

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ

Інженерно-енергетичний факультет

Кафедра вищої та прикладної математики

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Аналітична геометрія

методичні рекомендації для практичних занять
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
ОПП «Менеджмент» спеціальності D3 «Менеджмент»
денної та заочної форм здобуття вищої освіти

МИКОЛАЇВ
2025

УДК 51
В55

Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету МНАУ (протокол № 8 від 18.04.2025 р.)

Укладач:

В. М. Дармосюк кандидат фізико-математичних наук, доцент
кафедри вищої та прикладної математики
Миколаївського національного аграрного
університету

Рецензенти:

Махровська Н. А. кандидат фізико-математичних наук, доцент
кафедри теорії й методики природничо-
математичної освіти та інформаційних технологій
Миколаївського обласного інституту
післядипломної педагогічної освіти

Пархоменко О. Ю. кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент
кафедри економічної кібернетики, комп'ютерних
наук та інформаційних технологій Миколаївського
національного аграрного університету

© Миколаївський національний аграрний університет, 2025

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
Тема 1. СИСТЕМА ПРЯМОКУТНИХ КООРДИНАТ НА ПЛОЩИНІ. ЗАСТОСУВАННЯ КООРДИНАТ ДЛЯ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ПЛАНІМЕТРІЇ.....	5
Тема 2. ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ. ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ПРЯМИХ. ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО ПРЯМОЇ.....	12
Тема 3. ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ НА ПЛОЩИНІ.....	22
Тема 4. ПЕРЕТВОРЕННЯ ПРЯМОКУТНИХ КООРДИНАТ НА ПЛОЩИНІ. ПОЛЯРНІ КООРДИНАТИ.....	31
Тема 5. ПЛОЩИНА У ПРОСТОРІ. ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ПЛОЩИН І ТОЧКИ У ПРОСТОРІ.....	38
Тема 6. ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ПРЯМИХ І ПЛОЩИНИ.....	45
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	52

ВСТУП

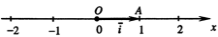
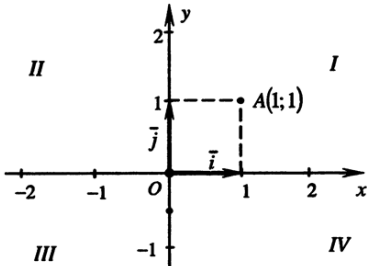
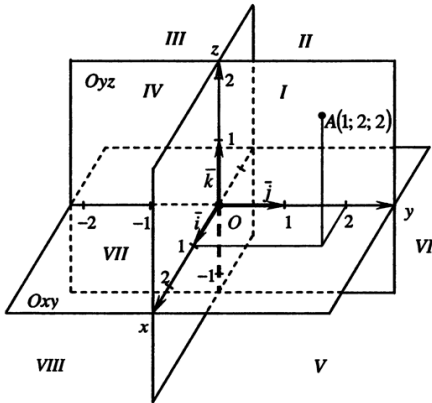
Курс «Вища математика» забезпечує інструментарій для кількісного аналізу економічних процесів, моделювання економічних явищ та прийняття оптимальних рішень в умовах ринкової невизначеності. Розділ «Аналітична геометрія» даного курсу, на ряду з іншими, формує фундамент математичних знань для здобувачів вищої освіти економічних спеціальностей.

Метою методичних рекомендацій є надання здобувачам освіти систематизованого матеріалу для вивчення основних тем аналітичної геометрії, а також формування у них навичок застосування математичних методів в економічних дослідженнях. Наведенні приклади застосування цих методів у вирішенні прикладних економічних задач, що дозволить студентам не лише засвоїти теоретичні основи, але й навчитися використовувати їх у практичній діяльності.

Методичні рекомендації створено відповідно до програми курсу «Вища математика» для здобувачів освітнього рівня «бакалавр» спеціальностей D3 «Менеджмент».

В методичних рекомендаціях наведено короткі теоретичні відомості, завдання для аудиторної та самостійної роботи, які спрямовані на вдосконалення вмінь та навичок здобувачів освіти з даного розділу курсу «Вища математика». Також наведено приклади розв'язання типових задач, що допоможе студентам краще зрозуміти матеріал і підготуватися до практичних занять, поточного та підсумкового контролю.

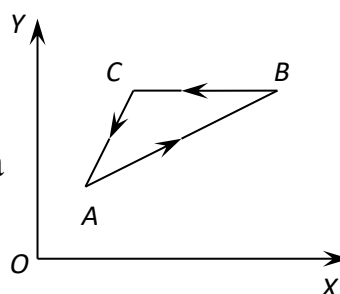
**Тема 1. СИСТЕМА ПРЯМОКУТНИХ КООРДИНАТ НА
ПЛОЩИНІ. ЗАСТОСУВАННЯ КООРДИНАТ ДЛЯ
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ПЛАНІМЕТРІЇ**
Короткі теоретичні відомості

пряма	площина	простір
Система координат		
		
Координати точок А і В		
$A(x_1)$ і $B(x_2)$	$A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$	$A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$
Відстань між точками А та В		
$d_{AB} = x_2 - x_1 $	$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
Поділ відрізка АВ в заданому відношенні $\lambda = AM / MB$		
$x = \frac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1 + \lambda}$	$x = \frac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1 + \lambda},$ $y = \frac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1 + \lambda}$	$x = \frac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1 + \lambda},$ $y = \frac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1 + \lambda},$ $z = \frac{z_1 + \lambda \cdot z_2}{1 + \lambda}$
Координати середини відрізка АВ		
$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$	$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$	$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$
	$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$	$y = \frac{y_1 + y_2}{2},$ $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$

Площа орієнтованого трикутника на площині з вершинами в точках $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ і $C(x_3; y_3)$ обчислюється за формулою:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Ми можемо одержати в правій частині як додатне, так і від'ємне значення, в залежності від того, чи буде обхід периметра від вершини A до B і до C відповідати додатному обертанню (проти годинникової стрілки) або від'ємному (за годинниковою стрілкою), тобто якщо розглядати неорієнтований трикутник, то його площу обчислюють за формулою:



$$S = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right\|$$

Точки, які лежать на одній прямій, називаються колінеарними. Якщо три точки на площині колінеарні, то площа трикутника ABC дорівнює нулю, тому ознака колінеарності трьох точок на площині має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Методичні вказівки до розв'язання завдань

Приклад 1. Знайти відстань між точками $A(-3; 2)$ і $B(9; -3)$; координати точки M_1 , що поділяє відрізок AB у відношенні $\lambda = \frac{AM_1}{M_1B} = \frac{4}{1}$;

координати точки M_2 , що поділяє відрізок AB у відношенні $\lambda = \frac{AM_2}{M_2B} = \frac{1}{4}$. Виконати відповідні побудови в системі координат.

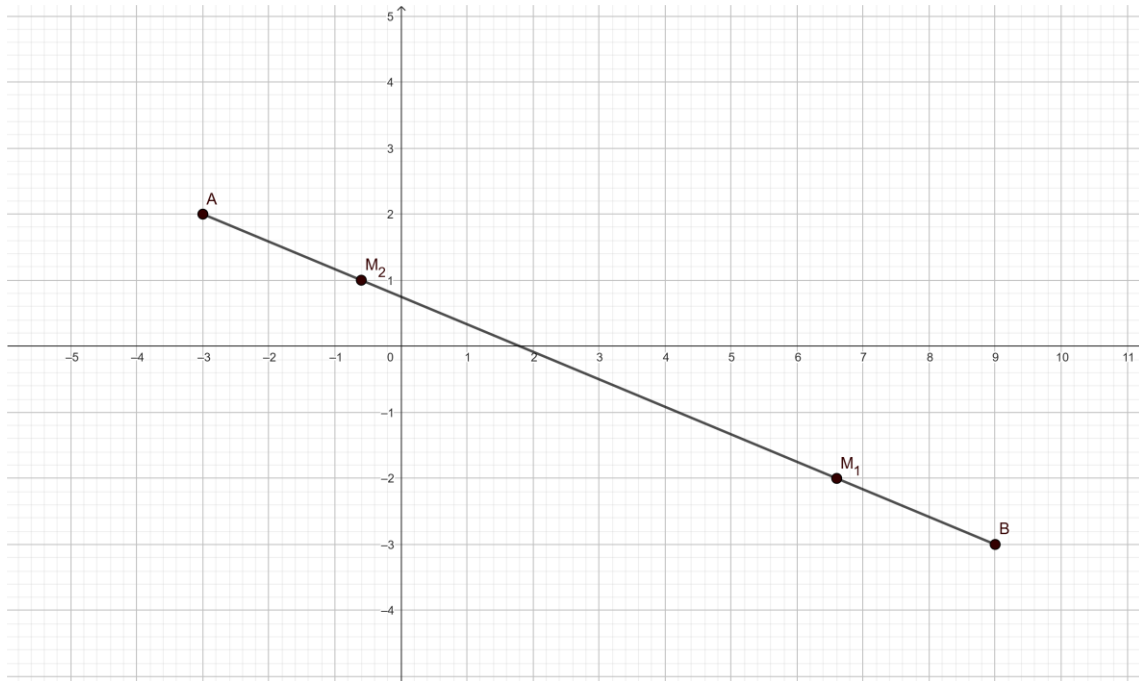
Розв'язання:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(9 - (-3))^2 + (-3 - 2)^2} = \sqrt{(12)^2 + (-5)^2} = \sqrt{169} = 13.$$

Так як $x_{M_1} = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}$, $y_{M_1} = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda}$, то $x_{M_1} = \frac{-3 + 4 \cdot 9}{1 + 4} = \frac{33}{5} = 6,6$,

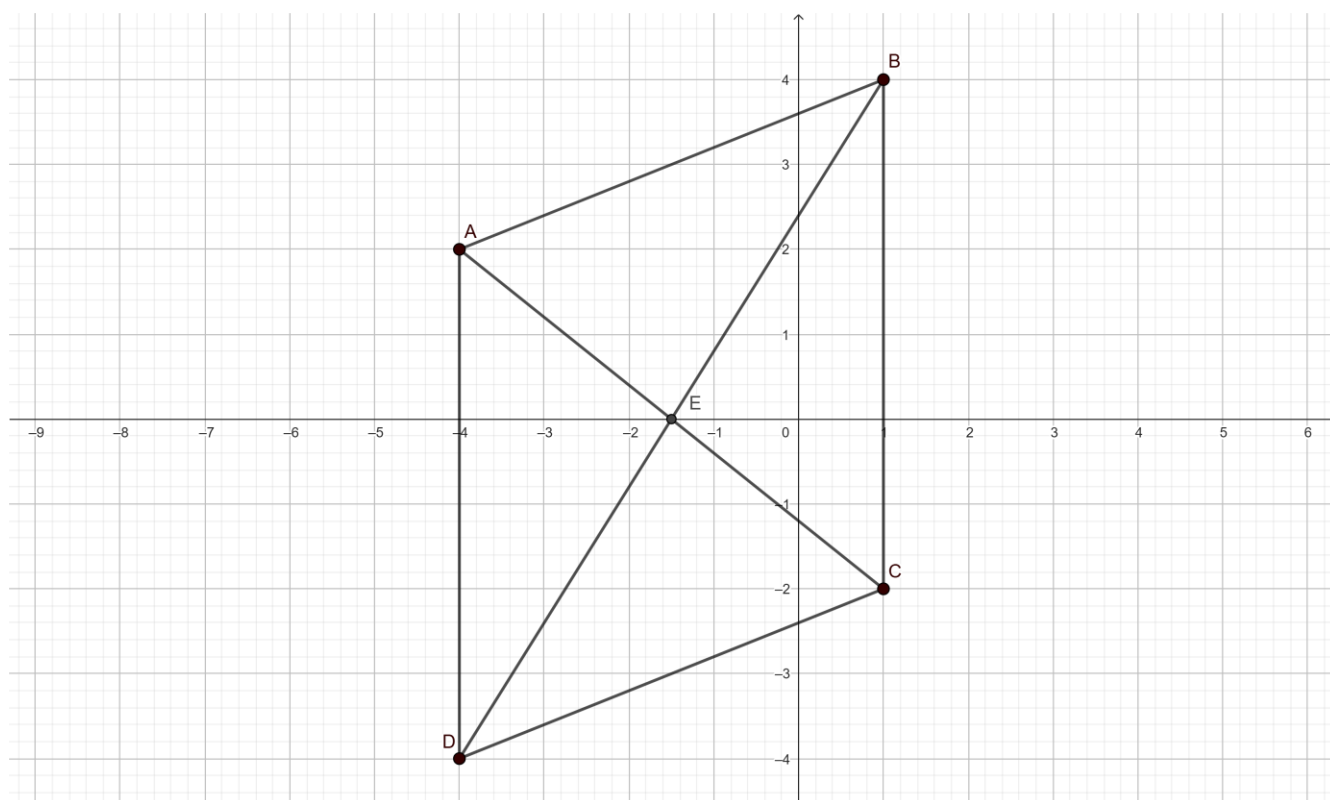
$$y_{M_1} = \frac{2 + 4 \cdot (-3)}{1 + 4} = \frac{-10}{5} = -2, M_1(6,6; -2);$$

$$x_{M_2} = \frac{-3 + \frac{1}{4} \cdot 9}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{-\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = -\frac{3}{5} = -0,6, y_{M_2} = \frac{2 + \frac{1}{4} \cdot (-3)}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{4}} = 1, M_2(-0,6; 1).$$



Приклад 2. Точки $A(-4; 2)$, $B(1; 4)$, $C(1; -2)$ – вершини паралелограма $ABCD$. Знайти координати D .

