

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ

Інженерно-енергетичний факультет

Кафедра вищої та прикладної математики

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Лінійна та векторна алгебра:

методичні рекомендації для практичних занять
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
ОПП «Публічне управління та адміністрування» спеціальності
281 «Публічне управління та адміністрування» та ОПП «Економіка»
спеціальності С1 «Економіка» денної та заочної форм здобуття вищої
освіти

МИКОЛАЇВ
2025

УДК 512.64+514.742.2
В55

Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету МНАУ (протокол № 8 від 18.04.2025 р.)

Укладач:

В. М. Дармосюк кандидат фізико-математичних наук, доцент
кафедри вищої та прикладної математики
Миколаївського національного аграрного
університету

Рецензенти:

Махровська Н. А. кандидат фізико-математичних наук, доцент
кафедри теорії й методики природничо-
математичної освіти та інформаційних технологій
Миколаївського обласного інституту
післядипломної педагогічної освіти

Пархоменко О. Ю. кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент
кафедри економічної кібернетики, комп'ютерних
наук та інформаційних технологій Миколаївського
національного аграрного університету

© Миколаївський національний аграрний університет, 2025

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
Тема 1. МАТРИЦІ. ДІЇ З МАТРИЦЯМИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ	5
Короткі теоретичні відомості.....	5
Методичні вказівки до розв’язання завдань.....	11
Завдання для аудиторної та самостійної роботи.....	18
Питання для самоперевірки.....	21
Тема 2. ВИЗНАЧНИКИ. АЛГЕБРАЇЧНІ ДОПОВНЕННЯ. ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ, ВЛАСТИВОСТІ, ЗНАХОДЖЕННЯ.....	22
Короткі теоретичні відомості.....	22
Методичні вказівки до розв’язання завдань.....	29
Завдання для аудиторної та самостійної роботи.....	35
Питання для самоперевірки.....	36
Тема 3. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ. МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ.....	37
Короткі теоретичні відомості.....	37
Методичні вказівки до виконання завдань	42
Завдання для аудиторної та самостійної роботи.....	50
Питання для самоперевірки.....	52
Тема 4. ВЕКТОРИ. ДІЇ НАД ВЕКТОРАМИ.....	53
Короткі теоретичні відомості.....	53
Методичні вказівки до виконання завдань	59
Завдання для аудиторної та самостійної роботи.....	65
Питання для самоперевірки.....	66
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	68

ВСТУП

Курс «Вища математика» є невід’ємною складовою фахової підготовки здобувачів вищої освіти економічного напрямку, оскільки забезпечує математичний апарат, необхідний для аналізу, прогнозування та прийняття обґрунтованих рішень у складних економічних умовах. Розділ «Лінійна та векторна алгебра» формує фундамент для опанування методів оптимізації, економетрії, моделювання економічних систем.

Метою методичних рекомендацій є надання здобувачам освіти систематизованого матеріалу для вивчення основних тем лінійної та векторної алгебри. Запропонований матеріал охоплює базові поняття та методи, що становлять основу для кількісного аналізу економічних даних, моделювання господарських процесів і прийняття ефективних управлінських рішень.

Методичні рекомендації створено відповідно до програми курсу «Вища математика» для здобувачів освітнього рівня «бакалавр» спеціальностей 281 «Публічне управління та адміністрування» та С1 «Економіка».

В методичних рекомендаціях наведено короткі теоретичні відомості, приклади розв’язання задач і завдання для самостійної роботи, що сприяє кращому засвоєнню матеріалу та формуванню практичних навичок здобувачів освіти з даного розділу курсу «Вища математика». Також наведено приклади розв’язання типових задач, що допоможе студентам краще зрозуміти матеріал і підготуватися до практичних занять, поточного та підсумкового контролю.

Тема 1. МАТРИЦІ. ДІЇ З МАТРИЦЯМИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Короткі теоретичні відомості

Матрицею називається прямокутна таблиця чисел, яка має m рядків і n стовпців.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа a_{ij} називаються елементами матриці, а запис $m \times n$ означає її розмірність: m – кількість рядків матриці, n – кількість стовпців матриці. Якщо $m = n$, то матриця називається *квадратною*. Позначати матриці прийнято великими латинськими літерами: A, B, C і т.д.

Дві матриці *рівні між собою*, якщо вони мають однаковий розмір і всі їх відповідні елементи рівні між собою.

Множина елементів $a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$ квадратної матриці n -го порядку утворює головну діагональ, а множина елементів $a_{1n} a_{2(n-1)} \dots a_{n1}$ – побічну діагональ. Якщо $a_{ij} = a_{ji}$, то матриця називається *симетричною*.

Квадратну матрицю, в якій всі елементи, крім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю, називають *діагональною*:

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}.$$

Якщо в діагональній матриці всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці, то таку матрицю називають *одиничною* і позначають її буквою E :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицю, в якій всі елементи дорівнюють нулю, називають *нульовою* або *нуль-матрицею*:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицю, що складається з одного стовпця ($m \times 1$), називають *матрицею-стовпцем* або *вектором-стовпцем*; матрицю, що складається з одного рядка ($1 \times n$), називають *матрицею-рядком* або *вектором-рядком*. Елементи вектора (вектора-стовпця або вектора-рядка) називають його *координатами*. Число координат вектора називають його *виміром*.

Квадратну матрицю називають *трикутною*, якщо всі її елементи a_{ij} , розміщені під головною діагоналлю ($i > j$), або над головною діагоналлю ($i < j$), дорівнюють нулю.

Сумою матриць одного й того самого порядку $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$ називається матриця $C = A + B$; $C = (c_{ij})$, будь-який елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць A і B : $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Добутком матриці $A = (a_{ij})$ на деяке число α , називається така матриця C , кожен елемент якої c_{ij} утворюється множенням відповідних елементів матриці A на α , $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$.

Властивості додавання матриць та множення матриці на число

$$1) A + (B + C) = (A + B) + C; \text{ (асоціативний закон додавання)}$$

$$2) A + B = B + A; \quad \text{(комутативний закон)}$$

$$3) (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A; \quad \text{(дистрибутивний закон)}$$

$$4) \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B; \quad \text{(дистрибутивний закон)}$$

$$5) A + 0 = A.$$

Добутком матриці $A = (a_{ij})$ розміру $m \times n$ на матрицю $B = (b_{ij})$ розміру $n \times p$ називається така матриця $C = A \cdot B$ розміру $m \times p$, $C = (c_{ij})$, кожний елемент якої можна знайти за формулою:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Кожний елемент матриці C утворюється як сума добутків відповідних елементів i -го рядка матриці A на відповідні елементи j -го стовпця матриці B , тобто за схемою:

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vdots & b_{1j} & \vdots \\ \vdots & b_{2j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & b_{nj} & \vdots \end{pmatrix}$$

В результаті множення дістанемо матрицю розміру $m \times p$.

$$\left(\begin{array}{c} \end{array} \right)_{m \times \underline{n}} \cdot \left(\begin{array}{c} \end{array} \right)_{\underline{n} \times p} = \left(\begin{array}{c} \end{array} \right)_{m \times p}$$

Властивості множення матриць

Нехай λ – довільне число, A, B, C – довільні матриці, для яких визначені операції додавання та множення, записані в лівих частинах рівностей. Тоді визначені операції, вказанні в правих частинах, і справедливими є наступні рівності:

- 1) $(AB)C = A(BC)$; (асоціативність множення матриць)
- 2) $(A+B)C = AC + BC$; (дистрибутивність множення)
- 3) $A(B+C) = AB + AC$; (дистрибутивність множення)
- 4) $\lambda(AB) = (\lambda A)B$.

З означення випливає, що в загальному випадку добуток матриць *некомутативний*: $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Матриці A та B називаються *переставними*, якщо $A \cdot B = B \cdot A$.

Перестановочними можуть бути тільки квадратні матриці однакової розмірності. Прикладом перестановочних матриць є діагональні матриці однакової розмірності.

Для довільної квадратної матриці A (n -порядку) визначений добуток $A \cdot A$ (матриці A на себе). Тому можна говорити про цілий невід'ємний степінь матриці, визначаючи послідовно

$$A^0 = E, A^1 = A, A^2 = A \cdot A, A^3 = A^2 \cdot A, \dots, A^m = A^{m-1} \cdot A.$$

Для довільної матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ транспонованою

матрицею називається матриця $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, яка

отримується з матриці A заміною рядків стовпцями, а стовпців рядками.

Щоб з матриці A отримати матрицю A^T , потрібно перший рядок матриці A записати як перший стовпець матриці A^T , другий рядок матриці A записати як другий стовпець матриці A^T і т.д. Ця операція називається операцією транспонування матриці.

Сучасна економіка широко використовує апарат лінійної алгебри для побудови математичних моделей економічних процесів. Наведемо приклади розв'язання деяких економічних задач в матричній формі:

I. Нехай в деякій галузі m підприємств випускають k видів продукції. Матриця $A_{m \times k}$ задає обсяги продукції на кожному підприємстві в першому кварталі, а матриця $B_{m \times k}$ у другому. Фактично елементи цих матриць

(a_{ij}, b_{ij}) – це обсяги на i -тому заводі продукції j -го виду в першому і другому кварталах відповідно. Обсяг продукції за перший період (матриця $C_{m \times k}$) знаходиться як сума цих матриць, тобто $C = A + B$. Приріст обсягів продукції за другий період порівняно з першим за видами та по підприємствах (матриця $D_{m \times k}$) знаходиться як різниця матриць $D = B - A$, при цьому додатні d_{ij} свідчать про те, що на даному підприємстві i обсяг виробництва j збільшився, а від'ємні - що зменшився, нульові – не змінився.

II. Підприємство виробляє m типів продукції, обсяги виробництва задаються матрицею $A_{1 \times m}$. Вартість реалізації одиниці i -го типу продукції в j -му регіоні задана матрицею $B_{m \times k}$, де k - число регіонів, у яких реалізується продукція. Матрицю виручки по регіонах знаходиться за формулою $C = A \cdot B$, c_{ij} - виручка i -підприємства в j -му регіоні.

III. Підприємство виробляє m типів продукції, використовуючи n видів ресурсів. Норми затрат ресурсу i -го товару на виробництво одиниці продукції j -го типу задані матрицею $A_{n \times m}$. Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу x_{ij} , яка задана матрицею $X_{m \times 1}$. Нехай вказана вартість кожного виду ресурсів у розрахунку на одиницю у вигляді матриці $P_{1 \times n}$

Матриця повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період знаходиться за формулою $S = A \cdot X$. Повна

вартість усіх витрачених ресурсів за певний період знаходиться за формулою $C = P \cdot S$ або $C = P \cdot A \cdot X$.

