

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Інженерно-енергетичний факультет

Кафедра вищої та прикладної математики

**ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТІ
ТА
МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА**

Методичні рекомендації
для практичних занять
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
ОПП «Агроінженерія»
спеціальності 208 «Агроінженерія»,
денної та заочної форм здобуття вищої освіти

МИКОЛАЇВ
2025

УДК 519.2
ТЗЗ

Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету МНАУ (протокол № 9 від 20.05.2025р.)

Укладач:

О.В. Бойчук – к.ф.-м.н., доцентка кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського національного аграрного університету.

Рецензенти:

Махровська Н.А. – к.ф.-м.н., доцентка кафедри теорії й методики природничо-математичної освіти та інформаційних технологій Миколаївського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти.

Пархоменко О.Ю. – к.ф.-м.н., доцент кафедри економічної кібернетики, комп'ютерних наук та технологій Миколаївського національного аграрного університету.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
МОДУЛЬ 1 «ВИПАДКОВА ПОДІЯ»	5
ОПЕРАЦІЇ НАД ПОДІЯМИ.....	5
ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ. КЛАСИЧНА ЙМОВІРНІСТЬ.....	8
ВІДНОСНІ ЧАСТОТИ. ГЕОМЕТРИЧНЕ ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНOSTІ	13
ДОДАВАННЯ НЕСУМІСНИХ І МНОЖЕННЯ НЕЗАЛЕЖНИХ ПОДІЙ	16
ДОДАВАННЯ СУМІСНИХ І МНОЖЕННЯ ЗАЛЕЖНИХ ПОДІЙ.....	22
ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНOSTІ. ФОРМУЛА БАЙЄСА	26
ПОВТОРЕННЯ ВИПРОБУВАНЬ. СХЕМА БЕРНУЛЛІ	36
ТЕОРЕМИ МУАВРА – ЛАПЛАСА	39
ФОРМУЛА ПУАССОНА	42
ВІДХИЛЕННЯ ВІДНОСНОЇ ЧАСТОТИ ВІД СТАЛОЇ ЙМОВІРНOSTІ.....	44
МОДУЛЬ 2 «ВИПАДКОВА ВЕЛИЧИНА»	46
ДИСКРЕТНА ВИПАДКОВА ВЕЛИЧИНА, ХАРАКТЕРИСТИКИ	46
ВЛАСТИВОСТІ ХАРАКТЕРИСТИК ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ.....	51
ЦІЛОЧИСЛОВІ ДИСКРЕТНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ.....	53
НЕПЕРЕРВНА ВИПАДКОВА ВЕЛИЧИНА, ХАРАКТЕРИСТИКИ.....	57
ОСНОВНІ РОЗПОДІЛИ НЕПЕРЕРВНОЇ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ	64
НЕРІВНІСТЬ МАРКОВА. НЕРІВНІСТЬ ЧЕБИШОВА.....	70
МОДУЛЬ 3 «МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА»	72
ДИСКРЕТНИЙ СТАТИСТИЧНИЙ РОЗПОДІЛ ВИБІРКИ.....	72
ІНТЕРВАЛЬНИЙ СТАТИСТИЧНИЙ РОЗПОДІЛ ВИБІРКИ.....	76
ДВОВИМІРНИЙ СТАТИСТИЧНИЙ РОЗПОДІЛ ВИБІРКИ.....	81
РЕГРЕСІЙНИЙ АНАЛІЗ	86
СТАТИСТИЧНА ОЦІНКА ПАРАМЕТРІВ ГЕНЕРАЛЬНОЇ СУКУПНОСТІ.....	91
ПЕРЕВІРКА СТАТИСТИЧНИХ ГІПОТЕЗ.....	97
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	103

ВСТУП

Теорія ймовірності та математична статистика є складовою частиною сучасної математики, яка широко застосовується для статистичної обробки результатів у різноманітних дослідках.

В наукових дослідженнях, техніці, метеорології, сільському господарстві та масовому виробництві досить часто зустрічаються досліді, операції та явища, які багатократно повторюються в незмінних умовах. Встановлення закономірностей, яким підпорядковані масові випадкові явища, ґрунтується на вивченні статистичних даних – результатах спостережень. Незважаючи на незмінність основного комплексу умов, які в окремих дослідках відтворюються якнайретельніше, їхні результати завжди будуть відрізнятися (більше або менше) один від одного, підпорядковуючись певним ймовірнісним закономірностям.

Теорія ймовірності та математична статистика є необхідною частиною вищої освіти сучасного працівника сільського господарства.

Методичні рекомендації розроблено відповідно до програми курсу «Теорія ймовірності та математична статистика» для студентів спеціальності 208 «Агроінженерія» і включають не тільки матеріал практичних занять, а й питання, винесені на самостійне опрацювання здобувачами вищої освіти.

У методичних рекомендаціях розглядаються випадкові події та дії з ними, дискретні та неперервні випадкові величини та їхні характеристики, статистичні ряди розподілу та їхні характеристики, кореляційно-регресійний аналіз, статистична оцінка параметрів розподілу, перевірка статистичних гіпотез.

Матеріал викладено таким чином, щоб максимально допомогти студентам оволодіти теорією та набути основних навичок розв'язування завдань з теорії ймовірності та математичної статистики, зокрема при дистанційній формі навчання. Для досягнення цієї мети по кожній темі розглянуті приклади розв'язування завдань з поясненнями, також приведені завдання для самостійного розв'язування для засвоєння матеріалу.

МОДУЛЬ 1 «ВИПАДКОВА ПОДІЯ»

ОПЕРАЦІЇ НАД ПОДІЯМИ

1. Основні поняття та теореми

Під подією розуміємо таку дію, про яку можна сказати, що вона відбулась, або відбувається, або може відбутись, або неможлива.

Під елементарними подіями (ω) ми розуміємо всі нерозкладні результати даного випробування, які взаємно виключають один одного.

Простором елементарних подій (Ω) є множина, елементами якої є всі елементарні події, пов'язані з даним випробуванням.

Випадкова подія називається складеною, якщо її можна розкласти на прості (елементарні) події. Складені випадкові події позначаються латинськими великими літерами.

Нехай Ω – довільний простір елементарних подій. Будь-яка підмножина A множини Ω є складеною подією. Подія A настане тоді, коли результатом випробування є одна з елементарних подій, які входять в A . Елементарні випадкові події $\omega_i \in A$, які належать складеній випадковій події A , називають елементарними подіями, які сприяють появі події A .

Розглянемо операції над подіями, що зводяться до операцій з множинами.

Сумою $A + B$ подій A, B є подія, яка складається з тих елементарних подій, які входять в подію A або в подію B (рис. 1,а).

Тобто якщо події A відповідає підмножина A простору Ω , а події B – підмножина B , то події $A + B$ відповідає підмножина $A \cup B$, яка складається з усіх елементарних подій, які належать об'єднанню множин A та B .

Добутком $A \cdot B$ подій A, B є подія, яка складається з тих елементарних подій, які входять в обидві події A та B (рис. 1,б).

Тобто якщо події A відповідає підмножина A простору Ω , а події B відповідає підмножина B , то події $A \cdot B$ відповідає підмножина $A \cap B$, яка складається з усіх елементарних подій, які належать перетину множин A та B .

Різницею $A - B$ подій A, B є подія, яка складається з тих елементарних подій, які входять у подію A і не входять у подію B (рис. 1,в).

Згідно з цим означенням, якщо події A відповідає підмножина A простору Ω , а події B відповідає підмножина B , то події $A - B$ відповідає різниця множин A, B , тобто підмножина $A \setminus B$, яка складається з усіх елементарних подій, які входять до A , але не входять до B .

Події A, B несумісні, якщо $A \cdot B = \emptyset$, і сумісні, якщо $A \cdot B \neq \emptyset$. Подія $\bar{A}$ є протилежною до події A , якщо $A \cdot \bar{A} = \emptyset$ і $A + \bar{A} = \Omega$.

Подія B є наслідком події A , якщо всі елементарні події, що входять у B , містяться і в події A . У цьому випадку множина B є підмножиною множини A , тобто $B \subset A$ або $A \supset B$ (рис. 1,г).

Події A, B називаються рівносильними $B = A$, якщо $A \subset B$ і $A \supset B$.

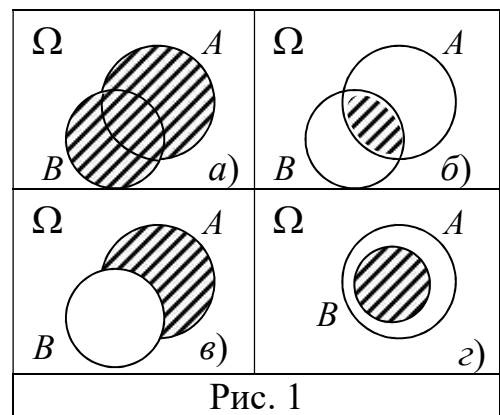


Рис. 1

2. Приклади виконання завдань

1. Монету підкидають чотири рази. Побудуйте простір елементарних подій для цього експерименту і такі випадкові події: A – герб випаде двічі; B – герб випаде тричі і більше.

Розв'язання:

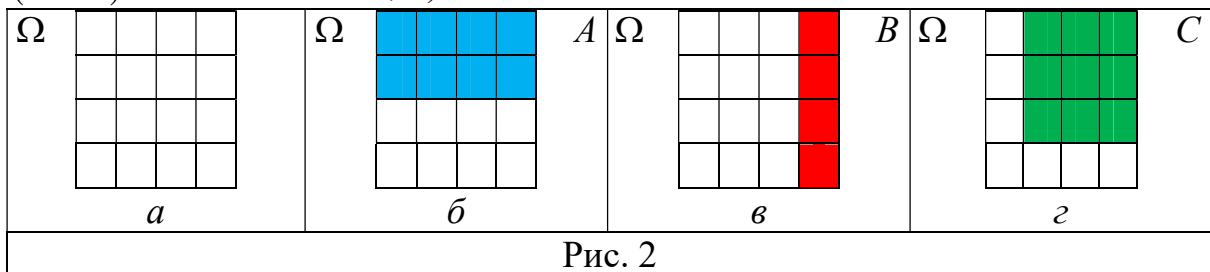
Шуканий простір елементарних подій: $\Omega = \{\text{гггг, гггц, ггцг, гцгг, цггг, ггцц, гцгц, цггц, цггг, цгцг, цгцц, цгцг, цггц, цггг, цггг}\}$; $A = \{\text{ггцц, цггг, гцгц, цггг, гцгг, цггг}\}$; $B = \{\text{гггг, гггц, ггцг, гцгг, цггг}\}$.

2. Задано множину цілих чисел $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$. Навмання з неї беруть одне число. Побудувати випадкові події: A – взяте число кратне 2; B – взяте число кратне 3. Визначити $A + B$; $A \cdot B$; $A - B$.

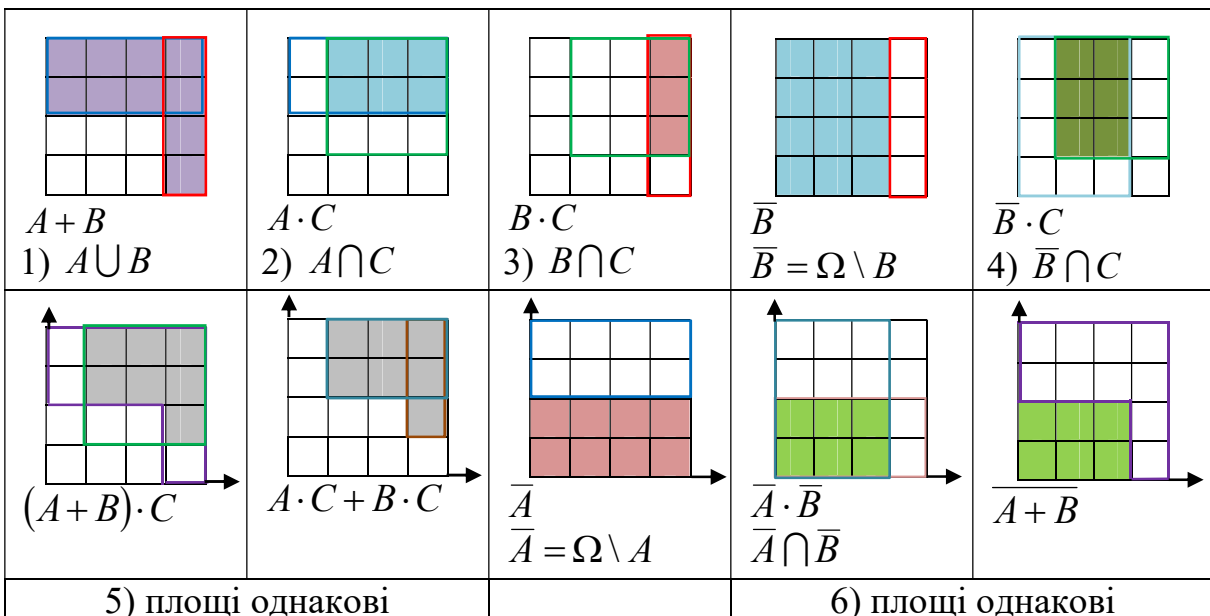
Розв'язання:

$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$; $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$; $A + B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15\}$; $A \cdot B = \{6, 12\}$; $A - B = \{2, 4, 8, 10, 14\}$.

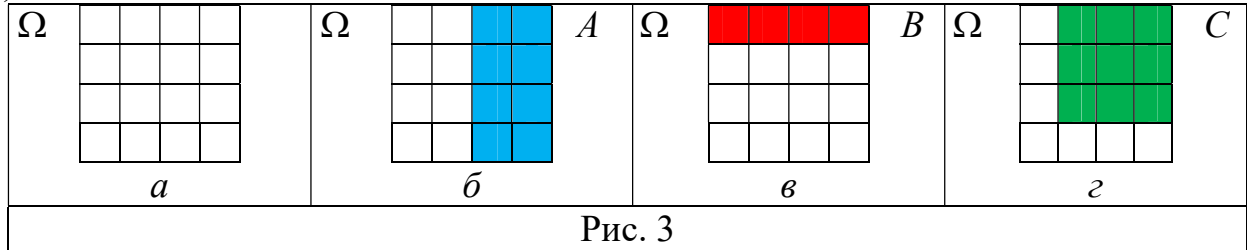
3. Простір елементарних подій деякого випробування представлений квадратною фігурою $\Omega = \{(x, y): 0 \leq x, y \leq 4\}$, а деякі події, пов'язані з цим випробуванням, представлені множинами $A = \{(x, y): 0 \leq x \leq 4; 2 \leq y \leq 4\}$, $B = \{(x, y): 3 \leq x \leq 4; 0 \leq y \leq 4\}$, $C = \{(x, y): 1 \leq x, y \leq 4\}$ (рис.2, а-г). Використовуючи зображення кадрованої фігури Ω та множин A , B , C , геометрично знайдіть множини подій: 1) $A + B$; 2) $A \cdot C$; 3) $B \cdot C$; 4) $\overline{B} \cdot C$; підтвердьте формули 5) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$; 6) $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$.