Розв'язання:



E – середина AC , тоді маємо $x_E = \frac{x_A + x_C}{2}$, $y_E = \frac{y_A + y_C}{2}$ або

$$x_E = \frac{-4 + 1}{2} = \frac{-3}{2} = -1,5; \quad y_E = \frac{2 - 2}{2} = 0.$$

E – середина BD , з $x_E = \frac{x_B + x_D}{2}$, $y_E = \frac{y_B + y_D}{2}$ дістанемо $x_D = 2x_E - x_B$, $y_D = 2y_E - y_B$. Тоді $x_D = 2 \cdot (-1,5) - 1 = -3 - 1 = -4$; $y_D = 2 \cdot 0 - 4 = -4$.

Приклад 3. Пряма проходить через точки $M(-4;12)$, $N(16;2)$. На прямій знайти абсцису точки, ордината якої дорівнює 8.

Розв'язання:

Точка $K(x;8)$ поділяє відрізок MN у відношенні $\lambda = \frac{MK}{KN}$.

$$\text{З } y_K = \frac{y_M + \lambda \cdot y_N}{1 + \lambda} \text{ знайдемо } \lambda: 8 = \frac{12 + \lambda \cdot 2}{1 + \lambda}; 8 + 8 \cdot \lambda = 12 + 2 \cdot \lambda; 6 \cdot \lambda = 4;$$

$$\lambda = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Тоді } x_K = \frac{x_M + \lambda \cdot x_N}{1 + \lambda}; \quad x_K = \frac{-4 + \frac{2}{3} \cdot 16}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{-12 + 32}{3 + 2} = 4.$$

Приклад 4. Дано вершини трикутника $A(4;2)$, $B(14;10)$, $C(18;-6)$.

Знайти S_{Δ} .

Розв'язання: Площа трикутника

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 18 & -6 & 1 \\ 14 & 10 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (180 - 24 + 28 - 40 - 36 + 84) = 96_{\text{кв.од.}}$$

Завдання для аудиторної та самостійної роботи

Завдання 1. На координатній площині xOy знайти відстань між точками $A(2\alpha + 1; \alpha + 5)$ і $B(-2\alpha - 3; -2\alpha + 2)$; координати точки M_1 , що поділяє відрізок AB у відношенні $\lambda = \frac{AM_1}{M_1B} = \frac{3}{1}$; координати точки M_2 , що

поділяє відрізок AB у відношенні $\lambda = \frac{AM_2}{M_2B} = \frac{1}{3}$.

Завдання 2. Точки $A(-22 + \alpha; -20)$, $B(-10; 35)$, $C(25; 50)$ – три вершини паралелограма, де A і C – протилежні вершини. Знайти координати четвертої вершини D .

Завдання 3. Пряма проходить через точки $M(20 + \alpha; -20)$, $N(100; 25)$. На прямій знайти абсцису точки, ордината якої дорівнює $\alpha + 30$.

Завдання 4. Дано вершини трикутника $A(10; \alpha + 1)$, $B(1; 3 + \alpha)$, $C(4; \alpha - 2)$. Знайти площу трикутника. Визначити чи точка $D(3; \alpha - 1)$ належить трикутнику.

Завдання 5*. На координатній площині xOy задано вершини трикутника ABC : $A(-3;1)$, $B(0,5)$, $C(6;-11)$. Знайти довжини медіани BM , висоти CN та бісектриси AD .

Завдання 6. Маркетинговий відділ компанії розмістив три точки продажу в містах, координати яких на умовній карті регіону задані як $A(3;\alpha+1)$, $B(4;0)$, $C(\alpha;6)$. Побудуйте карту регіону з нанесенням точок продажу та визначте, які пари точок знаходяться ближче одна до одної. Які логістичні висновки можна зробити на основі відстаней між точками?

Завдання 7. Управління логістики планує розміщення нового складу, що має рівновіддалено обслуговувати два основні пункти доставки з координатами $A(5;\alpha-1)$, $B(8;10)$. Знайдіть координати точки, де доцільно розташувати склад, щоб відстань до пунктів була найкоротшою.

Завдання 8. Підприємець планує розміщення нового торгового павільйону в торговельному ряду між двома магазинами $A(\alpha-1;5)$, $B(2;3)$ при цьому нова точка має бути вдвічі ближче до магазину A . Знайдіть координати місця встановлення павільйону.

Питання для самоперевірки

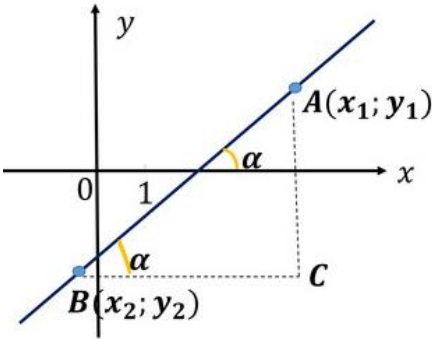
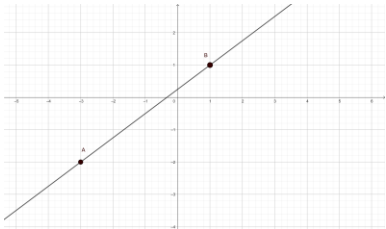
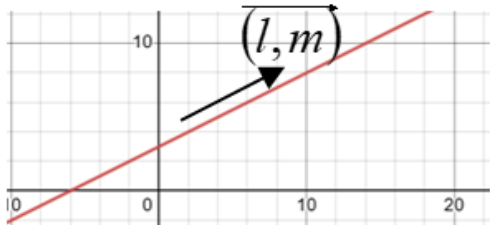
1. Що таке система прямокутних координат на площині і з яких елементів вона складається?
2. Що називається координатами точки в системі координат? Як визначити координати точки в системі координат?
3. У скількох чвертях ділить координатна площина простір і як визначити, в якій чверті лежить точка?

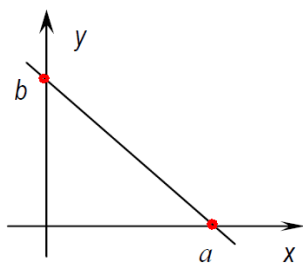
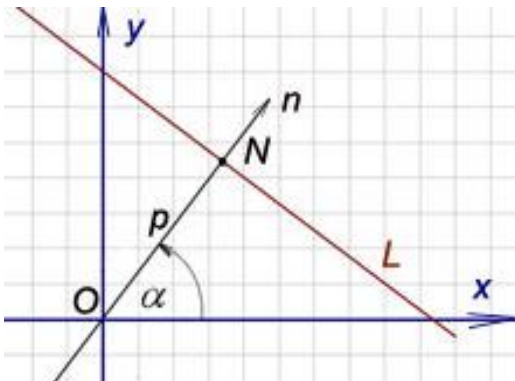
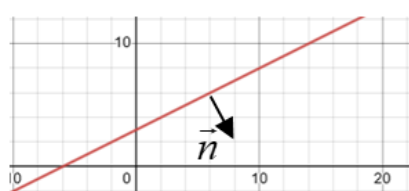
4. Яке геометричне значення має координата точки, якщо вона дорівнює нулю?
5. Як змінюються координати точки при симетрії відносно осі абсцис? відносно осі ординат? відносно початку координат?
6. Як обчислюють координати точки М, яка ділить відрізок АВ в заданому відношенні?
7. Як знайти координати середини відрізка, якщо відомі координати його кінців?
8. Якщо точка М ділить відрізок АВ у відношенні λ , то в якому відношенні точка М ділить відрізок ВА?
9. За якою формулою обчислюється відстань між двома точками в прямокутній декартовій системі координат?
10. Якщо точка М ділить відрізок АВ у відношенні 7:3, то до якого з кінців відрізка точка М знаходиться ближче?
11. Як можна задати геометричне місце точок рівновіддалених від двох заданих точок?
12. Де знаходиться точка, що знаходиться на однаковій і найменшій відстані від двох заданих точок?
13. За якою формулою можна обчислити площу трикутника в прямокутній декартовій системі координат, якщо відомі координати вершин трикутника?
14. Як використовуються координати точок на площині для побудови моделей у логістиці та маркетингу? Наведіть приклад.

Тема 2. ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ. ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ПРЯМИХ. ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО ПРЯМОЇ.

Короткі теоретичні відомості

ВИДИ РІВНЯНЬ ПРЯМОЇ НА ПЛОЩИНІ

1	Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом 	Якщо $k = \operatorname{tg} \alpha$ – кутовий коефіцієнт прямої, тобто тангенс кута, який утворює пряма з додатнім напрямком осі Ox, причому цей кут відраховується від осі Ox до прямої проти руху часової стрілки; b – величина відрізка, який пряма відтинає на осі ординат, то рівняння прямої: $y = kx + b,$ Кутовий коефіцієнт прямої, якщо відомі координати двох точок прямої, можна знайти за формулою $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$
2	Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки 	Нехай $A(x_1; y_1)$ та $B(x_2; y_2)$ задані точки прямої. Рівняння прямої матиме вигляд: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$
3	Канонічне рівняння прямої 	Рівняння прямої, що проходить через точку $A(x_1; y_1)$ прямої паралельно вектору $(l; m)$ матиме вигляд: $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m},$

		Вектор $\overrightarrow{(l;m)}$ – напрямним вектор прямої.
4	Рівняння прямої, що проходить через задану точку в заданому напрямку	Рівняння прямої, що проходить через задану точку $(x_0; y_0)$ в заданому напрямі, який визначається кутовим коефіцієнтом k : $y - y_0 = k(x - x_0).$
5	Рівняння прямої у відрізках на осях 	Якщо a – відрізок, який пряма відтинає на осі абсцис від початку координат, а b – відрізок, який пряма відтинає на осі ординат від початку координат, то рівняння прямої матиме вигляд $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
6	Нормальне рівняння прямої 	Якщо p – довжина перпендикуляра, який проведено з початку координат до прямої, α – кут, який цей перпендикуляр утворює з додатнім напрямком осі Ox , то нормальне рівняння прямої матиме вигляд: $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,$ Для приведення загального рівняння до нормального вигляду його потрібно помножити на нормуючий множник $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ (знак множника протилежний знаку C у загальному рівнянні).
7	Загальне рівняння прямої 	Якщо вектор $\vec{n}(A; B)$ – є вектором нормалі до прямої, то загальне рівняння прямої має вигляд: $Ax + By + C = 0$

Координати точки перетину двох прямих знаходять, розв'язуючи систему рівнянь
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$
 Прямі перетинаються, якщо $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$.

Кутом між прямими a і b називається кут, на який потрібно повернути пряму a навколо точки перетину цих прямих проти годинникової стрілки до співпадання її з прямою b .

Якщо дві прямі задані рівняннями $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, то кут між прямими φ визначається за формулою

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Якщо рівняння прямих задані в загальному вигляді, то кут між ними

визначається за формулою
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}.$$

Умови паралельності двох прямих	а) $k_1 = k_2$; б) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.
Умови перпендикулярності двох прямих	а) $k_1 = -\frac{1}{k_2}$; б) $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$
Формула відстані від точки $(x_0; y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$	$d = \frac{ Ax_0 + By_0 + C }{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Методичні вказівки до розв'язання завдань

Приклад 1. Задано координати точок $A(-4; 4)$, $B(8; 3)$, $C(2; 5)$, $D(-7; -1)$. Завдання: для прямих AB і CD записати: 1) рівняння через дві точки; 2) загальні рівняння; 3) рівняння з кутовим коефіцієнтом; 4) рівняння у

відрізках на осях; 5) нормальні рівняння; 6) знайти координати точки перетину прямих AB і CD , 7) знайти відстань від точки $F(4; -5)$ до прямих; 8) записати рівняння прямої, що проходить через точку $F(4; -5)$ перпендикулярно до прямої AB ; 9) записати рівняння прямої, що проходить через точку $F(4; -5)$ паралельно до прямої CD ; 10) знайти кут між прямими AB і CD .