Методичні вказівки до розв'язання завдань

Приклад 1. Виконати дії над матрицями

$$B + 2A, A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$B + 2A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 & 2 \cdot 2 & -1 \cdot 2 \\ -2 \cdot 2 & 1 \cdot 2 & 2 \cdot 2 \\ -1 \cdot 2 & 0 \cdot 1 & 5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -4 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 10 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1+0 & 0+4 & 2-2 \\ 0-4 & 1+2 & 1+4 \\ 3-2 & -2+0 & 5+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ -4 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 15 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Відповідь: } B + 2A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ -4 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 15 \end{pmatrix}$$

Приклад 2. Знайти добуток матриць:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \text{ б) } A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Нехай $C = A \cdot B$

$$\text{a) } c_{11} = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) = 2 - 9 + 1 + 0 = -6$$

$$c_{12} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 = 4 + 0 + 2 + 0 = 6$$

$$c_{13} = 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 5 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 = -4 - 15 + 0 + 0 = -19$$

$$c_{21} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = 1 + 6 - 2 - 2 = 3$$

$$c_{22} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = 2 + 0 - 4 + 0 = -2$$

$$c_{23} = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 5 - 2 \cdot 0 + 1 \cdot 3 = -2 + 10 - 0 + 3 = 11$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 6 & -19 \\ 3 & -2 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = 4 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + 3 \cdot (-3) = 4 + 0 - 9 = -5$$

$$c_{21} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot (-3) = 2 + 2 - 6 = -2$$

$$c_{31} = 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 0 \cdot (-3) = 1 - 6 + 0 = -5$$

$$\text{Відповідь: а) } \begin{pmatrix} -6 & 6 & -19 \\ 3 & -2 & 11 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Приклад 3. Знайти добуток матриць $A \cdot B$ та $B \cdot A$:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix};$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

Розв'язання.

$$\text{a) } C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 10 & -17 \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 6, \quad c_{12} = 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) = 1 - 9 = -8,$$

$$c_{21} = -2 \cdot 0 + 5 \cdot 2 = 10, \quad c_{22} = -2 \cdot 1 + 5 \cdot (-3) = -2 - 15 = -17$$

$$D = B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 8 & -9 \end{pmatrix}$$

$$d_{11} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = -2, \quad d_{12} = 0 \cdot 3 + 1 \cdot 5 = 5,$$

$$d_{21} = 2 \cdot 1 + (-3) \cdot (-2) = 2 + 6 = 8, \quad d_{22} = 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 5 = 6 - 15 = -9$$

$$\text{b) } C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -3 \\ 6 & 1 & -4 \\ -11 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 = 0 - 4 + 9 = 5,$$

$$c_{12} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 1 + 0 + 3 = 4,$$

$$c_{13} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) = 2 - 2 - 3 = -3$$

$$c_{21} = -1 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 = 6,$$

$$c_{22} = -1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = -1 + 0 + 2 = 1,$$

$$c_{23} = -1 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) = -2 + 0 - 2 = -4$$

$$c_{31} = 1 \cdot 0 + 4 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 = 0 - 8 - 3 = -11,$$

$$c_{32} = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = 1 + 0 - 1 = 0,$$

$$c_{33} = 1 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) = 2 - 4 + 1 = -1$$

$$D = B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ -3 & -8 & -5 \\ 1 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

$$d_{11} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = 0 - 1 + 2 = 1,$$

$$d_{12} = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 4 = 0 + 0 + 8 = 8,$$

$$d_{13} = 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 0 + 2 - 2 = 0$$

$$d_{21} = -2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = -2 + 0 - 1 = -3,$$

$$d_{22} = -2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 4 = -4 + 0 - 4 = -8,$$

$$d_{23} = -2 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) = -6 + 0 + 1 = -5$$

$$d_{31} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = 3 - 1 - 1 = 1,$$

$$d_{32} = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 4 = 6 + 0 - 4 = 2,$$

$$d_{33} = 3 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) = 9 + 2 + 1 = 12$$

$$\text{Відповідь: а) } A \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 10 & -17 \end{pmatrix}; B \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 8 & -9 \end{pmatrix}; \text{ б) } A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -3 \\ 6 & 1 & -4 \\ -11 & 0 & -1 \end{pmatrix}; B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ -3 & -8 & -5 \\ 1 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

Приклад 4. Знайти матрицю $(A \cdot B)^T$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Спочатку знайдемо добуток

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + (-1) \cdot (-1) & 1 \cdot 5 + (-1) \cdot 0 \\ 0 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) & 0 \cdot 5 + 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 4 + 1 \cdot (-1) & 3 \cdot 5 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -2 & 0 \\ 11 & 15 \end{pmatrix}.$$

Транспонуємо отриману матрицю: $(A \cdot B)^T = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 11 \\ 5 & 0 & 15 \end{pmatrix}.$

$$\text{Відповідь: } (A \cdot B)^T = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 11 \\ 5 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

Приклад 5. Нехай чотири підприємства виробляють продукцію п'яти видів. Обсяг виробленої продукції в першому кварталі року задає

матриця $A = \begin{pmatrix} 23 & 15 & 17 & 14 & 13 \\ 20 & 8 & 6 & 10 & 9 \\ 15 & 16 & 19 & 15 & 9 \\ 19 & 16 & 18 & 14 & 11 \end{pmatrix}$, в другому кварталі матриця

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 11 & 15 & 8 \\ 7 & 10 & 8 & 9 & 12 \\ 8 & 8 & 10 & 14 & 13 \\ 10 & 5 & 7 & 11 & 10 \end{pmatrix}.$$

Знайти: а) обсяг продукції за півроку; б) приріст обсягів продукції за другий квартал порівняно з першим за видами та по підприємствах; вказати підприємства на яких обсяг виробництва збільшився, вказати по яким видам продукції.

Розв'язання.

$$\text{а) } C = A + B = \begin{pmatrix} 23 & 15 & 17 & 14 & 13 \\ 20 & 8 & 6 & 10 & 9 \\ 15 & 16 & 19 & 15 & 9 \\ 19 & 16 & 18 & 14 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 10 & 11 & 15 & 8 \\ 7 & 10 & 8 & 9 & 12 \\ 8 & 8 & 10 & 14 & 13 \\ 10 & 5 & 7 & 11 & 10 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 32 & 25 & 28 & 29 & 21 \\ 27 & 18 & 14 & 19 & 21 \\ 23 & 24 & 29 & 29 & 22 \\ 29 & 21 & 25 & 25 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } D = B - A &= \begin{pmatrix} 9 & 10 & 11 & 15 & 8 \\ 7 & 10 & 8 & 9 & 12 \\ 8 & 8 & 10 & 14 & 13 \\ 10 & 5 & 7 & 11 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 23 & 15 & 17 & 14 & 13 \\ 20 & 8 & 6 & 10 & 9 \\ 15 & 16 & 19 & 15 & 9 \\ 19 & 16 & 18 & 14 & 11 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -14 & -5 & -6 & 1 & -5 \\ -13 & 2 & 2 & -1 & -3 \\ -7 & -8 & -9 & -1 & 4 \\ -9 & -11 & -11 & -3 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Обсяг виробництва збільшився у першого підприємства по четвертому виду продукції, у другого підприємства по другому та третьому видах продукції, у третього – по п'ятому виду.

$$\text{Відповідь: а) } \begin{pmatrix} 32 & 25 & 28 & 29 & 21 \\ 27 & 18 & 14 & 19 & 21 \\ 23 & 24 & 29 & 29 & 22 \\ 29 & 21 & 25 & 25 & 21 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} -14 & -5 & -6 & 1 & -5 \\ -13 & 2 & 2 & -1 & -3 \\ -7 & -8 & -9 & -1 & 4 \\ -9 & -11 & -11 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Приклад 6. Підприємство виробляє три типи продукції, обсяги виробництва яких задаються матрицею $A = \begin{pmatrix} 320 & 150 & 220 \end{pmatrix}$. Ця продукція реалізується в п'яти регіонах. Вартість реалізації відповідної одиниці продукції у певному регіоні задана матрицею

$$B = \begin{pmatrix} 20 & 5 & 17 & 14 & 8 \\ 12 & 6 & 9 & 15 & 11 \\ 7 & 9 & 5 & 7 & 13 \end{pmatrix}. \text{ Знайти матрицю виручки по регіонах, вказати}$$

регіон який дає максимальну виручку.

Розв'язання.

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 320 & 150 & 220 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & 5 & 17 & 14 & 8 \\ 12 & 6 & 9 & 15 & 11 \\ 7 & 9 & 5 & 7 & 13 \end{pmatrix} = \\ = (9740 \quad 4480 \quad 7890 \quad 8270 \quad 7070).$$

Отже, максимальну виручку дав перший регіон.

Відповідь: (9740 4480 7890 8270 7070), максимальну виручку дав перший регіон.

Приклад 7. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу i -го товару на виробництво одиниці продукції j -го типу задані матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 6 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}. \text{ Нехай за визначений відрізок часу підприємство}$$

виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею

$$X = \begin{pmatrix} 250 \\ 175 \\ 310 \end{pmatrix}, \text{ вартість кожного виду ресурсів у розрахунку на одиницю у}$$

вигляді матриці $P = (35 \quad 50 \quad 95 \quad 60)$.

Знайти: а) матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

Розв'язання.

а) Матриця повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період:

$$S = A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 6 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 250 \\ 175 \\ 310 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2575 \\ 1395 \\ 4085 \\ 3040 \end{pmatrix},$$

Отже, за заданий період буде використано 2575 одиниць ресурсів першого виду, 1395 – другого виду, 4085 – третього і 3040 – четвертого виду.

b) Повна вартість усіх витрачених ресурсів за певний період:

$$C = P \cdot S = (35 \quad 50 \quad 95 \quad 60) \begin{pmatrix} 2575 \\ 1395 \\ 4085 \\ 3040 \end{pmatrix} = 730350 \quad (\text{грошових одиниць})$$

Відповідь: а) за заданий період буде використано 2575 одиниць ресурсів першого виду, 1395 – другого виду, 4085 – третього і 3040 – четвертого виду; б) 730330.

Завдання для аудиторної та самостійної роботи

Зауваження: Виконуючи завдання значення α приймається рівним номеру варіанта.

Завдання 1. Знайти матрицю $D = (\alpha - 15)A - B + 2C$, де $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 2 + \alpha & 4 + \alpha \end{pmatrix}$ і $C = \begin{pmatrix} 1 + \alpha & -5 + \alpha \\ \alpha & 2 + \alpha \end{pmatrix}$.

Завдання 2. Знайти матрицю $C = A \cdot B$, де $A = \begin{pmatrix} 2 + \alpha & -1 + \alpha & 2 + \alpha \\ \alpha & 2 + \alpha & -1 + \alpha \\ -2 + \alpha & 5 + \alpha & -3 + \alpha \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 + \alpha \\ 1 - \alpha \\ -2 + \alpha \end{pmatrix}$.

Завдання 3. Знайти матриці $C = A \cdot B$ і $D = B \cdot A$, де

$$A = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 2+\alpha \\ -1+\alpha & -5+\alpha \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4+\alpha & 1-\alpha \\ 3-\alpha & -2+\alpha \end{pmatrix}.$$

Завдання 4. Знайти матриці $C = B \cdot A$, $D = A^T \cdot B^T$, де

$$A = \begin{pmatrix} 3+\alpha & \alpha \\ 7+\alpha & -4+\alpha \\ 9-\alpha & -1+\alpha \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1+\alpha & 3+\alpha & 2-\alpha \\ -\alpha & 1+\alpha & 4+\alpha \end{pmatrix}.$$

Завдання 5. Нехай чотири підприємства виробляють продукцію п'яти видів. Обсяг виробленої продукції в першому та другому кварталах року задають матриці A та B відповідно.

Знайти: а) обсяг продукції за півроку; б) приріст обсягів продукції за другий квартал порівняно з першим за видами та по підприємствах; вказати підприємства, на яких обсяг виробництва збільшився, визначити по яким видам продукції.

