-1	-2
17	3	2	3	-6
18	1	2	-1	-4
19	3	1	-1	-3
20	-1	2	1	-4
21	2	2	-1	-4
22	-3	2	2	-6
23	2	3	-3	-6
24	-1	2	1	-2
25	2	-1	2	-4
26	3	-4	2	-12
27	2	3	-1	-6
28	3	-1	2	-6
29	-2	1	-2	-2
30	2	-3	1	-6
31	14	-21	-6	-42

Список рекомендованої літератури

Основна:

1. Архіпова О. С., Протопопова В. П., Пахомова Є. С.. Посібник для розв’язання типових завдань з курсу вищої математики. Харків : ХНАМГ, 2008. 205 с.

2. Бізюк В. В., Якунін А. В. Спеціальні розділи вищої математики для електротехніків. Харків : ХНАМГ, 2008, 300 с.

3. Курпа Л. В. Вища математика в прикладах і задачах. Т. 2. Харків : НТУ «ХПІ», 2009. 432 с.

4. Владіміров В. М., Пучков О. А., Шмигевський М. В. Збірник завдань з вищої математики. Ч. 2. Київ : Політехніка, 2002. 108 с.

5. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика: навч. посіб. для вищих навчальних закладів. Київ : А. С. К., 2006. 648 с.

6. Шкіль М. І. Математичний аналіз: підручник у 2 ч. Ч. 1. Київ : Вища школа, 2005. 449 с.

Додаткова:

1. Дубовик В. П., Юрик І. І., Вовкодав І. І. Вища математика: Збірник задач : навч. посіб. Київ : А.С.К., 2011. 480 с.

2. Ластівка І. О., Безверхий О. І., Кудзіновська І. П.. Вища математика : навч. посіб. Київ : НАУ, 2018. 452 с.

3. Репета В. К., Гаєва К. А., Клешня Н. О. Вища математика : підручник. Ч. 2. Київ : НАУ, 2017. 504 с.

4. Денисюк В. П., Репета В. К., Гаєва К. А., Клешня Н. О. Вища математика. Модульна технологія навчання: навчальний посібник. Ч. 3. Київ : Книжкове вид-во НАУ, 2005. 444 с.

5. Тевяшев А. Д., Литвин О. Г., Кривошеєва Г. М. Вища математика у прикладах і задачах. Ч. 2. Харків : Фактор-Друк, 2002. 596 с.

Зміст

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА
КРАТНІ І КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

Методичні рекомендації

Укладачі: **Борчик** Євген Юрійович

Формат 60х84/16 Ум. друк. арк. 2
Тираж 10 прим. Зам. №

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Г. Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.