МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Інженерно-енергетичний факультет
Кафедра вищої та прикладної математики

ВИЩА МАТЕМАТИКА. ПОХІДНА

Методичні рекомендації
для виконання самостійної роботи здобувачами
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
ОПП «Облік і оподаткування» та
ОПП «Фінанси, банківська справа та страхування»
спеціальностей D1 «Облік і оподаткування» та
D2 «Фінанси, банківська справа, страхування та фондовий ринок»
денної та заочної форми здобуття вищої освіти

МИКОЛАЇВ – 2025

УДК 51
В55

Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету (протокол № 7 від 21.03.2025р.)

Укладач:

В.В. Поживатенко – к.ф.-м.н., старший викладач кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського національного аграрного університету.

Рецензенти:

Передерій В.І. — д-р техн. наук, професор кафедри фізики, математики та інформаційних технологій Миколаївського національного університету ім. В.О. Сухомлинського.

Пархоменко О.Ю. — к. ф.-м. н., доцент кафедри економічної кібернетики, комп'ютерних наук та інформаційних технологій Миколаївського національного аграрного університету.

ЗМІСТ

1 Похідна

1.1 Похідна функції та її геометричний сенс

Похідною функції $f(x)$ називається границя відношення її приросту Δy до відповідного приросту Δx незалежної змінної, коли $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{1}$$

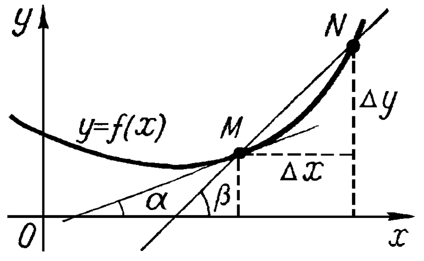

Рис. 1.1

Похідна може позначатися різними способами: y' або $f'(x)$, або $\dfrac{dy}{dx}$. Операція взяття похідної називається диференціюванням.

Геометрично похідна y' функції $y = f(x)$ представляє кутовий коефіцієнт дотичної до графіку цієї функції (рис. 1.1).

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\beta; \qquad y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\beta \to \alpha} \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha.$$

Функція називається диференціюємою в деякій точці x, якщо в цій точці вона має певну похідну, тобто якщо границя (1) існує і має одне й те саме значення при $\Delta x \to 0$ будь-яким способом, при цьому функція буде і неперервною в цій точці.

Неперервність функції є необхідна (але недостатня) умова диференційованості функції. Функція, неперервна в деякій точці x, може бути і недиференційованою в цій точці. Найпростіші випадки недиференційованості неперервної функції $y = f(x)$ зображені на рис. 1.2.

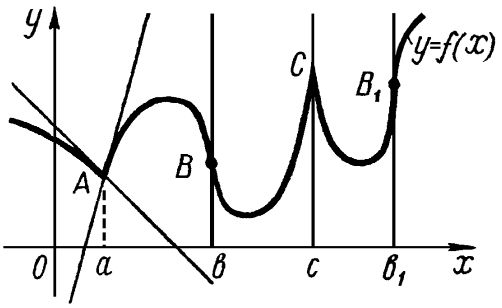

Рис. 1.2

В точці a при $\Delta x \to 0$ відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ не має границі, але має різні однобічні границі при $\Delta x \to -0$ і $\Delta x \to +0$, які називаються однобічними (лівою та правою) похідними:

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_{(-)} \quad \text{і} \quad \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_{(+)}.$$

У відповідній точці графіку функції немає визначеної дотичної, але є дві різні однобічні дотичні з кутовими коефіцієнтами:

$$k_1 = y'_{(-)} \quad \text{і} \quad k_2 = y'_{(+)}.$$

Така точка називається кутовою.

В точках b та b_1 при $\Delta x \to 0$ відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ є знакопостійною нескінченно великою величиною:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty \ (\text{або } +\infty).$$

В цьому випадку говорять, що функція має нескінченну похідну. У відповідних точках графік функції має вертикальну дотичну.

У точці c однобічні похідні є нескінченно великими величинами різних знаків. У відповідній точці графік функції має дві вертикальні дотичні, що злилися.

В точках a, b, b_1 і c функція $y = f(x)$ неперервна, але не диференціюєма.

Для безпосереднього знаходження похідної y' від функції $y = f(x)$ треба виконати наступні дії.

I. Надаємо аргументу x довільний приріст Δx і, підставляючи у даний вираз функції замість x нарощене значення $x + \Delta x$, знаходимо нарощене значення функції:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

II. Віднімаючи з нарощеного значення функції її початкове значення, знаходимо збільшення функції:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

III. Ділимо приріст функції на приріст аргументу, тобто складаємо відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

IV. Шукаємо границю цього відношення при $\Delta x \to 0$. Ця границя і дає шукану похідну y' від функції $y = f(x)$.

Приклад 1. Знайти похідну функції $y = 4x^2 - 3x$.

Розв'язок. Знаходимо покроково:

I. $y + \Delta y = 4\,(x + \Delta x)^2 - 3\,(x + \Delta x) = 4x^2 + 8x\Delta x + 4\Delta x^2 - 3x - 3\Delta x.$

II. $\Delta y = (4x^2 + 8x\Delta x + 4\Delta x^2 - 3x - 3\Delta x) - (4x^2 - 3x) = 8x\Delta x + 4\Delta x^2 - 3\Delta x.$

III. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{8x\Delta x + 4\Delta x^2 - 3\Delta x}{\Delta x} = 8x + 4\Delta x - 3.$

IV. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (8x + 4\Delta x - 3) = 8x - 3.$

Отже, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d\,(4x^2 - 3x)}{dx} = 8x - 3.$

Приклад 2. Знайти похідну функції $y = \dfrac{1}{x}$.

Розв'язок. Знаходимо покроково:

I. $y + \Delta y = \dfrac{1}{x + \Delta x}.$

II. $\Delta y = \dfrac{1}{x + \Delta x} - \dfrac{1}{x} = -\dfrac{\Delta x}{x\,(x + \Delta x)}.$

III. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\dfrac{1}{x\,(x + \Delta x)}.$

IV. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left[-\dfrac{1}{x\,(x + \Delta x)}\right] = -\dfrac{1}{x^2}.$

Отже, $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$.

Приклад 3. Знайти похідну функції $y = \sqrt{x}$.

Розв'язок. Знаходимо покроково:

I. $y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x}$.

II. $\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$.

III. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$.

IV. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x\,(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{x + \Delta x - x}{\Delta x\,(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Отже, $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Приклад 4. Знайти похідну функції $y = \cos 3x$.

Розв'язок. Знаходимо покроково:

I. $y + \Delta y = \cos 3\,(x + \Delta x)$.

II. $\Delta y = \cos 3\,(x + \Delta x) - \cos 3x = -2 \sin\left(3x + \dfrac{3}{2}\Delta x\right) \sin \dfrac{3}{2}\Delta x$.

III. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\dfrac{2 \sin\left(3x + \dfrac{3}{2}\Delta x\right) \sin \dfrac{3}{2}\Delta x}{\Delta x}$.

IV. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -2 \lim\limits_{\Delta x \to 0} \sin\left(3x + \dfrac{3}{2}\Delta x\right) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin \dfrac{3}{2}\Delta x}{\Delta x} =$

$= -2 \sin 3x \cdot \dfrac{3}{2} = -3 \sin 3x$.

Отже, $y' = -3 \sin 3x$.

Завдання та вправи для самостійної роботи студента

Знайти похідні наступних функцій:

1. $y = x^2 + 5x - 1$. **2.** $y = x^3 + 1$.

3. $y = \dfrac{1}{x^2}$. **4.** $y = \dfrac{1}{x^2 + 2}$.

5. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. **6.** $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

7. $y = \sqrt{4x + 1}$. **8.** $y = \sqrt{x^2 - 3}$.

9. $y = \sin 3x$. **10.** $y = \operatorname{tg} 2x$.

11. $y = \sin^2 x$. **12.** $y = \operatorname{tg}^2 x$.

1.2 Правила диференціювання. Похідні найпростіших алгебраїчних та тригонометричних функцій

На практиці похідні більш-менш складних функцій знаходять за формулами диференціювання, а не розшукують за допомогою граничного переходу, як це робиться для елементарних функцій. Тому для елементарних функцій далі ще розглядається одержання їхніх похідних, повний список яких наведений у додатках, але спочатку згадаємо найпростіші формули диференціювання:

1) $(c)' = 0$, тут і далі c – стала;

2) $(u+v)' = u' + v'$, $(u-v)' = u' - v'$ або $(u+v-w)' = u' + v' - w'$, тут і далі u, v, w – довільні функції;

3) $(uv)' = u'v + v'u$;

4) $(cu)' = cu'$;

5) $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$;

6) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$;

7) $\left(\dfrac{u}{c}\right)' = \dfrac{u'}{c}$;

8) $\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{cv'}{v^2}$.

Щоб знайти похідну степеневої функції $y = x^n$ у випадку коли n – ціле додатне число можна скористатись розкладенням за формулою біному Ньютона.

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n =$$

$$= \left[x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n\,(n-1)}{2}\,x^{n-2}\,(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n\right] - x^n =$$

$$= nx^{n-1}\Delta x + \frac{n\,(n-1)}{2}\,x^{n-2}\,(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n.$$

Отже, при $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n\,(n-1)}{2}\,x^{n-2}\,\Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1}.$$

Тоді, переходячи до границі, знаходимо

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Похідні від функцій $\sin x$ і $\cos x$ розшукуються аналогічно прикладу 4 з попереднього пункту. Остаточно маємо

$$(\sin x)' = \cos x,$$

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Похідні від функцій

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

можна знаходити за формулою диференціювання частки (формула 6)).

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$
$$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{(\cos x)' \sin x - (\sin x)' \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Приклад 1. Знайти похідну функції $y = x^2 - 4x + 5$.
Розв'язок. Знаходимо

$$y' = (x^2 - 4x + 5)' = (x^2)' - (4x)' + (5)' = 2x - 4 \cdot 1 + 0 = 2x - 4.$$

Приклад 2. Знайти похідну функції $y = \sqrt{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

Розв'язок. Перепишемо дану функцію, використовуючи дробові та від'ємні показники:

$$y = x^{\frac{1}{2}} - x^{-2} + x^{-\frac{1}{3}}.$$

Тепер диференціюємо:

$$y' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} - (-2)\, x^{-3} - \frac{1}{3} x^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}.$$

Приклад 3. Знайти похідну функції $y = x^3 \left(1 - \dfrac{x}{5} + 2x^5\right)$.
Розв'язок. 1-й спосіб. Диференціюємо за формулою похідної добутку:

$$y' = (x^3)' \left(1 - \frac{x}{5} + 2x^5\right) + x^3 \left(1 - \frac{x}{5} + 2x^5\right)' =$$

$$= 3x^2 \left(1 - \frac{x}{5} + 2x^5\right) + x^3 \left(-\frac{1}{5} + 10x^4\right) = 3x^2 - \frac{4}{5} x^3 + 16x^7.$$

2-й спосіб. Спочатку розкриваємо дужки, а потім диференціюємо:

$$y = x^3 - \frac{x^4}{5} + 2x^8; \qquad y' = 3x^2 - \frac{4}{5} x^3 + 16x^7.$$

Приклад 4. Знайти похідну функції $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$.
Розв'язок. Користуючись формулою для похідної частки, одержуємо

$$y' = \left(\frac{x^2}{x^2 + 1}\right)' = \frac{(x^2)'\,(x^2 + 1) - (x^2 + 1)'\, x^2}{(x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{2x\,(x^2+1) - 2x \cdot x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

Приклад 5. Знайти похідну функції $f(t) = \dfrac{10ab}{a\sin t + b\cos t}$.

Розв'язок. Знов диференціюємо як похідну частки

$$f'(t) = \left(\frac{10ab}{a\sin t + b\cos t}\right)' = \frac{0\cdot(a\sin t + b\cos t) - 10ab\,(a\sin t + b\cos t)'}{(a\sin t + b\cos t)^2} =$$

$$= -10ab \cdot \frac{a\cos t - b\sin t}{(a\sin t + b\cos t)^2}.$$

Приклад 6. Знайти похідну функції $f(\alpha) = \dfrac{\cos\alpha \operatorname{tg}\alpha}{1+2a}$.

Розв'язок. Диференціюємо, враховуючи що знаменник є лише коефіцієнтом:

$$f'(\alpha) = \frac{(\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha)'}{1+2a} = \frac{1}{1+2a}\left[(\cos\alpha)'\operatorname{tg}\alpha + \cos\alpha\cdot(\operatorname{tg}\alpha)'\right] =$$

$$= \frac{1}{1+2a}\left(-\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha + \cos\alpha\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}\right) = \frac{1}{1+2a}\left(\frac{-\sin^2\alpha}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha}\right) =$$

$$= \frac{1-\sin^2\alpha}{(1+2a)\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{(1+2a)\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{1+2a}.$$

Завдання та вправи для самостійної роботи студента

Знайти похідні наступних функцій:

1. $y = x + 2x^3 - \dfrac{x^2}{2}$.

2. $y = x - 3\sqrt{x}$.

3. $y = (\sqrt{x} - \sqrt{a})^2$.

4. $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$.

5. $z = 3\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x^3} + 1$.

6. $u = \dfrac{2t}{t+3}$.

7. $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^2} + 3x^5 - 4}{7\sqrt{x} + 2x - 1}$.

8. $z = \dfrac{x^2-3}{x^2+3}$.

9. $y = \dfrac{1-x^3}{1-x^5}$.

10. $y = \dfrac{2}{(1-x^2)\,(1+x^4)}$.

11. $y = x^2\sin x$.

12. $r = \dfrac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}$.

1.3 Похідна складеної функції

Якщо $y = f(u)$ де $u = \varphi(x)$, тобто якщо y залежить від x через проміжний аргумент u, то y називається складеною фукцією від x.

Похідна складеної функції дорівнює добутку її похідної по проміжному аргументу на похідну цього аргументу по незалежній змінній:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \qquad \text{або} \qquad y' = f'(u) \cdot u'(x).$$

Формули, одержані в попередньому пункті, у випадку складеної функції тоді треба переписати у наступному вигляді:

$$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u';$$

$$(\sin u)' = \cos u \cdot u';$$

$$(\cos u)' = -\sin u \cdot u';$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u};$$

$$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}.$$

Приклад 1. Знайти похідну функції $y = (1 + 3x)^5$.

Розв'язок. Вважаючи $y = u^5$, де $u = 1 + 3x$, та застосовуючи правило диференціювання складеної функції, маємо:

$$\frac{dy}{du} = 5u^4; \qquad \frac{du}{dx} = 3; \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 5u^4 \cdot 3 = 15\,(1 + 3x)^4.$$

Приклад 2. Знайти похідну функції $y = \sin 3x$.

Розв'язок. Вважаючи $3x = u$, знаходимо

$$y' = (\sin 3x)' = (\sin u)' = \cos u \cdot u' = 3\cos 3x.$$

Приклад 3. Знайти похідну функції $y = \sin^2 x$.