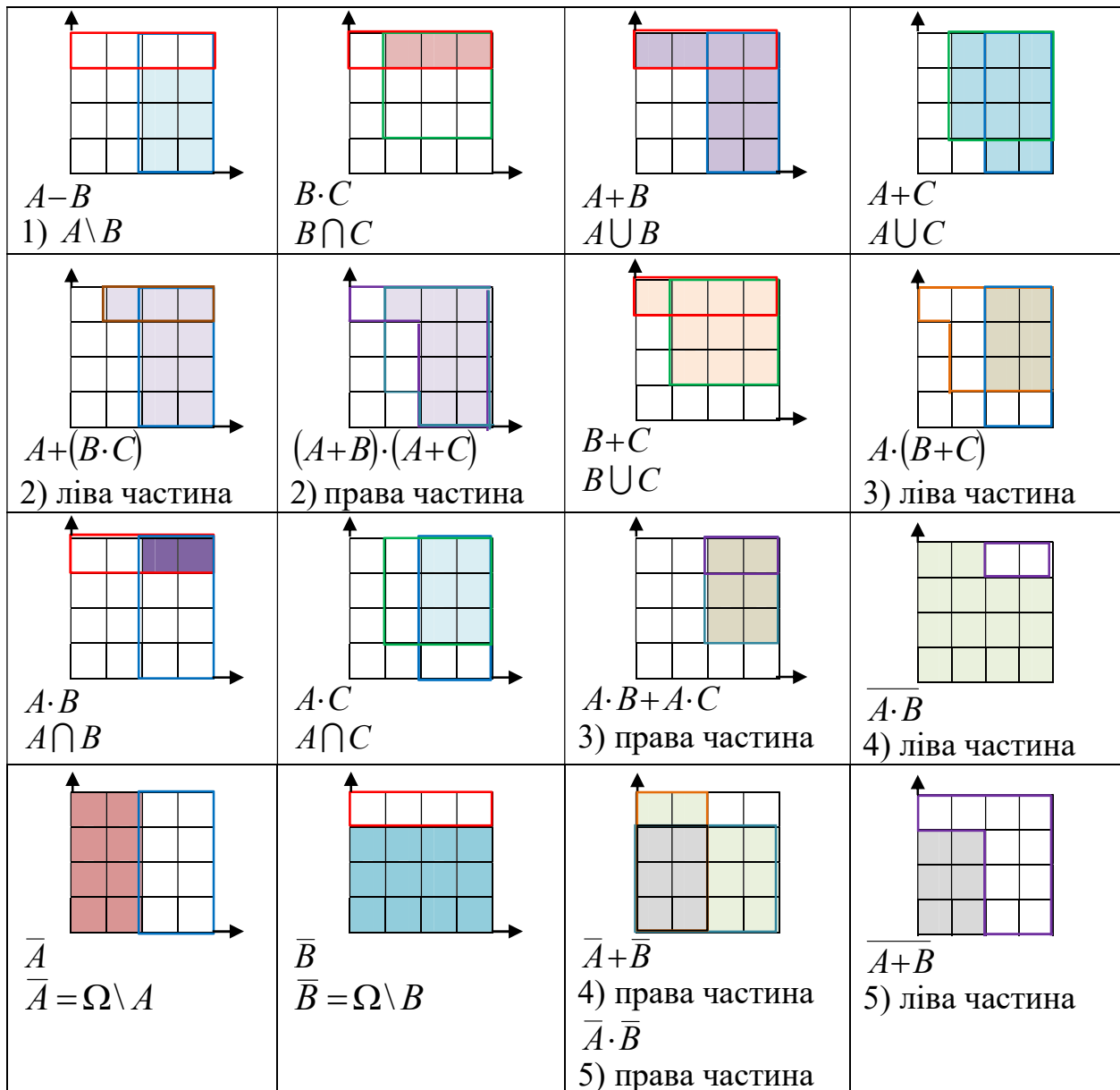
Розв'язання:



4. У просторі елементарних подій деякого випробування $\Omega = \{(x; y): 0 \leq x, y \leq 4\}$ події, пов'язані з цим випробуванням, задані множинами $A = \{(x; y): 2 \leq x \leq 4; 0 \leq y \leq 4\}$, $B = \{(x; y): 0 \leq x \leq 4; 3 \leq y \leq 4\}$, $C = \{(x; y): 1 \leq x, y \leq 4\}$ (рис.3, а-г). Використовуючи зображення Ω та множин A , B , C , геометрично знайдіть 1) множину події $A - B$; підтвердьте наступні формули: 2) $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$; 3) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$; 4) $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$; 5) $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$.



Розв'язання:



3. Завдання для самостійного виконання

1. Монету підкидають три рази. Побудуйте простір елементарних подій для цього експерименту і такі випадкові події: 1) A – герб випаде двічі; 2) B – герб випаде двічі і більше.

2. Задано множину цілих чисел $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25\}$. Навмання з неї беруть одне число. Побудуйте множини випадкових подій: A – взяте число кратне 3; B – взяте число кратне 5. Визначте $A + B$; $A \cdot B$; $A - B$.

3. Простір елементарних подій деякого випробування представлений квадратовою фігурою $\Omega = \{(x; y): 0 \leq x, y \leq 4\}$, а деякі події, пов'язані з цим випробуванням, представлені множинами $A = \{(x; y): 0 \leq x \leq 4; 2 \leq y \leq 4\}$, $B = \{(x; y): 0 \leq x \leq 3; 0 \leq y \leq 4\}$, $C = \{(x; y): 1 \leq x, y \leq 4\}$. Використовуючи зображення фігури Ω та множин A , B , C , геометрично знайдіть множини подій: 1) $A + C$; 2) $A \cdot B$; 3) $B - C$; 4) $B \cdot \bar{A}$; підтвердьте формули 5) $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$; 6) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$; 7) $\overline{A \cdot C} = \bar{A} + \bar{C}$; 8) $\overline{A + C} = \bar{A} \cdot \bar{C}$.

ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ. КЛАСИЧНА ЙМОВІРНІСТЬ

1. Основні теоретичні відомості

Події, які ми спостерігаємо або вивчаємо, можна розділити на три види: вірогідні, неможливі та випадкові.

Вірогідною називається подія, яка обов'язково відбудеться при проведенні випробування.

Неможливою називається подія, яка ніколи не відбудеться при проведенні випробування.

Випадковою називається подія, яка при проведенні випробування може або відбутися, або не відбутися. Наприклад, при одному пострілі «влучення в мішень» – випадкова подія.

Події називають *єдиноможливими*, якщо поява в результаті випробування однієї і тільки однієї з них є вірогідна подія. Наприклад, при підкиданні грального кубика якась одна (і тільки одна) його грань з відповідною кількістю очок (від одного до шести) обов'язково буде зверху. Єдиноможливі події попарно несумісні.

Події називають *рівноможливими*, якщо є підстави вважати, що ні одна з цих подій не є більш можливою, ніж інші. Наприклад, поява того чи іншого числа очок на кинutomу гральному кубіку є події рівноможливі.

Єдиноможливі рівноможливі події утворюють простір елементарних подій.

Згідно з класичним означенням ймовірності події A називається невід'ємне число, що визначається формулою $P(A) = \frac{m_A}{n_A}$, де m_A – число елементарних результатів випробування, сприятливих для появи події A , n_A – число всіх єдиноможливих рівноможливих елементарних результатів випробування.

З класичного означення ймовірності випливають наступні її властивості:

- ймовірність вірогідної події дорівнює одиниці (дійсно, якщо подія вірогідна, то кожний елементарний результат випробування буде сприятливим для появи цієї події, тобто $m_A = n_A$ і тому $P(A) = 1$);

- ймовірність неможливої події дорівнює нулю (дійсно, якщо подія неможлива, то ні один з елементарних результатів випробування не буде сприятливим для появи цієї події, тобто $m_A = 0$ і тому $P(A) = 0$);

- ймовірність випадкової події є додатнім числом, яке знаходиться між нулем і одиницею (дійсно, для випадкової події сприятливими будуть тільки деякі із загального числа елементарних результатів випробування, тобто $0 < m_A < n_A$ і тому $0 < P(A) < 1$).

Таким чином, ймовірність будь-якої події задовольняє подвійну нерівність $0 \leq P(A) \leq 1$.

При підрахунках кількості елементарних результатів випробування застосовують формули комбінаторики.

Правило суми: якщо першу дію можна здійснити k_1 способами, другу, яка несумісна з першою, можна здійснити k_2 способами, ..., p -ту, яка несумісна з усіма попередніми, можна здійснити k_p способами, то або першу, або другу, ..., або p -ту дії можна здійснити $k_1 + k_2 + \dots + k_p$ способами.

Правило добутку (основне правило комбінаторики): якщо першу дію можна здійснити k_1 способами, другу, яка не залежить від першої, можна здійснити k_2 способами, ..., p -ту, яка не залежить від усіх попередніх, можна здійснити k_p способами, то першу, другу, ..., p -ту дії послідовно можна здійснити $k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_p$ способами.

Кількість розміщень з n елементів по k (порядок елементів відіграє суттєву роль) визначається формулою $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = (n-k+1) \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$.

Розміщення своїм окремим випадком при $k = n$ є перестановкою.

Кількість перестановок з n елементів: $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$.

Кількість комбінацій з n елементів по k (порядок елементів суттєвої ролі не відіграє) визначається формулою $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Слід пам'ятати, що $0! = 1$, $1! = 1$.

2. Приклади виконання завдань

1. З точки A у точку B можна рухатися п'ятьма шляхами, а з точки B у точку C шістьма шляхами. Скількома різними шляхами можна потрапити з точки A через точку B у точку C і назад з точки C через точку B у точку A таким чином, щоб жодного разу не рухатися по пройденому вже шляху?

Розв'язання:

Згідно правилу добутку $5 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 5 = 30 \cdot 20 = 600$ шляхами.

Відповідь: 600.



2. З пункту A в пункт B можна потрапити через пункт C або через пункт D . Скількома способами можна потрапити з пункту A в пункт B , якщо з A до C веде 5 доріг, з C до B – 2 дороги, з A до D – 4 дороги і з D до B – 3 дороги?

Розв'язання:

Згідно правил добутку та суми $5 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 10 + 12 = 22$ шляхами.

Відповідь: 22.

3. Скількома способами можна вибрати з послідовності чисел 1, 2, ..., 6, 7, 8, ..., 18, 19 два числа (при цьому їх порядок не має значення), одне з яких менше 7, а друге більше 7?

Розв'язання:

1, 2, ..., 6, 7, 8, ..., 18, 19

6 варіантів 12 варіантів

$6 \cdot 12 = 6 \cdot 12 = 72$ способами.

Відповідь: 72.

4. Скількома способами можна вибрати з послідовності чисел 1, 2, ..., 6, 7, 8, ..., 18, 19 два числа (при цьому їх порядок відіграє суттєву роль), одне з яких менше 7, а друге більше 7?

Розв'язання:

$6 \cdot 12 \cdot P_2 = 6 \cdot 12 \cdot 2! = 144$ способами.

Відповідь: 144.

5. З послідовності чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 потрібно по одному вибрати три числа так, щоб «розташовані в один ряд» вони утворювали різні цілі числа. Скількома способами можна це зробити?

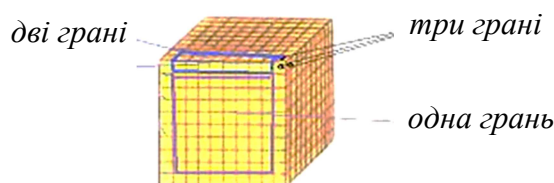
Розв'язання:

$$A_{14}^3 = \frac{14!}{(14-3)!} = \frac{14!}{11!} = \frac{11! \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}{11!} = 12 \cdot 13 \cdot 14 = 2184 \text{ способами.}$$

Або $A_{14}^3 = 14 \cdot 13 \cdot 12 = 2184$ способами.

Відповідь: 2184.

6. Куб, всі грані якого пофарбовані, розпиляли на 110592 кубиків однакового розміру. Скільки кубиків мають три пофарбовані грані? дві? одну? жодної?



Розв'язання:

Кількість кубиків вздовж одного ребра $\sqrt[3]{110592} = 48$.

8 кубиків мають три пофарбовані грані;

$12 \cdot (48 - 2) = 552$ кубики мають дві пофарбовані грані (12 ребер куба, вздовж одного ребра $(48 - 2)$ кубиків з двома пофарбованими гранями);

$6 \cdot 46^2 = 12696$ кубиків мають одну пофарбовану грань (6 граней куба, на одній грані 46^2 кубиків з однією пофарбованою гранню);

$46^3 = 97336$ кубиків з НЕпофарбованими гранями.

Відповідь: 8; 552; 12696; 97336.

7. В ящику знаходиться 35 деталей, з яких 27 стандартні. Скількома способами можна взяти 28 деталей так, щоб три з них були нестандартні?

Розв'язання:

В ящику $35 = \underset{\text{всі}}{27} + \underset{\text{стандарт}}{8}$. Витягуємо $28 = \underset{\text{всі}}{25} + \underset{\text{стандарт}}{3}$. Кількість способів $C_{27}^{25} \cdot C_8^3 = \frac{27!}{25! \cdot 2!} \cdot \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{25! \cdot 26 \cdot 27}{25! \cdot 2} \cdot \frac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{6 \cdot 5!} = 19656$.

Відповідь: 19656.

8. З послідовності чисел 1, 2, ..., 192, 193 вибирають два числа (при цьому їх порядок має значення). Знайдіть ймовірність того, що записавши їх «в один ряд», одержимо парне число.

Розв'язання:

$m = 96 \cdot 192$, бо друге число має бути парним, а для першого числа залишається 192 варіанти; $n = A_{193}^2 = \frac{193!}{191!} = 193 \cdot 192$, $P = \frac{m}{n} = \frac{96 \cdot 192}{192 \cdot 193} \approx 0,497$.

Відповідь: 0,497.

9. Куб, всі грані якого пофарбовані, розпиляли на 175616 кубиків однакового розміру, які потім ретельно перемішали. Знайдіть ймовірність того, що взятий навмання кубик, буде мати тільки одну пофарбовану грань.

Розв'язання:

$n = 175616$; $\sqrt[3]{175616} = 56$, $m = 6 \cdot (56 - 2)^2 = 17496$ – кількість кубиків, що має тільки одну пофарбовану грань. Тоді $P = \frac{m}{n} = \frac{17496}{175616} \approx 0,0996$.

Відповідь: 0,0996.

10. В урні знаходиться 19 білих та 16 чорних куль. З урни дістали відразу дві кулі. Знайдіть ймовірність того, що обидві кулі будуть однакового кольору.

Розв'язання:

$m = C_{19}^2 + C_{16}^2 = \frac{19!}{2!(19-2)!} + \frac{16!}{2!(16-2)!} = \frac{19!}{2!17!} + \frac{16!}{2!14!} = \frac{18 \cdot 19}{2} + \frac{15 \cdot 16}{2} = 291$;
 $n = C_{35}^2 = \frac{35!}{2!(35-2)!} = \frac{35!}{2!33!} = \frac{34 \cdot 35}{2} = 595$; $P = \frac{m}{n} = \frac{291}{595} \approx 0,489$.

Відповідь: 0,489.

11. За круглий стіл випадковим чином сідають 69 людей. Знайдіть ймовірність того, що дві певні особи сидітимуть поруч.