Розв'язання:

$A(-4;4), B(8;3)$		$C(2;5), D(-7;-1)$	
1)Рівняння прямої, яка проходить через дві точки має вигляд: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$			
$\frac{x-(-4)}{8-(-4)}=\frac{y-4}{3-4}; \frac{x+4}{12}=\frac{y-4}{-1}$	$\frac{x-2}{-7-2}=\frac{y-5}{-1-5};$ $\frac{x-2}{3}=\frac{y-5}{2}$	$\frac{x-2}{-9}=\frac{y-5}{-6};$	
2). Знаходимо загальне рівняння прямої			
$-x-4=12y-48; \quad x+12y-44=0.$		$2x-4=3y-15; \quad 2x-3y+11=0.$	
3) Розв'язавши загальне рівняння прямої відносно y , знайдемо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:			
$12y=-x+44; \quad y=-\frac{1}{12}x+\frac{11}{3}.$		$3y=2x+11; \quad y=\frac{2}{3}x+\frac{11}{3}.$	
4) Із загального рівняння знаходимо рівняння прямої у відрізках на осях:			
$x+12y=44; \quad \frac{x}{44}+\frac{12y}{44}=\frac{44}{44};$ $\frac{x}{44}+\frac{y}{\frac{11}{3}}=1$, тобто пряма AB відтинає		$2x-3y=-11; \quad \frac{2x}{-11}+\frac{-3y}{-11}=\frac{-11}{-11};$ $-\frac{x}{11}+\frac{y}{\frac{11}{3}}=1$, тобто пряма CD	

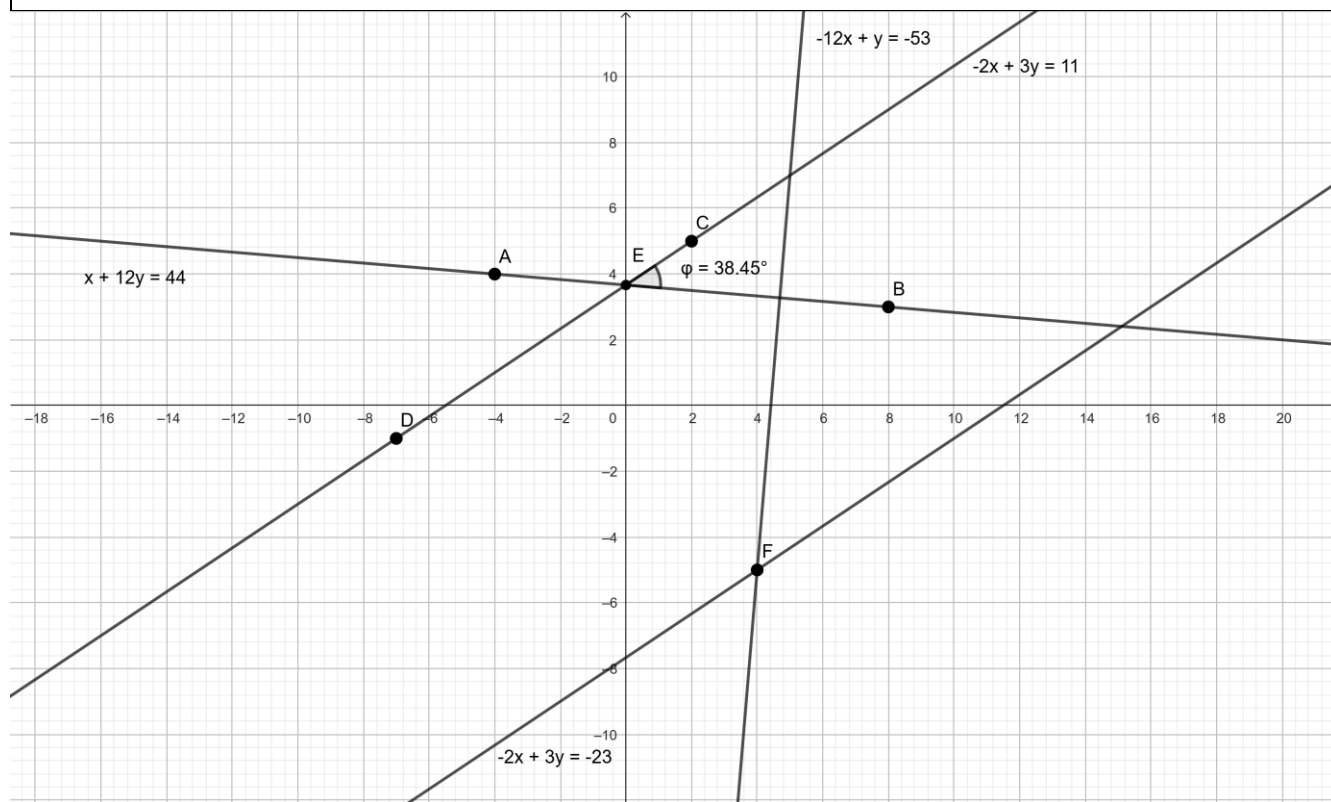
на осі абсцис відрізок 44 правіше від початку координат, а на осі ординат відрізок $\frac{11}{3}$ вище від початку координат.	відтинає на осі абсцис відрізок $-\frac{11}{2} = -5,5$ лівіше від початку координат, а на осі ординат відрізок $\frac{11}{3}$ вище від початку координат.
5) Для приведення загального рівняння прямої до нормального знайдемо нормуючий множник	
$\mu = +\frac{1}{\sqrt{1^2 + 12^2}} = \frac{1}{\sqrt{145}}.$ Тоді нормальне рівняння прямої AB: $\frac{x}{\sqrt{145}} + \frac{12y}{\sqrt{145}} - \frac{44}{\sqrt{145}} = 0.$	$\mu = -\frac{1}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{13}}.$ Тоді нормальне рівняння прямої CD: $-\frac{2x}{\sqrt{13}} + \frac{3y}{\sqrt{13}} - \frac{11}{\sqrt{13}} = 0.$
6) Для того, щоб знайти координати точки перетину прямих AB та CD , розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} x + 12y - 44 = 0, \\ 2x - 3y + 11 = 0; \end{cases} \quad y = \frac{11}{3}; \quad x = 0.$ Таким чином точка перетину прямих AB та CD є $\left(0; \frac{11}{3}\right)$.	
7) Щоб знайти відстань від точки $F(4; -5)$ до прямих скористаємося формулою $d = \frac{ Ax_0 + By_0 + C }{\sqrt{A^2 + B^2}}$	
$d_{AB} = \frac{ 4 + 12 \cdot (-5) - 44 }{\sqrt{145}} \approx 8,3$	$d_{CD} = \frac{ 8 + (-3) \cdot (-5) + 11 }{\sqrt{13}} \approx 9,4$
8) Запишемо рівняння прямої, що проходить через точку $F(4; -5)$ перпендикулярно до прямої AB скориставшись формулою $y - y_0 = k(x - x_0)$: $y - (-5) = 12(x - 4), \quad y = 12x - 53$ Кутовий коефіцієнт прямої знайшли за умовою перпендикулярності прямих.	

9) Запишемо рівняння прямої, що проходить через точку $F(4; -5)$ паралельно до прямої CD скориставшись формулою $y - y_0 = k(x - x_0)$:

$$y - (-5) = \frac{2}{3}(x - 4), \quad 3y + 15 = 2x - 8, \quad y = \frac{2}{3}x - \frac{23}{3}$$

10) Кут між прямими AB і CD знайдемо за формулою $\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$

$$k_{AB} = -\frac{1}{12}, \quad k_{CD} = \frac{2}{3}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{12}}{1 - \frac{1}{12} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{17}{18}}{\frac{4 \cdot 17}{4 \cdot 18}} \approx 0,794, \quad \text{кут } \varphi \approx 38,45^\circ$$



Приклад 2. Дві компанії конкурують на ринку та обслуговують клієнтів у двох торговельних центрах $A(2;3)$ та $B(4;7)$, знайти рівняння прямої, яка розподіляє їх зони впливу. Якщо клієнт знаходиться в точці $C(8;4)$, визначте до якого торговельного центру йому ближче. Наведіть приклад

координат точки, яка знаходиться ближче до іншого торговельного центру. Побудуйте рисунок, що відповідає даній задачі.

Розв'язання:

Зони впливу буде розподіляти пряма, яка є серединним перпендикуляром відрізка AB . Знайдемо кутовий коефіцієнт прямої, якщо відомі

координати двох точок прямої: $k_{AB} = \frac{7-3}{4-2} = \frac{4}{2} = 2$. Середина відрізка AB

знаходиться в точці M з координатами $x = \frac{2+4}{2} = 3$, $y = \frac{3+7}{2} = 5$.

Запишемо рівняння прямої, яка проходить через точку M перпендикулярно до AB . За умовою перпендикулярності прямої, її

кутовий коефіцієнт буде рівний $k = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{1}{2}$.

Запишемо рівняння прямої, що проходить через точку M і має кутовий

коефіцієнт $k = -\frac{1}{2}$.

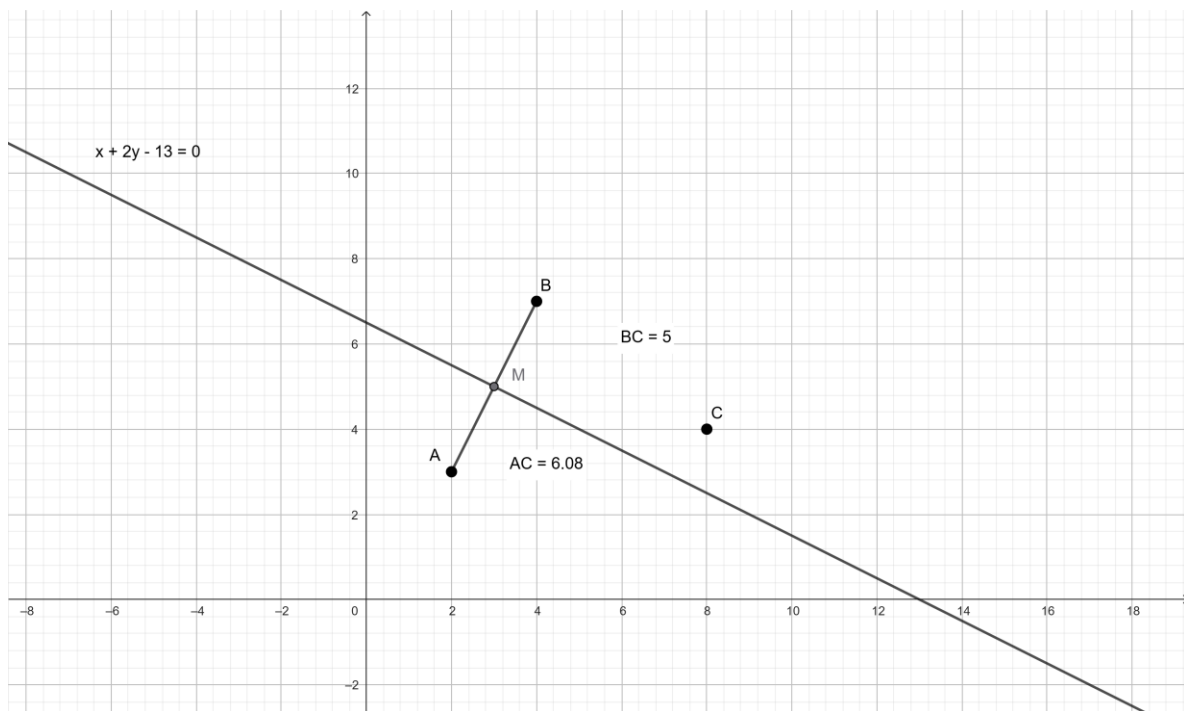
$y - 5 = -\frac{1}{2}(x - 3)$, $2y - 10 = -x + 3$, $x + 2y - 13 = 0$ - загальне рівняння шуканої прямої.

Якщо клієнт знаходиться в точці $C(8;4)$, то йому ближче до торговельного центру B . Це видно з рисунку, оскільки точка C знаходиться в зоні впливу торговельного центру B (тобто точки B та C по одну сторону від серединного перпендикуляра).

$$d_{BC} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4-8)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

$$d_{AC} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2 - 8)^2 + (3 - 4)^2} = \sqrt{36 + 1} \approx 6,08$$

Точка $D(4;4)$ знаходиться ближче до торговельного центру А.



Завдання для аудиторної та самостійної роботи

Завдання 1. Задано координати точок A, B, C, D . Завдання: для прямих AB і CD записати: 1) рівняння через дві точки; 2) загальні рівняння; 3) рівняння з кутовим коефіцієнтом; 4) рівняння у відрізках на осях; 5) нормальні рівняння; 6) знайти координати точки перетину прямих AB і CD ; 7) знайти відстань від точки $F(1;\alpha)$ до прямих; 8) записати рівняння прямої, що проходить через точку $F(1;\alpha)$ перпендикулярно до прямої AB ; 9) записати рівняння прямої, що проходить через точку $F(1;\alpha)$ паралельно до прямої CD ; 10) знайти кут між прямими AB і CD .

1.	$A(-2;9), B(0;-1)$ $C(5;4), D(-4;7)$	2.	$A(-5;0), B(1;-2)$ $C(4;-2), D(-2;-6)$	3.	$A(1;6), B(4;0)$ $C(-3;5), D(9;2)$	4.	$A(1;5), B(7;1)$ $C(6;5), D(-2;1)$
5.	$A(1;8), B(4;-1)$ $C(-2;4), D(8;2)$	6.	$A(1;9), B(3;3)$ $C(4;5), D(-4;3)$	7.	$A(-4;2), B(2;3)$ $C(-1;5), D(8;2)$	8.	$A(-3;8), B(0;-4)$ $C(-4;4), D(2;2)$

9.	$A(-12;4), B(12;2)$ $C(-2;9), D(-1;5)$	10.	$A(-6;-3), B(-2;3)$ $C(-3;5), D(5;3)$	11.	$A(-5;1), B(2;8)$ $C(2;3), D(8;1)$	12.	$A(-3;7), B(6;1)$ $C(-2;2), D(6;8)$
13.	$A(0;4), B(8;1)$ $C(-4;-3), D(9;-2)$	14.	$A(-3;-4), B(1;6)$ $C(-3;-3), D(1;3)$	15.	$A(2;5), B(9;-2)$ $C(3;8), D(-2;-2)$	16.	$A(-2;3), B(4;-1)$ $C(-3;1), D(3;5)$
17.	$A(-3;3), B(-1;4)$ $C(1;1), D(-4;2)$	18.	$A(-1;1), B(6;4)$ $C(2;5), D(10;1)$	19.	$A(-2;1), B(1;2)$ $C(-1;4), D(5;2)$	20.	$A(-1;1), B(3;5)$ $C(-1;4), D(7;2)$
21.	$A(-4;-2), B(-2;6)$ $C(-1;-2), D(5;-4)$	22.	$A(-4;6), B(5;3)$ $C(5;5), D(-3;1)$	23.	$A(-2;-2), B(2;-6)$ $C(1;2), D(3;8)$	24.	$A(-3;2), B(2;3)$ $C(-2;3), D(-6;7)$
25.	$A(-2;-4), B(1;2)$ $C(-2;3), D(4;1)$	26.	$A(0;1), B(1;4)$ $C(-2;-1), D(1;-4)$	27.	$A(-1;-1), B(1;3)$ $C(-3;0), D(1;-2)$	28.	$A(1;-4), B(3;-3)$ $C(4;-2), D(-1;-1)$
29.	$A(-2;-3), B(3;-2)$ $C(-7;-2), D(1;-4)$	30.	$A(-4;0), B(-1;-6)$ $C(-9;-2), D(3;-5)$	31.	$A(6;-3), B(0;-1)$ $C(13;-3), D(5;-5)$	32.	$A(-1;-1), B(5;2)$ $C(0;4), D(4;0)$

Завдання 2. Дві компанії конкурують на ринку та обслуговують клієнтів у двох торговельних центрах $A(1;\alpha)$ та $B(10;5)$, знайти рівняння прямої, яка розподіляє їх зони впливу. Якщо клієнт знаходиться в точці $C(-1;11)$, визначте до якого торговельного центру йому ближче. Наведіть приклад координат точки, яка знаходиться ближче до іншого торговельного центру. Побудуйте рисунок, що відповідає даній задачі.