Розв'язок. Вважаючи $\sin x = u$, одержимо

$$y' = (\sin^2 x)' = (u^2)' = 2u \cdot u' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x.$$

Приклад 4. Знайти похідну функції $y = \cos x^2$.

Розв'язок. Вважаючи $x^2 = u$, знаходимо

$$y' = (\cos x^2)' = (\cos u)' = -\sin u \cdot u' = -2x \sin x^2.$$

Приклад 5. Знайти похідну функції $y = \sqrt[3]{1 + x^4}$.

Розв'язок. Вважаємо, що $1 + x^4 = u$. Тоді маємо

$$(\sqrt[3]{1 + x^4})' = (\sqrt[3]{u})' = (u^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}\, u^{-\frac{2}{3}}\, u' =$$

$$= \frac{1}{3}\,(1 + x^4)^{-\frac{2}{3}} \cdot 4x^3 = \frac{4x^3}{3\,\sqrt[3]{(1 + x^4)^2}}.$$

Проміжний аргумент можна не вводити явно. При цьому треба продовжувати диференціювати і домножувати на результат цього диференціювання, якщо поточний аргумент є функцією. Тоді цей приклад можна представити таким чином:

$$(\sqrt[3]{1+x^4})' = \left[(1+x^4)^{\frac{1}{3}}\right]' = \frac{1}{3}\,(1+x^4)^{-\frac{2}{3}}\,(1+x^4)' = \frac{4x^3}{3\sqrt[3]{(1+x^4)^2}}.$$

Завдання та вправи для самостійної роботи студента
Знайти похідні наступних функцій:

1. $y = (1+3x)^5$.

2. $y = (2+5x)^3$.

3. $y = \cos(2x-1)$.

4. $y = \sin(4x+1)$.

5. $y = \operatorname{tg}\sqrt{x}$.

6. $y = \sin^4 5x$.

7. $z = \sqrt{x+\sqrt{x}}$.

8. $r = 2\sin^2\dfrac{\varphi}{2}$.

9. $z = \dfrac{1}{(1+\cos 2y)^3}$.

10. $y = \dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 z - \operatorname{tg} z + z$.

11. $y = \dfrac{\sin x}{2\cos^2 x}$.

12. $y = \sin(\cos x) + \cos(\sin x)$.

1.4 Похідні логарифмичних та показових функцій

Знайдемо похідну функції $y = \log_a x$ $(0 < a \neq 1)$. Для будь-якої точки $x > 0$, вважаючи, що $|\Delta x| < x$, можемо записати:

$$\Delta y = \log_a(x+\Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x+\Delta x}{x} = \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

Отже, при $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) = \log_a\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{1/\Delta x}\right] = \frac{1}{x}\log_a\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}\right].$$

Вираз в квадратних дужках має при $\Delta x \to 0$ (при будь-якому фіксованому значенні x) граничне значення, що дорівнює e. Тоді на підставі неперервності функції $y = \log_a x$ в точці $x = e$ витікає існування граничного значення (при $\Delta x \to 0$) правої часитини в цьому рівнянні, що дорівнює $\dfrac{1}{x}\log_a e$. За визначенням похідної це граничне значення дорівнює похідній функції $y = \log_a x$, тобто

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e$$

(для всіх значень $x > 0$). У частинному випадку $a = e$ одержимо

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Показова функція $y = a^x$ $(0 < a \neq 1)$, що визначена на нескінченій прямій, є зворотною для логарифмічної функції $x = \log_a y$, яка визначена на напівпрямій $y > 0$. Тоді у відповідності до теореми про похідну зворотної функції знаходимо

$$(a^x)' = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\dfrac{1}{y}\log_a e} = \frac{y}{\log_a e}.$$

З цієї формули, враховучи $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ або $\log_a b = \log_a e \cdot \ln b$ і те, що $y = a^x$, знаходимо

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

У частинному випадку $a = e$ ця формула приймає вигляд $(e^x)' = e^x$

Запишемо відповідні похідні для складених функцій:

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u}\log_a e;$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u};$$

$$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u';$$

$$(e^u)' = e^u\, u'.$$

Приклад 1. Знайти похідну функції $y = x^3\, 3^x$.

Розв'язок. Знаходимо

$$y' = (x^3)'\, 3^x + x^3\, (3^x) = 3x^2\, 3^x + x^3\, 3^x \ln 3 = x^2\, 3^x\, (3 + x\ln 3).$$

Приклад 2. Знайти похідну функції $y = \sqrt[x]{2} + \dfrac{1}{3^{5x}} + 5^{\sqrt{x}}$.

Розв'язок. Вводимо дробові та від'ємні показники та диференціюємо:

$$y' = \left(2^{\frac{1}{x}} + 3^{-5x} + 5^{x^{\frac{1}{2}}}\right)' =$$

$$= 2^{\frac{1}{x}} \ln 2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' + 3^{-5x} \ln 3 \cdot (-5x)' + 5^{x^{\frac{1}{2}}} \ln 5 \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' =$$

$$= -\frac{1}{x^2} \cdot 2^{\frac{1}{x}} \ln 2 - 5 \cdot 3^{-5x} \ln 3 + \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} 5^{x^{\frac{1}{2}}} \ln 5,$$

що можна переписати у вигляді

$$y' = -\frac{\sqrt[x]{2}}{x^2} \ln 2 - 5 \cdot 3^{-5x} \ln 3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{5^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \ln 5.$$

Приклад 3. Знайти похідну функції $y = \ln\sin 3x$.

Розв'язок. Маємо

$$y' = \frac{(\sin 3x)'}{\sin 3x} = \frac{3\cos 3x}{\sin 3x} = 3\operatorname{ctg} 3x.$$

Приклад 4. Знайти похідну функції $y = x^3 \cos x \, \ln x$.

Розв'язок. Знаходимо

$$y' = (x^3)' \cos x \, \ln x + x^3 (\cos x)' \, \ln x + x^3 \cos x \, (\ln x)' =$$

$$= 3x^2 \cos x \, \ln x - x^3 \sin x \ln x + x^3 \cos x \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= 3x^2 \cos x \, \ln x - x^3 \sin x \ln x + x^2 \cos x.$$

Приклад 5. Знайти похідну функції $y = e^{x^2}$.

Розв'язок. Знаходимо

$$y' = (e^{x^2})' = e^{x^2} \, (x^2)' = 2xe^{x^2}.$$

Приклад 6. Знайти похідну функції $y = \ln \sqrt[3]{\dfrac{(x^2+1)^4 \, (2x-1)^5}{(5x^3+1)^2 \, e^{\operatorname{tg} 3x}}}$.

Розв'язок. Логарифмуючи та використовуючи властивості логарифмів, одержуємо

$$y = \frac{4}{3} \ln(x^2+1) + \frac{5}{3} \ln(2x-1) - \frac{2}{3} \ln(5x^3+1) - \frac{1}{3} \operatorname{tg} 3x.$$

Диференцюючи, знаходимо

$$y' = \frac{4}{3} \cdot \frac{2x}{x^2+1} + \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{2x-1} - \frac{2}{3} \cdot \frac{15x^2}{5x^3+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{\cos^2 3x}$$

або

$$y' = \frac{8x}{3\,(x^2+1)} + \frac{10}{3\,(2x-1)} - \frac{10x^2}{5x^3+1} - \frac{1}{\cos^2 3x}.$$

Завдання та вправи для самостійної роботи студента

Знайти похідні наступних функцій:

1. $y = 2^x + 2^{3x}$.

2. $y = x^{x^2} - e^{-x^2}$.

3. $y = 3\sqrt{x}\, e^{-x}$.

4. $x = e^{a\varphi} \sin b\varphi$.

5. $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

6. $y = \ln(ax^2 + bx + c)$.

7. $y = 2^{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)} + e^{\sin x^2}$.