Розв'язання:

$n = P_{69} = 69!$, $m = P_2 \cdot P_{67} \cdot 69 = 2! \cdot 67! \cdot 69$, $P = \frac{m}{n} = \frac{2! \cdot 67! \cdot 69}{69!} = \frac{2}{68} \approx 0,029$.

Відповідь: 0,029.

12. На лаву випадковим чином сідають 80 людей. Знайдіть ймовірність того, що дві певні особи сидітимуть поруч.

Розв'язання:

$n = P_{80} = 80!$, $m = P_2 \cdot P_{78} \cdot 79 = 2! \cdot 78! \cdot 79$, $P = \frac{m}{n} = \frac{2! \cdot 78! \cdot 79}{80!} = \frac{2}{80} = 0,025$.

Відповідь: 0,025.

3. Завдання для самостійного виконання

1. З точки K в точку L можна рухатися $(\alpha + 5)$ шляхами, а з точки L у точку M $(\alpha + 8)$ шляхами. Скількома різними шляхами можна потрапити з точки K в точку M і назад, з точки M у точку K , через точку L таким чином, щоб жодного разу не рухатися по вже пройденому вже шляху?

2. З пункту A в пункт B можна потрапити через пункт C або через пункт D . Скількома способами можна потрапити з пункту A в пункт B , якщо з A до C веде $(2 + \alpha)$ доріг, з C до B – $(1 + \alpha)$ доріг, з A до D – α доріг і з D до B – $(3 + \alpha)$ доріг?

3. Скількома способами можна вибрати з послідовності чисел $1, 2, \dots, \alpha, \dots, (2\alpha + 9)$ два різних числа (їх порядок не відіграє ролі), одне з яких менше $(\alpha + 6)$, а друге більше $(\alpha + 6)$?

4. Скількома способами можна вибрати з послідовності чисел $1, \dots, \alpha, \dots, (3\alpha + 18)$ два числа (їх порядок відіграє роль), одне з яких менше $(\alpha + 7)$, а друге більше $(\alpha + 7)$?

5. Скількома способами можна вибрати два різних числа (їх порядок відіграє роль) з послідовності чисел $1, 2, \dots, \alpha, \dots, (\alpha + 9)$?

6. З послідовності чисел $1, 2, \dots, \alpha, \dots, (\alpha + 15)$ потрібно по одному вибрати три числа так, щоб «розташовані в один ряд» вони утворювали різні цілі числа. Скількома способами можна це зробити?

7. Куб, всі грані якого пофарбовані, розпиляли на $[\alpha^2(\alpha + 15) + 25(3\alpha + 5)]$ кубиків однакового розміру. Скільки кубиків мають дві пофарбовані грані?

8. У вазі стоять 10 червоних і $(4 + \alpha)$ рожевих гвоздик. Скількома способами можна вибрати три квітки з вази?

9. З вази, де стоять 10 червоних і $(4 + \alpha)$ рожевих гвоздик, вибирають одну червону і дві рожеві квітки. Скількома способами це можна зробити?

10. В ящику знаходиться $(2\alpha + 15)$ деталей, з яких $(\alpha + 6)$ нестандартні. Скількома способами можна взяти $(\alpha + 9)$ деталей таким чином, щоб $(\alpha + 7)$ з них були стандартні?

11. В ящику знаходиться $(2\alpha + 13)$ однакових виробів, з яких $(\alpha + 6)$ пофарбовано. Навмання дістають один з виробів. Знайдіть ймовірність того, що він не буде пофарбований.

12. В урни знаходиться $(\alpha + 9)$ білих та $(\alpha + 7)$ чорних куль. З урни дістають одну кулю і відкладають осторонь. Ця куля виявилась білою. Після цього з урни дістають ще одну кулю. Знайдіть ймовірність того, що обидві кулі будуть білими.

13. З послідовності чисел $1, 2, \dots, (\alpha + 20)$ вибирають два числа (їх порядок має значення). Знайдіть ймовірність того, що записавши їх «в один ряд», одержимо число 2012. Підказка: $m = 1 \cdot 1$.

14. З послідовності чисел $1, 2, \dots, \alpha, \dots, (2\alpha + 7)$ вибирають два числа (їх порядок має значення). Знайдіть ймовірність того, що записавши їх «в один ряд», одержимо парне число.

15. Куб, всі грані якого пофарбовані, розпиляли на $[\alpha^2(\alpha + 18) + 108(\alpha + 2)]$ кубиків однакового розміру, які потім ретельно перемішали. Знайдіть ймовірність того, що взятий навмання кубик буде мати тільки одну пофарбовану грань.

16. В урні знаходиться $(\alpha + 5)$ білих та 10 чорних куль. З урни дістали відразу дві кулі. Яка ймовірність того, що обидві кулі білі?

17. В урні знаходиться $(\alpha + 5)$ білих та 10 чорних куль. З урни дістали відразу дві кулі. Яка ймовірність того, що ці кулі однокольні?

18. В урні знаходиться $(\alpha + 5)$ білих та 10 чорних куль. Навмання дістають три кулі. Яка ймовірність того, що тільки дві з них білі?

19. За круглий стіл випадковим чином сідають $(\alpha + 7)$ людей. Знайдіть ймовірність того, що дві певні особи сидітимуть поруч.

20. На лаву випадковим чином сідають $(\alpha + 8)$ людей. Знайдіть ймовірність того, що дві певні особи сидітимуть поруч.

ВІДНОСНІ ЧАСТОТИ. ГЕОМЕТРИЧНЕ ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

1. Основні теоретичні відомості

Відносною частотою події A називають відношення кількості випробувань, у яких подія A відбулась, до загальної кількості проведених випробувань. Тобто відносна частота події A визначається формулою $W(A) = \frac{m}{n}$, де m – кількість фактів появи події A , n – загальна кількість випробувань.

Стійкість відносної частоти – це властивість, яка полягає в тому, що у різних дослідах відносна частота змінюється мало (тим менше, чим більше проведено випробувань), коливаючись біля деякого сталого числа.

Нехай множині випадків, що сприяють події A , відповідає множина на прямій, площині чи у просторі, яку позначимо теж A . Множині всіх можливих випадків відповідає множина G . Тоді геометричне означення ймовірності має вигляд $P(A) = \frac{m(A)}{m(G)}$, де $m(A)$ – міра множини A (довжина відрізка, площа фігура, об'єм тіла), $m(G)$ – відповідна міра множини G .

2. Приклади виконання завдань

1. Серед партії з 1000 виробів було виявлено три вироби, пошкоджені при перевезенні. Чому дорівнює відносна частота появи пошкодженого виробу?

Розв'язання:

Подія A – поява пошкодженого виробу, загальна кількість випробувань $n = 1000$, кількість фактів появи події $m = 3$. Відносна частота появи події становить $W(A) = \frac{3}{1000} = 0,003$.

Відповідь: 0,003.

2. При дослідженні схожості партії насіння нового сорту було виявлено, що з 1000 насінин не зійшло 150. Чому рівна відносна частота схожості насіння?

Розв'язання:

Подія A – схожість насіння, загальна кількість випробувань $n = 1000$, кількість фактів появи події $m = 1000 - 150 = 850$. Тоді $W(A) = \frac{850}{1000} = 0,85$.

Відповідь: 0,85.

3. При стрільбі з рушниці відносна частота влучення у мішень рівна 0,85. Знайдіть кількість влучень, якщо зроблено 120 пострілів.

Розв'язання:

Подія A – влучення у мішень, $n = 120$, $W(A) = 0,85$, тоді кількість фактів появи події $m = W(A) \cdot n = 0,85 \cdot 120 = 102$.

Відповідь: 102.

4. Для деякої партії насіння відносна частота схожості дорівнює 0,95. Знайдіть число насінин, що не зійшли, якщо було посіяно 500 насінин.

Розв'язання:

Подія A – схожість насіння, $n = 500$, $W(A) = 0,95$, тоді кількість фактів появи події $m = W(A) \cdot n = 0,95 \cdot 500 = 475$, $n - m = 500 - 475 = 25$.

Відповідь: 25.

5. На ділянці телефонної лінії довжиною 100 кілометрів стався обрив дроту. Яка ймовірність того, що обрив буде виявлено між 10-им та 30-им кілометрами лінії?

Розв'язання:

Подія A – обрив буде виявлено між 10-им і 30-им кілометрами телефонної лінії, тобто $m(A) = 30 - 10 = 20 \text{ км}$, $m(G) = 100 \text{ км}$, тоді $P(A) = \frac{m(A)}{m(G)} = \frac{20}{100} = 0,2$.

Відповідь: 0,2.

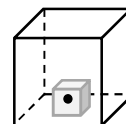
6. Стержень розламано на дві частини у випадковому перерізі. Знайдіть ймовірність того, що менший з уламків має довжину не більше третини довжини стержня.

**Розв'язання:**

Нехай L – довжина стержня. Подія A – довжина меншого уламка не більше $\frac{L}{3}$, сприятливими є випадки $x \leq \frac{L}{3}$ і $x \geq \frac{2L}{3}$, де x – відстань від перерізу зламу до вибраного кінця стержня. Отже, $m(G) = L$, $m(A) = \frac{L}{3} + \frac{L}{3} = \frac{2L}{3}$, $P(A) = \frac{m(A)}{m(G)} = \frac{2L}{3L} = \frac{2}{3}$.

Відповідь: 0,667.

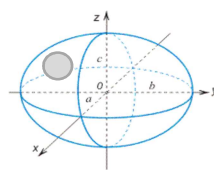
7. У кубі зі стороною 20 знаходиться куб зі стороною 5. У більшому кубі вибрана довільна точка. Яка ймовірність, що вона знаходиться всередині меншого куба?

**Розв'язання:**

Подія A – точка знаходиться всередині меншого куба об'ємом $m(A) = 5^3$, всі можливі випадки – більший куб об'ємом $m(G) = 20^3$, тоді $P(A) = \frac{m(A)}{m(G)} = \frac{5^3}{20^3} = \frac{1}{4^3}$.

Відповідь: 0,0156.

8. Сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ розміщена всередині еліпсоїда $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$. Яка ймовірність того, що поставлена навмання



точка всередину еліпсоїда, опиниться всередині сфери?

Розв'язання:

Подія A – точка знаходиться всередині кулі об'ємом $m(A)$, всі можливі випадки розташувань точки – еліпсоїд об'ємом $m(G)$. З рівняння сфери

$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ знаходимо радіус сфери, тоді об'єм кулі $m(A) = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi$. З

рівняння еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ знаходимо півосі еліпсоїда, тоді об'єм

еліпсоїда $m(G) = \frac{4}{3}\pi abc = \frac{4}{3}\pi \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 32\pi$. Отже, $P(A) = \frac{m(A)}{m(G)} = \frac{\frac{4}{3}\pi}{32\pi} = \frac{1}{24}$.

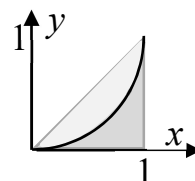
Відповідь: 0,0417.

9. У трикутнику з вершинами $(0;0)$, $(1;0)$, $(1;1)$ навмання ставиться точка $(x; y)$. Яка ймовірність, що точка буде знаходитись не вище параболи $y = x^2$?

Розв'язання:

Подія A – точка знаходиться в криволінійному трикутнику, обмеженому параболою $y = x^2$, віссю Ox і прямою $x = 1$, площа

якого $m(A) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$, всі можливі випадки – трикутник



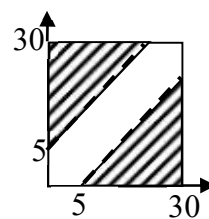
площею $m(G) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$. Тоді $P(A) = \frac{m(A)}{m(G)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$.

Відповідь: 0,667.

10. У сигналізатор надходять сигнали від двох пристроїв, причому надходження кожного із сигналів рівноможливо у будь-який момент часу. Сигналізатор спрацьовує, якщо інтервал між моментами надходження сигналів більше п'яти секунд. Яка ймовірність того, що протягом 30 секунд сигналізатор зафіксує обидва сигнали, якщо кожний з пристроїв надасть тільки один сигнал?

Розв'язання:

Позначимо моменти надходження сигналів від першого та другого пристроїв відповідно x і y , за умовою $0 \leq x \leq 30$, $0 \leq y \leq 30$. Всі можливі моменти надходження сигналів – квадрат з діагоналлю, що з'єднує точки $(0;0)$ і $(30;30)$, тоді $m(G) = 30^2$. Сигналізатор зафіксує обидва сигнали (подія A), якщо $y > x + 5$



або $y < x - 5$, тоді $m(A) = (30 - 5)^2$. Отже, $P(A) = \frac{m(A)}{m(G)} = \frac{25^2}{30^2}$.

Відповідь: 0,694.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Серед партії з $(\alpha+10)$ виробів відділ технічного контролю виявив п'ять нестандартних виробів. Чому дорівнює відносна частота появи нестандартного виробу?

2. При дослідженні схожості партії насіння нового сорту було виявлено, що з 20α насінин не зійшло 10. Чому рівна відносна частота схожості насіння?

3. При випробуванні партії виробів відносна частота появи придатного виробу рівна 0,8. Скільки придатних виробів серед перевірених 10α виробів?

4. Для деякої партії насіння відносна частота схожості дорівнює 0,9. Знайдіть число насінин, що не зійшли, якщо було посіяно 10α насінин.

5. Після бурі на ділянці між 60-им та 200-им кілометрами телефонної лінії стався розрив дроту. Яка ймовірність того, що розрив буде виявлено між 80-им та $(80+\alpha)$ -им кілометрами лінії?

6. Стержень розламано на дві частини у випадковому перерізі. Яка ймовірність того, що менший з уламків має довжину не більше $\frac{1}{\alpha+2}$ довжини стержня.

7. У кубі стороною $(\alpha+2)$ знаходиться куля радіуса $\frac{\alpha+1}{2}$. У кубі вибрана навмання точка. Яка ймовірність знаходження точки всередині кулі?

8. Куля $x^2 + y^2 + z^2 = (\alpha+1)^2$ розміщена всередині еліпсоїда $\frac{x^2}{(\alpha+1)^2} + \frac{y^2}{(\alpha+1)^2} + \frac{z^2}{(\alpha+1)^4} = 1$. Знайдіть ймовірність того, що точка, яка навмання ставиться всередині еліпсоїда, опиниться всередині кулі.

9. У прямокутнику з вершинами $(0;0)$, $(0;\frac{\alpha^2}{2})$, $(\alpha;0)$, $(\alpha;\frac{\alpha^2}{2})$ навмання ставиться точка. Яка ймовірність того, що точка буде не вище параболи $y = \frac{x^2}{2}$?

10. У сигналізатор надходять сигнали від двох пристроїв, причому надходження кожного із сигналів рівноможливо у будь-який момент часу. Сигналізатор спрацьовує, якщо інтервал між моментами надходження сигналів більше α . Знайдіть ймовірність того, що за час $(\alpha+20)$ сигналізатор зафіксує обидва сигнали, якщо кожний з пристроїв надасть тільки один сигнал.

ДОДАВАННЯ НЕСУМІСНИХ І МНОЖЕННЯ НЕЗАЛЕЖНИХ ПОДІЙ

1. Основні теоретичні відомості

Події є *несумісними*, якщо поява однієї з них виключає появу інших подій в одному і тому ж випробуванні.