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 1+\alpha & 8 & 12 & 5 & 3 \\ 2 & \alpha & 8 & \alpha & 8 \\ 5 & 6 & 9 & 5 & 2\alpha \\ 9 & 6 & 8 & 1+\alpha & 10 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2+\alpha & 7 & 1+\alpha & 15 & 8 \\ 4 & 6 & 8 & 9 & 2 \\ 3 & 5+\alpha & 10 & 4 & 3\alpha \\ 6 & 2+\alpha & 7 & \alpha & 10 \end{pmatrix}$$

Завдання 6. Підприємство виробляє три типи продукції, обсяги виробництва яких задаються матрицею $A = (\alpha + 10 \quad 2\alpha + 12 \quad 3\alpha + 2)$. Ця продукція реалізується в п'яти регіонах. Вартість реалізації відповідної одиниці продукції у певному регіоні задана матрицею

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 5 & 7 & 4 & \alpha + 2 \\ 3 & 6 & \alpha + 1 & 5 & 4 \\ 7 & 9 & 5 & \alpha & 3 \end{pmatrix}. \text{ Знайти матрицю виручки по регіонах,}$$

вказати регіон який дає максимальну виручку.

Завдання 7. Підприємство виробляє п'ять типів продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу i -го товару на виробництво одиниці продукції j -го типу задані матрицею A . Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею X , вартість кожного виду ресурсів у розрахунку на одиницю у вигляді матриці P .

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 6 & 7 & 9 & 4 \\ 6 & \alpha + 2 & 7 & 8 & 4 \\ 5 & 6 & 4 & \alpha + 2 & 5 \\ \alpha + 1 & 8 & 9 & 7 & \alpha + 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 2\alpha + 10 \\ 3\alpha + 12 \\ 4\alpha + 10 \\ 4\alpha + 15 \\ 5\alpha \end{pmatrix}, P = (60 \quad 50 \quad 75 \quad 30)$$

Знайти: а) матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період; б) повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

Питання для самоперевірки

1. Що таке матриця? Які типи матриць існують?
2. Як позначають розмірність матриці? Наведіть приклади.
3. Які матриці називають квадратними?
4. Що таке діагональна матриця?
5. Що таке одинична матриця? Які її властивості?
6. Як визначити транспоновану матрицю? Яка операція при цьому виконується?
7. Як виконувати додавання та віднімання матриць? Які умови необхідні для цих операцій?
8. Що таке добуток матриць? Як виконувати множення двох матриць?
9. Які умови необхідні для того, щоб помножити дві матриці?
10. Чи є операція множення матриць комутативною? Поясніть.
11. Які застосування матриць і дій над ними є у прикладній математиці та економіці?

Тема 2. ВИЗНАЧНИКИ. АЛГЕБРАЇЧНІ ДОПОВНЕННЯ. ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ, ВЛАСТИВОСТІ, ЗНАХОДЖЕННЯ.

Короткі теоретичні відомості

ВИЗНАЧНИКИ, ЇХ ВЛАСТИВОСТІ. МІНОРИ, АЛГЕБРАЇЧНІ ДОПОВНЕННЯ.

Вираз $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ називають *визначником другого порядку*, складеним для квадратної матриці $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Позначають визначник другого порядку $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

Визначником третього порядку, складеним для квадратної матриці,

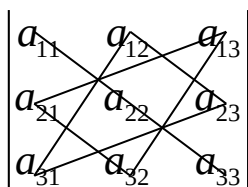
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, називається число, що дорівнює алгебраїчній сумі

$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$ і позначають

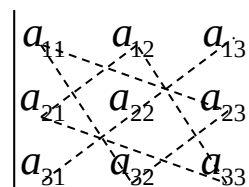
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Визначники третього порядку можна обчислювати за правилом, яке називається *правилом трикутників*:

“+”

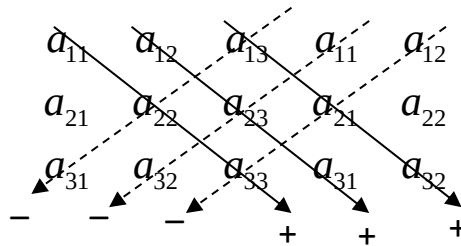


“−”



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Визначники третього порядку можна обчислювати за правилом Саррюса. За цим правилом складають таблицю, для якої обчислюють визначник. Справа до неї дописують два перші стовпці. В основній таблиці проводять головну діагональ і дві прямі, їй паралельні, що перетинають по три елементи. Добутки елементів, розміщених на зазначених трьох прямих, є трьома першими членами визначника. Щоб обчислити три інші члени визначника, проводять побічну діагональ і дві прямі, їй паралельні, на яких розміщено по три елементи. Добутки цих елементів беруть з протилежним знаком.



Такий самий результат матимемо й тоді, коли до основної таблиці допишемо знизу два перші рядки і виконаємо ті самі дії, що й у першому випадку.

Визначником n -го порядку матриці $A = (a_{ij})_n$ називається алгебраїчна сума усіх можливих $n!$ членів, кожний з яких є добутком n елементів, взятих по одному і тільки по одному із кожного рядка і кожного стовпця матриці A ; при цьому добуток береться із знаком «+», якщо індекси його елементів утворюють парну підстановку і із знаком «-», – якщо непарну.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Визначником n -го порядку матриці $A = (a_{ij})_n$ називається алгебраїчна сума усіх можливих $n!$ членів, кожний з яких є добутком n елементів, взятих по одному і тільки по одному з кожного рядка і кожного стовпця матриці A ; знак члена визначається множником $(-1)^s$, де s – число інверсій у подвійній перестановці (підстановці) індексів елементів даного члена.

У цьому випадку загальний член визначника має вигляд:

$$T = (-1)^s a_{i_1 k_1} \cdot a_{i_2 k_2} \cdot \dots \cdot a_{i_n k_n},$$

а визначник

$$\Delta A = \sum_{n!} (-1)^s a_{i_1 k_1} \cdot a_{i_2 k_2} \cdot \dots \cdot a_{i_n k_n}.$$

Визначником n -го порядку матриці $A = (a_{ij})_n$ називається алгебраїчна сума усіх можливих $n!$ членів, кожний з яких є добутком n елементів, взятих по одному і тільки по одному з кожного рядка і кожного стовпця матриці A ; знак члена визначається множником $(-1)^t$, де t – число інверсій у перестановці других індексів елементів даного члена, якщо він упорядкований за першими індексами.

Мінором $(n-1)$ -го порядку M_{ij} матриці n -го порядку A , називається визначник матриці $(n-1)$ -го порядку, утворений з матриці A викреслюванням i -го рядка та j -го стовпчика, тобто

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} матриці A n -го порядку називається мінор $(n-1)$ -го порядку M_{ij} помножений на $(-1)^{i+j}$, тобто $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Обчислення визначників n -го порядку

Теорема 1. Визначник, у якого всі елементи i -го рядка, крім a_{ij} , дорівнюють нулю, дорівнює добутку цього елемента a_{ij} на його алгебраїчне доповнення A_{ij} , тобто $\Delta = a_{ij} A_{ij}$.

Теорема 2. Визначник n -го порядку дорівнює сумі попарних добутків елементів будь-якого рядка на відповідні їм алгебраїчні доповнення (це виконується і для стовпців).

Тобто $\Delta = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in}$ (за рядками),

або $\Delta = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots + a_{nj} A_{nj}$ (за стовпцями)

Найважливіші властивості визначників.

1. *Властивість антисиметрії:* Якщо у визначнику поміняти місцями будь-які два стовпці, то абсолютна величина визначника не зміниться, а знак його зміниться на протилежний.
2. *Властивість однорідності:* Якщо елементи одного з рядків (стовпців) визначника помножити на деяке число λ , то визначник помножиться на λ .
3. *Властивість лінійності:* Якщо до одного з рядків (стовпців) визначника додати інший його рядок (стовпець), (можна ще й помножений на деяке число λ), то визначник не зміниться.

ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ, ВЛАСТИВОСТІ, ЗНАХОДЖЕННЯ

Матрицею, *оберненою* до даної квадратної матриці A , називають матрицю A^{-1} , яка задовольняє співвідношення $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, де E – одинична матриця.

Квадратну матрицю A називають *неособливою* або *невиродженою*, якщо визначник цієї матриці $|A| \neq 0$. Якщо $|A| = 0$, то матрицю A називають *особливою* або *виродженою*.

Матриця $A = (a_{ij})$ називається *невиродженою*, якщо система її рядків лінійно незалежна, і *виродженою*, якщо між її рядками існує лінійна залежність.

Поняття оберненої матриці вводиться тільки для квадратних матриць, визначник яких відмінний від нуля.

Властивості оберненої матриці

$$1) (A^{-1})^{-1} = A;$$

$$2) (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

$$1) (A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$$

$$4) \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

$$5) E^{-1} = E$$

Метод Жордана-Гаусса. За цим методом можна знайти матрицю, обернену до даної квадратної матриці. Для цього складають блочну матрицю $(A|E)$ і виконують елементарні перетворення над рядками «здвоєної» матриці (яка має n рядків та $2n$ стовпців).

До елементарних перетворень матриці відносяться:

1) заміна місцями двох рядків чи стовпців матриці;

2) множення рядка або стовпця матриці на довільне відмінне від нуля число;

3) додавання елементів одного рядка або стовпця до відповідних елементів іншого рядка або стовпця, попередньо помноженого на деяке число.

В результаті елементарних перетворень над рядками матриці $(A|E)$ одержують матрицю $(E|A^{-1})$.

Другий спосіб обчислення оберненої матриці

1) Обчислимо визначник матриці A . Якщо $\det A \neq 0$, то матриця A має обернену.

2) Складемо матрицю (A_{ij}) із алгебраїчних доповнень

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ елементів матриці A .

3) Транспонуємо матрицю (A_{ij}) , одержимо матрицю $(\tilde{A})^T = (A_{ij})^T$.

4) Знайдемо обернену матрицю, поділивши всі елементи приєднаної матриці на визначник $\det A$: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (\tilde{A})^T$.

Знаходження матриці повних витрат:

Нехай відома матриця коефіцієнтів прямих витрат A , де a_{ij} — це кількість продукції галузі i , необхідна для виробництва одиниці продукції галузі j . Треба знайти матрицю повних витрат $(E - A)^{-1}$, яка враховує як прямі, так і непрямі витрати між галузями.

Математична модель: Матриця повних витрат $(E - A)^{-1}$ обчислюється як обернена матриця до $(E - A)$, де E — одинична матриця того ж розміру, що й A .

РАНГ МАТРИЦІ

В матриці A розмірності $m \times n$ мінор r -го порядку називається *базисним*, якщо він відмінний від нуля, а всі мінори $(r + 1)$ -го порядку рівні нулю або взагалі їх не існує.

Рангом матриці називається порядок базисного мінора. Позначення: $\text{Rang} A$, $r(A)$.

Зауваження 1. Якщо у матриці всі мінори k -го порядку рівні нулю, то рівні нулю і мінори більш високого порядку.

Зауваження 2. Ранг матриці дорівнює найбільшому порядку відмінного від нуля мінора цієї матриці.

Зауваження 3. Якщо квадратна матриця невинроджена, то її ранг дорівнює її порядку.

Теорема 3 (про ранг матриці). Ранг матриці дорівнює максимальному числу лінійно незалежних рядків матриці.

Наслідок. Максимальне число лінійно незалежних рядків матриці дорівнює максимальному числу лінійно незалежних стовпців:

$$r(A) = r(A^T).$$

Метод елементарних перетворень знаходження рангу матриці полягає в тому, що матрицю A зводять до ступінчатого виду за допомогою елементарних перетворень; кількість ненульових рядків одержаної ступінчатої матриці є шуканий ранг матриці A .