8. $y = \dfrac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}$.

9. $y = \cos^2 x - 2\ln\cos x$.

10. $y = x\,(1 - \ln x)$.

11. $u = \ln \dfrac{x^2}{1-x^2}$.

12. $v = \ln \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

13. $y = \dfrac{\sin x}{2\cos^2 x} - \dfrac{1}{2} \ln \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)$.

14. $y = \dfrac{e^x \cos x}{\sin x^2}$.

15. $y = \ln^2 \cos^2(4x-1)$.

16. $y = \cos^3 x^3 - e^{x^2} \operatorname{tg} x$.

1.5 Похідні обернених тригонометричних функцій

Функція $y = \arcsin x$ визначена на інтервалі $-1 < x < +1$ і є зворотною для функції $x = \sin y$, що визначена на інтервалі $-\dfrac{\pi}{2} < y < +\dfrac{\pi}{2}$. Відповідно з теоремою про похідну зворотної функції знаходимо:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Аналогічно для функції $y = \arccos x$ (зворотна функція $x = \cos y$ визначена на інтервалі $0 < y < \pi$) маємо

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Для функції $y = \operatorname{arctg} x$, визначеної на нескінченій прямій $-\infty < x < +\infty$, зворотною функцією є $x = \operatorname{tg} y$, що визначена на інтервалі $-\dfrac{\pi}{2} < y < +\dfrac{\pi}{2}$. Тоді знаходимо

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{1/\cos^2 y} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Аналогічно для функції $y = \operatorname{arcctg} x$ (зворотна функція $x = \operatorname{ctg} y$ визначена на інтервалі $0 < y < \pi$) маємо

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'} = -\frac{1}{1/\sin^2 y} = -\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Запишемо відповідні похідні для складених функцій:

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1 - x^2}};$$

$$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1 - x^2}};$$

$$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1 + x^2};$$

$$(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1 + x^2}.$$

Приклад 1. Знайти похідну функції $y = 3\arcsin 5x + 5\arccos 3x$.
Розв'язок. Знаходимо

$$y' = 3 \cdot \frac{(5x)'}{\sqrt{1 - (5x)^2}} + 5 \cdot \left[-\frac{(3x)'}{\sqrt{1 - (3x)^2}}\right] = \frac{15}{\sqrt{1 - 25x^2}} - \frac{15}{\sqrt{1 - 9x^2}}.$$

Приклад 2. Знайти похідну функції $y = 2\arcsin 2x + \arccos 2x$.
Розв'язок. Маємо

$$y' = 2 \cdot \frac{(2x)'}{\sqrt{1-(2x)^2}} - \frac{(2x)'}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \frac{2\cdot 2}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}.$$

Приклад 3. Знайти похідну функції $y = \arcsin\dfrac{a}{x} - \operatorname{arcctg}\dfrac{x}{a}$.
Розв'язок. Знаходимо

$$y' = \frac{\left(\dfrac{a}{x}\right)'}{\sqrt{1-\dfrac{a^2}{x^2}}} - \left[-\frac{\left(\dfrac{x}{a}\right)'}{1+\dfrac{x^2}{a^2}}\right] = \frac{-\dfrac{a}{x^2}}{\sqrt{\dfrac{x^2-a^2}{x^2}}} + \frac{\dfrac{1}{a}}{\dfrac{a^2+x^2}{a^2}} = \frac{a}{a^2+x^2} - \frac{a}{|x|\sqrt{x^2-a^2}},$$

так як $\sqrt{x^2}$ дорівнює $|x|$ і $x \neq 0$.

Приклад 4. Знайти похідну функції $r = \operatorname{arctg}\dfrac{m}{\varphi} + \operatorname{arctg}(m\ \operatorname{tg}\varphi)$.
Розв'язок. Маємо

$$r' = \frac{\left(\dfrac{m}{\varphi}\right)'}{1+\dfrac{m^2}{\varphi^2}} + \frac{(m\operatorname{tg}\varphi)'}{1+m^2\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{-\dfrac{m}{\varphi^2}}{\dfrac{\varphi^2+m^2}{\varphi^2}} + \frac{\dfrac{m}{\cos^2\varphi}}{1+m^2\operatorname{tg}^2\varphi} =$$

$$= -\frac{m}{\varphi^2+m^2} + \frac{m}{\cos^2\varphi + m^2\sin^2\varphi}.$$

Завдання та вправи для самостійної роботи студента
Знайти похідні наступних функцій:

1. $y = \arcsin\sqrt{x}$.

2. $y = \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}$.

3. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}$.

4. $r = \arccos\dfrac{1}{\varphi^2}$.

5. $y = \arccos\dfrac{1}{2x}$.

6. $y = x\arccos x - \sqrt{1-x^2}$.

7. $y = e^{\operatorname{arctg}^3\sqrt{x+4}}$.

8. $y = \ln^2\arcsin^3\sqrt{x}$.

9. $y = \arcsin^3[\ln^2(e^{x^2}+1)]$.

10. $y = x = \varphi\operatorname{arctg}\varphi - \ln\sqrt{1+\varphi^2}$.

11. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{a+x}{1-ax}$.

12. $y = x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1.6 Логарифмічне диференціювання

Деякі функції перед диференціюванням можна прологарифмувати, що може значно спростити пошук похідної.

Якщо треба знайти y' рівняння $y = f(x)$, то виконуємо наступні кроки:

1) логарифмуємо обидві сторони рівняння:

$$\ln y = \ln f(x) = \varphi(x);$$

2) диференціюємо обидві сторони одержаної рівності, де $\ln y$ є складною функцією від x:

$$\frac{y'}{y} = \varphi'(x);$$

3) замінюємо y його виразом через x і визначаємо y':

$$y' = y\varphi'(x) = f(x)\,\varphi'(x).$$

Логарифмічне диференціювання зручно застосовувати, коли задана функція містить операції, що логарифмуються (множення, ділення, зведення у ступінь, знаходження кореня) і, зокрема, для знаходження похідної від показово-ступеневої функції $y = u^v$, де u і v – функції від x.

Приклад 1. Знайти похідну функції $y = x^x$.

Розв'язок. Маємо

1) $\ln y = x\,\ln x$;

2) $\dfrac{y'}{y} = x'\,\ln x + x\,(\ln x)' = \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$;

3) $y' = y\,(1 + \ln x) = x^x\,(1 + \ln x)$.

Приклад 2. Знайти похідну функції $y = \dfrac{2t}{\sqrt{1-t^2}}$.

Розв'язок. Маємо

1) $\ln y = ln2 + \ln t - \dfrac{1}{2}\,\ln(1-t^2)$;

2) $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{-2t}{1-t^2} = \dfrac{1}{t} + \dfrac{t}{1-t^2} = \dfrac{1}{t\,(1-t^2)}$;

3) $y' = \dfrac{y}{t\,(1-t^2)} = \dfrac{2t}{t\,(1-t^2)\,\sqrt{1-t^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{(1-t^2)^3}}$.

Приклад 3. Знайти похідну функції $y = (\cos x)^{\sin x}$.

Розв'язок. Маємо

1) $\ln y = \sin x \cdot \ln\cos x$;

2) $\dfrac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln\cos x - \dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$;

3) $y' = (\cos x)^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln\cos x - \dfrac{\sin^2 x}{\cos x}\right)$.

Приклад 4. Знайти похідну функції $y = (x-1)\,\sqrt[3]{(x+1)^2\,(x-2)}$.