Теорема додавання ймовірностей несумісних подій. Ймовірність появи однієї (будь-якої) з двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

Дана теорема узагальнюється на випадок довільного числа несумісних подій: $P(A+B+C+\dots) = P(A)+P(B)+P(C)+\dots$

Декілька подій утворюють повну групу, якщо в результаті випробування неодмінно відбувається тільки одна з них.

Для подій повної групи має місце теорема: сума ймовірностей подій $A_1, A_2, \dots, A_n$, які утворюють повну групу, рівна одиниці $P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_n)=1$.

Протилежними є дві єдиноможливі події, які утворюють повну групу.

Для протилежних подій має місце теорема: сума ймовірностей протилежних подій рівна одиниці $P(A)+P(\bar{A})=1$.

Подію B називають *незалежною* від події A , якщо поява події A не змінює ймовірності події B .

Теорема множення ймовірностей незалежних подій. Ймовірність сумісної появи двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій, тобто $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

Дана теорема узагальнюється на випадок довільного числа незалежних подій: $P(A \cdot B \cdot C \cdot \dots) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \cdot \dots$

Теорема ймовірності появи хоча б однієї з незалежних подій. Ймовірність появи хоча б однієї з подій $A_1, A_2, \dots, A_n$, незалежних в сукупності, дорівнює різниці між одиницею і добутком ймовірностей протилежних подій $P(A) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_n)$.

2. Приклади виконання завдань

1. В урні 115 куль: 10 жовтих, 5 синіх та 100 білих. З урни виймають одну кулю. Знайдіть ймовірність того, що ця куля буде жовтою або синьою.

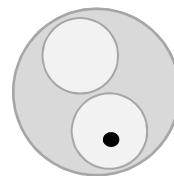
Розв'язання:

Подія A – витягнута куля жовта, подія B – витягнута куля синя. Події несумісні, тому ймовірність того, що витягнута куля жовта або синя, рівна

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{10}{115} + \frac{5}{115} = \frac{15}{115} \approx 0,130.$$

Відповідь: 0,130.

2. Дві однакові монети радіуса 50 мм розміщені на крузі радіуса 110 мм. У круг навмання ставиться точка. Знайдіть ймовірність того, що ця точка попаде на одну із монет, якщо монети не перекриваються.



Розв'язання:

Подія A – точка попаде на першу монету, подія B – точка попаде на другу монету. Події несумісні, тому ймовірність того, що ця точка попаде на одну із монет, рівна $P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{S_{MI}}{S} + \frac{S_{MII}}{S} = \frac{2S_M}{S} = \frac{2\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{2 \cdot 50^2}{110^2} = \frac{50}{121}$.

Відповідь: 0,413.

3. В ящику 110 деталей, серед яких дві нестандартні. Знайдіть ймовірність того, що серед навмання вибраних 6 деталей буде не більше однієї нестандартної.

Розв'язання:

1 спосіб. Подія C – серед навмання вибраних деталей не більше однієї нестандартної – складається з двох подій: подія A – серед навмання вибраних деталей одна деталь нестандартна або подія B – серед навмання вибраних деталей жодної нестандартної. Отже $C = A + B$. Тоді $P(C) = P(A) + P(B)$, де $P(A) = \frac{m_A}{n}$, $P(B) = \frac{m_B}{n}$. Так як $n = C_{110}^6 = \frac{110!}{6! \cdot 104!}$, $m_A = C_{108}^5 \cdot C_2^1 = \frac{108!}{5! \cdot 103!} \cdot \frac{2!}{1! \cdot 1!}$, $m_B = C_{108}^6 \cdot C_2^0 = \frac{108!}{6! \cdot 102!} \cdot \frac{2!}{0! \cdot 2!}$, то $P(A) = \frac{104 \cdot 105 \cdot 106 \cdot 107 \cdot 108 \cdot 2 \cdot 6!}{5! \cdot 105 \cdot 106 \cdot 107 \cdot 108 \cdot 109 \cdot 110} \approx 0,1041$, $P(B) = \frac{103 \cdot 104 \cdot 105 \cdot 106 \cdot 107 \cdot 108 \cdot 6!}{6! \cdot 105 \cdot 106 \cdot 107 \cdot 108 \cdot 109 \cdot 110} \approx 0,8934$ і $P(C) \approx 0,1041 + 0,8934 = 0,9975$.

2 спосіб. Нехай подія C – серед навмання вибраних деталей не більше однієї нестандартної. Тоді протилежна подія $\bar{C}$ – серед навмання вибраних деталей дві нестандартні. Отже, $P(C) = 1 - P(\bar{C})$, де $P(\bar{C}) = \frac{m_{\bar{C}}}{n}$. Оскільки $n = C_{110}^6 = \frac{110!}{6! \cdot 104!}$, $m_{\bar{C}} = C_{108}^4 \cdot C_2^2 = \frac{108!}{4! \cdot 104!} \cdot \frac{2!}{2! \cdot 0!}$, то ймовірність протилежної події $P(\bar{C}) = \frac{105 \cdot 106 \cdot 107 \cdot 108 \cdot 6!}{4! \cdot 105 \cdot 106 \cdot 107 \cdot 108 \cdot 109 \cdot 110} \approx 0,0025$, тоді $P(C) = 0,9975$.

Відповідь: 0,9975.

4. На курсі 110 студентів, серед яких 8 відмінників. За списком навмання обирають двох студентів. Яка ймовірність того, що хоча б один з них відмінник?

Розв'язання:

Нехай подія C – хоча б один студент із обраних є відмінником, тоді протилежна подія $\bar{C}$ – жоден з них не є відмінником. Отже, $P(C) = 1 - P(\bar{C})$, де $P(\bar{C}) = \frac{m_{\bar{C}}}{n}$. Так як $n = C_{110}^2 = \frac{110!}{2! \cdot 108!}$, $m_{\bar{C}} = C_{102}^2 \cdot C_8^0 = \frac{102!}{2! \cdot 100!} \cdot \frac{8!}{0! \cdot 8!}$, то отримаємо $P(\bar{C}) = \frac{101 \cdot 102}{2!} \cdot \frac{2!}{109 \cdot 110} = \frac{101 \cdot 102}{109 \cdot 110} \approx 0,859$ і $P(C) = 1 - 0,859 = 0,141$.

Відповідь: 0,141.

5. Студент вивчив з 60 питань тільки 45. Кожний екзаменаційний білет включає три питання. Знайдіть ймовірність того, що студент знає не менше двох питань свого екзаменаційного білету.

Розв'язання:

Подія C – студент знає не менше двох питань свого екзаменаційного білету, тобто студент знає або два питання (подія A), або три питання (подія B), тобто $C = A + B$. Події несумісні, тому $P(C) = P(A) + P(B)$, де $P(A) = \frac{m_A}{n}$, $P(B) = \frac{m_B}{n}$. Так як $n = C_{60}^3 = \frac{60!}{3! \cdot 57!}$, $m_A = C_{45}^2 \cdot C_{15}^1 = \frac{45!}{2! \cdot 43!} \cdot \frac{15!}{1! \cdot 14!}$, $m_B = C_{45}^3 \cdot C_{15}^0 = \frac{45!}{3! \cdot 42!} \cdot \frac{15!}{0! \cdot 15!}$, то $P(A) = \frac{44 \cdot 45 \cdot 15 \cdot 3!}{2! \cdot 58 \cdot 59 \cdot 60} \approx 0,434$, $P(B) = \frac{43 \cdot 44 \cdot 45 \cdot 3!}{3! \cdot 58 \cdot 59 \cdot 60} \approx 0,415$, тоді $P(C) = 0,849$.

Відповідь: 0,849.

6. В урні знаходиться 20 білих та 30 чорних куль. З урни виймають одну кулю, відзначають її колір і повертають назад в урну. Після цього з урни дістають ще одну кулю. Знайдіть ймовірність того, що обидві вийняті кулі білі.

Розв'язання:

Подія A – перша вийнята куля є білою, $P(A) = \frac{20}{50} = 0,4$; подія B – друга вийнята куля є білою. Так як перша вийнята куля повертається в урну, то подія B не залежить від результату першого випробування, тому $P(B) = \frac{20}{50} = 0,4$. Тому застосуємо теорему множення ймовірностей незалежних подій $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = 0,4 \cdot 0,4 = 0,16$.

Відповідь: 0,16.

7. У трьох ящиках знаходяться деталі. У першому 20 (з них три нестандартні), у другому 30 (з них шість нестандартних), у третьому 10 (з них одна нестандартна). З кожного ящика навмання беруть одну деталь. Знайдіть ймовірність того, що всі три взяті деталі виявляться стандартними.

Розв'язання:

Подія A – стандартна деталь витягнута з I ящика. Подія B – стандартна деталь витягнута з II ящика. Подія C – стандартна деталь витягнута з III ящика. З умови маємо $P(A) = \frac{17}{20} = 0,85$; $P(B) = \frac{24}{30} = 0,8$; $P(C) = \frac{9}{10} = 0,9$. Події незалежні, тому ймовірність того, що всі три взяті деталі виявляться стандартними, рівна $P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0,85 \cdot 0,8 \cdot 0,9 = 0,612$.

Відповідь: 0,612.

8. Студент шукає потрібну йому формулу в трьох довідниках. Ймовірності того, що формула є у першому, другому, третьому довіднику відповідно рівні 0,6; 0,7; 0,8. Знайдіть ймовірність того, що: 1) формула є тільки в одному довіднику; 2) формула є тільки у двох довідниках; 3) формула є у всіх трьох довідниках; 4) формула є хоча б в одному довіднику; 5) формули нема в жодному довіднику.

Розв'язання:

Введемо позначення подій: A_1 – формула знайдена в першому довіднику; A_2 – формула знайдена в другому довіднику; A_3 – формула знайдена в третьому довіднику. Тоді $P(A_1) = 0,6 = p_1$ – ймовірність знайти формулу в першому довіднику, $P(\overline{A_1}) = 0,4 = q_1$ – ймовірність не знайти формулу в першому довіднику; $P(A_2) = 0,7 = p_2$ – ймовірність знайти формулу в другому довіднику; $P(\overline{A_2}) = 0,3 = q_2$ – ймовірність не знайти формулу в другому довіднику; $P(A_3) = 0,8 = p_3$ – ймовірність знайти формулу в третьому довіднику; $P(\overline{A_3}) = 0,2 = q_3$ – ймовірність не знайти формулу в третьому довіднику.

1) Розглянемо подію D_1 – студент знайшов потрібну формулу або в першому, або в другому, або в третьому довіднику і не знайшов у двох інших довідниках, ймовірність такої події дорівнює $P(D_1) = p_1q_2q_3 + q_1p_2q_3 + q_1q_2p_3$ або $P(D_1) = 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,8 = 0,036 + 0,056 + 0,096 = 0,188$.

2) Розглянемо подію D_2 – студент знайшов потрібну формулу тільки у двох довідниках і не знайшов в одному (першому, другому або третьому), ймовірність такої події дорівнює $P(D_2) = p_1p_2q_3 + p_1q_2p_3 + q_1p_2p_3$ або $P(D_2) = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,2 + 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,8 + 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,084 + 0,144 + 0,224 = 0,452$.

3) Розглянемо подію D_3 – студент знайшов потрібну формулу у всіх трьох довідниках, ймовірність цієї події рівна $P(D_3) = p_1p_2p_3 = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,336$.

4) Розглянемо подію D_4 – студент не знайшов формулу в жодному довіднику, ймовірність цієї події $P(D_4) = q_1q_2q_3 = 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,2 = 0,024$.

5) Розглянемо подію D_5 – студент знайшов потрібну формулу хоча б в одному довіднику. Так як D_4 і D_5 – протилежні події, то $P(D_4) + P(D_5) = 1$, звідки $P(D_5) = 1 - P(D_4) = 1 - 0,024 = 0,976$. Можна також розглянути подію D_5 як суму несумісних подій D_1, D_2, D_3 , тоді ймовірність події D_5 рівна $P(D_5) = P(D_1) + P(D_2) + P(D_3) = 0,188 + 0,452 + 0,336 = 0,976$.

Відповідь: 1) 0,188; 2) 0,452; 3) 0,336; 4) 0,024; 5) 0,976.

9. Прилад складається з трьох елементів, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність не вийти з ладу під час роботи приладу для першого елемента рівна 0,95, для другого – 0,85 і для третього 0,75. Яка ймовірність того, що під час роботи приладу не вийде з ладу хоча б один елемент?

Розв'язання:

Так як $p_1 = 0,95$; $p_2 = 0,85$; $p_3 = 0,75$ – ймовірності того, що відповідно перший, другий, третій елементи не вийдуть з ладу, то ймовірності того, що ці елементи вийдуть із ладу, рівні відповідно: $q_1 = 1 - p_1 = 0,05$; $q_2 = 1 - p_2 = 0,15$; $q_3 = 1 - p_3 = 0,25$. Тоді маємо для події C , яка полягає в тому, що з ладу не вийде хоча б один елемент, ймовірність $P(C) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3$, тобто $P(C) = 1 - 0,05 \cdot 0,15 \cdot 0,25 \approx 0,998$.

Відповідь: 0,998.

10. Ймовірність хоча б одного влучення в мішень при чотирьох пострілах рівна 0,9984. Знайдіть ймовірність влучення в мішень при одному пострілі.

Розв'язання:

Нехай подія A – влучення в мішень хоча б один раз при чотирьох пострілах, подія $\bar{A}$ – жодного разу в мішень не влучили при чотирьох пострілах, тоді маємо $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,9984 = 0,0016$. З іншого боку $P(\bar{A}) = q \cdot q \cdot q \cdot q = q^4$, де q – ймовірність не влучити в мішень при одному пострілі. Тоді $q^4 = 0,0016$, звідки $q = 0,2$, ймовірність влучити в мішень при одному пострілі $p = 1 - 0,2 = 0,8$.

Відповідь: 0,8.

3. Завдання для самостійного виконання

1. В урні знаходиться $(\alpha+15)$ куль: 10 жовтих, 5 синіх та α білих. З урни дістають кулю. Знайдіть ймовірність того, що ця куля буде жовтою або синьою.

2. Дві однакові монети радіуса α мм розміщені на крузі радіуса $2(\alpha+10)$ мм. У круг навмання ставиться точка. Знайдіть ймовірність того, що ця точка попаде на одну із монет, якщо монети не перекриваються.

3. У ящику знаходиться $(\alpha+10)$ деталей, серед яких дві нестандартні. Знайдіть ймовірність того, що з навмання вибраних 6 деталей буде не більше однієї нестандартної.

4. На курсі $(\alpha+100)$ студентів, серед яких 8 відмінників. За списком навмання обирають двох студентів. Знайдіть ймовірність того, що хоча б один з них є відмінником.

5. Студент вивчив з $(\alpha+60)$ питань тільки 45. Кожний екзаменаційний білет включає три питання. Знайдіть ймовірність того, що студент знає не менше двох питань свого екзаменаційного білету.