Методичні вказівки до розв'язання завдань

Приклад 1. Знайти визначник другого порядку $\Delta = \begin{vmatrix} -4 & -6 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$.

Розв'язання: $\Delta = \begin{vmatrix} -4 & -6 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -4 \cdot 3 - (-6) \cdot 5 = -12 + 30 = 18.$

Відповідь: 18.

Приклад 2. Знайти визначник третього порядку $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Розв'язання : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} =$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \cdot (-2) - 1 \cdot (-1) \cdot 3 - (-1) \cdot 3 \cdot 1 =$$

$$= 1 - 2 + 18 + 4 + 3 + 3 = 27.$$

Відповідь: 27.

Приклад 3. Знайти значення x при якому визначник $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ x & 6 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

дорівнює 0.

Розв'язання : $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ x & 6 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad 6 + 12 + 10x - 12 - 3x - 20 = 0, \quad 7x - 14 = 0,$

$$x = 2.$$

Відповідь: 2.

Приклад 4. Знайти мінори та відповідні алгебраїчні доповнення до елементів матриці $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Розв'язання :

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 - 48 = -3, \quad A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = -3;$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 36 - 42 = -6, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1) \cdot (-6) = 6;$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 32 - 35 = -3, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = -3;$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 24 = -6, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -1 \cdot (-6) = 6;$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 9 - 21 = -12,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = -12;$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 14 = -6,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = -(-6) = 6;$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 15 = -3,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = 1 \cdot (-3) = -3;$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 12 = -6,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = -1 \cdot (-6) = 6.$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = -3.$$

Приклад 5. Знайти мінори та відповідні алгебраїчні доповнення до елементів матриці $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

$$M_{11} = 6, \quad A_{11} = 1 \cdot 6 = 6;$$

$$M_{21} = 5, \quad A_{21} = -1 \cdot 5 = -5$$

$$M_{12} = -8, \quad A_{12} = -1 \cdot (-8) = 8;$$

$$M_{22} = 1, \quad A_{22} = 1 \cdot 1 = 1$$

Приклад 6. Знайти мінор M_{43} та алгебраїчне доповнення A_{43} елемента a_{43} матриці $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 5 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

$$M_{43} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 12 + 20 - 0 - 3 + 50 = 79$$

$$A_{43} = (-1)^{4+3} \cdot M_{43} = -1 \cdot 79 = -79$$

Відповідь: 79, -79.

Приклад 7. Знайти визначник, розклавши його за елементами

першого рядка $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

Розв'язання:

Розпишемо визначник за елементами першого рядка $\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$.

Визначимо алгебраїчні доповнення

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 4 = 9,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(-1 - 6) = 7,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 15 = -13.$$

$$\text{Тоді } \Delta = 1 \cdot 9 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot (-13) = 9 + 14 - 39 = -16$$

Відповідь: -16.

Приклад 8. Записати матрицю обернену матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

Знайдемо визначник матриці $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -8 + 3 + 0 - 2 - 6 - 0 = -13$.

Знайдемо алгебраїчні доповнення до кожного елемента матриці A .

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (-4 - 0) = -4, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(2 - 1) = -1,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (0 + 2) = 2, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -(6 - 0) = -6,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (4 + 1) = 5, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(0 - 3) = 3,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (3 - 2) = 1, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(2 + 1) = -3,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-4 - 3) = -7.$$

Складемо матрицю з алгебраїчних доповнень $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -6 & 5 & 3 \\ 1 & -3 & -7 \end{pmatrix}$ і

трансформуємо її $\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & -7 \end{pmatrix}$. Запишемо обернену матрицю

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \tilde{A}^T = \frac{1}{-13} \begin{pmatrix} -4 & -6 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $A^{-1} = \frac{1}{-13} \begin{pmatrix} -4 & -6 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & -7 \end{pmatrix}$

Приклад 9. В економіці є три галузі: сільське господарство, переробка і транспорт. Нехай відома матриця коефіцієнтів витрат

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,3 \\ 0,3 & 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}. \text{ Знайти матрицю повних витрат.}$$

Розв'язання. Матриця повних витрат $(E - A)^{-1}$, де $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Спочатку запишемо матрицю

$$E - A = \begin{pmatrix} 1-0,2 & -0,1 & -0,3 \\ -0,3 & 1-0,4 & -0,1 \\ -0,1 & -0,2 & 1-0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,1 & -0,3 \\ -0,3 & 0,6 & -0,1 \\ -0,1 & -0,2 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо матрицю обернену до даної:

1) Визначник матриці $E - A$ дорівнює $\begin{vmatrix} 0,8 & -0,1 & -0,3 \\ -0,3 & 0,6 & -0,1 \\ -0,1 & -0,2 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,307$

2) Складемо матрицю з алгебраїчних доповнень

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0,46 & 0,25 & 0,12 \\ 0,14 & 0,61 & 0,17 \\ 0,19 & 0,17 & 0,45 \end{pmatrix} \text{ і трансформуємо її } \tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 0,46 & 0,14 & 0,19 \\ 0,25 & 0,61 & 0,17 \\ 0,12 & 0,17 & 0,45 \end{pmatrix}.$$

$$3) (E - A)^{-1} = \frac{1}{0,307} \begin{pmatrix} 0,46 & 0,14 & 0,19 \\ 0,25 & 0,61 & 0,17 \\ 0,12 & 0,17 & 0,45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{460}{307} & \frac{140}{307} & \frac{190}{307} \\ \frac{250}{307} & \frac{610}{307} & \frac{170}{307} \\ \frac{120}{307} & \frac{170}{307} & \frac{450}{307} \end{pmatrix}$$

$$\text{Відповідь: } (E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{460}{307} & \frac{140}{307} & \frac{190}{307} \\ \frac{250}{307} & \frac{610}{307} & \frac{170}{307} \\ \frac{120}{307} & \frac{170}{307} & \frac{450}{307} \end{pmatrix}$$

Завдання для аудиторної та самостійної роботи

Завдання 1. Знайти визначник другого порядку $\begin{vmatrix} 3 + \alpha & 4 \\ -1 & 5 - \alpha \end{vmatrix}$.

Завдання 2. Знайти визначник третього порядку $\begin{vmatrix} 1 - \alpha & 5 & 4 \\ -2 & 1 + \alpha & 3 \\ 1 & -3 & 2 - \alpha \end{vmatrix}$.

Завдання 3. Знайти матрицю обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} \alpha - 10 & 1 & 4 \\ 3 & \alpha & 3 \\ \alpha & 3 & \alpha - 7 \end{pmatrix}$ двома способами: 1) методом розкладу за елементами довільного рядка чи стовпчика матриці; 2) за формулою $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \tilde{A}^T$.

Завдання 4. В економіці є три галузі: сільське господарство, переробка і транспорт. Знайти матрицю повних витрат. Нехай відома матриця коефіцієнтів витрат

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,01 \cdot \alpha & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 & 0,1 \\ 0,3 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Питання для самоперевірки

1. Що називається визначником матриці?
2. За яким правилом обчислюється визначник другого, третього порядків?
3. Назвіть найважливіші властивості визначників.
4. До якої матриці не можна знайти визначник?
5. Чому дорівнює визначник якщо матриця вироджена?
6. Що називається мінором матриці?
7. Як визначають алгебраїчне доповнення до елементів матриці?
8. Як визначник обчислюють за елементами рядка чи стовпчика?
9. Як визначити обернену матрицю? Для яких матриць існує обернена матриця?
10. Чи зміниться визначник при транспонуванні матриці?
11. Що означає, якщо визначник матриці дорівнює нулю? Яке значення це має для оберненої матриці?
12. Які кроки необхідні для знаходження оберненої матриці методом Гаусса?
13. Що таке ранг матриці? Як його визначають?
14. Як знайти ранг матриці за допомогою елементарних перетворень рядків?

Тема 3. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ.

Короткі теоретичні відомості

У загальному випадку система лінійних рівнянь має вигляд:

[illegible]

$x_1, x_2, \dots, x_n$ - невідомі, які треба знайти; a_{ij} - сталі числа ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$), їх називають *коефіцієнтами системи* (перший індекс коефіцієнта означає номер рівняння, в якому міститься цей коефіцієнт, а другий індекс – номер невідомого, при якому його записано); $b_1, b_2, \dots, b_m$ - сталі числа, їх називають *вільними членами*.

Розв'язком системи (*) називають будь-яку сукупність чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, яка при підстановці в систему замість невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$ перетворює всі рівняння системи в тотожні.

Систему (*) називають *сумісною*, якщо вона має принаймні один розв'язок, і *несумісною*, якщо вона не має розв'язків.

Якщо система (*) має єдиний розв'язок, то її називають *визначеною*; якщо система має більш як один розв'язок, то її називають *невизначеною*.

Систему (*) називають *однорідною*, якщо всі вільні члени дорівнюють нулю, і *неоднорідною*, якщо принаймні один з вільних членів не дорівнює нулю. Однорідні системи завжди сумісні, оскільки мають розв'язок $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, який називають *очевидним* або

тривіальним. Дві системи лінійних рівнянь називають *еквівалентними* або *рівносильними*, якщо вони сумісні й мають одні й ті самі розв'язки, або якщо вони *несумісні*.

При розв'язуванні системи лінійних рівнянь виконують *елементарні перетворення* над рівняннями системи, які не порушують систему:

1. Множення обох частин рівняння на число відмінне від нуля.
2. Додавання (віднімання) до одного рівняння іншого, помноженого на число відмінне від нуля.

3. Переставляння рівнянь місцями (транспонування двох рівнянь).

4. Викреслювання рівнянь виду: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0$.

5. Переставляння невідомих в системі рівнянь.

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Формули Крамера

Якщо в системі лінійних рівнянь число невідомих дорівнює числу рівнянь і визначник системи відмінний від нуля, то система має єдиний розв'язок, який можна знайти за формулами Крамера.

Теорема 5. Якщо головний визначник Δ , складений із коефіцієнтів при невідомих системи n лінійних рівнянь з n невідомими, відмінний від нуля, то така система рівнянь має єдиний розв'язок (сумісна і визначена), який обчислюється за формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, (**)$$

де Δ - головний визначник системи, який утворюється з коефіцієнтів при невідомих у лівій частині системи (*), Δ_j ($j = \overline{1, n}$)- визначник, який

утворюється заміною j -го стовпця в головному визначнику на стовпець вільних членів.

Формули (**) називаються формулами Крамера.

Висновок. Якщо в системі лінійних рівнянь число рівнянь дорівнює числу невідомих, та

- 1) якщо $\Delta \neq 0$, то система сумісна і визначена;
- 2) якщо $\Delta = 0$, а серед Δ_j є відмінні від нуля, то система несумісна;
- 3) якщо $\Delta = 0$ і $\Delta_j = 0$ ($j = \overline{1, n}$), то система сумісна і невизначена.

Зауваження. Якщо в системі лінійних однорідних рівнянь всі $\Delta_j = 0$ ($j = \overline{1, n}$) і $\Delta = 0$, то система має єдиний нульовий розв'язок; якщо $\Delta \neq 0$, то система має безліч розв'язків, тобто має ненульові розв'язки.