Розв'язок. Маємо

1) $\ln y = \ln(x-1) + \dfrac{2}{3}\ln(x+1) + \dfrac{1}{3}\ln(x-2)$;

2) $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{3\,(x+1)} + \dfrac{1}{3\,(x-2)} = \dfrac{2x^2-3x-1}{(x^2-1)\,(x-2)}$;

3) $y' = \dfrac{2x^2 - 3x - 1}{(x^2-1)(x-2)}(x-1)\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}.$

Приклад 5. Знайти похідну функції $y = \sqrt[5]{\dfrac{e^{\sin^4 x}(x^3+6x-1)^2}{(x^4-5x^2+3)^4}}$.

Розв'язок. Маємо

1) $\ln y = \dfrac{1}{5}\sin 4x + \dfrac{2}{5}\ln(x^3+6x-1) - \dfrac{4}{5}\ln(x^4-5x^2+3);$

2) $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{4}{5}\cos 4x + \dfrac{6x^2+12}{5(x^3+6x-1)} - \dfrac{16x^3-40x}{5(x^4-5x^2+3)};$

3) $y' = \sqrt[5]{\dfrac{e^{\sin^4 x}(x^3+6x-1)^2}{(x^4-5x^2+3)^4}}\left[\dfrac{4}{5}\cos 4x + \dfrac{6x^2+12}{5(x^3+6x-1)} - \dfrac{16x^3-40x}{5(x^4-5x^2+3)}\right].$

Завдання та вправи для самостійної роботи студента

Знайти похідні наступних функцій:

1. $y = (x^2+1)^{2x}$.

2. $y = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

3. $y = (x+1)^{\frac{1}{\sin x}}$.

4. $y = x^{\frac{x}{\ln^2 x}}$.

5. $y = \sqrt[x]{(2x\sin x+1)^2}$.

6. $y = x^{\sin x}$.

7. $y = \left(\dfrac{x}{a}\right)^{ax}$.

8. $r = (\sin\varphi)^{\varphi}$.

9. $y = \sqrt[x]{x}$.

10. $r = \varphi^{e^{\varphi}}$.

11. $y = \dfrac{(1+t^2}{(2+t)^3(3+t)^4}$.

12. $y = \sqrt{\dfrac{(1+x)^2}{\sqrt{(2+x)(3+x)}}}$.

13. $y = \dfrac{x(x^2+1)}{\sqrt{1-x^2}}$.

14. $y = \sqrt[3]{\dfrac{x(1+x^2)}{(1-x)^2}}$.

15. $y = x^{x^2}$.

16. $y = x^{x^x}$.

1.7 Похідні вищих порядків

Якшо y' – похідна від функції $y = f(x)$, то похідна від y' називається другою похідною, або похідною другого порядку від початкової функції y, і позначається y'', або $f''(x)$, або $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Аналогічно визначаються та позачаються похідні будь-якого порядку:

похідна третього порядку: $(y'')' = y''' = f'''(x) = \dfrac{d^3y}{dx^3}$;

похідна четвертого порядку: $(y''')' = y^{(4)} = f^{(4)}(x) = \dfrac{d^4y}{dx^4}$;

$\ldots$;

похідна n-го порядку: $(y^{(n-1)})' = y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \dfrac{d^ny}{dx^n}$.

Для знаходження похідної будь-якого вищого порядку даної функції треба послідовно знаходити всі похідні нижчих порядків.

Для добутку двох функцій можна одержати похідну будь-якого n-го порядку, користуючись формулою Лейбніця:

$$(uv)^{(n)} = (u)^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n\,(n-1)}{2!}\,u^{(n-2)}v^{n} + \cdots +$$

$$+\,u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)}.$$

В деяких інших випадках теж можна явно записати формули для похідних вищого порядку. Наведемо деякі з них.

$$(x^{\alpha})^{(n)} = \alpha\,(\alpha-1)\,(\alpha-2)\,\ldots\,(\alpha-n+1)\,x^{\alpha-n};$$

$$(a^{x})^{(n)} = a^{x}\ln^{n}a;$$

$$(e^{x})^{(n)} = e^{x};$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right);$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right).$$

Приклад 1. Знайти похідну y''' функції $y = x^5 - 3x^3 + 1$.

Розв'язок. Диференціюючи функцію y, одержимо

$$(y)' = y' = 5x^4 - 9x^2.$$

Диференціюючи похідну y', олержимо

$$(y')' = y'' = 20x^3 - 18x.$$

Диференціюючи другу похідну y'', олержимо

$$(y'')' = y''' = 60x^2 - 18.$$

Приклад 2. Знайти похідну $y^{(5)}$ функції $y = \ln x$.

Розв'язок. Знаходимо спочаку першу похідну

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Далі маємо

$$y'' = -x^{-2}; \qquad y''' = 2x^{-3}; \qquad y^{(4)} = -6x^{-4}; \qquad y^{(5)} = 24x^{-5} = \frac{24}{x^5}.$$

Приклад 3. Знайти похідну y'' функції $y = \operatorname{arctg} 3x$.
Розв'язок. Безпосередньо знаходимо

$$y' = (\operatorname{arctg} 3x)' = \frac{(3x)'}{1+(3x)^2} = \frac{3}{1+9x^2};$$

$$y'' = -\frac{2\,(1+9x^2)'}{(1+9x^2)^2} = -\frac{54x}{(1+9x^2)^2}.$$

Приклад 4. Знайти похідну $y^{(12)}$ функції $y = e^x\,(x^2-1)$.
Розв'язок. Застосовуючи формулу Лейбніца, одержимо

$$y^{(12)} = [e^x\,(x^2-1)]^{(12)} =$$

$$= (e^x)^{(12)}\,(x^2-1) + 12(e^x)^{(11)}\,(x^2-1)' + \frac{12\cdot 11}{2}\,(e^x)^{(10)}\,(x^2-1)''.$$

Всі наступні доданки дорівнюють нулю, бо всі вищі похідні від функції x^2-1, починаючи з третьої, тотожньо дорівнюють нулю. Так як похідна будь якого порядку від e^x є e^x, то маємо

$$y^{(12)} = e^x\,(x^2-1) + 12e^x\cdot 2x + 66e^x\cdot 2 = e^x\,(x^2+24x+131).$$

Приклад 5. Знайти похідну $y^{(k)}$ функції $y = x^m$.
Розв'язок. Диференціюючи k разів, одержимо:

$$y = x^m; \qquad y' = mx^{m-1}; \qquad y'' = m\,(m-1)\,x^{m-2}; \qquad \ldots;$$

$$y^{(k)} = m\,(m-1)\,\ldots\,(m-k+1)\,x^{m-k}.$$

Зокрема, якщо m – ціле додатнє число, то

$$y^{(m)} = m! \qquad \text{і} \qquad y^{(m+1)} = y^{(m+2)} = \ldots = 0.$$

Завдання та вправи для самостійної роботи студента

1. Знайти похідну $y^{(4)}$ функції $y = x^6 + e^{2x}$.
2. Знайти похідну y'' функції $y = x\sqrt{1+x^2}$.
3. Знайти похідну y''' функції $y = e^{-x^2}$.
4. Знайти похідну y''' функції $y = \sqrt[5]{x^3}$.
5. Знайти похідну $y^{(4)}$ функції $y = x\sin^2 x$.
6. Знайти похідну $y^{(20)}$ функції $y = x^2\,e^{2x}$.
7. Знайти похідну $y^{(5)}$ функції $y = x\,\ln x$.
8. Знайти похідну $y^{(4)}$ функції $y = e^x\cos x$.
9. Знайти похідну y''' функції $y = t^2 + \sin 5t$.
10. Знайти похідну y''' функції $y = x^5\,\ln x$.
11. Знайти похідну $y^{(4)}$ функції $y = (2x-1)^5$.
12. Знайти похідну $y^{(n)}$ функції $y = a^{2x}$.