Питання для самоперевірки

1. Що таке загальне рівняння прямої на площині?
2. Запишіть рівняння прямої на площині через дві точки.
3. Запишіть рівняння прямої у відрізках на осях.
4. Запишіть нормальне рівняння прямої. Як знайти нормуючий множник?
5. Запишіть рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Що визначають коефіцієнти в рівнянні?
6. Який вектор називають напрямним вектором прямої? Як знайти його координати?

7. Як знайти кут між двома прямими на площині?
8. Які види взаємного розташування двох прямих можливі на площині?
9. Яка умова паралельності двох прямих у загальному вигляді рівняння?
10. Яка умова перпендикулярності двох прямих на площині?
11. Як знайти точку перетину двох прямих, заданих рівняннями?
12. Як знайти напрямний вектор прямої $Ax + By + C = 0$?
13. Як знайти відстань від точки до прямої, заданої в загальному вигляді $Ax + By + C = 0$?
14. Яке геометричне місце точок, рівновіддалених від двох прямих?
15. Як визначити чи належить точка прямій, якщо відоме рівняння прямої?
16. Як побудувати пряму, що проходить через задану точку і є паралельною до заданої прямої?
17. Як побудувати пряму, що проходить через задану точку і є перпендикулярною до заданої прямої?
18. Яке аналітичне рівняння прямої, що проходить через дві задані точки?
19. Яке рівняння прямої, що проходить через задану точку і є паралельною до заданої прямої?
20. Яке рівняння прямої, що проходить через задану точку і є перпендикулярною до заданої прямої?

Тема 3. ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ НА ПЛОЩИНІ.

Короткі теоретичні відомості

Коло - геометричне місце точок площини, відстань від яких до деякої фіксованої точки цієї площини є величина стала.

Фіксована точка називається *центром* кола, а стала величина R – відстань від довільної точки кола до його центра – *радіусом* кола.

Радіус кола - це відрізок, який сполучає довільну точку кола з його центром.

Рівняння кола (Рис.1) з центром в точці $A(a;b)$ і радіусом R має вигляд:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

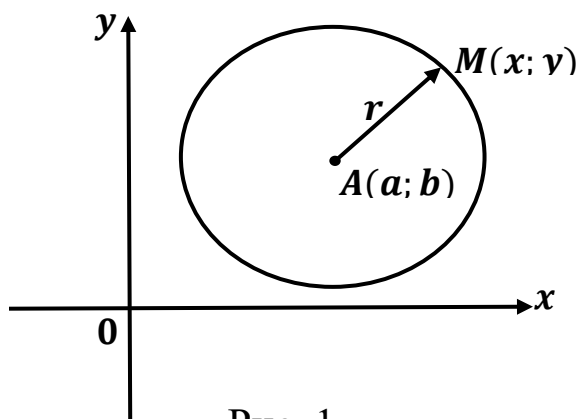


Рис. 1

Канонічне рівняння кола (Рис.2) має вигляд:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

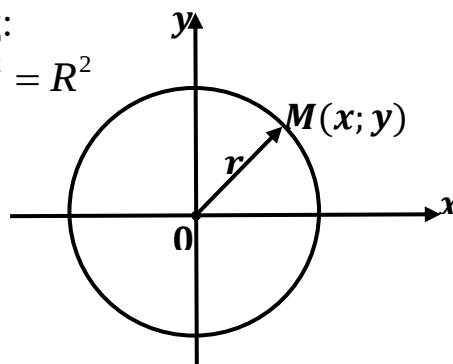
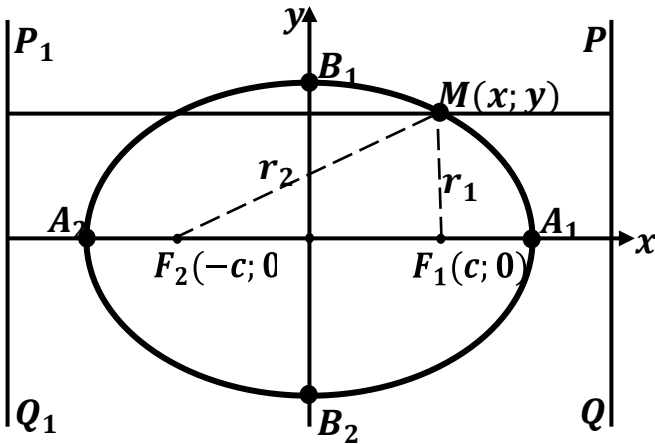
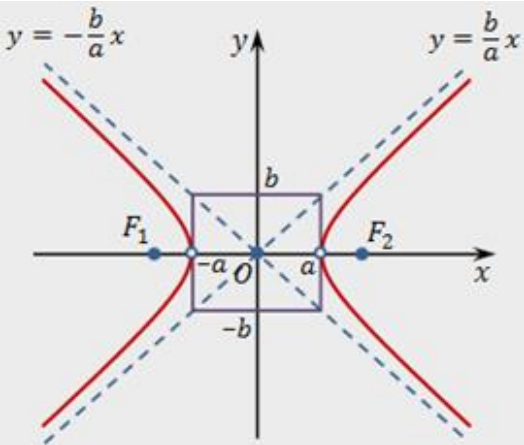


Рис. 2

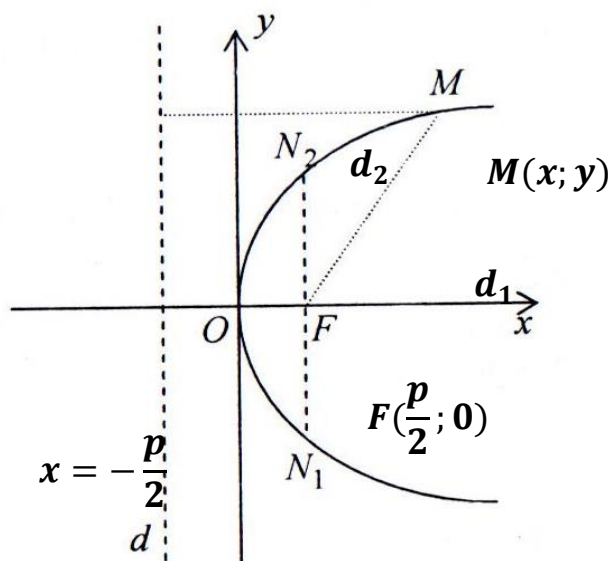
Взаємне розташування точки $M_0(x_0; y_0)$ і кола $x^2 + y^2 = R^2$ визначається такими умовами:

- 1) якщо $x_0^2 + y_0^2 = R^2$ то точка M_0 лежить на колі;
- 2) якщо $x_0^2 + y_0^2 > R^2$, то точка M_0 лежить за межами кола;
- 3) якщо $x_0^2 + y_0^2 < R^2$, то точка M_0 лежить всередині кола.

Еліпсом називається геометричне місце точок площини, для кожної з яких сума відстаней до двох даних точок тієї ж площини, які називаються <i>фокусами</i>, є величина стала, більша відстані між фокусами (рис.3).  Рис. 3	Канонічне рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ a – велика піввісь, b – мала піввісь еліпса, причому a, b, c (c – половина відстані між фокусами) пов'язані співвідношенням: $a^2 - b^2 = c^2, a > c$ Вершини еліпса (точки перетину еліпса з осями координат): $A_1(a; 0), A_2(-a; 0),$ $B_1(0; b), B_2(0; -b).$ Осі еліпса: $A_1A_2 = 2a, B_1B_2 = 2b.$
Форма еліпса (міра його стиску) характеризується його <i>ексцентриситетом</i> (ε). Чим менший ε еліпса, тим більше еліпс «схожий» на коло (відношення осей ближче до 1). І навпаки, чим більший ε, тим еліпс «втягнуті ший» (менше відношення осей).	Ексцентриситет дорівнює відношенню відстані між фокусами $2c$ до великої осі $2a$: $\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$ $0 \leq \varepsilon < 1$
Відстані r_1 і r_2 від деякої точки еліпса $M_0(x_0; y_0)$ до його фокусів називаються <i>фокальними радіус-векторами</i> цієї точки.	$r_1 + r_2 = 2a$
<i>Директрисами</i> еліпса називаються дві прямі PQ і P_1Q_1 (рис.3), паралельні малій осі (перпендикулярні до великої осі	<i>Рівняння директрис еліпса</i> $d_1 = PQ$ і $d_2 = P_1Q_1$:

еліпса) і віддалені від неї на відстані, рівній $\frac{a}{\varepsilon}$.	$d_1 : x = \frac{a}{\varepsilon} \text{ або } x = \frac{a^2}{c},$ $d_2 : x = -\frac{a}{\varepsilon} \text{ або } x = -\frac{a^2}{c}.$
Рівняння еліпса з осями, паралельними координатним осям, і центром, який не співпадає з початком координат, має вигляд:	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1, \text{ де } (x_0; y_0) - \text{координати центра еліпса.}$
Гіпербола – геометричне місце точок, для кожної з яких різниця відстаней від двох фіксованих точок площини (фокусів F_1 і F_2) є величина стала.  Побудова гіперболи: щоб побудувати гіперболу, потрібно побудувати прямокутник із сторонами, середини яких є точки $(a; 0)$, $(-a; 0)$, $(0; b)$, $(0; -b)$; продовжені діагоналі – це асимптоти. Вітки гіперболи виходять з вершин і наближаються до асимптот.	Канонічне рівняння $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; a – дійсна, b – уявна піввісі; фокуси $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$ розташовані на дійсній осі, де $c^2 = a^2 + b^2$; $2c$ – відстань між фокусами (фокальна відстань); ексцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a}$, $\varepsilon > 1$; директриси $x = \pm \frac{a}{\varepsilon} = \pm \frac{a^2}{c}$; асимптоти $y = \pm \frac{b}{a}x$.
Парабола – геометричне місце точок для кожної з яких відстань до деякої фіксованої точки площини (F), яка є фокусом, дорівнює відстані до	Канонічне рівняння $y^2 = 2px$; p – параметр параболи;

деякої фіксованої прямої, що не проходить через фокус і називається



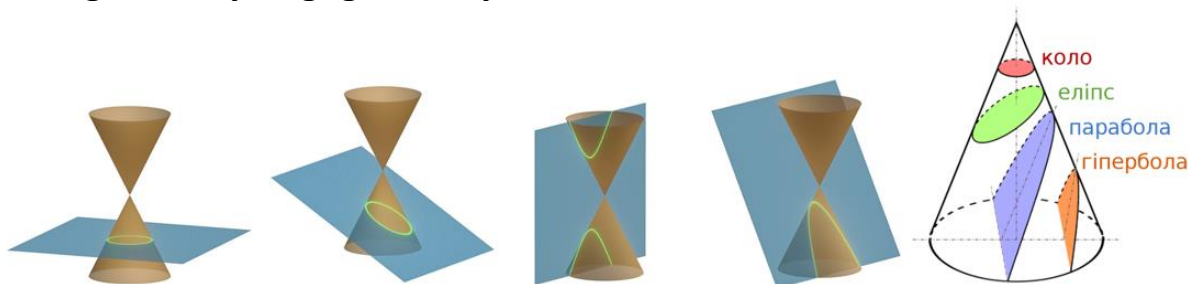
директрисою.

фокус $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$;

директриса $x = -\frac{p}{2}$;

ексцентриситет $\varepsilon = 1$.

Криві другого порядку ще називають конічними перерізами – бо їх можна отримати у перерізі конуса.