Розв'язування систем лінійних рівнянь за допомогою оберненої матриці

Нехай задано систему n лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Позначимо через A матрицю з коефіцієнтів при невідомих, через X – матрицю–стовпець з невідомих (вектор) і через B – матрицю–стовпець з вільних членів (вектор):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Урахувавши правило множення матриць і умову рівності матриць, систему лінійних рівнянь можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ або } A \cdot X = B.$$

Припустимо, що матриця A – неособлива ($|A| \neq 0$), тоді існує обернена матриця A^{-1} . Помножимо зліва обидві частини рівності на A^{-1} :

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

Оскільки $A^{-1} \cdot A = E$, то остаточно дістанемо: $X = A^{-1} \cdot B$.

Таким чином, матриця–стовпець з невідомих дорівнює добутку оберненої матриці A^{-1} на матрицю–стовпець вільних членів.

Метод Гаусса (метод послідовного виключення невідомих)

Нехай задано систему (*), яка складається з m лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \quad \quad \quad \cdots \quad \quad \quad \cdots \quad \quad \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Цю систему називають первісною системою. Прямий хід методу Гаусса полягає у зведенні первісної системи до східчастого (трикутного

або трапецеїдального) вигляду. Для цього, починаючи з другого рівняння системи, поступово виключаються невідомі, тобто, виконуючи елементарні перетворення, отримуємо коефіцієнти при відповідних невідомих рівні нулю.

Якщо за деяким кроком методу Гаусса зустрінеться рівняння виду:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b_i, \quad b_i \neq 0$$

Тоді система, яка розглядається, несумісна; подальший її розв'язок закінчується.

Після отримання трикутного або трапецеїдального вигляду системи виконують зворотній хід метода Гаусса. Який полягає в тому, що система розв'язується поступовим розв'язанням рівнянь від нижнього до верхнього з підстановкою вже знайдених змінних.

Теорема 6. *Якщо система лінійних рівнянь сумісна і у розв'язуючій частині вивідної системи, одержаної методом Гаусса, число рівнянь менше від числа невідомих – система невизначена; якщо ж це число рівнянь дорівнює числу невідомих, - система визначена.*

Системи лінійних однорідних рівнянь

Систему m однорідних лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \text{ називають} \quad \text{однорідною} \quad \text{системою}$$

лінійних рівнянь. Будь-яка система однорідних лінійних рівнянь завжди сумісна – вона має принаймні один розв'язок $(0, 0, \dots, 0)$, який називають тривіальним розв'язком.

Теорема 7. Система лінійних однорідних рівнянь завжди сумісна; вона має або єдиний нульовий (тривіальний) розв'язок, або безліч розв'язків.

Теорема 8. Якщо в системі m однорідних рівнянь з n невідомими число рівнянь m менше за число невідомих n , то система має нетривіальні розв'язки.

Системи лінійних рівнянь широко використовуються для:

- Оптимального розподілу ресурсів;
- Аналізу виробничих можливостей підприємств;
- Вирішення задач планування виробництва та логістики;
- Створення моделей економічного балансу.

Методичні вказівки до виконання завдань

Приклад 1. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = -11 \\ x - 2y - z = 0 \\ 3x + y + z = -1 \end{cases} \quad \text{трьома способами: а) за допомогою формул Крамера;}$$

б) за допомогою оберненої матриці (матричний метод); с) за методом Гаусса.

а) Складемо та обчислимо визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) \cdot 3 + 4 \cdot 1 \cdot 1 - 4 \cdot (-2) \cdot 3 - 2 \cdot (-1) \cdot 1 - (-3) \cdot 1 \cdot 1 = 38$$

Складемо визначник Δ_1 , замінивши перший стовпчик визначника Δ

на стовпчик вільних коефіцієнтів $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$

Обчислимо визначник Δ_1

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -11 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -11 & -3 \\ 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -11 \cdot (-2) \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) \cdot (-1) + 4 \cdot 0 \cdot 1 - 4 \cdot (-2) \cdot (-1) - (-11) \cdot (-1) \cdot 1 - (-3) \cdot 0 \cdot 1 =$$

$$= 0$$

Складемо визначник Δ_2 , замінивши другий стовпчик визначника Δ

на стовпчик вільних коефіцієнтів $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}.$ Обчислимо

визначник Δ_2

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -11 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -11 \\ 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 \cdot 1 + (-11) \cdot (-1) \cdot 3 + 4 \cdot 1 \cdot (-1) - 4 \cdot 0 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) \cdot (-1) - (-11) \cdot 1 \cdot 1 =$$

$$= 38$$

Складемо визначник Δ_3 , замінивши третій стовпчик визначника Δ

на стовпчик вільних коефіцієнтів $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$ Обчислимо

визначник Δ_3

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -11 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot (-1) + (-3) \cdot 0 \cdot 3 + (-11) \cdot 1 \cdot 1 - (-11) \cdot (-2) \cdot 3 - 2 \cdot 0 \cdot 1 - (-3) \cdot 1 \cdot (-1) =$$

$$= -76$$

Розв'язок системи лінійних рівнянь знайдемо за формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{0}{38} = 0, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{38}{38} = 1, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-76}{38} = -2.$$

б) за допомогою оберненої матриці (матричний метод);

$$\text{Складемо основну матрицю системи } A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

I. Знайдемо обернену матрицю A^{-1} .

1) знайдемо визначник матриці. З попереднього способу маємо $\Delta = 38$.

2) знайдемо алгебраїчні доповнення до кожного елемента – $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, M_{ij} – мінор, що є визначником без i -го рядка та j -го стовпчика. Так як в даному випадку розмір мінора 2×2 , то для обчислення мінора застосовуємо правило $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2 + 1) = -1, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(1 + 3) = -4,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (1 + 6) = 7, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(-3 - 4) = 7,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (2 - 12) = -10, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(2 + 9) = -11,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = (3 + 8) = 11, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-2 - 4) = 6,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-4 + 3) = -1.$$

$$4) \text{ складемо матрицю з алгебраїчних доповнень } \tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 7 \\ 7 & -10 & -11 \\ 11 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

і транспонуємо її $\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 11 \\ -4 & -10 & 6 \\ 7 & -11 & -1 \end{pmatrix}$.

4) запишемо обернену матрицю $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \tilde{A}^T = \frac{1}{38} \begin{pmatrix} -1 & 7 & 11 \\ -4 & -10 & 6 \\ 7 & -11 & -1 \end{pmatrix}$.

II. Запишемо систему у вигляді матричного рівняння $AX = B$.

Знайдемо розв'язок системи $X = A^{-1} \cdot B$, де $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

Тобто $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{38} \begin{pmatrix} -1 & 7 & 11 \\ -4 & -10 & 6 \\ 7 & -11 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{38} \begin{pmatrix} -1 \cdot (-11) + 7 \cdot 0 + 11 \cdot (-1) \\ -4 \cdot (-11) + (-10) \cdot 0 + 6 \cdot (-1) \\ 7 \cdot (-11) + (-11) \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \frac{1}{38} \begin{pmatrix} 11 + 0 - 11 \\ 44 + 0 - 6 \\ -77 + 0 + 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{38} \begin{pmatrix} 0 \\ 38 \\ -76 \end{pmatrix}$$

Множення числа на матрицю здійснюється множенням числа на кожний елемент матриці.

Тоді $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0/38 \\ 38/38 \\ -76/38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $x = 0$, $y = 1$, $z = -2$.

с) за методом Гаусса: запишемо розширену матрицю системи

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & -11 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right). \text{Поміняємо місцями перший та другий рядки матриці:}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & -11 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right). \text{Виконаємо еквівалентні перетворення:}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & -11 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{IIp - 2Ip \\ IIIp - 3Ip}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -11 \\ 0 & 7 & 4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{IIIp - 7IIp} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -11 \\ 0 & 0 & -38 & 76 \end{array}\right)$$

Запишемо систему, що відповідає даній системі
$$\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ y + 6z = -11 \\ -38z = 76 \end{cases}$$

останнього рівняння отримуємо $z = \frac{-76}{-38} = 2$, з другого рівняння

системи $y = -11 - 6z = -11 - 12 = -23$, з першого рівняння $x = 2y + z = -46 + 2 = -44$.

Відповідь: $x = -44, y = -23, z = 2$

Приклад 2. З деякого листового матеріалу потрібно викроїти 180 заготовок типу А, 150 заготовок типу Б і 110 заготовок типу В. При цьому застосовують три способи розкрою. Кількість заготовок, які можна отримати з кожного листа при кожному способі розкрою, зазначена в таблиці:

Тип розкрою	Кількість отриманих заготовок за способами розкрою		
	I	II	III
А	5	2	3
Б	1	4	2
В	3	1	2

Знайти, скільки листів матеріалу необхідно для одержання заданої кількості заготовок кожного типу.

Розв'язання. Позначимо x_1, x_2, x_3 кількість листів матеріалу, що розкрояють відповідно першим, другим та третім способом. Тоді заготовок типу А при першому способі розкрою вийде $5x_1$, при другому - $2x_2$, а при третьому - $3x_3$. Загальна кількість заготовок типу А $(5x_1 + 2x_2 + 3x_3)$ повинна дорівнювати 180. Маємо рівняння $5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 180$. Аналогічно, розраховуючи кількість заготовок типів Б і В, дістанемо такі рівняння: $x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 150$; $3x_1 + x_2 + 2x_3 = 110$. Для знаходження кількості листів матеріалу x_1, x_2 і x_3

маємо систему рівнянь
$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 180, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 150, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 110. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему методом Гаусса (або за формулами Крамера, або за допомогою оберненої матриці), знаходимо $x_1 = 10, x_2 = 20, x_3 = 30$.

Відповідь: $x_1 = 10, x_2 = 20, x_3 = 30$

Приклад 3. У регіоні працюють три підприємства, які виробляють продукцію для задоволення потреб ринку. Для виробництва потрібні ресурси, доступні в обмеженій кількості. Відомо, що для виробництва одиниці продукції підприємство 1 потребує 2 одиниці ресурсу А; 1 одиницю ресурсу В, 1 одиницю ресурсу С; підприємство 2 потребує 1 одиницю ресурсу А, 3 одиниці ресурсу В, 2 одиницю ресурсу С; підприємство 3 потребує 3 одиниці ресурсу А, 2 одиниці ресурсу В та 3

одиницю ресурсу С. Запаси ресурсів обмежені, а саме ресурс А становить 120 одиниць, ресурс В становить 170 одиниць, ресурс С 150 одиниць. Знайти оптимальні обсяги виробництва кожного з підприємств.

Розв'язання. Позначимо x_1, x_2, x_3 обсяги, які мають виготовляти підприємства 1, 2 і 3, щоб використати всі ресурси.

Складемо рівняння для витрат ресурсів А, В, С відповідно:

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 120; \quad x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 170; \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 150$$

Розв'яжемо систему рівнянь
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 120 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 170 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 150 \end{cases}$$

Розв'язуючи систему методом Гаусса (або за формулами Крамера, або за допомогою оберненої матриці), знаходимо $x_1 = 10, x_2 = 40, x_3 = 20$.

Відповідь: $x_1 = 10, x_2 = 40, x_3 = 20$

Приклад 4. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, S_3 . Визначити кількість продукції P_1, P_2, P_3, P_4 , яку можна виготовити, якщо сировину буде повністю вичерпано. Вказати базовий розв'язок.

Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Тип сировини	Розхід сировини по видам продукції (од./виріб)				Запас сировини
	P_1	P_2	P_3	P_4	
S_1	2	4	3	2	140
S_2	2	1	1	1	70
S_3	4	5	3	1	190

Розв'язання: Якщо вважати, що x_1, x_2, x_3, x_4 – це кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4 , то дану задачу можна записати в вигляді системи

лінійних рівнянь:
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 140 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 70 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 190 \end{cases}$$
 що представляє собою

математичну модель даної економічної задачі.