1.8 Похідні неявної функції

Якщо y є неявною функцією від x, тобто задана рівнянням $f(x,y)=0$, що не вирішується відносно y, то для знаходження похідної $\dfrac{dy}{dx}$ треба продиференціювати по x обидві частини рівності, пам'ятаючи, що y є функцією від x, і потім розв'язати одержану рівність відносно шуканої похідної. Вона, як правило, буде залежати і від x, і від y: $\dfrac{dy}{dx}=\varphi(x,y)$.

Другу похідну $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ від неявної функції одержуємо, диференціюючи функцію $\varphi(x,y)$ по змінній x і пам'ятаючи при цьому, що y є функцією від x:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\varphi(x,y)}{dx}=F\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right).$$

Замінюючи тут $\dfrac{dy}{dx}$ через $\varphi(x,y)$, отримаємо вираз другої похідної через x і y:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=F[x,y,\varphi(x,y)]=\psi(x,y).$$

Так само і всі вищі похідні від неявної функції можна виразити лише через x і y: щоразу, коли при диференціюванні з'являється похідна $\dfrac{dy}{dx}$, її слід замінювати через $\varphi(x,y)$.

До того ж результату приводить послідовне диференціювання рівності

$$f(x,y)=0$$

з наступним виключенням із отриманої системи всіх похідних нижчого порядку.

Приклад 1. Знайти похідну $\dfrac{dy}{dx}$ неявної функції $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Розв'язок. Диференціюємо по x обидві частини рівності, де y є функцією від x, одержимо

$$\frac{2x}{a^2}-\frac{2yy'}{b^2}=0.$$

Звідси знаходимо

$$y'=\frac{b^2x}{a^2y}.$$

Приклад 2. Знайти похідну $\dfrac{dr}{d\varphi}$ неявної функції $e^{\varphi-1}+r\varphi-5r-1=0$.

Розв'язок. Диференціюючи по φ і вважаючи r функцією φ, знаходимо

$$e^{\varphi-1}+\varphi\frac{dr}{d\varphi}+r-5\frac{dr}{d\varphi}-1=0.$$

З цієї рівності визначаємо
$$\frac{dr}{d\varphi}=\frac{e^{\varphi-1}+r}{5-\varphi}.$$

Приклад 3. Знайти похідну y' неявної функції $x^2+y^2-4x-10y+4=0$.
Розв'язок. Диференціюючи по x, одержимо
$$2x+2yy'-4-10y'=0.$$
Звідси маємо
$$y'=\frac{x-2}{5-y}.$$

Приклад 4. Знайти похідні y'' і x'' неявної функції $y=x+\ln y$.
Розв'язок. Знайдемо спочатку y''. Диференціюємо по x і визначаємо y':
$$y'=1+\frac{y'}{y}; \qquad y'=\frac{y}{y-1}.$$
Диференціюємо останню рівність по x і визначаємо y'':
$$y''=\frac{y'(y-1)-y'y}{(y-1)^2}=-\frac{y'}{(y-1)^2}.$$
Підставляючи замість y' його значення, маємо:
$$y''=-\frac{y}{(y-1)^3}.$$
Тепер знайдемо x''. Диференціюємо дану рівність по y і визначаємо x':
$$1=x'+\frac{1}{y}; \qquad x'=\frac{y-1}{y}.$$
Диференціюємо одержану рівність по y і визначаємо x'':
$$x''=\frac{1\cdot y-1\cdot(y-1)}{y^2}=\frac{1}{y^2}.$$

Приклад 5. Знайти похідну x'' неявної функції $y-x+\operatorname{arctg}x=0$.
Розв'язок. 1-й спосіб. Диференціюємо по y і знаходимо x':
$$1-x'+\frac{x'}{1+x^2}=0; \qquad x'=\frac{x^2+1}{x^2}=1+x^{-2}.$$
Останню рівність знов диференціюємо по y і знаходимо x'':
$$x''=-2x^{-3}x'=-\frac{2x'}{x^3}.$$

Замінюючи x' через $\dfrac{x^2+1}{x^2}$, остаточно одержимо

$$x'' = -\frac{2}{x^3}\,\frac{x^2+1}{x^2} = -\frac{2\,(x^2+1)}{x^5}.$$

2-й спосіб. Послідовно диференціюємо дану рівність по y два рази:

$$1 - x' + \frac{x'}{1+x^2} = 0;$$

$$-x'' + \frac{x''\,(1+x^2) - 2xx'x'}{(1+x^2)^2} = 0.$$

З першого рівняння визначаємо x' і, підставляючи в друге рівняння, знаходимо

$$-x'' + \frac{x''\,(1+x^2) - 2x\,(1+x^2)^2/x^4}{(1+x^2)^2} = 0,$$

з якого виражаємо x'':

$$x'' = -\frac{2\,(x^2+1)}{x^5}.$$

Завдання та вправи для самостійної роботи студента

Знайти похідні наступних функцій:

1. Знайти похідну $\dfrac{dy}{dx}$ неявної функції $3x^2 + 5xy - 2y^2 + 2 = 0$.
2. Знайти похідну y' неявної функції $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.
3. Знайти похідну $\dfrac{dx}{dy}$ неявної функції $e^y \sin x = e^{-x}\cos y$.
4. Знайти похідну $\dfrac{dy}{dx}$ неявної функції $\sqrt[x]{y} = \sqrt[y]{x}$.
5. Знайти похідну y'' неявної функції $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.
6. Знайти похідну y'' неявної функції $y = \mathrm{tg}(x+y)$.
7. Знайти похідну y'' неявної функції $e^x - e^y = y - x$.
8. Знайти похідну y'' неявної функції $x + y = e^{x-y}$.

1.9 Похідні від функції, що задана параметрично

Якщо функція y від незалежної змінної x задана через допоміжну змінну (або параметр) t:

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

то похідні від y по x визначаються формулами:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}; \qquad y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\dfrac{dy'}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}; \qquad y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{\dfrac{dy''}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}; \qquad \ldots$$

Всі ці формули складені за загальним правилом: похідна від параметрично заданої величини по незалежній змінній x дорівнює відношенню похідних від цієї величини і від x, взятих за параметром t.

Можна переписати ці формули безпосередньо через функції φ і ψ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'}{\varphi'};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\dfrac{\psi'}{\varphi'}\right)}{dx} = \frac{d\left(\dfrac{\psi'}{\varphi'}\right)}{\varphi'\,dt} = \frac{\psi''\varphi' - \varphi''\psi'}{(\varphi')^3}$$

і так далі.

Приклад 1. Знайти похідну $\dfrac{dy}{dx}$ функції, що задана параметрично

$$\begin{cases} x = k\sin t + \sin kt, \\ y = k\cos t + \cos kt. \end{cases}$$

Розв'язок. Знаходимо похідні від x і від y по параметру t:

$$\frac{dx}{dt} = k\cos t + k\cos kt; \qquad \frac{dy}{dt} = -k\sin t - k\sin kt.$$

Шукана похідна від y по x знаходиться як відношення похідних від y і x по t:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = -\frac{k\left(\sin t + \sin kt\right)}{k\left(\cos t + \cos kt\right)} = -\frac{2\sin\dfrac{t+kt}{2}\cos\dfrac{t-kt}{2}}{2\cos\dfrac{t+kt}{2}\cos\dfrac{t-kt}{2}} = -\operatorname{tg}\left(\frac{k+1}{2}\,t\right).$$

Приклад 2. Знайти похідну $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ функції, що задана параметрично

$$\begin{cases} x = t^2 + 2t, \\ y = \ln(t+1). \end{cases}$$

Розв'язок. Знаходимо похідні від x і від y по параметру t:

$$\frac{dx}{dt} = 2t + 2 = 2\left(t+1\right); \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t+1}.$$