6. В урні знаходиться $(\alpha+10)$ білих та 10 чорних куль. З урни виймають одну кулю, відзначають її колір і повертають назад в урну. Після цього з урни дістають ще одну кулю. Знайдіть ймовірність того, що обидві вийняті кулі будуть білими.

7. У трьох ящиках знаходяться деталі. У першому $(\alpha+10)$ штук (з них п'ять нестандартних), у другому $(\alpha+20)$ штук (з них шість нестандартних), у третьому $(\alpha+5)$ штук (з них три нестандартні). З кожного ящика навмання беруть одну деталь. Знайдіть ймовірність того, що всі три взяті деталі є стандартними.

8. Студент шукає потрібну йому формулу в трьох довідниках. Ймовірності того, що формула є у першому, другому, третьому довіднику відповідно рівні p_1 ; p_2 ; p_3 . Знайдіть ймовірність того, що: 1) формула є тільки в одному довіднику; 2) формула є тільки у двох довідниках; 3) формула є у всіх трьох довідниках; 4) формула є хоча б в одному довіднику; 5) формули нема в жодному довіднику.

α	p_1	p_2	p_3	α	p_1	p_2	p_3
1	0,5	0,7	0,8	6	0,5	0,5	0,8
2	0,5	0,7	0,9	7	0,5	0,5	0,9
3	0,5	0,8	0,9	8	0,5	0,7	0,7
4	0,7	0,8	0,9	9	0,5	0,8	0,8
5	0,5	0,5	0,7	10	0,5	0,9	0,9

9. Прилад складається з трьох елементів, що працюють незалежно один від одного. Ймовірності того, що перший, другий, третій елементи не вийдуть з ладу під час роботи приладу, відповідно рівні $1 - 0,05 \cdot \alpha$, $1 - 0,02 \cdot \alpha$, $1 - 0,01 \cdot \alpha$. Яка ймовірність того, що під час роботи приладу не вийде з ладу хоча б один елемент?

10. Ймовірність хоча б одного влучення в мішень при чотирьох пострілах рівна $0,01 \cdot \alpha$. Знайдіть ймовірність влучення в мішень при одному пострілі.

ДОДАВАННЯ СУМІСНИХ І МНОЖЕННЯ ЗАЛЕЖНИХ ПОДІЙ

1. Основні теоретичні відомості

Дві події називають *сумісними*, якщо поява однієї з них не виключає появу іншої події в одному і тому ж випробуванні.

Теорема додавання ймовірностей сумісних подій. Ймовірність появи хоча б однієї події з двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх спільної появи $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$.

Подію B називають *залежною* від події A , якщо поява події A змінює ймовірність події B .

Умовною ймовірністю $P_A(B)$ називають ймовірність події B , яку обчислюють за припущенням, що подія A вже відбулася.

Теорема множення ймовірностей залежних подій. Ймовірність сумісної появи двох залежних подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої за умови, що перша подія вже відбулася, тобто $P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$.

Дана теорема узагальнюється на випадок довільного числа залежних подій: ймовірність сумісної появи декількох подій рівна добутку ймовірності однієї з них на умовні ймовірності усіх інших, причому ймовірність кожної наступної події обчислюється за припущенням, що всі попередні події вже відбулися, тобто $P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot \dots \cdot P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n)$.

2. Приклади виконання завдань

1. В одному ящику 105 білих та 110 чорних куль, а в другому ящику 110 білих та 105 чорних куль. Знайдіть ймовірність того, що при вийманні з кожного ящика по кулі хоча б одна з них буде білою.

Розв'язання:

Подія A – білу кулю дістали з першого ящика, подія B – білу кулю дістали з другого ящика. Події A , B сумісні та незалежні, тоді маємо

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B). \text{ Так як } P(A) = \frac{105}{215},$$

$$P(B) = \frac{110}{215}, \text{ то } P(A + B) = \frac{105}{215} + \frac{110}{215} - \frac{105}{215} \cdot \frac{110}{215} \approx 1 - 0,25 = 0,75.$$

Відповідь: 0,75.

2. Два стрільці роблять по одному пострілу в мішень. Ймовірність влучення в мішень для першого стрільця рівна 0,7, а для другого – 0,8. Яка ймовірність того, що принаймні один із стрільців влучив у мішень?

Розв'язання:

І спосіб. Подія A – в мішень влучив перший стрілець, подія B – в мішень влучив другий стрілець, подія $A + B$ – в мішень влучив хоча б один із стрільців. Події A , B сумісні, тоді за теоремою додавання ймовірностей сумісних подій, маємо $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$. Події A , B незалежні, тому отримаємо $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$. За умовою $P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,8$, тоді $P(A + B) = 0,7 + 0,8 - 0,7 \cdot 0,8 = 0,94$.

II спосіб. Протилежна подія $\bar{A} \cdot \bar{B}$ – в мішень не влучили обидва стрільці, отже $P(A+B) = 1 - P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$, де $P(\bar{A}) = 0,3$ і $P(\bar{B}) = 0,2$, тоді $P(A+B) = 0,94$.

III спосіб. Подія $A+B$ має три варіанти: або 1) обидва стрільці влучили; або 2) перший влучив, другий ні; або 3) другий влучив, перший ні. Тоді $P(A+B) = P(A) \cdot P(B) + P(A) \cdot P(\bar{B}) + P(\bar{A}) \cdot P(B)$. Підставивши дані, отримаємо $P(A+B) = 0,7 \cdot 0,8 + 0,7 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,8 = 0,94$.

Відповідь: 0,94.

3. Серед 50 виробів чотири браковані, а 80% небракованих виробів є першосортними. Яка ймовірність, що взятий навмання виріб є першосортним?

Розв'язання:

Подія A – взято небракований виріб, ймовірність $P(A) = \frac{46}{50} = 0,92$; подія B – небракований виріб є першосортним, ймовірність $P_A(B) = 0,8$. Ймовірність добутку цих подій можна знайти як $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = 0,92 \cdot 0,8 = 0,736$.

Відповідь: 0,736.

4. 95% виготовлених виробів є стандартними, а 80% стандартних виробів є першосортними. Знайдіть ймовірність того, що взятий навмання виріб є виробом першого сорту.

Розв'язання:

Подія A – взято стандартний виріб, ймовірність $P(A) = 0,95$; подія B – стандартний виріб є першосортним, ймовірність $P_A(B) = 0,8$. Ймовірність добутку цих подій можна знайти як $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = 0,95 \cdot 0,8 = 0,76$.

Відповідь: 0,76.

5. В урні знаходиться 20 білих та 30 чорних куль. З урни виймають відразу дві кулі. Знайдіть ймовірність того, що обидві кулі будуть білими.

Розв'язання:

Подія A – перша з двох вийнятих куль є білою, $P(A) = \frac{20}{50} = 0,4$; подія B – друга з двох вийнятих куль є білою, $P_A(B) = \frac{19}{49} = 0,387$. Тоді ймовірність того, що обидві кулі будуть білими, рівна $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = 0,4 \cdot 0,387 = 0,1548$.

Відповідь: 0,1548.

6. В урні знаходиться 20 білих та 30 чорних куль. З урни виймають одразу дві кулі. Знайдіть ймовірність того, що ці кулі будуть різного кольору.

Розв'язання:

Нехай подія A – вийнята куля є білою, подія B – вийнята куля є чорною. Можливі два несумісні варіанти послідовності подій: перша куля біла, друга куля чорна; перша куля чорна, друга куля біла. Тоді ймовірність, що обидві вийняті кулі будуть різного кольору, рівна $P(A \cdot B + B \cdot A) = P(A)P_B(A) + P(B)P_A(A)$. Так як $P(A) = \frac{20}{50}$, $P_A(B) = \frac{30}{49}$, $P(B) = \frac{30}{50}$, $P_B(A) = \frac{20}{49}$, то $P(A \cdot B + B \cdot A) \approx 0,4898$.

Відповідь: 0,4898.

7. В урні знаходиться 12 білих та 8 чорних куль. З урни виймають одразу три кулі. Знайдіть ймовірність того, що всі вони будуть чорними.

Розв'язання:

Подія A – перша вийнята куля є чорною, ймовірність $P(A) = \frac{8}{20}$; подія B – друга вийнята куля є чорною, ймовірність $P_A(B) = \frac{7}{19}$; подія C – третя вийнята куля є чорною, ймовірність $P_{AB}(C) = \frac{6}{18}$. Ймовірність того, що всі три вийняті кулі будуть чорними, рівна $P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C) = 0,4 \cdot \frac{7}{19} \cdot \frac{1}{3} \approx 0,049$.

Відповідь: 0,049.

8. В урні знаходиться 15 білих, 25 синіх та 10 чорних куль. З урни виймають одразу три кулі. Знайдіть ймовірність того, що всі вони будуть різного кольору.

Розв'язання:

Розглянемо варіант, коли перша вийнята куля є білою (подія A), друга – синьою (подія B), третя – чорною (подія C). Так як ймовірності цих подій рівні відповідно $P(A) = \frac{15}{50}$, $P_A(B) = \frac{25}{49}$, $P_{AB}(C) = \frac{10}{48}$, то за теоремою множення ймовірностей залежних подій ймовірність розглядуваної послідовності подій рівна $P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C) = \frac{15}{50} \cdot \frac{25}{49} \cdot \frac{10}{48} \approx 0,0319$. Ймовірності інших послідовностей подій будуть такими ж самими. Кількість варіантів послідовностей подій дорівнює кількості перестановок $P_3 = 3! = 6$. Отже, маємо $P(A \cdot B \cdot C + A \cdot C \cdot B + B \cdot A \cdot C + B \cdot C \cdot A + C \cdot A \cdot B + C \cdot B \cdot A) = 6 \cdot 0,0319 = 0,191$.

Відповідь: 0,191.

9. В ящику 110 виробів, з яких 6 пофарбовані. Робітник навмання взяв два вироби. Знайдіть ймовірність того, що хоча б один із виробів пофарбований.

Розв'язання:

Подія C – хоча б один з двох виробів пофарбований. Подія $\bar{C}$ – жоден з взятих виробів непофарбований, тобто $\bar{C} = \bar{A} \cdot \bar{B}$, де подія $\bar{A}$ – перший взятий виріб непофарбований, подія $\bar{B}$ – другий взятий виріб непофарбований. Тоді $P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - P(\bar{A} \cdot \bar{B}) = 1 - P(\bar{A}) \cdot P_A(\bar{B})$. Так як $P(\bar{A}) = \frac{104}{110}$, $P_A(\bar{B}) = \frac{103}{109}$, то $P(C) = 1 - \frac{104}{110} \cdot \frac{103}{109} \approx 0,107$.

Відповідь: 0,107.

10. Студент прийшов на залік, знаючи з 130 питань тільки 24. Яка ймовірність скласти залік, якщо у випадку відмови студента відповідати на перше питання викладач задає ще одне питання?

Розв'язання:

Подія A – студент відповів на перше питання, подія $\bar{A}$ – студент не відповів на перше питання, подія B – студент відповів на друге питання, подія $\bar{B}$ – студент не відповів на друге питання.

I спосіб. Подія C – студент склав залік. Цьому сприяють два варіанти: або відповів на перше питання, або не відповів на перше питання і відповів на друге питання, тобто маємо $P(C) = P(A) + P(\bar{A}) \cdot P_A(B) = \frac{24}{130} + \frac{106}{130} \cdot \frac{24}{129} \approx 0,336$.

II спосіб. Протилежна подія $\bar{C}$ – студент не склав залік, тобто не відповів на два питання. Тоді $P(C) = 1 - P(\bar{C}) = P(\bar{A}) \cdot P_A(\bar{B})$, де $P(\bar{A}) = \frac{106}{130}$, $P_A(\bar{B}) = \frac{105}{129}$.

Отже, маємо $P(C) = 1 - \frac{106}{130} \cdot \frac{105}{129} \approx 0,336$.

Відповідь: 0,336.

3. Завдання для самостійного виконання

1. В одному ящику $(\alpha + 5)$ білих та $(\alpha + 10)$ чорних куль, а в другому ящику $(\alpha + 10)$ білих та $(\alpha + 5)$ чорних куль. Знайдіть ймовірність того, що при вийманні з кожного ящика по кулі хоча б одна з них буде білою.

2. Два стрільці роблять по одному пострілу в мішень. Ймовірності влучення в мішень для стрільців відповідно рівні 0,7 та $0,1 \cdot \alpha$. Знайдіть ймовірність того, що принаймні один із стрільців влучив у мішень.

3. Серед $(\alpha + 10)$ виробів шість бракованих, а 80% небракованих виробів є першосортними. Яка ймовірність, що взятий навмання виріб є першосортним?

4. $\frac{\alpha}{\alpha + 1}$ виготовлених виробів є стандартними, а $\frac{\alpha + 1}{\alpha + 2}$ стандартних виробів є першосортними. Знайдіть ймовірність того, що взятий навмання виріб є виробом першого сорту.

5. В урні знаходиться $(\alpha + 10)$ білих та 10 чорних куль. З урни виймають відразу дві кулі. Яка ймовірність того, що обидві кулі білі?

6. В урні знаходиться $(\alpha + 10)$ білих та 10 чорних куль. З урни виймають одразу дві кулі. Яка ймовірність того, що ці кулі різнокольорові?

7. В урні знаходиться $(1 + 2\alpha)$ білих та $(2 + \alpha)$ чорних куль. З урни виймають одразу три кулі. Знайдіть ймовірність того, що всі вони будуть чорного кольору.

8. В урні знаходиться α білих, $(1 + \alpha)$ синіх та $(2 + \alpha)$ чорних куль. З урни виймають одразу три кулі. Яка ймовірність, що всі вони різного кольору?

9. В ящику $(\alpha + 10)$ виробів, з яких 6 пофарбовані. Робітник навмання взяв два вироби. Знайдіть ймовірність того, що хоча б один з цих виробів пофарбований.

10. Студент прийшов на залік, знаючи з $(\alpha + 30)$ питань тільки 24. Яка ймовірність скласти залік, якщо у випадку відмови студента відповідати на перше питання викладач задає ще одне питання?

ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ. ФОРМУЛА БАЙЄСА

1. Основні поняття та теореми

Ймовірність події A , яка може відбутися лише за однієї з умов, яким відповідають попарно несумісні події $H_1, H_2, \dots, H_n$, що утворюють повну групу і називаються гіпотезами, дорівнює сумі добутків ймовірностей цих гіпотез на відповідні умовні ймовірності події A , тобто $P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A)$.

Це формула повної ймовірності, де $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$ – ймовірності появи гіпотез $H_1, H_2, \dots, H_n$ відповідно; $P_{H_1}(A), P_{H_2}(A), \dots, P_{H_n}(A)$ – умовні ймовірності того, що подія A відбувається за умови, що напередодні відбулися події $H_1, H_2, \dots, H_n$ відповідно.

Формула Байєса або формула ймовірностей гіпотез за відомим фактом, що подія A відбулася, обчислює $P_A(H_i)$ – ймовірність того, що ця подія була викликана саме причиною-гіпотезою H_i . Формула Байєса має вигляд

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{P(A)} = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A)}.$$

2. Приклади виконання завдань

1. Є три однакові урни. В першій урні знаходиться 8 білих та 3 чорні кулі, в другій – 7 білих та 6 чорних, у третій – 3 білі та 10 чорних. З навімання вибраної урни дістають одну кулю. Яка ймовірність того, що ця куля біла?