Змінних 4, рівнянь 3. Отже система невизначена, розв'язків безліч.

Розв'яжемо систему методом Гаусса.

Запишемо розширену матрицю
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 3 & 2 & 140 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 70 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 190 \end{array} \right).$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 3 & 2 & 140 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 70 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 190 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 3 & 2 & 140 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 70 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 90 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 3 & 2 & 140 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 70 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 20 \end{array} \right)$$

Запишемо матрицю, яка відповідає отриманій матриці

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 140 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 70 \\ x_3 + 2x_4 = 20 \end{cases} \quad \text{. Позначимо } x_4 = t \geq 0, \text{ маємо } \begin{cases} x_1 = 4t + 20 \\ x_2 = t + 10 \\ x_3 = 20 - t \end{cases}$$

В задачі невідомі виражають кількість реалізованої продукції, тому вони повинні бути невід'ємними.

$$\begin{cases} x_1 = 4t + 20 \geq 0 \\ x_2 = t + 10 \geq 0 \\ x_3 = 20 - t \geq 0 \end{cases}, \begin{cases} t \geq -5 \\ t \geq -10 \\ t \leq 10 \\ t \geq 0 \end{cases} \quad \text{. Спільним розв'язком системи є відрізок}$$

$t \in [0; 10]$. Отже, $x_4 \in [0; 10]$

В останній системі рівнянь x_1, x_2, x_3 називаються базисними змінними, оскільки матриця, складена з коефіцієнтів при них є одиничною. Невідома x_4 називається вільною, тому що може приймати будь-які значення. Будь-якому значенню $x_4 \in [0;10]$ відповідає невід'ємний розв'язок, який задовольняє умові задачі. Отже, для $x_4 = 0$ маємо $x_1 = 20; x_2 = 10; x_3 = 20$ – базовий розв'язок.

Відповідь:
$$\begin{cases} x_1 = 4t + 20 \\ x_2 = t + 10 \\ x_3 = 20 - t \end{cases}, x_4 \in [0;10]; \text{ базовий розв'язок } x_1 = 20; x_2 = 10; x_3 = 20, x_4 = 0$$

Завдання для аудиторної та самостійної роботи

Завдання 1. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами: за допомогою визначників (за формулами Крамера), за допомогою оберненої матриці, за допомогою метода виключення невідомих (методом Гаусса).

1. $\begin{cases} x+2y+2z=3 \\ 4x-2y-5z=5 \\ x-y+6z=-7 \end{cases}$	2. $\begin{cases} 2x+3y-3z=7 \\ x-y+2z=-4 \\ 2x+2y+z=4 \end{cases}$	3. $\begin{cases} x+2y+3z=-4 \\ 2x+y-z=3 \\ x-2y-3z=4 \end{cases}$	4. $\begin{cases} 4x+y+2z=4 \\ 2x+y+2z=6 \\ x-3y-z=-5 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 3x-2y+2z=3 \\ 2x+y-z=-5 \\ 2x+y+z=1 \end{cases}$	6. $\begin{cases} 2x-y-z=8 \\ 2x+3y+z=0 \\ x-2y-z=7 \end{cases}$	7. $\begin{cases} 2x-3y+z=3 \\ x+y-2z=4 \\ x+y+5z=-3 \end{cases}$	8. $\begin{cases} 2x+3y-z=2 \\ x-y+3z=-4 \\ x+2y+2z=2 \end{cases}$
9. $\begin{cases} x+2y-3z=-4 \\ 3x+y+z=3 \\ x-2y-3z=8 \end{cases}$	10. $\begin{cases} 2x-y+3z=1 \\ x+2y+z=8 \\ 2x-2y-5z=-2 \end{cases}$	11. $\begin{cases} 2x+3y-z=2 \\ x+2y+3z=0 \\ 2x+y+z=6 \end{cases}$	12. $\begin{cases} 2x-3y+3z=0 \\ 2x-y+z=-4 \\ x-2y+3z=3 \end{cases}$
13. $\begin{cases} x-3y+z=2 \\ 2x+y+3z=3 \\ x+2y-3z=6 \end{cases}$	14. $\begin{cases} x+5y-z=-1 \\ 3x-3y-z=7 \\ x-4y+z=0 \end{cases}$	15. $\begin{cases} x-y-6z=-4 \\ 3x+y-2z=-4 \\ x-2y+z=5 \end{cases}$	16. $\begin{cases} x-3y-z=1 \\ x+4y+2z=-8 \\ 2x-y-3z=5 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x-2y+z=4 \\ x+3y+2z=1 \\ 3x+4y+z=-2 \end{cases}$	18. $\begin{cases} 3x+y-2z=1 \\ x-2y+3z=5 \\ x+5y-4z=-9 \end{cases}$	19. $\begin{cases} 2x+3y+3z=-3 \\ x-2y-z=-1 \\ 2x+3y+2z=0 \end{cases}$	20. $\begin{cases} x+4y-z=4 \\ x+2y+z=2 \\ x-3y+4z=-1 \end{cases}$
21. $\begin{cases} 2x+y-2z=5 \\ 3x+y+5z=7 \\ x+4y+z=6 \end{cases}$	22. $\begin{cases} 2x-5y-3z=0 \\ 5x+2y-2z=2 \\ 2x-y+z=8 \end{cases}$	23. $\begin{cases} x-y+z=2 \\ x-2y-z=-5 \\ 3x+4y+z=7 \end{cases}$	24. $\begin{cases} 3x+4y+z=1 \\ 2x+2y+3z=6 \\ 4x-10y-2z=10 \end{cases}$
25. $\begin{cases} x+2y-3z=-3 \\ 2x-3y+4z=7 \\ 3x+4y-3z=1 \end{cases}$	26. $\begin{cases} 2x+3y+5z=5 \\ x+3y+z=-2 \\ 2x-4y-9z=5 \end{cases}$	27. $\begin{cases} x-y+3z=-3 \\ 2x+2y+z=3 \\ 2x+3y-2z=7 \end{cases}$	28. $\begin{cases} 3x-2y-z=5 \\ x-3y+3z=-5 \\ x+3y+z=-1 \end{cases}$
29. $\begin{cases} -2x+y+z=6 \\ x-3y+6z=1 \\ 4x+3y+2z=-3 \end{cases}$	30. $\begin{cases} 3x-y-4z=-3 \\ 2x+2y-3z=1 \\ 2x+4y-3z=3 \end{cases}$	31. $\begin{cases} 2x+3y+3z=1 \\ 4x-y-2z=-6 \\ x+2y+3z=2 \end{cases}$	32. $\begin{cases} 2x-3y+2z=2 \\ 4x+y-2z=0 \\ 4x+2y+z=11 \end{cases}$
33. $\begin{cases} 2x+2y+z=5 \\ 2x-3y-6z=2 \\ 6x-y+2z=2 \end{cases}$	34. $\begin{cases} 2x+2y-z=4 \\ 5x+3y-z=4 \\ 2x+y+z=1 \end{cases}$	35. $\begin{cases} 2x+y+z=-1 \\ 3x+y+z=1 \\ 2x+y+3z=1 \end{cases}$	36. $\begin{cases} x-y+3z=0 \\ x+y+z=2 \\ x-2y+z=2 \end{cases}$

Завдання 2. Із пункту А в пункт Б необхідно перевезти продукцію І, ІІ та ІІІ типів. Для цього можна замовити три види транспорту (T_1 , T_2 , T_3). Вказати, скільки транспорту кожного виду необхідно замовити, щоб перевезти всю продукцію. Кількість продукції кожного типу, яке вміщується у певний вид транспорту, по варіантам наведено в таблиці:

Варіант	Тип продукції	Кількість продукції, що вміщується у вид транспорту (Т)			Кількість продукції по типам
		T_1	T_2	T_3	
1	І	1	4	2	150
	ІІ	3	6	4	310
	ІІІ	3	4	2	210
2	І	2	5	6	350
	ІІ	1	3	4	220
	ІІІ	3	6	2	230
3	І	4	3	2	230
	ІІ	1	5	1	120
	ІІІ	3	7	2	240

4	I	5	4	3	310
	II	2	1	3	190
	III	1	5	2	160
5	I	5	2	3	290
	II	4	3	1	190
	III	2	5	2	190
6	I	2	1	3	160
	II	5	3	2	190
	III	6	4	2	220
7	I	5	2	3	210
	II	4	3	1	140
	III	2	5	2	200
8	I	1	4	3	210
	II	3	5	1	170
	III	5	3	3	230
9	I	6	4	5	340
	II	3	5	2	210
	III	5	2	3	210
10	I	2	3	5	280
	II	2	4	6	340
	III	5	4	3	250

Питання для самоперевірки

1. Що таке система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)?
2. Як виглядає загальний запис СЛАР?
3. У чому полягає метод Гаусса? Які основні етапи методу Гаусса?
4. Що таке розширена матриця системи? Як її використовують у методі Гаусса?
5. Коли система лінійних рівнянь має єдиний розв'язок?
6. Як визначити розв'язність СЛАР за допомогою рангу матриці?
7. В чому полягає матричний метод розв'язання СЛАР?
8. Сформулюйте формули Крамера. Які умови їх застосування?
9. Як перевірити правильність розв'язання СЛАР?

Тема 4. ВЕКТОРИ. ДІЇ НАД ВЕКТОРАМИ.

Короткі теоретичні відомості

Вектор та його координати: Вектором $\vec{a}$ називається направлений відрізок, на якому вказаний напрям від його початку до кінця. В прямокутній системі координат кожному вектору $\vec{a}$ ставиться у відповідність три числа – його проекції a_x, a_y, a_z на координатні осі Ox , Oy та Oz . Ці числа називаються координатами вектора, а вектор записується в наступному вигляді $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$. Якщо точка $A(x_1, y_1, z_1)$ - початок вектора, а точка $B(x_2, y_2, z_2)$ його кінець, то його проекції на осі прямокутної системи координат дорівнюють різниці між координатами його кінця та початку:

$$a_x = x_2 - x_1, a_y = y_2 - y_1, a_z = z_2 - z_1.$$

Враховуючи ці формули вектор $\vec{a}$ можна записати у вигляді

$$\vec{a}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Довжина вектора: Довжина вектора чи модуль вектора $\vec{a}$ позначається символом $|\vec{a}|$ і знаходиться за формулою:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Рівність векторів: Два вектори однакової довжини, які лежать на паралельних прямих і мають однаковий напрям, називаються рівними.

Одиничний вектор. Орт: Вектор, який за напрямом співпадає з даним вектором і по модулю рівний одиниці, називається одиничним вектором даного вектора або ортом.

Направляючі косинуси вектора: Косинуси кутів, які вектор утворює з додатними напрямками координатних осей, називаються направляючими косинусами вектора. Між направляючими косинусами вектора існує співвідношення

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

де α, β, γ –кути, які утворює вектор відповідно з координатними осями Ox, Oy та Oz .

Проекція вектора на вісь: Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь є величина скалярна, яка дорівнює добутку модуля вектора на косинус кута між напрямом осі та напрямом вектора $\vec{a}_l = n p_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos(\vec{l}, \vec{a})$.