і шукану похідну від y по x:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{\dfrac{1}{t+1}}{2\left(t+1\right)} = \frac{1}{2\left(t+1\right)^2}.$$

Потім знаходимо похідну від y' по t, а потім шукану другу похідну від y по x як відношення похідних від y' і від x по t:

$$\frac{dy'}{dx} = -\frac{1}{(t+1)^3};$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{1}{(t+1)^3} \cdot \frac{1}{2\,(t+1)} = -\frac{1}{2\,(t+1)^4}.$$

Приклад 3. Знайти похідну $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ функції, що задана параметрично

$$\begin{cases} x = 1 + e^{at}, \\ y = at + e^{-at}. \end{cases}$$

Розв'язок. Послідовно знаходимо

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a - ae^{-at}}{ae^{at}} = e^{-at} + e^{-2at};$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2ae^{-2at} - ae^{-at}}{ae^{at}} = 2e^{-3at} - e^{-2at};$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{\frac{dy''}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2ae^{-2at} - 6ae^{-3at}}{ae^{at}} = 2ae^{-3at} - 6e^{-4at}.$$

Приклад 4. Знайти похідну $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ функції (циклоїди), що задана параметрично

$$\begin{cases} x = a\,(t - \sin t), \\ y = a\,(1 - \cos t). \end{cases}$$

Розв'язок. Послідовно знаходимо

$$x' = a - a\cos t = a\,(1 - \cos t); \qquad y' = a\sin t;$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a\sin t}{a\,(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2};$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\dfrac{dy'}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{\left(\operatorname{ctg}\dfrac{t}{2}\right)'}{a\,(1-\cos t)} =$$

$$= -\frac{1}{2\sin^2\dfrac{t}{2}} \cdot \frac{1}{a\,(1-\cos t)} = -\frac{1}{2\sin^2\dfrac{t}{2}} \cdot \frac{1}{2a\sin^2\dfrac{t}{2}} = -\frac{1}{4a\sin^4\dfrac{t}{2}}.$$

Завдання та вправи для самостійної роботи студента

1. Знайти похідну $\dfrac{dy}{dx}$ функції, що задана параметрично

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3. \end{cases}$$

2. Знайти похідну $\dfrac{dy}{dx}$ функції, що задана параметрично

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases}$$

3. Знайти похідну $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ функції, що задана параметрично

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t. \end{cases}$$

4. Знайти похідну $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ функції, що задана параметрично

$$\begin{cases} x = \cos t + t\sin t, \\ y = \sin t - t\cos t. \end{cases}$$

5. Знайти похідну $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ функції, що задана параметрично

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3 + t. \end{cases}$$

6. Знайти похідну $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ функції, що задана параметрично

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$$

2 Диференціал

2.1 Диференціал функції

З визначень похідної $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ і границі змінної випливає, що

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \varepsilon \quad \text{або} \quad \Delta y = y'\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x,$$

де $\varepsilon \to 0$ при $\Delta x \to 0$, тобто що приріст функції можна розбити на дві частини. Головна частина приросту функції, лінійна відносно приросту незалежної змінної, називається диференціалом функції та позначається знаком d:

$$dy = y'\,\Delta x.$$

Диференціал незалежної змінної x дорівнює її приросту, $dx = \Delta x$. Тому

$$dy = y'\,dx,$$

тобто диференціал функції дорівнює її похідній, помноженої на диференціал незалежної змінної. Для будь-якої функції $y = f(x)$ похідна y' залежить лише від однієї змінної x, тоді як її диференціал dy залежить від двох незалежних одна від однієї змінних: x і Δx. Знаходження диференціала функції називається диференціюванням, так само як і знаходження похідної, адже щоб знайти диференціал будь-якої функції, треба знайти похідну цієї функції і помножити її на диференціал незалежної змінної.

Приклад 1. Знайти приріст і диференціал функції $y = x^3 + 2x$.

Розв'язок. Маємо для приросту функції

$$\Delta y = [(x + \Delta x)^3 + 2\,(x + \Delta x)] - (x^3 + 2x) =$$

$$= 3x^2\,\Delta x + 3x\,\Delta x^2 + \Delta x^3 + 2\Delta x = (3x^2 + 2)\,\Delta x + 3x\,\Delta x^2 + \Delta x^3.$$

Знаходимо диференціал:

$$dy = y'\,\Delta x = (3x^2 + 2)\,\Delta x = (3x^2 + 2)\,dy.$$

Приклад 2. Знайти диференціал функції $y = x^2 - 3^x$.

Розв'язок. Знаходимо похідну даної функції і, помножуючи її на диференціал незалежної змінної, одержуємо шуканий диференціал даної функції:

$$dy = y'\,dx = (x^2 - 3^x)'\,dx = (2x - 3^x\,\ln 3)\,dx.$$

Приклад 3. Знайти диференціал функції $F(\varphi) = \cos\dfrac{\varphi}{2} + \sin\dfrac{2}{\varphi}$.

Розв'язок. Маємо

$$dF(\varphi) = d\left(\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{2}{\varphi}\right) = \left(\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{2}{\varphi}\right)' d\varphi =$$

$$= \left[-\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\left(\frac{\varphi}{2}\right)' + \cos\frac{2}{\varphi}\cdot\left(\frac{2}{\varphi}\right)'\right] d\varphi =$$

$$= -\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\varphi}{2} + \frac{2}{\varphi^2}\cos\frac{2}{\varphi}\right) d\varphi.$$

Приклад 4. Знайти диференціал функції $y = \ln(1+e^{5x}) + \operatorname{arcctg} e^{10x}$.
Розв'язок. Маємо

$$dy = \left[\frac{(1+e^{5x})'}{1+e^{5x}} - \frac{(e^{10x})'}{1+e^{20x}}\right] dx =$$

$$= \left(\frac{5e^{5x}}{1+e^{5x}} - \frac{10e^{10x}}{1+e^{20x}}\right) dx = 5e^{5x}\left(\frac{1}{1+e^{5x}} - \frac{2e^{5x}}{1+e^{20x}}\right) dx.$$

Завдання та вправи для самостійної роботи студента

Знайти диференціали наступних функцій:

1. $y = 2x^2 - 6x + 4$.

2. $y = \sqrt[4]{(x+1)^3}$.

3. $y = (1+\sqrt[3]{x})^3$.

4. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$.

5. $y = \sin x - x\cos x$.

6. $y = \cos(\ln x)$.

7. $y = \ln\operatorname{tg}(ax+b)$.

8. $y = \arcsin\dfrac{x}{2}$.

9. $y = (a+bx)^m$.

10. $y = e^{-t}(2 - 2t - t^2)$.

11. $y = \dfrac{x^n}{n^2}(1 - n\ln x)$.

12. $y = (1 - \ln\sin\varphi)\sin\varphi$.

2.2 Диференціали вищих порядків

Диференціал від першого диференціалу називається диференціалом другого порядку: $d^2y = d(dy)$; аналогічно $d^ny = d(d^{n-1}y)$. Для диференціалів порядку вище першого інваріантність форми порушується: $d^2y = y''(dx)^2$, $d^3y = y'''(dx)^3$, $\ldots$, якщо x – незалежна змінна, але в загальному випадку

$$d^2y = y''_{uu}(du)^2 + y'_u\, d^2u,$$

де $u = f(x)$.

Приклад 1. Знайти диференціал d^2y від функції $y = x^4 - 5x^2 + 1$ у випадку, коли:

1) x – незалежна змінна;

2) x – функція від іншої незалежної змінної.