Методичні вказівки до розв'язання завдань

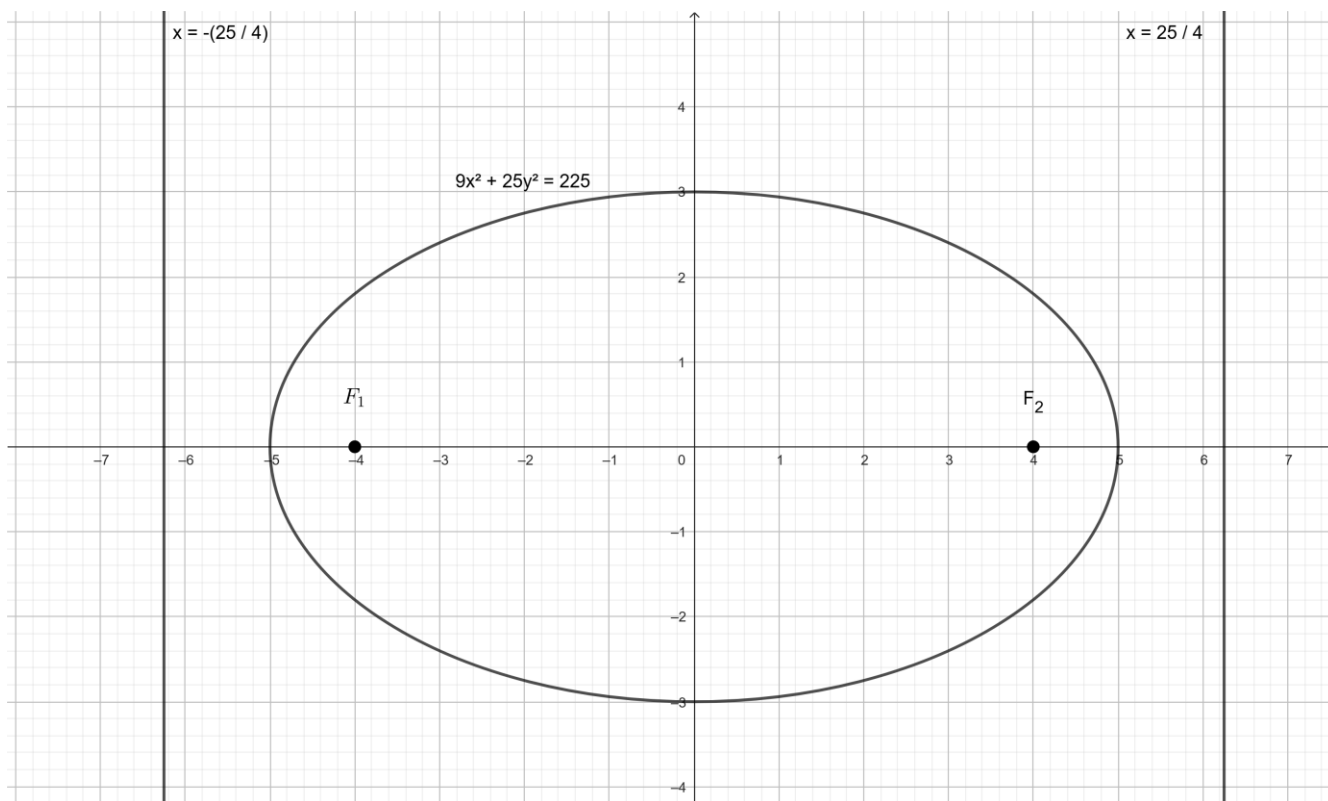
Приклад 1. Записати канонічне рівняння еліпса $9x^2 + 25y^2 = 225$, визначити піввісі, фокуси, фокальну відстань, ексцентриситет, директриси, зобразити еліпс.

Розв'язання:

Поділимо обидві частини $9x^2 + 25y^2 = 225$ на 225, отримаємо канонічне рівняння еліпса $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$. Отже, це еліпс з піввісями $a = 5$ (по Ox), $b = 3$ (по Oy).

Визначаємо $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$, тоді $c = 4$, отже фокусами є $F_1(-4;0)$ та $F_2(4;0)$, фокальна відстань (відстань між фокусами) $2c = 8$.

Ексцентриситет еліпса $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$. Рівняння директрис $x = \pm \frac{a^2}{c} = \pm \frac{25}{4}$.



Приклад 2. Записати канонічне рівняння гіперболи $100x^2 - 144y^2 = 14400$, визначити піввісі, фокуси, фокальну відстань, ексцентриситет, директриси, асимптоти, зобразити гіперболу.

Розв'язання:

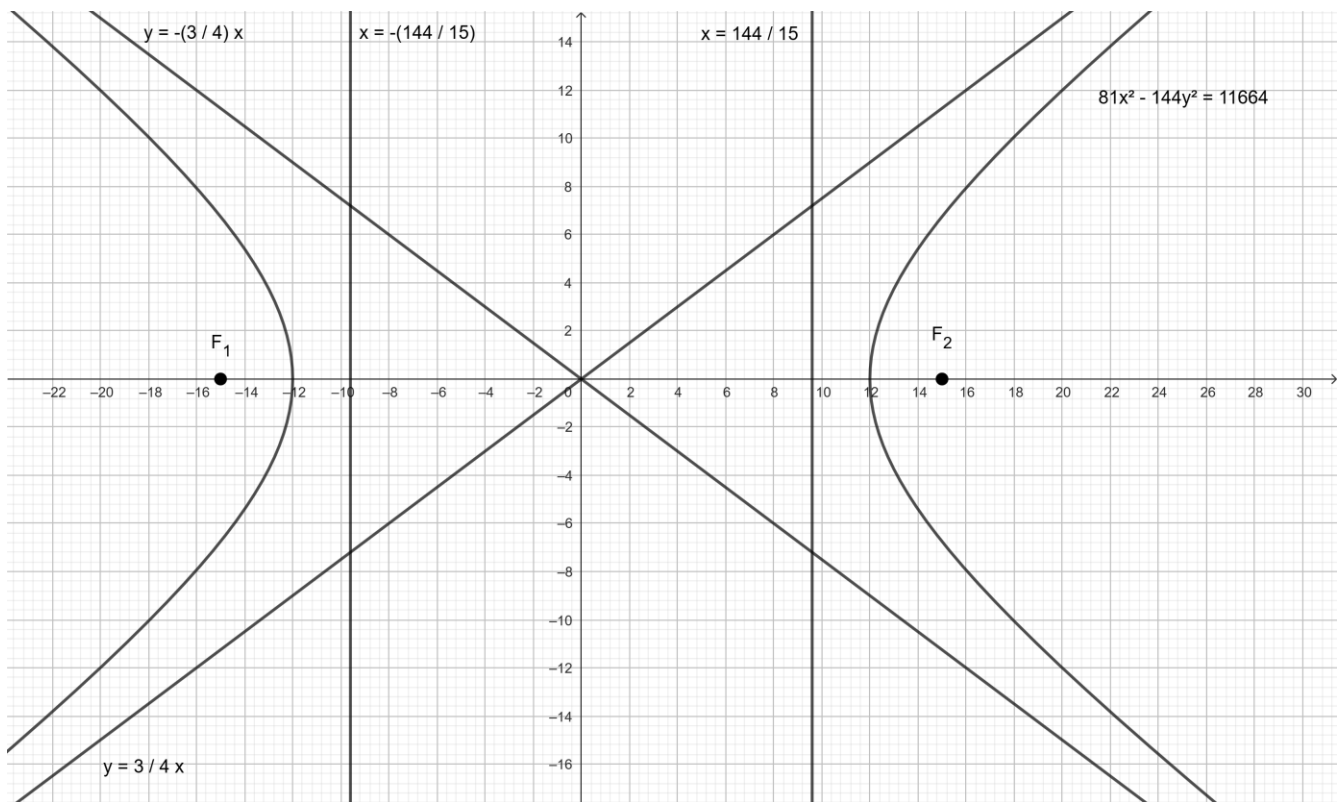
Поділимо обидві частини $100x^2 - 144y^2 = 14400$ на 14400, отримаємо канонічне рівняння гіперболи $\frac{x^2}{12^2} - \frac{y^2}{9^2} = 1$. Отже, це гіпербола з піввісями $a = 12$ (дійсна), $b = 9$ (уявна).

Визначаємо $c^2 = a^2 + b^2 = 144 + 81 = 225$, тоді $c = 15$, отже фокусами є $F_1(-15;0)$ та $F_2(15;0)$, фокальна відстань (відстань між фокусами)

$2c = 2 \cdot 15 = 30$. Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{15}{12}$.

Рівняння директрис: $x = \pm \frac{a^2}{c} = \pm \frac{144}{15}$. Рівняння асимптот:

$$y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{9}{12}x = \pm \frac{3}{4}x.$$



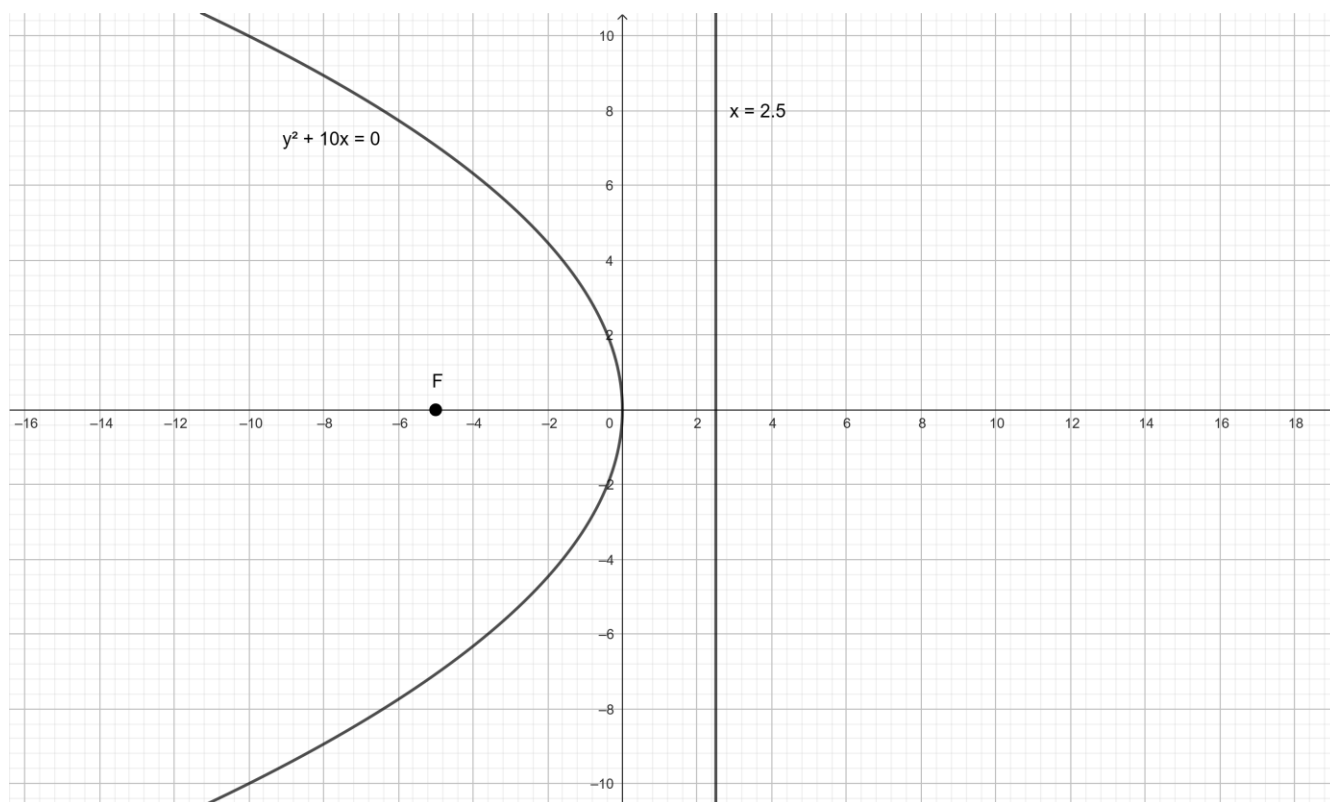
Приклад 3. Записати канонічне рівняння параболи $y^2 + 10x = 0$, визначити параметр, фокус, директрису, зобразити параболу.

Розв'язання:

Маємо канонічне рівняння $y^2 = -10x$.

Отже, це парабола з вершиною $(0;0)$, $-10 = 2p$, параметр $p = -5$.

Фокусом є $F(-5;0)$, рівняння директриси $x = 2,5$.



Завдання для аудиторної та самостійної роботи

Завдання 1. Записати канонічне рівняння еліпса $\alpha^2 x^2 + (\alpha + 1)^2 y^2 = \alpha^2 (\alpha + 1)^2$, визначити півосі, фокуси, фокальну відстань, ексцентриситет, директриси, зобразити еліпс.

Завдання 2. Записати канонічне рівняння гіперболи $\alpha^2 x^2 - (\alpha + 1)^2 y^2 = \alpha^2 (\alpha + 1)^2$, визначити півосі, фокуси, фокальну відстань, ексцентриситет, рівняння директрис та асимптот, зобразити гіперболу.

Завдання 3. Записати канонічне рівняння параболи $y^2 - 2\alpha x = 0$, визначити параметр, фокус, рівняння директриси, зобразити параболу.

Завдання 4. Рекламна кампанія охоплює область, яку на координатній площині описує еліпс з рівнянням: $\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

1. Визначте координати центру зони охоплення.
2. Знайдіть довжини великої та малої півосей.

3. Інтерпретуйте форму зони реклами: що вона означає для логістики або маркетингу?

Завдання 5. Компанія вивчає залежність витрат на транспортування між двома логістичними центрами від кількості товару x (в тонах) та відстані перевезення y (в км). Для фіксованого рівня витрат

встановлено модель: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

1. Визначте тип лінії другого порядку, заданої рівнянням, та поясніть її основні геометричні характеристики (центр, напрямок розкриття, асимптоти).
2. Знайдіть аналітичні обмеження на значення змінних x та y , що мають вказаний економічний сенс.
3. Побудуйте криву та виділіть кольором частину кривої, яка відповідає знайденим обмеженням змінних x і y .