Проекції вектора на осі прямокутної системи координат позначаються відповідно a_x, a_y, a_z і визначаються відповідно $a_x = |\vec{a}| \cos \alpha$, $a_y = |\vec{a}| \cos \beta$, $a_z = |\vec{a}| \cos \gamma$, де α, β, γ –кути, які утворює вектор відповідно з координатними осями Ox, Oy та Oz .

Розклад вектора по трьом координатним осям прямокутної системи координат: Якщо a_x, a_y, a_z проекції вектора $\vec{a}$ на координатні осі Ox, Oy та Oz , а $\vec{i}, \vec{j}$ та $\vec{k}$ - одиничні вектори цих осей, то має місце формула:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

Радіус – вектор точки: Радіус – вектором точки $M(x, y, z)$ називається вектор $\vec{r}$, який має своїм початком початок координат, а його кінець співпадає з точкою M . Проекції вектора $\vec{r}$ на координатні осі дорівнюють відповідно координатам його кінця $r_x = x$, $r_y = y$, $r_z = z$, тому

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Добуток вектора на скаляр: Добутком вектора $\vec{a}$ на дійсне число α називається вектор $\vec{p}$, який задовольняє умовам:

а) $|\vec{p}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$, $|\alpha|$ – абсолютне значення числа α ;

б) $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{a}$, якщо $\alpha \geq 0$, $\vec{p} \uparrow\downarrow \vec{a}$, якщо $\alpha < 0$.

Добуток нульового вектора на довільне число або довільного вектора на число 0 дорівнює нуль-вектору: $\vec{a} \cdot 0 = 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

Властивості множення вектора на число.

Для довільних чисел α , β і векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ справедливі наступні рівності:

1. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

2. $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$.

3. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$.

$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$.

Скалярний добуток двох векторів: Скалярним добутком двох векторів називається величина, модуль якої дорівнює добутку модулів векторів – множників на косинус кута між ними і позначається $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Кут між векторами позначимо φ , тоді скалярний добуток знаходиться за формулою:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi.$$

Скалярний добуток двох векторів це число. Оскільки $|\vec{b}| \cos \varphi = np_{\vec{a}} \vec{b}$,

$|\vec{a}| \cos \varphi = np_{\vec{b}} \vec{a}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| np_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| np_{\vec{b}} \vec{a}$.

Властивості скалярного добутку

1) Якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

2) Скалярний добуток двох рівних векторів дорівнює квадрату модулю, тобто $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$.

3) Для скалярного добутку справедливі всі закони, які виконуються для при множенні чисел:

$$(1) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \text{ (комутативний закон);}$$

$$(2) \quad (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \text{ (дистрибутивний закон відносно додавання);}$$

$$(3) \quad (\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha (\vec{a} \cdot \vec{b}) \text{ (асоціативний закон відносно множення на число).}$$

4) Якщо відомі проекції векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ на осі прямокутної системи координат $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$, то їх скалярний добуток визначається за формулою:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ перпендикулярні, то

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

5) Косинус кута між векторами знаходиться за формулою

$$\cos \varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Векторний добуток двох векторів: Векторним добутком двох векторів називається вектор, модуль якого дорівнює добутку модулів векторів –

множників на синус кута між ними і позначається $\bar{a} \times \bar{b}$. Вектор $\bar{a} \times \bar{b}$ направлений перпендикулярно до площини, яка визначена векторами $\bar{a}$ та $\bar{b}$ таким чином, дивлячись з кінця вектора $\bar{a} \times \bar{b}$ на вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$, поворот від першого співмножника $\bar{a}$ до другого співмножника $\bar{b}$ здійснюється проти руху годинникової стрілки.

Властивості векторного добутку

1) За означенням векторного добутку

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = ab \sin \alpha.$$

2) При перестановці множників векторний добуток змінює знак на протилежний:

$$\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}.$$

3) Для векторного добутку справедливий розподільний закон:

$$(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}.$$

4) Для векторного добутку справедливий сполучний закон відносно множення на число:

$$(\alpha \bar{a}) \times \bar{b} = \alpha (\bar{a} \times \bar{b}).$$

5) Якщо відомі проекції векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$ на осі прямокутної системи координат $\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\bar{b}(b_x, b_y, b_z)$, то їх векторний добуток визначається за формулою

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \bar{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \bar{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \bar{k}.$$

б) Умова паралельності двох векторів: для того щоб вектори були паралельними необхідно і достатньо, щоб їх векторний добуток

$$\text{дорівнював нулю } \vec{a} \times \vec{b} = 0 \text{ або } \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Векторний добуток двох векторів $\vec{a}(a_x; a_y; a_z)$, $\vec{b}(b_x; b_y; b_z)$ застосовують для визначення площ паралелограма і трикутника, побудованих на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$. Площі визначають за формулами:

$$S_{\text{паралелограма}} = |\vec{a} \times \vec{b}|, S_{\text{трикутника}} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Векторно - скалярний (мішаний) добуток трьох векторів: Мішаним добутком $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, взятих в заданому порядку, називається скалярний добуток $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$ векторного добутку $[\vec{a}, \vec{b}]$ перших двох векторів і третього вектора $\vec{c}$. Мішаний добуток інколи позначають $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ або $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Властивості мішаного добутку

- 1) $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}])$ для довільних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$;
- 2) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$ для довільних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, тобто мішаний добуток не змінюється при циклічній перестановці співмножників;
- 3) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a})$ для довільних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, тобто мішаний добуток змінює знак при перестановці двох співмножників.

Мішаний добуток $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ не компланарних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, взятому зі знаком

плюс, якщо трійка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ однаково орієнтована з базисом простору, і зі знаком мінус, якщо протилежно орієнтована. Площа піраміди побудованої на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ дорівнює $V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{6} |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$.

Якщо в просторі фіксовано прямокутну декартову систему координат і $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \vec{b} = (b_x, b_y, b_z), \vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$, то

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Три вектори називаються компланарними, якщо вони лежать в одній площині або в паралельних площинах. Якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні, то мішаний добуток $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = 0$.

Методичні вказівки до виконання завдань

Приклад 1. Дано точки в просторі $A(5, 4, -1), B(1, 0, 1)$ та $C(7, 2, -2)$.

Знайти: а) координати векторів $\vec{AB}, \vec{AC}$, їхні довжини; б) суму і різницю, с) скалярний добуток цих векторів; д) кут між векторами.

Розв'язання: а) Знайдемо координати векторів $\vec{AB}, \vec{AC}$:

$$\vec{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A), \vec{AB}(1 - 5; 0 - 4; 1 + 1) = \overline{(-4; -4; 2)},$$

$$\vec{AC}(x_C - x_A; y_C - y_A; z_C - z_A), \vec{AC}(7 - 5; 2 - 4; -2 + 1) = \overline{(2; -2; -1)};$$

довжини векторів $\vec{AB}, \vec{AC}$:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{AB_x^2 + AB_y^2 + AB_z^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 16 + 4} = 6,$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{AC_x^2 + AC_y^2 + AC_z^2} = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3;$$

б) сума і різниця векторів:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (-4 + 2; -4 - 2; 2 - 1) = (-2; -6; 1)$$

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = (-4 - 2; -4 + 2; 2 + 1) = (-6; -2; 3);$$

с) скалярний добуток:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB_x \cdot AC_x + AB_y \cdot AC_y + AB_z \cdot AC_z = -4 \cdot 2 + (-4) \cdot (-2) + 2 \cdot (-1) = -8 + 8 - 2 = -2$$

$$\text{d) кут між векторами: } \cos \varphi = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-2}{6 \cdot 3} \approx -0,111, \text{ тоді } \varphi \approx 96^\circ$$

Відповідь: а) $\overrightarrow{AB} = (-4; -4; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (2; -2; -1)$. $|\overrightarrow{AB}| = 6$, $|\overrightarrow{AC}| = 3$; б) $(-2; -6; 1)$; $(-6; -2; 3)$; в) -2 ; г) 96°

Приклад 2. Дано вектори $\vec{a}(5; -1; 2)$, $\vec{b}(-2; 3; 1)$, $\vec{c}(-4; 1; 2)$. Знайти а) скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$, б) векторний добуток $\vec{a} \times \vec{b}$, в) мішаний добуток $(\vec{a} \vec{b} \vec{c})$.

Розв'язання: а) Скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$,
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 1 = -10 - 3 + 2 = -11$.

$$\text{б) Векторний добуток } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -7\vec{i} - 9\vec{j} + 13\vec{k} = \overrightarrow{(-7; -9; 13)}.$$

с) Мішаний добуток:

$$1 \text{ спосіб } (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c},$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \overrightarrow{(-7; -9; 13)} \cdot \overrightarrow{(-4; 1; 2)} = -7 \cdot (-4) + (-9) \cdot 1 + 13 \cdot 2 = 28 - 9 + 26 = 45$$

$$2 \text{ спосіб } (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},$$

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 5 + 1 \cdot (-17) + 2 \cdot (-11) = 25 - 17 - 22 = -14.$$

Відповідь: а) -11; б) $\overrightarrow{(-7; -9; 13)}$; в) 45

Приклад 3. При якому значенні x вектори $\vec{a}(3; -1; x)$, $\vec{b}(2; 0; -1)$, $\vec{c}(2; 5; 4)$ компланарні?

Розв'язання:

Вектори компланарні, якщо їх мішаний добуток дорівнює нулю

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & x \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0, \text{ розпишемо визначник}$$

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = 0 + 2 + 10x - 0 + 8 + 15 = 10x + 25 = 0, \quad x = -2,5.$$

Відповідь: -2,5

Приклад 4. Задані координати вершин піраміди $A(1;2;3)$, $B(-3;10;4)$, $C(8;6;-1)$, $D(-2;4;9)$.

Потрібно знайти:

а) координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{AD}$ і модулі (довжини) цих векторів;

б) кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$ (відповідними ребрами піраміди) у градусах $\angle(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$;

с) знайти площу грані ABC S_{ABC} ;

д) знайти об'єм піраміди $ABCD$ V_{ABCD} .

Розв'язання:

$$\text{а) } \overrightarrow{AB}(-4;8;1); |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 8^2 + 1^2} = \sqrt{81} = 9;$$

$$\overrightarrow{AC}(7;4;-4); |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{7^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{81} = 9;$$

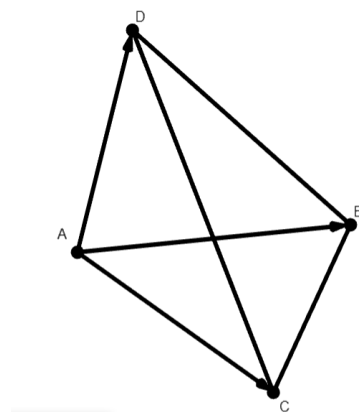
$$\overrightarrow{AD}(-3;2;6); |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7.$$

$$\text{б) } \cos \varphi = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -4 \cdot 7 + 8 \cdot 4 + 1 \cdot (-4) = -28 + 32 - 4 = 0,$$

$$\cos \varphi = \frac{0}{9 \cdot 9} = 0, \quad \varphi = 90^\circ.$$

$$\text{с) } \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 8 & 1 \\ 7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ -4 & 8 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -32\vec{i} + 7\vec{j} - 16\vec{k} - 56\vec{k} - 4\vec{i} - 16\vec{j} = -36\vec{i} - 9\vec{j} - 72\vec{k} = \overline{(-36; -9; -72)}.$$



$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-36)^2 + (-9)^2 + (-72)^2} = \sqrt{1296 + 81 + 5184} = \sqrt{6561} = 81.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} 81 = 40,5 \text{ кв.од.}$$

$$\text{d) } (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -4 & 8 & 1 \\ 7 & 4 & -4 \\ -3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -96 + 96 + 14 + 12 - 32 - 336 = -342.$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} |-342| = 57 \text{ куб.од.}$$

Відповідь: а) $\overrightarrow{AB}(-4;8;1)$, $\overrightarrow{AC}(7;4;-4)$, $\overrightarrow{AD}(-3;2;6)$, $|\overrightarrow{AB}|=9$, $|\overrightarrow{AC}|=9$, $|\overrightarrow{AD}|=7$ б) 90° ; в) 40,5 кв.од; д) 57 куб.од.