Розв'язання:

Нехай подія A – дістали білу кулю, гіпотези H_1, H_2, H_3 – події вибору відповідно першої, другої або третьої урни, внаслідок яких виникає подія A . Оскільки урни однакові, то ймовірності гіпотез рівні $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$.

Умовні ймовірності дістати білу кулю з першої, другої, третьої урн становлять $P_{H_1}(A) = \frac{8}{11}$, $P_{H_2}(A) = \frac{7}{13}$, $P_{H_3}(A) = \frac{3}{13}$. Тоді $P(A) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{8}{11} + \frac{7}{13} + \frac{3}{13} \right) \approx 0,499$.

Відповідь: 0,499.

2. В трьох однакових ящиках знаходяться миші. В першому – дві білі та одна сіра, в другому – три білі та одна сіра, в третьому – дві білі та дві сірі. Яка ймовірність, що з навімання вибраного ящика дістануть білу мишу?

Розв'язання:

Нехай подія A – дістали білу мишу, гіпотези H_1, H_2, H_3 – події вибору відповідно першого, другого або третього ящика, внаслідок яких виникає подія A . Так як ящики однакові, то ймовірності гіпотез рівні $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$.

Умовні ймовірності дістати білу мишу з першого, другого, третього ящиків рівні $P_{H_1}(A) = \frac{2}{3}$, $P_{H_2}(A) = \frac{3}{4}$, $P_{H_3}(A) = \frac{2}{4}$. Тоді $P(A) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{2}{4} \right) \approx 0,639$.

Відповідь: 0,639.

3. В лабораторії є 6 ноутбуків нової моделі і 4 ноутбуки старої моделі. Ймовірність не вийти з ладу під час роботи рівна 0,95 для ноутбука нової моделі та 0,8 для ноутбука старої моделі. Яка ймовірність того, що навмання вибраний для виконання лабораторної роботи ноутбук, не вийде з ладу під час роботи?

Розв'язання:

Нехай подія A – ноутбук не вийшов з ладу, гіпотези H_1 або H_2 – події виборі ноутбука нової або старої моделі відповідно. Ймовірності гіпотез рівні

$$P(H_1) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \text{ і } P(H_2) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}, \text{ умовні ймовірності становлять } P_{H_1}(A) = 0,95 \text{ і } P_{H_2}(A) = 0,8.$$

$$\text{Тоді } P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) = \frac{3}{5} \cdot 0,95 + \frac{2}{5} \cdot 0,8 = 0,89.$$

Відповідь: 0,89.

4. Робітник отримав три коробки деталей, виготовлених заводом №1 і дві коробки деталей, виготовлених заводом №2. Ймовірність того, що деталь заводу №1 стандартна, рівна 0,8, а ймовірність того, що деталь заводу №2 стандартна, рівна 0,9. Робітник навмання взяв деталь з навмання вибраної коробки. Знайдіть ймовірність того, що взято стандартну деталь.

Розв'язання:

Подія A – робітник дістав стандартну деталь. Ймовірності того, що деталь виготовлена заводами №1 або №2, становлять $P(H_1) = \frac{3}{5}$ і $P(H_2) = \frac{2}{5}$ відповідно.

Умовні ймовірності стандартності деталі рівні $P_{H_1}(A) = 0,8$ і $P_{H_2}(A) = 0,9$. Тоді $P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) = 0,6 \cdot 0,8 + 0,4 \cdot 0,9 = 0,84$.

Відповідь: 0,84.

5. У групі спортсменів 22 лижники, 8 велосипедистів та 6 бігунів. Ймовірність виконати фахову норму для лижника становить 0,9, для велосипедиста – 0,8, для бігуна – 0,75. Знайдіть ймовірність того, що спортсмен, якого обрали навмання, виконає норму.

Розв'язання:

Нехай подія A – спортсмен, обраний навмання, виконав норму. Цей спортсмен є лижником, велосипедистом чи бігуном з ймовірностями

$$P(H_1) = \frac{22}{36} = \frac{11}{18}, \quad P(H_2) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}, \quad P(H_3) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Умовні ймовірності виконання норми відповідно рівні $P_{H_1}(A) = 0,9$, $P_{H_2}(A) = 0,8$, $P_{H_3}(A) = 0,75$.

$$\text{Тоді } P(A) = \frac{11}{18} \cdot 0,9 + \frac{2}{9} \cdot 0,8 + \frac{1}{6} \cdot 0,75 \approx 0,853.$$

Відповідь: 0,853.

6. Для проведення заліку викладач заготовив 21 завдання з похідних і 30 завдань з інтегралів. Для складання заліку студенту треба розв'язати перше завдання, що витягнув. Яка ймовірність для студента скласти залік, якщо він може виконати тільки 15 завдань з похідних та 25 завдань з інтегралів?

Розв'язання:

Нехай подія A – студент склав залік, подія H_1 – студент витягнув завдання з похідних, подія H_2 – студент витягнув завдання з інтегралів. З умови маємо ймовірності гіпотез $P(H_1) = \frac{21}{51}$ і $P(H_2) = \frac{30}{51}$, відповідні умовні ймовірності виконання завдань $P_{H_1}(A) = \frac{15}{21}$ і $P_{H_2}(A) = \frac{25}{30}$. Ймовірність того, студент складе залік, рівна $P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) = \frac{21}{51} \cdot \frac{15}{21} + \frac{30}{51} \cdot \frac{25}{30} = \frac{40}{51} \approx 0,784$.

Відповідь: 0,784.

7. У першій урні міститься 15 білих та 7 чорних куль, у другій – 12 білих та 10 чорних куль. З другої урни у першу перекладають, не дивлячись, одну кулю. Після цього з першої урни беруть одну кулю. Знайдіть ймовірність того, що ця куля буде білою.

Розв'язання:

Нехай подія A – з першої урни дістали білу кулю, гіпотези H_1 , H_2 – з другої урни дістали відповідно білу або чорну кулю і переклали в першу. Ймовірності гіпотез рівні $P(H_1) = \frac{12}{22}$, $P(H_2) = \frac{10}{22}$. За умови перекладання білої кулі ймовірність витягнути білу кулю з першої урни становить $P_{H_1}(A) = \frac{16}{23}$. За умови перекладання чорної кулі ймовірність витягнути білу кулю з першої урни становить $P_{H_2}(A) = \frac{15}{23}$. Тоді $P(A) = \frac{12}{22} \cdot \frac{16}{23} + \frac{10}{22} \cdot \frac{15}{23} = \frac{12 \cdot 16 + 10 \cdot 15}{22 \cdot 23} \approx 0,676$.

Відповідь: 0,676.

8. У першій коробці знаходиться 20 деталей, з яких 18 стандартних, у другій коробці – 10 деталей, з яких 9 стандартних. З другої коробки в першу перекладають, не дивлячись, одну деталь. Після цього з першої коробки навмання дістають одну деталь. Яка ймовірність того, що ця деталь стандартна?

Розв'язання:

Нехай подія A – з першої коробки дістали стандартну деталь, гіпотези H_1 , H_2 – з другої коробки дістали відповідно стандартну або нестандартну деталь і переклали в першу коробку. Ймовірності гіпотез рівні $P(H_1) = \frac{9}{10}$ і $P(H_2) = \frac{1}{10}$. За умови перекладання стандартної деталі ймовірність витягнути стандартну деталь з першої коробки дорівнює $P_{H_1}(A) = \frac{19}{21}$. За умови перекладання нестандартної деталі ймовірність витягнути стандартну деталь з першої коробки дорівнює $P_{H_2}(A) = \frac{18}{21}$. Тоді $P(A) = \frac{9}{10} \cdot \frac{19}{21} + \frac{1}{10} \cdot \frac{18}{21} = 0,9$.

Відповідь: 0,9.

9. Є дві партії однорідних виробів. Перша складається з 12 виробів, серед яких один дефектний; друга – з 17 виробів, серед яких три дефектні. Випадковим чином з першої партії беруть 5 виробів, з другої – 7 виробів і змішують між собою. З одержаної партії з 12 виробів беруть навмання один виріб. Знайдіть ймовірність того, що цей виріб буде дефектним.

Розв'язання:

Нехай подія A – взятий виріб із змішаної партії є дефектним, гіпотези H_1 , H_2 – цей виріб спочатку належав першій партії або другій партії. Ймовірності гіпотез рівні $P(H_1) = \frac{5}{12}$ і $P(H_2) = \frac{7}{12}$. Ймовірності взяти на початку дефектний виріб з першої та другої партій рівні $P_{H_1}(A) = \frac{1}{12}$ і $P_{H_2}(A) = \frac{3}{17}$. Тоді взятий виріб із змішаної партії є дефектним з ймовірністю $P(A) = \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{12} + \frac{7}{12} \cdot \frac{3}{17} \approx 0,138$.

Відповідь: 0,138.

10. В групі 12 відмінників, 25 студентів вчаться добре та 10 студентів вчаться слабо. Відмінники на іспиті можуть одержати тільки відмінні оцінки. Студенти, які вчаться добре, можуть з рівною ймовірністю отримати відмінні та добрі оцінки. Студенти, які вчаться слабо, можуть одержати з рівною ймовірністю добрі, задовільні та незадовільні оцінки. Для іспиту викликається навмання один студент. Яка ймовірність того, що він отримає відмінну або добру оцінку?

Розв'язання:

Нехай подія A – викликаний студент отримав відмінну або добру оцінку, гіпотеза H_1 – цей студент є відмінником, гіпотеза H_2 – цей студент вчиться добре, гіпотеза H_3 – цей студент вчиться слабо. Ймовірності гіпотез відповідно рівні $P(H_1) = \frac{12}{47}$, $P(H_2) = \frac{25}{47}$, $P(H_3) = \frac{10}{47}$. Умовні ймовірності становлять $P_{H_1}(A) = 1$, $P_{H_2}(A) = 1$, $P_{H_3}(A) = \frac{1}{3}$. Тоді $P(A) = \frac{12}{47} \cdot 1 + \frac{25}{47} \cdot 1 + \frac{10}{47} \cdot \frac{1}{3} \approx 0,858$.

Відповідь: 0,858.

11. Деякий виріб виготовляється на двох заводах. Обсяг продукції першого заводу в два рази перевищує обсяг продукції другого заводу. Частка браку на першому заводі складає 0,9%, на другому – 0,8%. Навмання взятий виріб виявився бракованим. Яка ймовірність того, що цей виріб виготовлений першим заводом?

Розв'язання:

Нехай подія A – вибраний бракований виріб, гіпотези H_1 , H_2 – деталь виготовлена першим або другим заводом. Ймовірності гіпотез становлять $P(H_1) = \frac{2}{3}$, $P(H_2) = \frac{1}{3}$, умовні ймовірності рівні $P_{H_1}(A) = 0,009$ і $P_{H_2}(A) = 0,008$, тоді $P_A(H_1) = \frac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)}{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A)} = \frac{2 \cdot 0,009}{2 \cdot 0,009 + 1 \cdot 0,008} \approx 0,692$.

Відповідь: 0,692.

12. Два автомати виготовляють однакові деталі. Продуктивність першого втричі більше продуктивності другого. Перший автомат виробляє 68% деталей відмінної якості, а другий – 91%. Навмання взята деталь виявилась невідмінної якості. Знайдіть ймовірність того, що деталь виготовлена першим автоматом.

Розв'язання:

Нехай подія A – взята деталь невідмінної якості, гіпотези H_1, H_2 – деталь виготовлена першим або другим автоматом. Ймовірності гіпотез рівні $P(H_1)=0,75$ і $P(H_2)=0,25$ відповідно. Умовні ймовірності виготовлення деталі невідмінної якості становлять $P_{H_1}(A)=0,32$ і $P_{H_2}(A)=0,09$. Тоді отримаємо

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)}{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A)} = \frac{0,75 \cdot 0,32}{0,75 \cdot 0,32 + 0,25 \cdot 0,09} \approx 0,914.$$

Відповідь: 0,914.

13. Є три урни. У першій міститься 5 білих куль та 3 чорні, у другій – 4 білі та 5 чорних куль, у третій – 3 білі кулі та 2 чорні. З навання вибраної урни дістають кулю. Ця куля виявляється білою. Яка ймовірність того, що ця куля витягнута з другої урни?

Розв'язання:

Нехай подія A – витягнута біла куля, гіпотези H_1, H_2, H_3 – кулю дістали з I, II або III урни. Ймовірності гіпотез рівні $P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}$. Умовні ймовірності дістати білу кулю рівні $P_{H_1}(A)=\frac{5}{8}$, $P_{H_2}(A)=\frac{4}{9}$, $P_{H_3}(A)=\frac{3}{5}$ відповідно. Тоді ймовірність того, що біла куля витягнута з другої урни, рівна

$$P_A(H_2) = \frac{P(H_2) \cdot P_{H_2}(A)}{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + P(H_3) \cdot P_{H_3}(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5}} \approx 0,266.$$

Відповідь: 0,266.

14. В першому ящику знаходиться 20 деталей, з яких 15 стандартних, в другому – 30 деталей, з яких 24 стандартних, в третьому – 10 деталей, з яких 6 стандартних. З навання вибраного ящика взято стандартну деталь. Знайдіть ймовірність того, що деталь взята з першого ящика.

Розв'язання:

Нехай подія A – взято стандартну деталь, гіпотези H_1, H_2, H_3 – деталь взята I, II або III ящика. Ймовірності гіпотез рівні $P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}$.

Умовні ймовірності взяти стандартну деталь становлять $P_{H_1}(A)=\frac{15}{20}=0,75$;

$$P_{H_2}(A)=\frac{24}{30}=0,8; P_{H_3}(A)=\frac{6}{10}=0,6. \text{ Тоді } P_A(H_1)=\frac{0,75}{0,75+0,8+0,6} \approx 0,349.$$

Відповідь: 0,349.

15. У трьох однакових ящиках знаходяться миші. В першому 13 білих та 21 сіра, в другому 16 білих та 19 сірих, в третьому 17 білих і 22 сірі. З навмання взятого ящика дістали білу мишу. Яка ймовірність того, що цю мишу дістали з другого ящика?

Розв'язання:

Нехай подія A – дістали білу мишу, гіпотези H_1, H_2, H_3 – вибрано I, II або III ящик. Ймовірності гіпотез рівні $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$. Умовні

ймовірність дістати білу мишу рівні $P_{H_1}(A) = \frac{13}{34}$, $P_{H_2}(A) = \frac{16}{35}$, $P_{H_3}(A) = \frac{17}{39}$ відповідно. Тоді, підставивши ймовірності у формулу Байєса

$$P_A(H_2) = \frac{P(H_2) \cdot P_{H_2}(A)}{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + P(H_3) \cdot P_{H_3}(A)},$$
 отримаємо ймовірність

того, що білу мишу дістали саме з другого ящика,
$$P_A(H_2) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{16}{35}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{13}{34} + \frac{1}{3} \cdot \frac{16}{35} + \frac{1}{3} \cdot \frac{17}{39}} \approx 0,358.$$

Відповідь: 0,358.