Завдання 6. Маркетинговий відділ компанії аналізує залежність ефективності рекламної кампанії y (в умовних одиницях прибутку) від суми інвестицій у рекламу x (в тисячах грн). Було встановлено, що ця залежність описується канонічним рівнянням параболи: $y^2 = 8x$.

1. Визначте тип лінії другого порядку та побудуйте криву в системі координат.
2. Знайдіть аналітичні обмеження на значення змінних x та y , що мають вказаний економічний сенс.
3. Визначте, як змінюється прибуток при зростанні інвестицій.

4. Якщо компанія хоче досягти прибутку не менш ніж 16 умовних одиниць, яку мінімальну суму інвестицій потрібно вкласти?

Питання для самоперевірки

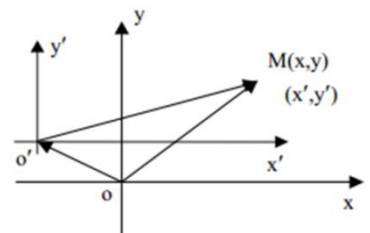
1. Що таке крива другого порядку в аналітичній геометрії?
2. Яке загальне рівняння кривої другого порядку?
3. Які основні типи кривих другого порядку існують?
4. Що називається канонічним рівнянням кривої другого порядку?
5. За якою умовою крива другого порядку є колом?
6. Який вигляд має рівняння кола, що має центр в початку координат і радіус R ?
7. Яке канонічне рівняння еліпса?
8. Що таке фокальна (фокусна) відстань еліпса і як її знайти?
9. Що називається ексцентриситетом еліпса?
10. Як визначаються директриси еліпса?
11. Яке канонічне рівняння гіперболи?
12. Що називається ексцентриситетом гіперболи? Як визначаються директриси гіперболи?
13. Як визначаються асимптоти гіперболи? Як асимптоти гіперболи застосовують для побудови гіперболи?
14. Яке канонічне рівняння параболи?
15. Що таке фокус і директриса параболи? Чому дорівнює ексцентриситет параболи?
16. Які властивості мають коничні перетини (еліпс, парабола, гіпербола) у фізиці або техніці?

Тема 4. ПЕРЕТВОРЕННЯ ПРЯМОКУТНИХ КООРДИНАТ НА ПЛОЩИНІ. ПОЛЯРНІ КООРДИНАТИ.

Короткі теоретичні відомості

1. Розглянемо, як змінюються координати точок площини при паралельному перенесенні (перетворенні із збереженням напрямку осей, але із зміною положення початку координат).

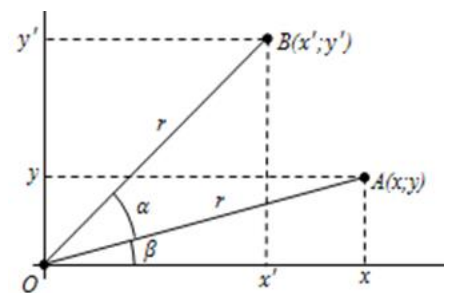
Для точка M координатами в системі осей Oxy є $(x; y)$, а координатами в системі $O'x'y'$ є $(x'; y')$. Нехай a, b – координати точки O' в системі осей $(x; y)$.



Очевидно $\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OM}$. Оскільки при паралельному перенесенні осей координатний базис не змінюється, то при додаванні векторів можна скласти їх відповідні координати. Тому $x = x' + a$, $y = y' + b$.

Відповідно $x' = x - a$, $y' = y - b$.

2. Розглянемо, як змінюються координати точок площини при повороті навколо центру системи координат, тобто перетворенні, при якому не змінюється положення початку координат, але осі повертаються на деякий кут α .



На даному рисунку r – постійна відстань від точки до початку системи координат; β – кут, який утворює радіус-вектор $\vec{r}$ з віссю Ox ; α – кут повороту. При повороті точка $A(x; y)$ перейшла в точку $B(x'; y')$. При обертанні відстань r не змінюється.

Координати точки B можна обчислити як $x' = r \cos(\alpha + \beta)$;
 $y' = r \sin(\alpha + \beta)$. Розпишемо косинус і синус суми кутів
 $x' = r \cos \alpha \cos \beta - r \sin \alpha \sin \beta$; $y' = r \sin \alpha \cos \beta + r \cos \alpha \sin \beta$, застосуємо
 вирази для координат точки $A(x; y)$, саме $x = r \cos \beta$; $y = r \sin \alpha$,
 отримаємо формули, які описують поворот точки навколо центру
 системи координат: $x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha$; $y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$.

Для того, щоб виконати поворот фігури необхідно всі її точки повернути на однаковий кут.

3. Для того, щоб здійснити поворот навколо центру обертання, координати якого відмінні від центру системи координат, необхідно виконати наступні дії: перемістити точку обертання в центр системи координат і від координат точки $A(x; y)$ відняти координати точки $O'(a; b)$; здійснити поворот точки на заданий кут; до координат точки $B(x'; y')$ (точка яку ми отримали після повороту) додати координати точки, яка являється центром обертання

$$x' = a + (x - a) \cos \alpha - (y - b) \sin \alpha; \quad y' = b + (x - a) \sin \alpha + (y - b) \cos \alpha.$$

Будь-яке перетворення на площині – комбінація повороту і паралельного переміщення.

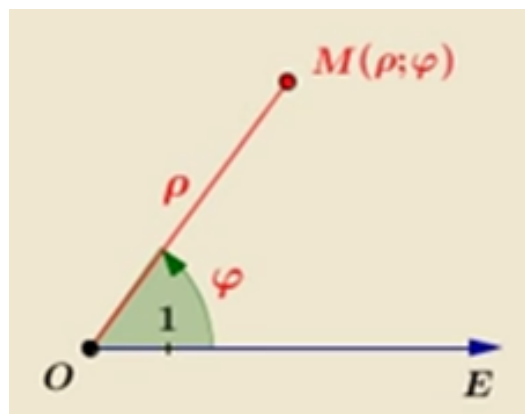
Крім прямокутної системи координат, часто розглядають і застосовують полярну систему координат на площині. Її використовують тому, що в науці і техніці зустрічаються криві, які простіше описати і побудувати саме в такій системі координат.

Візьмемо на орієнтованій площині точку O і одиничний вектор $\vec{i}$.

Геометричний образ, який складається з точки O і вектора $\vec{i}$, називається полярною системою координат. Позначається полярна система координат так: $O\vec{i}$ або $(O, \vec{i})$.

Елементами полярної системи координат є точка O , яка називається полюсом, і промінь OX , який називається полярною віссю, яка проходить через точку O і паралельна вектору $\vec{i}$, і на якій додатній напрямком визначається вектором $\vec{i}$.

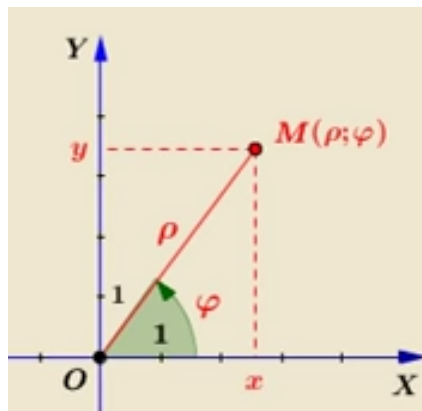
Положення точки M на площині визначається відстанню від цієї точки до полюса – *полярним радіусом* ρ і кутом між радіусом і полярною віссю – *полярним кутом* φ . Ці два числа ρ і φ називаються полярними координатами точки M і записуються так: $M(\rho; \varphi)$.



Дві координати $(\rho; \varphi)$ визначають єдину точку. Значення, які приймають полярні координати: $0 \leq \rho < +\infty; 0 \leq \varphi < 2\pi$, при цьому кут φ відраховується від полярної осі проти руху годинникової стрілки. У деяких випадках необхідно розглядати кути, які більші ніж 2π , а також від'ємні кути, тобто кути, які відраховуються від полярної осі за напрямком руху годинникової стрілки.

Зв'язок між полярними і прямокутними декартовими координатами точки на площині.

Якщо початок декартової прямокутної системи координат сумістити з полюсом, а вісь ОХ направити по полярній осі (рис. 4), то прямокутні координати x, y точки M та її полярні координати ρ і φ зв'язані між собою наступними формулами:



$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos \varphi \\ y = \rho \cdot \sin \varphi \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \end{cases}$$

По заданим x, y кут φ не визначається однозначно. Тому при визначенні φ варто врахувати, що при

$$y \leq 0, x < 0: \pi \leq \varphi < \frac{3\pi}{2}$$

$$y \geq 0, x > 0: 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$$

$$y < 0, x \geq 0: \frac{3\pi}{2} \leq \varphi < 2\pi$$

$$x \leq 0, y > 0: \frac{\pi}{2} \leq \varphi < \pi$$

Методичні вказівки до розв'язання завдань

Приклад 1. Записати канонічне рівняння еліпса $25x^2 + 16y^2 - 50x + 32y - 359 = 0$, визначити центр, півосі, фокуси, фокальну відстань, ексцентриситет, директриси, зобразити еліпс.

Розв'язання:

Рівняння еліпса має вигляд $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$, де $(x_0; y_0)$ – центр

еліпса. Виділивши повні квадрати, отримаємо рівняння

$25(x-1)^2 + 16(y+1)^2 = 400$; поділимо обидві частини на 400, отримали канонічне рівняння еліпса $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{25} = 1$.

Центр еліпса знаходиться в точці $(1; -1)$ і півосями $a = 4$ (вздовж осі Ox), $b = 5$ (вздовж осі Oy). Визначаємо $c^2 = 25 - 16 = 9$, тоді $c = 3$, отже фокальна відстань (відстань між фокусами) $2c = 2 \cdot 3 = 6$, ексцентриситет еліпса $\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{3}{5}$.

Приклад 2. Знайти полярні координати точки K з декартовими координатами $(-10; 10\sqrt{3})$.

Розв'язання:

Скористаємось формулами переходу $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$ при значеннях $x = -10$, $y = 10\sqrt{3}$. Тому $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{100 + 300} = 20$; $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} = \frac{10\sqrt{3}}{-10} = -\sqrt{3}$. Так як $x < 0$, $y > 0$, то точка лежить в другій координатній чверті, то $\varphi = \pi - \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. Отже, точка в полярній системі координат має координати $\left(20; \frac{2\pi}{3}\right)$.

Приклад 3. Знайти радіус та центр кола з рівнянням у полярних координатах $\rho = 100 \cos \varphi$.

Розв'язання:

Домножимо обидві частини рівняння $\rho = 100 \cos \varphi$ на ρ , маємо $\rho^2 = 100\rho \cos \varphi$. Підставимо вирази $\rho^2 = x^2 + y^2$, $x = \rho \cos \varphi$, маємо $x^2 + y^2 = 100x$.

Перетворимо рівняння до вигляду $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, маємо $x^2 - 100x + 50^2 + y^2 - 50^2 = 0$, звідки $(x-50)^2 + y^2 = 50^2$. Маємо рівняння кола з центром у точці $(50;0)$ та радіусом 50.

Завдання для аудиторної та самостійної роботи

Завдання 1. Визначити центр і радіус кола $x^2 + y^2 - 2\alpha y - 6x + 5 + \alpha^2 = 0$, зобразити його в декартовій системі координат.

Завдання 2. Записати канонічне рівняння еліпса $25x^2 + 16y^2 - 50\alpha x - 64y - 336 + 25\alpha^2 = 0$, визначити центр, півосі, фокуси, фокальну відстань, ексцентриситет, директриси, зобразити еліпс.

Завдання 3. Записати канонічне рівняння гіперболи $4x^2 - 9y^2 - 8\alpha x + 36y - 72 + 4\alpha^2 = 0$, визначити центр гіперболи, півосі, фокуси, фокальну відстань, ексцентриситет, рівняння директрис, рівняння асимптот, зобразити гіперболу.

Завдання 4. Записати канонічне рівняння, визначити вершину, параметр, фокус, рівняння директриси параболу $y^2 - 24x - 4y + 4 + 24\alpha = 0$, зобразити її.

Завдання 5. Знайти прямокутні координати точки M , полярні координати якої $\left(5 + \alpha; \frac{\pi}{6}\right)$.

Завдання 6. Знайти полярні координати точки M з прямокутними координатами $(\alpha; \alpha \cdot \sqrt{3})$.

Завдання 7. Знайти радіус та центр кола з рівнянням у полярних координатах $\rho = \alpha \cos \varphi$.

Питання для самоперевірки

1. Що таке прямокутна система координат на площині?
2. Які основні типи перетворень координат на площині вам відомі?
3. Що таке паралельне перенесення (трансляція) координат і яка його аналітична форма?
4. Як змінюються координати точки при повороті навколо початку координат на кут α ?
5. Яке правило обчислення нових координат при повороті проти годинникової стрілки?
6. Як записується формула повороту координат за годинниковою стрілкою?
7. Що таке симетрія відносно початку координат і як вона впливає на координати?
8. Що таке полярна система координат?
9. Як пов'язати полярні координати з прямокутними координатами?
10. Як знайти полярний радіус і полярний кут за відомими x і y ?
11. За якими формулами знаходять прямокутні координати за відомими полярними?
12. Яке геометричне значення має полярний радіус ρ і кут φ ?
13. Як виглядає рівняння кола з центром у початку координат у полярних координатах?
14. Наведіть приклад кривих, які зручно описувати в полярній системі координат.