Приклад 5. Компанія має три виробничі лінії, де кожна з них характеризується вектором $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$, де p_i — продуктивність кожної лінії в кількості виготовленої продукції на одиницю часу. Також, є вектор витрат ресурсів $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$, де c_i — витрати ресурсів на одиницю продукції на відповідній лінії. Обчисліть загальні витрати ресурсів на виробництво, використовуючи скалярний добуток векторів $\vec{p}$ та $\vec{c}$, для заданих значень продуктивності та витрат:

$$\vec{p} = (100, 150, 200), \vec{c} = (10, 12, 8),$$

Розв'язання. Знайдемо скалярний добуток векторів $\vec{p} \cdot \vec{c} = 100 \cdot 10 + 150 \cdot 12 + 200 \cdot 8 = 1000 + 1800 + 1600 = 4400$ ум.од.

Загальні витрати ресурсів на виробництво становить 4400 ум.од.

Застосування скалярного добутку дозволяє отримати оцінку загальних витрат на виробництво з урахуванням специфічної продуктивності кожної лінії.

Відповідь: 4400 ум.од

Приклад 6. Розгляньмо два ринкових фактори, представлених векторами $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ та $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, які впливають на розвиток підприємства по трьох основних напрямках: маркетинг, виробництво, інновації. Векторний добуток цих векторів може показати, наскільки ці фактори впливають на незалежний напрямок розвитку компанії, що не входить до маркетингу, виробництва чи інновацій, але є важливим для загальної стратегії. Обчисліть векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо: $\vec{a} = (2, 3, 5)$, $\vec{b} = (4, 1, 3)$.

Розв'язання. Знайдемо векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = \\ &= (9 - 5)\vec{i} + (6 - 20)\vec{j} - (2 - 12)\vec{k} = 4\vec{i} + 14\vec{j} - 10\vec{k}\end{aligned}$$

Відповідь: $(4; 14; -10)$

Приклад 7. Ефективність використання ресурсів у тривимірному просторі. Нехай вектори $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ і $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ представляють три ключові показники ефективності для трьох груп ресурсів (наприклад, матеріали, трудові ресурси, фінанси). Обчисліть об'єм паралелепіпеда, утвореного цими векторами, та проінтерпретуйте результат:

1. Якщо об'єм великий, ресурси використовуються ефективно, бо вони незалежні (вектори не колінеарні).
2. Якщо об'єм близький до нуля, ресурси використовуються неефективно через залежність між ними.

Обчисліть об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ для даних значень: $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (4, 0, 6)$ і $\vec{w} = (3, 5, 1)$.

Розв'язання. Мішаний добуток векторів дорівнюватиме $(\vec{u} \vec{v} \vec{w}) =$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 6 \cdot 3 + 4 \cdot 5 \cdot 3 - 3 \cdot 0 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 5 \cdot 6 =$$
$$= 0 + 36 + 60 - 0 - 8 - 30 = 58$$

Об'єм паралелепіпеда дорівнює модулю мішаного добутку векторів, тобто $V = |58| = 58$. Об'єм досить значним, що свідчить про ефективний розподіл ресурсів, оскільки вектори утворюють паралелепіпед із великим об'ємом. Це означає, що ресурси не сильно залежать один від одного. Якщо об'єм близький до нуля, ресурси використовуються неефективно через залежність між ними.

Відповідь: 58

Завдання для аудиторної та самостійної роботи

Завдання 1. Дано точки в просторі $A(\alpha + 1; 3 + \alpha; 6)$, $B(\alpha; 5 + \alpha; 4)$ та $C(\alpha - 9; \alpha + 1; 16)$. Знайти: координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ та їхні довжини; суму і різницю, скалярний добуток цих векторів; кут між ними.

Завдання 2. Компанія має три виробничі лінії, де кожна з них характеризується вектором $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$, де p_i — продуктивність кожної лінії в кількості виготовленої продукції на одиницю часу. Також, є вектор витрат ресурсів $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$, де c_i — витрати ресурсів на одиницю продукції на відповідній лінії. Обчисліть загальні витрати ресурсів на виробництво, використовуючи скалярний добуток векторів $\vec{p}$ та $\vec{c}$, для заданих значень продуктивності та витрат:

$$\vec{p} = (\alpha, \alpha, 10), \vec{c} = (5, \alpha + 4, 2\alpha)$$

Завдання 3. Дано два вектори $\vec{a}(2\alpha; -2\alpha; \alpha)$ і $\vec{b}(-2; -1; 4)$. Знайти векторний добуток векторів, площу паралелограма і трикутника, побудованих на цих векторах.

Завдання 4. Знайти мішаний добуток векторів $\overrightarrow{AB}(1; 1; 0)$, $\overrightarrow{AC}(5; \alpha; 36)$, $\overrightarrow{AD}(0; 0; 36)$, визначити об'єм паралелепіпеда та об'єм піраміди, побудованих на них.

Завдання 5. Розгляньмо два ринкових фактори, представлених векторами $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ та $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, які впливають на розвиток підприємства по трьох основних напрямках: маркетинг, виробництво, інновації. Векторний добуток цих векторів може показати, наскільки ці фактори впливають на незалежний напрямок розвитку компанії, що не входить до маркетингу, виробництва чи інновацій, але є важливим для загальної стратегії.

Обчисліть векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо: $\vec{a} = (\alpha, 4, 5)$, $\vec{b} = (2, \alpha + 1, 6)$.

Завдання 6. Нехай вектори $\vec{u} = (\alpha, 4, 5)$, $\vec{v} = (2, 1, 0)$ і $\vec{w} = (1, 2, 1)$. представляють три ключові показники ефективності для трьох груп ресурсів (наприклад, матеріали, трудові ресурси, фінанси). Обчисліть об'єм паралелепіпеда, утвореного цими векторами, та проінтерпретуйте результат.

Питання для самоперевірки

1. Що таке вектор? Як його можна задати у просторі та на площині?
2. Які дії можна виконувати з векторами?

3. Як виконуються додавання і віднімання векторів, якщо відомі координати векторів?
4. Що таке множення вектора на число? Як змінюється вектор після такої операції?
5. Як обчислюється довжина (модуль) вектора?
6. Що таке скалярний добуток векторів? Яка його геометрична інтерпретація?
7. Як можна визначити кут між двома векторами за допомогою їх скалярного добутку?
8. Що таке векторний добуток векторів?
9. Які властивості векторного добутку та його геометрична інтерпретація?
10. Що можна сказати про вектори, якщо їх векторний добуток дорівнює нулю?
11. Що таке мішаний добуток трьох векторів? Які є способи обчислення мішаного добутку?
12. Що можна сказати про вектори, якщо їх мішаний добуток дорівнює нулю?
13. Які основні властивості скалярного, векторного та мішаного добутків?
14. У яких практичних задачах застосовуються скалярний, векторний і мішаний добутки?

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бондаренко Н. В., Отрашевська В. В. Лінійна алгебра : навчальний посібник. Київ : КНУБА, 2023. 180 с. URL: https://org2.knuba.edu.ua/pluginfile.php/201293/mod_resource/content/13/Navchalny_posibn_Bondarenko_2023-new.pdf
2. Васильченко І. П. Вища математика для економістів : підручник. Київ: Знання-Прес, 2004. 454 с.
3. Вишнякова А. М., Заварзіна О. О. Лінійна алгебра : навчальний посібник. Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2024. 160 с. URL: <https://ekhnuir.karazin.ua/server/api/core/bitstreams/479992cf-d456-4c24-884f-7fa665eca6fd/content>.
4. Вища математика. Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Елементи векторної алгебри : конспект лекцій / О. В. Кузьма, О. В. Суліма, Т. О. Рудик та ін. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 127 с.
5. Вища математика. Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії : навчальний посібник / уклад. Т. О. Єр'оміна, О. А. Поварова. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 115 с. URL: <https://ela.kpi.ua/items/1e2abc9e-a53b-4189-baec-605fa9e622d1>.
6. Вища математика. Модуль "Елементи лінійної алгебри": метод. реком. для виконання самостійних робіт здобувачів вищої освіти освітнього ступеня „Молодший бакалавр” початкового рівня (короткий цикл) спеціальності 073 „менеджмент” денної форми навчання / уклад. : В. С. Шебанін, О. В. Шебаніна, І. П. Атаманюк та ін. Миколаїв: МНАУ, 2020. 63 с. URL: <https://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/10512>
7. Вища математика: Алгебра та геометрія : метод. реком. для виконання самот. роботи здобувачами першого (бакалаврського) рівня вищої освіти ОПП «Готельно-ресторанна справа» та ОПП «Туризм» спеціальностей 241«Готельно-ресторанна справа» та 242 «Туризм» денної та заочної форми здобуття вищої освіти /уклад.: О. В. Бойчук, С. І. Богданов, Є. Ю. Борчик, В. В. Поживатенко. Миколаїв: МНАУ, 2023. 52 с. URL: <https://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/13126>
8. Дармосюк В. М., Білай О. В., Валах Т. І. Лінійна алгебра: Системи лінійних рівнянь. Визначники. Матриці. Комплексні числа. Частина І:

- навчальний посібник. Миколаїв : МНУ ім. В. О. Сухомлинського, 2016. 174 с.
9. Завало С. Т., Левіщенко С. С., Пилаєв В. В., Рокицький І. О. Алгебра і теорія чисел: Практикум. Київ : Вища школа, 1983. Ч. І. 232 с.
 10. Коваленко Л. Б. Вища математика для менеджерів: підручник. Харків: ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2019. 341 с.
 11. Матриці. Визначники. Системи лінійних рівнянь (завдання для самостійної роботи та методичні вказівки до їх виконання): посібник для самостійної та дистанційної роботи студентів/ В. Д. Будак та ін. Миколаїв: МНУ ім. В. О. Сухомлинського, 2021. 219 с.
 12. Михайленко С. В., Свіщова Є. В. Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії : навчальний посібник. 2-е вид., випр. Харків : Вид-во НУА, 2023. 104 с. URL: <https://surl.li/fiinig>
 13. Пархоменко О. Ю., Дармосюк В. М., Васильєва Л. Я. Тестові завдання з вищої математики: навчальний посібник. Миколаїв: МНУ, 2019. 155 с.
 14. Скуратовський Р. В. Вища математика з прикладами та задачами : підручник. Київ : Національна академія управління, 2021. 232 с.
 15. Шапочка І. В. Лінійна алгебра: навчальний посібник. Ужгород: Говерла, 2023. 224с. URL: <https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/bitstream/lib/52013/1/LinearAlgebra.pdf>.

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА.
Лінійна та векторна алгебра:
Методичні рекомендації

Укладач: **Дармосюк** Валентина Миколаївна

Формат 60x84/16 Ум. друк. арк.
Тираж __ прим. Зам. №

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Г. Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.