16. Для проведення заліку викладач заготовив 20 завдань з алгебри, 17 завдань з геометрії і 13 завдань з границь. Студент вміє виконувати з цих завдань тільки 18 завдань з алгебри, 10 завдань з геометрії і 9 завдань з границь. Для складання заліку студент повинен розв'язати перше навмання витягнуте завдання. Студент склав залік. Яка ймовірність того, що на заліку студенту попало завдання з границь?

Розв'язання:

Нехай подія A – студент склав залік. Ця подія відбудеться внаслідок появи однієї з гіпотез: H_1 (студент витягнув завдання з алгебри), H_2 (студент витягнув завдання з геометрії), H_3 (студент витягнув завдання з границь).

Ймовірності цих гіпотез відповідно рівні $P(H_1) = \frac{20}{50}$, $P(H_2) = \frac{17}{50}$, $P(H_3) = \frac{13}{50}$.

Умовні ймовірності виконання студентом завдання з алгебри, геометрії і границь відповідно рівні $P_{H_1}(A) = \frac{18}{20}$, $P_{H_2}(A) = \frac{10}{17}$, $P_{H_3}(A) = \frac{9}{13}$. Підставивши

ймовірності у формулу
$$P_A(H_3) = \frac{P(H_3) \cdot P_{H_3}(A)}{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + P(H_3) \cdot P_{H_3}(A)}$$

отримаємо ймовірність того, що студент склав залік, розв'язавши завдання з

границь
$$P_A(H_3) = \frac{\frac{13}{50} \cdot \frac{9}{13}}{\frac{20}{50} \cdot \frac{18}{20} + \frac{17}{50} \cdot \frac{10}{17} + \frac{13}{50} \cdot \frac{9}{13}} = \frac{9}{37} \approx 0,243.$$

Відповідь: 0,243.

17. Є сім урн. В перших п'яти урнах знаходиться по 5 білих та 6 чорних куль. В шостій та сьомій – по одній білій і дві чорні. Випадково вибирається урна і з неї виймається куля. Яка ймовірність того, що була вибрана шоста або сьома урна, якщо вийнята куля виявилась чорною?

Розв'язання:

Нехай подія A – витягнута чорна куля, гіпотези: H_1 (вибрали одну з п'яти перших урн), H_2 (вибрали одну з двох останніх урн). Ймовірності гіпотез становлять $P(H_1) = \frac{5}{7}$ і $P(H_2) = \frac{2}{7}$, ймовірність дістати чорну кулю з перших п'яти урн – $P_{H_1}(A) = \frac{6}{11}$, а з останніх двох урн – $P_{H_2}(A) = \frac{2}{3}$. Ймовірність того, що

чорну кулю дістали з шостої або сьомої урни, рівна $P_A(H_2) = \frac{\frac{2}{7} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{5}{7} \cdot \frac{6}{11} + \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{3}} \approx 0,328$.

Відповідь: 0,328.

18. У партії виробів змішані деталі трьох заводів: 7 деталей першого, 11 деталей другого та 13 деталей третього. Відомо, що ймовірності виготовлення виробу без дефекту для першого, другого та третього заводів відповідно рівні 0,6, 0,9 та 0,75. Із змішаної партії виробів взяли навмання одну деталь. Вона виявилась дефектною. Яка ймовірність того, що деталь виготовлена третім заводом?

Розв'язання:

Нехай подія A – деталь дефектна. Ця подія відбудеться внаслідок появи однієї з гіпотез: або H_1 (деталь виготовлена першим заводом), або H_2 (деталь виготовлена другим заводом), або H_3 (деталь виготовлена третім заводом). Ймовірності гіпотез рівні $P(H_1) = \frac{7}{31}$, $P(H_2) = \frac{11}{31}$, $P(H_3) = \frac{13}{31}$. Ймовірності того, що деталь дефектна, для першого заводу рівна $P_{H_1}(A) = 1 - 0,6 = 0,4$, для другого – $P_{H_2}(A) = 1 - 0,9 = 0,1$, для третього – $P_{H_3}(A) = 1 - 0,75 = 0,25$. Ймовірність того, що дефектна деталь виготовлена третім заводом, рівна

$$P_A(H_3) = \frac{\frac{13}{31} \cdot 0,25}{\frac{7}{31} \cdot 0,4 + \frac{11}{31} \cdot 0,1 + \frac{13}{31} \cdot 0,25} \approx 0,455.$$

Відповідь: 0,455.

19. Для участі в спортивних змаганнях виділено з першої групи курсу 10 студентів, з другої – 11 студентів, з третьої – 12 студентів. Ймовірності того, що студенти першої, другої і третьої групи потраплять до збірної команди університету, відповідно рівні 0,85, 0,65 та 0,95. Навмання обраний студент потрапив до збірної. До якої з груп найімовірніше всього належить цей студент?

Розв'язання:

Нехай подія A – обраний студент потрапив до збірної. Ця подія відбувається внаслідок появи однієї з гіпотез: H_1 (студент належить до першої групи), H_2 (студент належить до другої групи), H_3 (студент належить до третьої групи). Ймовірності гіпотез становлять $P(H_1) = \frac{10}{33}$, $P(H_2) = \frac{11}{33}$, $P(H_3) = \frac{12}{33}$. Умовні ймовірності потрапити до збірної рівні $P_{H_1}(A) = 0,85$, $P_{H_2}(A) = 0,65$, $P_{H_3}(A) = 0,95$. Так як найбільшою ймовірністю гіпотез є $P(H_3) = \frac{12}{33}$, одночасно з цим найбільшою умовною ймовірністю є $P_{H_3}(A) = 0,95$, то найімовірніше всього студент, що потрапив до збірної, належить до третьої групи.

Відповідь: до третьої.

20. Для участі в спортивних змаганнях з першої групи виділено 4 студенти, з другої групи – 6 студентів і з третьої групи 5 студентів. Ймовірності потрапити до збірної команди університету для студентів першої, другої та третьої груп відповідно рівні 0,9, 0,7 та 0,8. Навмання обраний студент потрапив до збірної команди. До якої з груп найімовірніше належить цей студент?

Розв'язання:

Нехай подія A – обраний студент потрапив до збірної команди університету. Ця подія відбувається внаслідок появи однієї з гіпотез: H_1 (студент належить до першої групи), H_2 (студент належить до другої групи), H_3 (студент належить до третьої групи). Ймовірності гіпотез рівні $P(H_1) = \frac{4}{15}$, $P(H_2) = \frac{6}{15}$, $P(H_3) = \frac{5}{15}$. Умовні ймовірності потрапити до збірної команди для студентів першої, другої, третьої груп відповідно становлять $P_{H_1}(A) = 0,9$, $P_{H_2}(A) = 0,7$ та $P_{H_3}(A) = 0,8$. Згідно формули Байєса студент, який потрапив до збірної, належить до першої, другої, третьої груп з ймовірностями $P_A(H_1) = \frac{4 \cdot 0,9}{4 \cdot 0,9 + 6 \cdot 0,7 + 5 \cdot 0,8} \approx 0,305$,

$$P_A(H_2) = \frac{6 \cdot 0,7}{4 \cdot 0,9 + 6 \cdot 0,7 + 5 \cdot 0,8} \approx 0,356 \quad \text{та} \quad P_A(H_3) = \frac{5 \cdot 0,8}{4 \cdot 0,9 + 6 \cdot 0,7 + 5 \cdot 0,8} \approx 0,339.$$

Порівнюючи обчислені ймовірності, робимо висновок: найімовірніше всього студент, що потрапив до збірної команди, належить до другої групи.

Відповідь: до другої.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Є три зовнішньо однакових урни. У першій урні знаходиться $(5 + \alpha)$ білих та $(3 + \alpha)$ чорних куль, у другій – $(2 + \alpha)$ білих та $(4 + \alpha)$ чорних, у третій – тільки білі кулі. З навання вибраної урни дістають одну кулю. Знайдіть ймовірність того, що ця куля біла.

2. В трьох однакових ящиках знаходяться миші. В першому – $(2 + \alpha)$ білих і $(1 + \alpha)$ сірих, в другому – $(3 + \alpha)$ білих і $(2 + \alpha)$ сірих, в третьому – $(2 + \alpha)$ білих і $(2 + \alpha)$ сірих. Яка ймовірність, що з навання взятого ящика дістануть білу мишу?

3. В лабораторії є $(1+\alpha)$ ноутбуків нової моделі і α ноутбуків старої моделі. Ймовірність не вийти з ладу під час роботи для ноутбука нової моделі рівна 0,98, ймовірність не вийти з ладу під час роботи для ноутбука старої моделі рівна 0,88. Знайдіть ймовірність того, що навання вибраний для виконання лабораторної роботи ноутбук не вийде з ладу під час роботи.

4. Робітник отримав $(3+\alpha)$ коробок деталей, виготовлених заводом №1 і $(2+\alpha)$ коробок деталей, виготовлених заводом №2. Ймовірність того, що деталь заводу №1 стандартна, рівна 0,8, а ймовірність того, що деталь заводу №2 стандартна, рівна 0,9. Робітник навання взяв деталь з коробки. Знайдіть ймовірність того, що деталь стандартна.

5. В групі спортсменів $(20+\alpha)$ лижників, $(6+\alpha)$ велосипедистів та $(4+\alpha)$ бігунів. Ймовірність виконати фахову норму для лижника становить 0,95, для велосипедиста – 0,85, для бігуна – 0,75. Знайдіть ймовірність того, що вибраний навання спортсмен виконає фахову норму.

6. Для проведення заліку викладач заготовив $(11+\alpha)$ завдань з похідних і $(20+\alpha)$ завдань з інтегралів. Для складання заліку студенту треба розв'язати перше завдання, що витягнув. Яка ймовірність, що студент складе залік, якщо він може виконати тільки $(5+\alpha)$ завдань з похідних та $(15+\alpha)$ завдань з інтегралів?

7. У першій урні міститься $(5+\alpha)$ білих та $(3+\alpha)$ чорних куль, у другій – $(2+\alpha)$ білих та $(4+\alpha)$ чорних. З першої урни у другу перекладають, не дивлячись, одну кулю. Після цього з другої урни беруть одну кулю. Знайдіть ймовірність того, що ця куля буде білою.

8. У першій коробці знаходиться $(13+\alpha)$ стандартних та $(3+\alpha)$ нестандартних деталей, у другій коробці – $(17+\alpha)$ стандартних та $(4+\alpha)$ нестандартних. З другої коробки в першу перекладають, не дивлячись, одну деталь. Після цього з першої коробки навання дістають одну деталь. Яка ймовірність того, що ця деталь буде стандартною?

9. Є дві партії однорідних виробів. Перша складається з $(\alpha+5)$ виробів серед яких 4 дефектні; друга – з $(\alpha+10)$ виробів, серед яких 8 дефектних. З першої партії беруть випадковим чином 5 виробів, з другої 8 виробів і змішують між собою. З одержаної партії з 13 виробів беруть один виріб. Знайдіть ймовірність того, що взятий виріб буде дефектним.

10. У групі 20 відмінників, $(\alpha+10)$ студентів вчаться добре та 10 студентів вчаться слабо. Відмінники на іспиті можуть одержати тільки відмінні оцінки. Студенти, які вчаться добре, можуть з рівною ймовірністю отримати відмінні та добрі оцінки. Студенти, які вчаться слабо, можуть одержати з рівною ймовірністю добрі, задовільні та незадовільні оцінки. Для іспиту викликається навання один студент. Яка ймовірність того, що він отримає відмінну або добру оцінку?

11. Деякий виріб виготовляється на двох заводах. Обсяг продукції першого заводу в $(1+\alpha)$ разів перевищує обсяг продукції другого заводу. Частка браку на першому заводі складає 0,01%, на другому – 0,2%. Навання взятий виріб є бракованим. Яка ймовірність того, що цей виріб виготовлений першим заводом?

12. Два автомати виготовляють однакові деталі. Продуктивність першого в $(1 + \alpha)$ разів більше продуктивності другого. Перший автомат виробляє 60% деталей відмінної якості, а другий – 84%. Навмання взята деталь виявилась відмінної якості. Знайдіть ймовірність того, що деталь виготовлена першим автоматом.

13. Є три зовнішньо однакові урни. У першій міститься $(3 + \alpha)$ білих куль та $(1 + \alpha)$ чорних, у другій – $(2 + \alpha)$ білих та $(3 + \alpha)$ чорних куль, у третій – тільки білі куль. З навімання вибраної урни дістають кулю. Ця куля виявляється білою. Яка ймовірність того, що ця куля витягнута з третьої урни?

14. Є три партії деталей по $(\alpha + 20)$ в кожній. Число стандартних деталей в першій, другій та третій партіях відповідно рівні $(\alpha + 20)$, $(\alpha + 15)$, $(\alpha + 10)$. З навімання вибраної партії взяли деталь, яка виявилась стандартною. Знайдіть ймовірність того, що деталь було взято з третьої партії.

15. В трьох однакових ящиках знаходяться миші. В першому – $(2 + \alpha)$ білих і $(10 + \alpha)$ сірих, в другому – $(5 + \alpha)$ білих і $(8 + \alpha)$ сірих, в третьому – $(6 + \alpha)$ білих і $(11 + \alpha)$ сірих. З навімання взятого ящика дістали білу мишу. Яка ймовірність того, що цю мишу дістали з другого ящика?

16. Для проведення заліку викладач заготовив $(10 + \alpha)$ завдань з алгебри, $(9 + \alpha)$ завдань з геометрії і $(11 + \alpha)$ завдань з границь. Студент вміє розв'язувати з цих завдань тільки $(6 + \alpha)$ завдань з алгебри, $(3 + \alpha)$ завдань з геометрії і $(7 + \alpha)$ завдань з границь. Для складання заліку студент повинен розв'язати перше навімання витягнуте завдання. Студент склав залік. Яка ймовірність того, що на заліку студенту попалося завдання з геометрії?

17. Є п'ять урн. В перших трьох урнах знаходиться по $(2 + \alpha)$ білих та $(3 + \alpha)$ чорних куль. В четвертій та п'ятій – по одній білій і дві чорні. Випадково вибирається урна і з неї виймається куля. Яка ймовірність того, що була вибрана четверта або п'ята урна, якщо вийнята куля виявилась білою?

18. У партії виробів змішані деталі трьох заводів: $(\alpha + 5)$ деталей першого, $(\alpha + 15)$ деталей другого та $(\alpha + 10)$ деталей третього. Ймовірності наявності дефекту для виробів першого, другого та третього заводів дорівнюють відповідно 0,3; 0,1; 0,2. Взята навімання деталь із змішаної партії виробів виявилась дефектною. Знайдіть ймовірність того, що деталь виготовлена першим заводом.

19. Для участі в спортивних змаганнях з першої групи виділено $(1 + \alpha)$ студентів, з другої – $(2 + \alpha)$ студентів, з третьої – $(3 + \alpha)$ студентів. Ймовірності того, що студенти першої, другої і третьої групи потраплять до збірної команди університету, відповідно рівні 0,85, 0,65 та 0,95. Навмання обраний студент потрапив до збірної. До якої з груп найімовірніше всього належить цей студент?

20. Для участі в спортивних змаганнях з першої групи виділено α студентів, з другої групи $(1 + \alpha)$ студентів і з третьої групи $(2 + \alpha)$ студентів. Ймовірності потрапити до збірної команди для студентів першої, другої та третьої груп відповідно рівні 0,9, 0,7 і 0,8. Навмання обраний студент попав у збірну команду. До якої з груп найімовірніше належить цей студент?