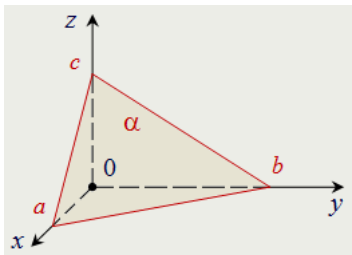
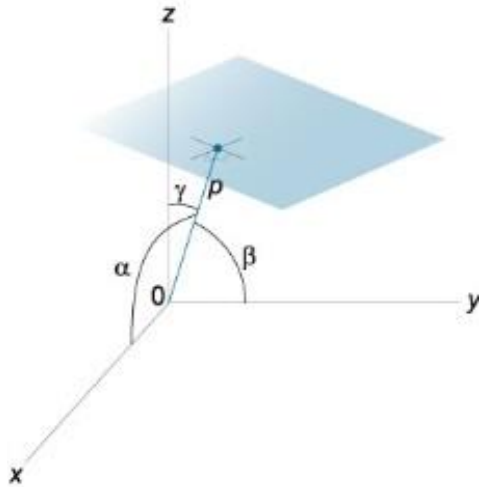
Тема 5. ПЛОЩИНА У ПРОСТОРІ. ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ПЛОЩИН І ТОЧКИ У ПРОСТОРІ.

Короткі теоретичні відомості

Будь яка поверхня в просторі задається в декартових координатах рівнянням виду $F(x, y, z) = 0$. Якщо $F(x, y, z)$ - многочлен n -го степеню, то відповідна поверхня називається алгебраїчною поверхнею n -го порядку або просто поверхнею n -го порядку. Будь-яка поверхня 1-го порядку є площиною, тобто рівняння 1-го степеню $Ax + By + Cz + D = 0$ визначає площину.

ВИДИ РІВНЯНЬ ПЛОЩИНИ

1	Загальне рівняння площини	$Ax + By + Cz + D = 0$, де A, B, C – координати $\vec{n}$. $\vec{n}$ – нормаль – перпендикуляр до поверхні. Нормаль визначає орієнтацію площини в просторі.
2	Рівняння площини, яка проходить через дану точку в даному напрямі	Нехай площина проходить через точку $(x_0; y_0; z_0)$ в даному напрямі (напрямок визначає нормаль до площини $\vec{n}$), записується як $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$
3	Рівняння площини, яка проходить через три задані точки	Нехай площина проходить через три точки $(x_1; y_1; z_1)$, $(x_2; y_2; z_2)$, $(x_3; y_3; z_3)$, тоді рівняння площини має вигляд $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$
4	Рівняння площини у відрізках на координатних осях	Нехай площина відтинає на координатних осях відрізки: a –

		на осі Ox, b – на осі Oy, c – на осі Oz. Рівняння площини у відрізках на координатних осях a b c $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.
5	Нормальне рівняння площини 	Нормальне рівняння площини $x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta + z \cdot \cos \gamma - p = 0$, де α, β, γ – кути, що перпендикуляр, проведений з початку відріку на площину, утворює з координатними осями, p – довжина цього перпендикуляра. Для приведення загального рівняння до нормального вигляду його потрібно помножити на нормуючий множник $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ (знак множника протилежний знаку коефіцієнта D у загальному рівнянні).

ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ДВОХ ПЛОЩИН

Нехай задано дві площини загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ та $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

Кут між площинами,	$\cos \varphi = \pm \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$
Умова паралельності двох площин.	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$
Умова перпендикулярності площин	$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

Лінія перетину двох площин	$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$
----------------------------	--

Відстань від точки $(x_0; y_0; z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ визначається за формулою $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Методичні вказівки до розв'язання завдань

Приклад 1. Задано точки $M_1(1; -2; -5)$, $M_2(-2; 2; -1)$, $M_3(5; 2; 3)$.

Знайти: 1) рівняння площини, що проходить через ці три точки; 2) загальне рівняння площини; 3) вектор нормалі до площини; 4) рівняння площини у відрізках на осях; 5) нормальне рівняння площини; 6) знайти відстань від точки $D(-1; 4; 5)$ до площини; 7) записати рівняння площини, що проходить через точку $D(-1; 4; 5)$ паралельно до даної площини.

Розв'язання:

1) Підставивши координати точок у
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

маємо
$$\begin{vmatrix} x - 1 & y + 2 & z + 5 \\ -3 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

2) Для отримання загального рівняння площини $Ax + By + Cz + D = 0$ розкриємо визначник:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y + 2 & z + 5 \\ -3 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 16(x - 1) + 40(y + 5) - 28(z + 5) = 0;$$

виконаємо перетворення $4(x-1)+10(y+2)-7(z+5)=0$,
 $4x-4+10y+20-7z-35=0$; $4x+10y-7z-19=0$.

3) координати вектора нормалі – це коефіцієнти при змінних у загальному рівнянні площини, тобто $\vec{n}(4;10;-7)$.

4) рівняння площини у відрізках на осях отримаємо із загального рівняння площини $4x+10y-7z=19$, $\frac{4x}{19} + \frac{10y}{19} + \frac{-7z}{19} = \frac{19}{19}$,

$\frac{x}{\frac{19}{4}} + \frac{y}{\frac{19}{10}} + \frac{z}{-\frac{19}{7}} = 1$. Площина відтинає відрізок $\frac{19}{4}$ осі абсцис, відрізок $\frac{19}{10}$

на осі ординат і відрізок $-\frac{19}{7}$ на осі аплікат.

5) Для приведення загального рівняння площини в нормальне $x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta + z \cdot \cos \gamma - p = 0$ обидві частини загального рівняння необхідно домножити на нормуючий множник.

Знак нормуючого множника обираємо протилежний до знаку вільного члена в загальному рівнянні площини, тобто плюс. Підставимо коефіцієнти з рівняння площини $4x+10y-7z-19=0$, отримаємо

$\mu = \frac{1}{\sqrt{4^2 + 10^2 + (-7)^2}} = \frac{1}{\sqrt{165}}$. Тоді нормальний вигляд рівняння

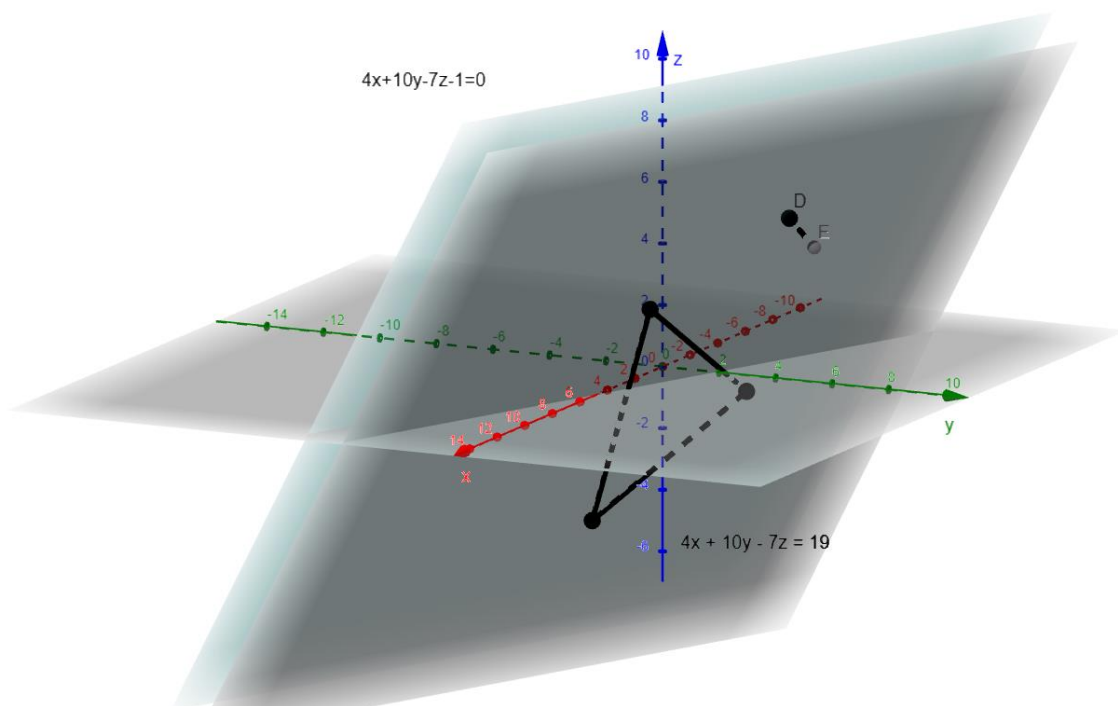
площини $\frac{4}{\sqrt{165}}x + \frac{10}{\sqrt{165}}y - \frac{7}{\sqrt{165}}z - \frac{19}{\sqrt{165}} = 0$.

6) відстань від точки $D(-1;4;5)$ знайдемо за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad d = \frac{|4 \cdot (-1) + 10 \cdot 4 - 7 \cdot 5 - 19|}{\sqrt{165}} = \frac{18}{\sqrt{165}} \approx 1,4$$

7) з умови паралельності площин отримуємо коефіцієнти паралельної площини, а саме $A = 4$, $B = 10$, $C = -7$,

знайдемо $D = -(4 \cdot (-1) + 10 \cdot 4 - 7 \cdot 5) = -1$, $4x + 10y - 7z - 1 = 0$.



Завдання для аудиторної та самостійної роботи

Завдання 1. Задано три точки. Потрібно знайти: 1) рівняння площини, що проходить через задані точки; 2) загальне рівняння площини; 3) вектор нормалі до площини; 4) рівняння площини у відрізках на осях; 5) нормальне рівняння площини; 6) відстань від точки

$D(1;0;\alpha)$ до площини; 7) рівняння площини, що проходить через точку $D(1;0;\alpha)$ паралельно до заданої площини.

1	$(-3;-2;-4), (-4;2;-7), (5;0;3)$	11	$(-2;4;-6), (0;-6;1), (4;2;1)$	21	$(3;-2;3), (6;6;2), (1;4;-2)$
2	$(-4;-2;-5), (1;8;-5), (0;4;-4)$	12	$(2;8;-3), (10;4;7), (4;8;-1)$	22	$(3;9;-2), (11;5;8), (5;9;0)$
3	$(-2;0;-3), (3;10;-3), (2;6;-2)$	13	$(3;6;-2), (0;2;-3), (1;-2;0)$	23	$(7;9;2), (10;5;7), (1;3;-1)$
4	$(2;-2;1), (-3;0;-5), (0;-2;-1)$	14	$(0;1;-1), (-1;5;-4), (8;3;6)$	24	$(6;8;1), (9;4;6), (0;2;-2)$
5	$(-1;0;-2), (-2;4;-5), (7;2;5)$	15	$(0;6;-4), (2;-4;3), (6;4;3)$	25	$(5;8;0), (2;4;-1), (3;0;2)$
6	$(-1;1;-2), (4;11;-2), (3;7;-1)$	16	$(3;4;-1), (2;-4;2), (5;6;0)$	26	$(6;7;2), (5;-1;5), (8;9;3)$
7	$(5;4;1), (-1;-2;-2), (3;-2;2)$	17	$(0;6;-5), (8;2;5), (2;6;-3)$	27	$(5;6;1), (4;-2;4), (7;8;2)$
8	$(4;6;-1), (7;2;4), (-2;0;-4)$	18	$(4;0;3), (-1;2;-3), (2;0;1)$	28	$(5;1;4), (0;3;-2), (3;1;2)$
9	$(0;-2;-1), (2;4;-2), (3;2;0)$	19	$(4;-1;4), (7;7;3), (2;5;-1)$	29	$(8;7;4), (2;1;1), (6;1;5)$
10	$(1;-4;1), (4;4;0), (-1;2;-4)$	20	$(1;7;-3), (3;-3;4), (7;5;4)$	30	$(6;9;1), (3;5;0), (4;1;3)$

Завдання 2. Компанія формує бюджет, що складається з трьох основних складових:

- x — витрати на маркетинг (тис. грн),
- y — витрати на виробництво (тис. грн),
- z — витрати на логістику (тис. грн).

Відомо, що усі допустимі варіанти розподілу витрат **повинні** лежати в одній площині, яка проходить через такі три раціональні плани:

- План $A(20;40;60)$
- План $B(30;30;60)$
- План $C(20;50;10\alpha)$

Завдання: 1). Складіть рівняння площини, яка проходить через ці три точки; 2). Перевірте, чи лежить точка $M(25;35;50)$ у цій площині.

3). Поясніть, що означає «площина витрат» у контексті планування бюджету.

Питання для самоперевірки

1. Яке загальне рівняння площини в тривимірному просторі?
2. Що таке нормальний вектор площини?
3. Як знайти точку перетину площини з координатною віссю?
4. Як визначити, чи належить точка заданій площині?
5. Яке рівняння площини, що проходить через точку $A(x_0, y_0, z_0)$ і має нормальний вектор $\vec{n}(A, B, C)$?
6. Як записати площину через три задані точки, що не лежать на одній прямій?
7. Яке параметричне рівняння площини?
8. Як визначити, чи паралельні дві площини?
9. За якої умови площини перетинаються?
10. Яке рівняння прямої перетину двох площин?
11. Як визначити, чи перетинається пряма з площиною, і знайти точку перетину?
12. Як знайти кут між двома площинами?
13. Як знайти кут між прямою та площиною?
14. Як знайти відстань від точки до площини?
15. Що називається поверхнею в просторі?
15. Що таке циліндрична поверхня? Наведіть приклад її рівняння.
16. Що таке конічна поверхня? Як її описати аналітично?
17. Що таке поверхня обертання? Яке її геометричне значення?