Розв'язок. Спочатку відмітимо, що диференціал першого порядку dy в силу властивості інваріантності його форми представляється в обох випадках однаково:

$$dy = y'\,dx = (4x^3 - 10x)\,dx = 2\,(2x^3 - 5x)\,dx.$$

Тут мається на увазі, що в першому випадку під dx вважається приріст незалежної змінної Δx (тобто $dx = \Delta x$), а у другому випадку – диференціал від x як від функції (тобто $dx \neq \Delta x$).

Для диференціалів вищого порядку властивість інваріантності форми порушується. Отже, при пошуку d^2y доводиться розв'язувати задачу для кожного випадку окремо.

1) Нехай x – незалежна змінна. В цьому випадку $dx = \Delta x$ не залежить від x і його можна виносити за знак диференціалу:

$$d^2y = d(dy) = d\,[2\,(2x^3 - 5x)\,dx] = 2dx \cdot d\,(2x^3 - 5x) =$$

$$= 2dx \cdot (6x^2 - 5)\,dx = 2\,(6x^2 - 5)\,dx^2.$$

2) Нехай x є у свою чергу функцією від деякої іншої змінної. У цьому випадку dx вже залежить від цієї змінної, і виносити його за знак диференціалу, як в першому випадку, не можна. Потрібно обчислити диференціал як від добутку двох функцій. Тоді маємо:

$$d^2y = d(dy) = d\,[2\,(2x^3 - 5x)\,dx] = 2d\,[(2x^3 - 5x)\,dx] =$$

$$= 2\,[d(2x^3 - 5x)\,dx + (2x^3 - 5x)\,d(dx)] =$$
$$= 2\,[(6x^2 - 5)\,dx \cdot dx + (2x^3 - 5x) \cdot d^2x] =$$
$$= 2\,(6x^2 - 5)\,dx^2 + 2\,(2x^3 - 5x)\,d^2x.$$

Приклад 2. Знайти диференціал d^2y від функції $y = x^6 + e^{2x}$ у випадку, коли:

1) x – незалежна змінна;

2) x – функція від іншої незалежної змінної.

Розв'язок. Знаходимо диференціал першого порядку:

$$dy = (6x^5 + 2e^{2x})\,dx = 2\,(3x^5 + e^{2x})\,dx.$$

1) Якщо x є незалежною змінною, маємо

$$d^2y = d\,[2\,(3x^5 + e^{2x})\,dx] = 2dx \cdot d\,(3x^5 + e^{2x}) =$$

$$= 2dx \cdot (15x^4 + 2e^{2x})\,dx = 2\,(15x^4 + 2e^{2x})\,dx^2.$$

2) Якщо x є функцією від іншої незалежної змінної, маємо

$$d^2y = d\,[2\,(3x^5 + e^{2x})\,dx] = 2d\,[(3x^5 + e^{2x})\,dx] =$$

$$= 2\left[d(3x^5 + e^{2x})\,dx + (3x^5 + e^{2x})\,d(dx)\right] =$$
$$= 2\left[(15x^4 + 2e^{2x})\,dx \cdot dx + (3x^5 + e^{2x})\,d^2x\right] =$$
$$= 2\,(15x^4 + 2e^{2x})\,dx^2 + 2\,(3x^5 + e^{2x})\,d^2x.$$

Приклад 3. Знайти d^2y, d^3y і d^4y від функції $y = f(x)$, вважаючи x функцією від деякої незалежної змінної.

Розв'язок. З визначення диференціалів вищих порядків маємо

$$dy = f'\,dx; \qquad d^2y = d\,(f'\,dx) = f''(dx)^2 + f'\,d^2x;$$
$$d^3y = d\,(f''(dx)^2 + f'\,d^2x) = f'''\,(dx)^3 + 2f''\,dx\,d^2x + f''\,dx\,d^2x + f'\,d^3x =$$
$$= f'''\,(dx)^3 + 2f''\,dx\,d^2x + f'\,d^3x;$$
$$d^4y = f^{(4)}\,(dx)^4 + 3f'''\,(dx)^2\,d^2x + 3f''\,d^3x\,dx + 3f''\,(d^2x)^2 +$$
$$+ 3f'''\,d^2x\,(dx)^2 + f''\,dx\,d^3x + f'\,d^4x = f^{(4)}\,(dx)^4 + 6f'''\,(dx)^2\,d^2x +$$
$$+ 4f''\,dx\,d^3x + 3f''\,(d^2x)^2 + f'\,d^4x.$$

Завдання та вправи для самостійної роботи студента

1. Знайти диференціал d^2y функції $y = \sqrt[3]{x^2}$.
2. Знайти диференціал d^3y функції $y = x^m$.
3. Знайти диференціал d^2y функції $y = (x+1)^3\,(x-1)^2$.
4. Знайти диференціал d^2y функції $y = 4^{-x^2}$.
5. Знайти диференціал d^2y функції $y = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{b}{a}\operatorname{tg} x\right)$.
6. Знайти диференціал d^2y функції $y = \sqrt{\ln^2 x - 4}$.
7. Знайти диференціал d^3y функції $y = \sin^2 x$.
8. Знайти диференціал $d^2\rho$ функції $\rho^2 \cos^3\varphi - a^2 \sin^3\varphi = 0$.
9. Знайти диференціал d^2y функції $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.
10. Знайти диференціал d^2y функції $y = \ln\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

Література

[1] Бубняк Т. І. Вища математика : навчальний посібник. Львів : Новий світ-2000, 2023. 436 с.

[2] Казановський В. І., Африканова А. Г., Віштакалюк Н. А., Дрозденко О. Л. Вища математика : навч. посіб. Київ : Аграрна освіта, 2014. 367 с.

[3] Коляда Р. В., Мельник І. О., Мельник О. М. Вища математика. Львів : Магнолія-2006, 2023. 342 с.

[4] Лозовий Б. Л., Пушак Я. С., Шабат О. Є. Практикум з вищої математики : навч. посіб. Львів : Магнолія-2006, 2023. 385 с.

[5] Прикладна математика : навч. посіб. / уклад. О. В. Шебаніна, В.П. Клочан, І.В. Клочан та ін. Миколаїв : МНАУ, 2018. 164 с. URL: https://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/8623

Додаток A. Таблиця похідних

1.	$y = c$	$y' = 0$
2.	$y = x$	$y' = 1$
3.	$y = x^{\mu}$	$y' = \mu x^{\mu-1}$
3a.	$y = \dfrac{1}{x}$	$y' = -\dfrac{1}{x^2}$
3b.	$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
4.	$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$
4a.	$y = e^x$	$y' = e^x$
5.	$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{\log_a e}{x}$
5a.	$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$
6.	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
7.	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
8.	$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
9.	$y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
10.	$y = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11.	$y = \arccos x$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12.	$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$
13.	$y = \operatorname{arcctg} x$	$y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Додаток Б. Таблиця похідних складених функцій

$$
\begin{array}{ll}
1. & (u^n)' = nu^{n-1} \cdot u' \\
2. & (\sin u)' = \cos u \cdot u' \\
3. & (\cos u)' = -\sin u \cdot u' \\
4. & (\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u} \\
5. & (\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u} \\
6. & (a^u)' = a^u \ln a \cdot u' \\
6a. & (e^u)' = e^u \cdot u' \\
7. & (\log u)' = \dfrac{u'}{u} \log e \\
7a. & (\ln u)' = \dfrac{u'}{u} \\
8. & (\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \\
9. & (\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \\
10. & (\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{u'}{1+u^2} \\
11. & (\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}
\end{array}
$$

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА. ПОХІДНА

Методичні рекомендації

Укладач: **Поживатенко** Віталій Володимирович

Формат 60х84 1/16. Ум. друк. арк. 2,0.
Тираж 20 прим. Зам. №______

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного університету
54008, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.