Тема 6. ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ПРЯМИХ І ПЛОЩИНИ.

Короткі теоретичні відомості

ВИДИ РІВНЯНЬ ПРЯМОЇ В ПРОСТОРІ

1	Пряма як лінія перетину двох площин	Пряма у просторі як перетин двох площин π_1 та π_2 визначається сумісним заданням рівнянь цих двох площин $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 & (\pi_1), \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & (\pi_2), \end{cases}$ за умови, що коефіцієнти A_1, B_1, C_1 не пропорційні коефіцієнтам A_2, B_2, C_2, інакше вказані два рівняння будуть визначати або паралельні площини, або площини, які співпадають.
2	Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки	Пряма у просторі, яка проходить через дві задані точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ та $M_2(x_2; y_2; z_2)$ визначається рівняннями $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$
3	Канонічне рівняння прямої	Канонічні рівняння прямої в просторі, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ в напрямі напрямного вектора $\vec{a}(l; m; p)$, мають вигляд $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{p}.$
4	Параметричне рівняння прямої	У параметричному вигляді рівняння прямої в просторі записуються так

	$\begin{cases} x = x_0 + l \cdot t, \\ y = y_0 + m \cdot t, \\ z = z_0 + p \cdot t, \end{cases} \text{ де } t - \text{параметр.}$
--	---

ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ДВОХ ПРЯМИХ В ПРОСТОРИ

Дві прямі у просторі або перетинається, або паралельні між собою, або мимобіжні.

Нехай $\vec{a}_1(l_1; m_1; p_1)$ та $\vec{a}_2(l_2; m_2; p_2)$ напрямні вектори прямих.

Кут між прямими	$\cos \phi = \pm \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + p_1 p_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + p_2^2}}.$
Умова паралельності двох прямих	$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1}{p_2}$
Умова перпендикулярності двох прямих	$l_1 l_2 + m_1 m_2 + p_1 p_2 = 0$

Відстань від точки $(x_0; y_0; z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ визначається за формулою $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$

ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ

Нехай задано пряму $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{p}$ та площину $Ax + By + Cz + D = 0$

Гострий кут між прямою та площиною	$\sin \phi = \frac{ Al + Bm + Cp }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + p^2}}$ (Формула є наслідком застосування скалярного добутку $\vec{n}(A; B; C)$ і
------------------------------------	--

	$\vec{a}(l; m; p)$ та формули зведення $\cos \theta = \cos(90^\circ - \phi) = \sin \phi$.
Умова перпендикулярності прямої і площини	$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{p}$ виражає умову паралельності векторів $\vec{a}(l; m; p)$ та $\vec{n}(A; B; C)$.
Умова паралельності прямої та площини	$Al + Bm + Cp = 0$ виражає умову перпендикулярності векторів $\vec{a}(l; m; p)$ та $\vec{n}(A; B; C)$.
Умова належності прямої площині	$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \\ Al + Bm + Cp = 0. \end{cases}$

Методичні вказівки до розв'язання завдань

Приклад 1. Дано три точки $K(2; -5; -11)$, $L(10; -7; -1)$, $M(4; -3; -4)$. Знайдіть: а) канонічні рівняння прямої KL ; б) рівняння площини, що проходить через точку M перпендикулярно до прямої KL ; в) точку перетину цієї площини з прямою KL ; г) відстань від точки M до прямої KL .

Розв'язання:

а) Запишемо рівняння прямої через дві точки

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

підставимо координати точок K та L

$$\frac{x - 2}{10 - 2} = \frac{y + 5}{-7 + 5} = \frac{z + 11}{-1 + 11}, \text{ одержимо канонічні рівняння прямої } KL$$

$$\frac{x - 2}{8} = \frac{y + 5}{-2} = \frac{z + 11}{10}, \quad \frac{x - 2}{4} = \frac{y + 5}{-1} = \frac{z + 11}{5}.$$

б) Рівняння площини знаходимо у вигляді

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, як рівняння площини, що проходить через точку $M(4; -3; -4)$. Напрямний вектор $\vec{a}$ прямої KL перпендикулярний до площини, тому як нормаль $\vec{n}(A; B; C)$ площини

візьмемо вектор $\vec{a}(4; -1; 5)$. Тоді рівняння площини $4 \cdot (x - 4) + (-1) \cdot (y + 3) + 5 \cdot (z + 4) = 0$, звідки $4x - 16 - y - 3 + 5z + 20 = 0$ або $4x - y + 5z + 1 = 0$.

в) Знаходимо точку H – точку перетину прямої KL з площиною. Для цього рівняння прямої KL запишемо в параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = 4t + 2, \\ y = -t - 5, \\ z = 5t - 11. \end{cases}$$

Підставляючи ці вирази для x , y та z в рівняння площини

$$4x - y + 5z + 1 = 0, \quad \text{одержимо} \quad 4 \cdot (4t + 2) - (-t - 5) + 5(5t - 11) + 1 = 0, \\ 16t + 8 + t + 5 + 25t - 55 + 1 = 0. \quad \text{Звідки} \quad 42t - 41 = 0, \quad \text{тобто} \quad t = \frac{41}{42}.$$

Це значення параметра t відповідає точці перетину прямої і площини:

$$x_H = 4 \cdot \left(\frac{41}{42}\right) + 2 = \frac{124}{21}, \quad y_H = -\frac{41}{42} - 5 = -\frac{251}{42}, \quad z_H = 5 \cdot \frac{41}{42} - 11 = -\frac{257}{42}$$

г) Відстань від точки $M(4; -3; -4)$ до прямої KL – це довжина перпендикуляра, проведеного з точки M до даної прямої. Тоді відстань від точки M до прямої KL – це відстань між точками M і H ,

$$d = \sqrt{(x_H - x_M)^2 + (y_H - y_M)^2 + (z_H - z_M)^2}, \\ d = \sqrt{\left(\frac{124}{21} - 4\right)^2 + \left(-\frac{251}{42} + 3\right)^2 + \left(-\frac{257}{42} + 4\right)^2} \approx 4,12.$$

Приклад 2. Записати рівняння прямої, записаної як лінія перетину

двох площин $\begin{cases} x - y + 5z - 1 = 0, \\ x + 3y + z - 2 = 0, \end{cases}$ в канонічному вигляді.

Розв'язання:

$$\text{I.} \quad \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k} + 1\vec{k} - 15\vec{i} - 1\vec{j}, \quad \text{тобто}$$

$$\vec{a}(-16; 4; 4) \quad \text{або} \quad \vec{a}(-2; 1; 1).$$

II. В якості точки M_0 виберемо точку з $z = 0$. Тоді одержимо

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0, \\ x + 3y - 2 = 0, \end{cases} \text{ Маємо з першого рівняння системи } y = x - 1, \text{ тоді друге}$$

рівняння набуде вигляду $x + 3(x - 1) = 2$, звідки $x + 3x - 3 = 2$, $4x = 5$,
 $x = 1,25$, тоді $y = 1,25 - 1 = 0,25$. Маємо координати точки
 $M_0(1,25; 0,25; 0)$.

Таким чином канонічні рівняння прямої мають вигляд

$$\frac{x - 1,25}{-2} = \frac{y - 0,25}{1} = \frac{z}{1}.$$

Приклад 3. Компанія планує поступове перерозподілення витрат між трьома напрямками: маркетинг x , виробництво y , логістика z . На початку $A(40;30;20)$, а через місяць планується досягти $B(60;10;30)$.

1. Знайдіть параметричне рівняння прямої, яка описує зміну витрат.
2. Визначте, яка буде структура витрат через 50% шляху.
3. Як інтерпретувати координати точки на цій прямій в управлінському контексті?

Розв'язання. 1. В якості напрямного вектора візьмемо вектор

$$\overrightarrow{AB}(20; -20; 10). \text{ Канонічне рівняння прямої буде: } \frac{x - 40}{20} = \frac{y - 30}{-20} = \frac{z - 20}{10}$$

, тоді параметричне рівняння прямої, яка описує зміну витрат матиме вигляд: $x = 40 + 20t$, $y = 30 - 20t$, $z = 20 + 10t$.

2. Щоб визначити, якою буде структура витрат через 50% шляху, необхідно підставити в параметричне рівняння $t = 0,5$.

$$\begin{cases} x = 40 + 20 \cdot 0,5 = 50, \\ y = 30 - 20 \cdot 0,5 = 20, \text{ Отже, точка } (50; 20; 25) - \text{середина } AB \\ z = 20 + 10 \cdot 0,5 = 25, \end{cases}$$

3. Кожна точка на прямій описує поступове перерозподілення витрат. Наприклад, у середині шляху ми маємо 50 ум.од. на маркетинг, 20 — на виробництво, 25 — на логістику.

Завдання для аудиторної та самостійної роботи

Завдання 1. Знайдіть канонічні рівняння та спрямовуючий вектор прямої, що проходить через точки $A(3-\alpha; \alpha; \alpha+2)$ та $B(\alpha+3; \alpha+5; \alpha+1)$. Запишіть рівняння прямої у параметричному вигляді.

Завдання 2. Знайти точку перетину площини $x - 2y + \alpha z - \alpha = 0$ з прямою $\frac{x-1}{\alpha} = \frac{y+1}{-2\alpha} = \frac{z}{6}$.

Завдання 3. Пряма описує траєкторію переходу між стратегічними точками $A(10; \alpha; 10)$ і $B(70; 10\alpha; 20)$. Бюджетне обмеження задано площиною: $3x + \alpha y + 2z = 300$. Знайдіть точку перетину прямої та площини (якщо вона існує); яку частку шляху до точки В компанія може пройти, не порушуючи бюджет?

Завдання 4. Компанія розглядає два сценарії виробництва продукції, кожен із яких задається рівнянням площини у просторі x - кількість праці, y - кількість сировини, z - інвестиції в технології. Перший сценарій описується рівнянням $2x + y + \alpha z = 100$, а другий відповідно $x - y + 3z = 120$. Знайти рівняння прямої, яка описує всі можливі варіанти

розподілу ресурсів, що одночасно задовольняють обидва сценарії. Яке економічне тлумачення має ця пряма?

Питання для самоперевірки

1. Які способи задання прямої у тривимірному просторі вам відомі?
2. Що таке параметричне рівняння прямої у просторі?
3. Як побудувати пряму, що проходить через дві задані точки у просторі?
4. Як знайти напрямний вектор прямої?
5. Що таке симетричне рівняння прямої і коли його можна записати?
6. Як знайти точку перетину прямої з координатною площиною?
7. Як перевірити, чи належить точка заданій прямій у просторі?
8. Як знайти відстань між двома точками у просторі?
9. Які можливі взаємні розташування двох прямих у просторі?
10. За яких умов дві прямі є паралельними? мимобіжними?
11. Як визначити, чи перетинаються дві прямі?
12. Як знайти кут між двома прямими у просторі?
13. Як знайти найкоротшу відстань між мимобіжними прямими?
15. Які можливі взаємні розташування прямої і площини у просторі?
16. Як визначити, чи лежить пряма в площині?
17. Як знайти точку перетину прямої і площини?
18. Як знайти кут між прямою і площиною?
19. За якої умови пряма паралельна площині?
20. Як знайти відстань від точки на прямій до площини?

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алгебра та геометрія. Криві II порядку: посібник для самостійної та дистанційної роботи студентів/ О. Ю. Пархоменко та ін. Миколаїв: МНУ ім. В. О. Сухомлинського, 2020. 172 с.
2. Алгебра та геометрія: Вектори. Системи координат: навчально-методичний посібник/ О.Ю. Пархоменко та ін. Миколаїв: МНУ ім. В. О. Сухомлинського, 2018. 213 с.
3. Алгебра та геометрія: Пряма. Площина: навчально-методичний посібник/ О.Ю. Пархоменко та ін. Миколаїв: МНУ, 2019. 249 с.
4. Васильченко І. П. Вища математика для економістів : підручник. Київ: Знання-Прес, 2004. 454 с.
5. Вища математика: Алгебра та геометрія : метод. реком. для виконання самост. роботи здобувачами першого (бакалаврського) рівня вищої освіти ОПП «Готельно-ресторанна справа» та ОПП «Туризм» спеціальностей 241«Готельно-ресторанна справа» та 242 «Туризм» денної та заочної форми здобуття вищої освіти /уклад.: О. В. Бойчук, С. І. Богданов, Є. Ю. Борчик, В. В. Поживатенко. Миколаїв: МНАУ, 2023. 52 с. URL:
<https://AspacB.mnau.BAu.ua/jspui/hanAlB/123456789/13126>
6. Коваленко Л. Б. Вища математика для менеджерів: підручник. Харків: ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2019. 341 с.
7. Пархоменко О. Ю., Дармосюк В. М., Васильєва Л. Я. Тестові завдання з вищої математики: навчальний посібник. Миколаїв: МНУ, 2019. 155 с.

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА.

Аналітична геометрія
Методичні рекомендації

Укладач: **Дармосюк** Валентина Миколаївна

Формат 60x84/16 Ум. друк. арк.

Тираж __ прим. Зам. №

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Г. Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.