ПОВТОРЕННЯ ВИПРОБУВАНЬ. СХЕМА БЕРНУЛЛІ

1. Основні поняття та теореми

Серія n незалежних випробувань, в кожному з яких деяка подія A має одну і ту ж саму ймовірність $P(A) = p$, що не залежить від номера випробувань, називається схемою випробувань Бернуллі.

Ймовірність того, що при n повторюваних незалежних випробуваннях подія A відбудеться рівно m разів у будь-якій послідовності, визначається за допомогою формули Бернуллі $P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot p^m \cdot q^{n-m}$, де q – відповідно ймовірність не появи події A в кожному випробуванні, $q = 1 - p$.

Найімовірнішим числом m_0 появи події A в n незалежних випробуваннях називається таке число m , для якого ймовірність приймає максимальне значення. Найімовірніше число m_0 появи події при повторних випробуваннях і визначається формулою $n \cdot p - q \leq m_0 \leq n \cdot p + p$.

2. Приклади виконання завдань

1. Студент знає 75 питань програми із 100. Екзаменаційний білет містить три питання. Знайдіть ймовірність того, що: а) студент знає всі питання білету; б) студент знає не менше двох питань білету.

Розв'язання:

Ймовірність того, що студент знає випадкове питання, складає $p = 0,75$; ймовірність того, що не знає це питання, рівна $q = 1 - p = 0,25$. Кількість випробувань $n = 3$.

а) Ймовірність того, що студент знає всі питання ($m = 3$) екзаменаційного білету, рівна $P_3(3) = \frac{3!}{3!(3-3)!} \cdot 0,75^3 \cdot 0,25^0 \approx 0,422$.

б) Ймовірність того, що студент знає не менше двох питань ($m \geq 2$) екзаменаційного білету, визначається за формулою $P_3(\geq 2) = P_3(3) + P_3(2)$, де

$P_3(2) = \frac{3!}{2!(3-2)!} \cdot 0,75^2 \cdot 0,25^1 \approx 0,422$ – ймовірність того, що з трьох питань

студент знає два питання. Тоді $P_3(\geq 2) = 0,422 + 0,422 = 0,844$.

Відповідь: а) 0,422; б) 0,844.

2. Схожість насіння дорівнює 70%. Для випробування відбирають 7 насінин. Знайдіть ймовірність того, що буде: а) рівно 5 проростань; б) не менше 6 проростань.

Розв'язання:

Ймовірність того, що випадкова насінина проросте, складає $p = 0,7$; ймовірність того, що випадкова насінина не проросте, дорівнює $q = 1 - p = 0,3$. Кількість випробувань $n = 7$.

а) Ймовірність того, що з 7 насінин проросте рівно 5 ($m = 5$), визначимо за формулою Бернуллі $P_7(5) = \frac{7!}{5!(7-5)!} \cdot 0,7^5 \cdot 0,3^2 \approx 0,318$.

б) Ймовірність того, що з 7 насінин проросте не менше 6 ($m \geq 6$), визначається як $P_7(\geq 6) = P_7(6) + P_7(7)$, де $P_7(6) = \frac{7!}{6!(7-6)!} \cdot 0,7^6 \cdot 0,3^1 \approx 0,247$ – ймовірність проростання 6 насінин з 7, $P_7(7) = \frac{7!}{7!(7-7)!} \cdot 0,7^7 \cdot 0,3^0 \approx 0,082$ – ймовірність проростання 7 насінин з 7, тоді $P_7(\geq 6) = 0,247 + 0,082 = 0,329$.

Відповідь: а) 0,318; б) 0,329.

3. В деякому водоймищі коропа складають 78% від усіх риб. Знайдіть ймовірність того, що серед 6 виловлених у водоймищі риб виявиться: а) рівно 5 коропів; б) менше 5 коропів.

Розв'язання:

Ймовірність того, що виловлена у водоймищі риба є коропом, складає $p = 0,78$; ймовірність того, що ця риба не є коропом, рівна $q = 1 - p = 0,22$. Кількість випробувань $n = 6$.

а) Ймовірність того, що серед 6 виловлених риб виявиться рівно 5 коропів ($m = 5$), становить $P_6(5) = \frac{6!}{5!(6-5)!} \cdot 0,78^5 \cdot 0,22^1 \approx 0,381$.

б) Ймовірність того, що серед 6 виловлених у водоймищі риб виявиться менше 5 коропів ($m < 5$), визначається формулою $P_6(< 5) = 1 - P_6(5) - P_6(6)$, де $P_6(6) = \frac{6!}{6!(6-6)!} \cdot 0,78^6 \cdot 0,22^0 \approx 0,225$ – ймовірність того, що всі 6 виловлених риб виявляться коропами, тоді $P_6(< 5) = 1 - 0,381 - 0,225 = 0,394$.

Відповідь: а) 0,381; б) 0,394.

4. Частка плодів, що пошкоджені хворобою в прихованій формі, складає 14%. Випадковим чином відбирають 5 плодів. Знайдіть ймовірність того, що у вибірці буде: а) рівно 4 пошкоджені плоди; б) не більше 1 пошкодженого плода.

Розв'язання:

Ймовірність того, що плід пошкоджений, рівна $p = 0,14$; ймовірність того, що плід цілий, рівна $q = 1 - 0,14 = 0,86$. Кількість випробувань $n = 5$.

а) Ймовірність того, що серед 5 вибраних випадковим чином плодів буде 4 пошкоджені ($m = 4$), становить $P_5(4) = \frac{5!}{4!(5-4)!} \cdot 0,14^4 \cdot 0,86^1 \approx 0,0017$.

б) Ймовірність того, що серед 5 вибраних випадковим чином плодів буде не більше 1 пошкодженого хворобою ($m \leq 1$), визначається формулою $P_5(\leq 1) = P_5(0) + P_5(1)$, де $P_5(0) = \frac{5!}{0!(5-0)!} \cdot 0,14^0 \cdot 0,86^5 \approx 0,470$ – ймовірність того, що серед 5 відібраних випадковим чином плодів буде 0 пошкоджених; $P_5(1) = \frac{5!}{1!(5-1)!} \cdot 0,14^1 \cdot 0,86^4 \approx 0,383$ – ймовірність того, що серед 5 відібраних навімання плодів буде 1 пошкоджений, тоді $P_5(\leq 1) = 0,470 + 0,383 = 0,853$.

Відповідь: а) 0,0017; б) 0,853.

5. Прилад складається з чотирьох вузлів. Ймовірність безвідмовної роботи протягом зміни для кожного вузла рівна $\frac{7}{9}$. Вузли виходять зі строю незалежно один від одного. Знайдіть ймовірність того, що протягом зміни: 1) відмовить рівно один вузол; 2) прилад буде працювати безвідмовно (відмовить нуль вузлів); 3) відмовить не більше одного вузла; 4) відмовить хоча б один вузол. 5) Знайдіть найімовірніше число вузлів, які протягом зміни відмовлять.

Розв'язання:

Кількість випробувань $n = 4$. Ймовірність того, що вузол протягом зміни не відмовить, складає $q = \frac{7}{9}$; ймовірність того, що відмовить, рівна $p = 1 - \frac{7}{9} = \frac{2}{9}$.

1) Ймовірність того, що протягом зміни відмовить рівно один вузол ($m = 1$), становить $P_4(1) = \frac{4!}{1!(4-1)!} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^1 \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^3 \approx 0,418$.

2) Ймовірність того, що протягом зміни не відмовить жоден вузол ($m = 0$), становить $P_4(0) = \frac{4!}{0!(4-0)!} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^0 \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^4 \approx 0,366$.

3) Ймовірність того, що протягом зміни відмовить не більше одного вузла ($m \leq 1$), дорівнює $P_4(\leq 1) = P_4(0) + P_4(1) = 0,784$.

4) Ймовірність того, що протягом зміни відмовить хоча б один вузол ($m \geq 1$), дорівнює $P_4(\geq 1) = 1 - P_4(0) = 1 - 0,366 = 0,634$.

5) Визначимо найімовірніше число вузлів, які протягом зміни відмовлять.

З формули $n \cdot p - q \leq m_0 \leq n \cdot p + p$, маємо $4 \cdot \frac{2}{9} - \frac{7}{9} \leq m_0 \leq 4 \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{9}$, звідки $\frac{1}{9} \leq m_0 \leq \frac{10}{9}$, тоді $m_0 = 1$.

Відповідь: 1) 0,418; 2) 0,366; 3) 0,784; 4) 0,634; 5) 1.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Студент знає $(\alpha + 25)$ питань програми з $(\alpha + 50)$. Екзаменаційний білет містить три питання. Знайдіть ймовірність того, що: а) студент знає всі питання білету; б) студент знає не менше двох питань білету.

2. Схожість насіння дорівнює $(60 + \alpha)\%$. Для випробування відбирають 5 насінин. Знайдіть ймовірність того, що буде: а) рівно 3 проростання; б) не менше 4 проростань.

3. В деякому водоймищі коропи складають $(70 + \alpha)\%$. Знайдіть ймовірність того, що серед 4 риби, виловлених у водоймищі, виявиться: а) рівно 3 коропи; б) менше 3 коропів.

4. Частка плодів, що пошкоджені хворобою в прихованій формі, складає $(10 + \alpha)\%$. Випадковим чином відбирають 4 плоди. Знайдіть ймовірність того, що у вибірці буде: а) рівно 3 пошкоджені плоди; б) не більше 1 пошкодженого плода.

5. Прилад складається з чотирьох вузлів. Ймовірність безвідмовної роботи протягом зміни для кожного вузла дорівнює $\frac{\alpha+1}{\alpha+4}$. Вузли виходять зі строю незалежно один від одного. Знайдіть ймовірність того, що протягом зміни: 1) відмовить рівно один вузол; 2) прилад буде працювати безвідмовно (відмовить нуль вузлів); 3) відмовить не більше одного вузла; 4) відмовить хоча б один вузол. 5) Знайдіть найімовірніше число вузлів, які протягом зміни відмовлять.

ТЕОРЕМИ МУАВРА – ЛАПЛАСА

1. Основні поняття та теореми

Обчислення ймовірностей за формулою Бернуллі при великих значеннях n і m є незручним та приводить до значних похибок. Щоб уникнути їх, застосовують асимптотичні формули локальної та інтегральної теорем Муавра – Лапласа.

Ймовірність того, що випадкова подія A з n незалежних випробувань відбудеться m разів, визначається за асимптотичною формулою $P_n(m) \cong \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}$,

де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функція Гаусса, $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$.

Для $\varphi(x)$ складені таблиці для невід'ємних значень x . Функція Гаусса $\varphi(x)$ є парною, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Для значень $x > 4$ приймають $\varphi(x) \approx 0$.

Ймовірність того, що при n випробуваннях подія A відбудеться не менше m_1 разів і не більше m_2 разів, визначається за формулою $P_n(m_1; m_2) \cong \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$,

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – функція Лапласа, $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Для $\Phi(x)$ складені таблиці для невід'ємних значень x . Функція Лапласа є непарною, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Для значень $x > 5$ вважають $\Phi(x) = 0,5$.

2. Приклади виконання завдань

1. Схожість насіння складає 80%. Яка ймовірність того, що з посіяних 2500 зерен проросте рівно 2000?

Розв'язання:

Скористаємось формулою $P_n(m) \cong \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}$, де $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$. За умовою $p = 0,8$,

$$q = 1 - 0,8 = 0,2, \quad n = 2500, \quad m = 2000, \quad \text{тоді} \quad x = \frac{2000 - 2500 \cdot 0,8}{\sqrt{2500 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = \frac{0}{20} = 0,$$

$$\varphi(0) = 0,3989, \quad P_{2500}(2000) = \frac{0,3989}{20} \approx 0,0199.$$

Відповідь: 0,0199.

2. Схожість насіння пшениці складає 74%. Яка ймовірність того, що з посіяних 800 зерен проросте рівно а) 650, б) 600, в) 550?

Розв'язання:

Скористаємось формулою $P_n(m) \cong \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}$, де $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$. Так як $p = 0,74$, $q = 1 - 0,74 = 0,26$, $n = 800$, то:

а) $m = 650$, $x = \frac{650 - 800 \cdot 0,74}{\sqrt{800 \cdot 0,74 \cdot 0,26}} \approx 4,67$, $\varphi(4,67) = 0$, $P_{800}(650) = 0$;

б) $m = 600$, $x = \frac{600 - 800 \cdot 0,74}{\sqrt{800 \cdot 0,74 \cdot 0,26}} \approx 0,64$, $\varphi(0,65) = 0,3251$, $P_{800}(600) \approx 0,0262$;

в) $m = 550$, $x = \frac{550 - 800 \cdot 0,74}{\sqrt{800 \cdot 0,74 \cdot 0,26}} \approx -3,38$, $\varphi(-3,38) = 0,0013$, $P_{800}(550) \approx 0,0001$.

Відповідь: а) 0; б) 0,0262; в) 0,0001.

3. На тракторному заводі робітник за зміну виготовляє 625 деталей. Ймовірність того, що виготовлена деталь буде першого сорту дорівнює 0,8. Яка ймовірність того, що деталей першого сорту буде рівно 510 штук?

Розв'язання:

За умовою $p = 0,8$, $q = 1 - 0,8 = 0,2$, $n = 625$, $m = 510$, тоді

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{510 - 625 \cdot 0,8}{\sqrt{625 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = \frac{10}{10} = 1, \quad \varphi(1) = 0,2420, \quad P_{625}(510) \cong \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} = 0,0242.$$

Відповідь: 0,0242.

4. Схожість насіння кукурудзи рівна 80%. Яка ймовірність того, що з 700 зерен проросте не менше 580 і не більше ніж 600?

Розв'язання:

Застосуємо формулу $P_n(m_1; m_2) \cong \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, де $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Так як $p = 0,8$, $q = 1 - 0,8 = 0,2$, $n = 700$, $m_1 = 580$, $m_2 = 600$, то

$$x_1 = \frac{580 - 700 \cdot 0,8}{\sqrt{700 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} \approx 1,89, \quad x_2 = \frac{600 - 700 \cdot 0,8}{\sqrt{700 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} \approx 3,78.$$

Функція Лапласа при цих значеннях аргументу рівна $\Phi(1,89) = 0,4706$, $\Phi(3,78) = 0,4999$, тоді $P_{700}(580; 600) \cong 0,4999 - 0,4706 = 0,0293$.

Відповідь: 0,0293.

5. Задано ймовірність 20% появи події A в кожному з 225 незалежних випробувань. Знайдіть ймовірність того, що подія A відбудеться в цих випробуваннях не менше 39 разів і не більше 60 разів.

Розв'язання:

Застосуємо формулу $P_n(m_1; m_2) \cong \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, де $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

За умовою $p = 0,2$, $q = 0,8$, $n = 225$, $m_1 = 39$, $m_2 = 60$, тоді

$$x_1 = \frac{39 - 225 \cdot 0,2}{\sqrt{225 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = -1, \quad x_2 = \frac{60 - 225 \cdot 0,2}{\sqrt{225 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = 2,5.$$

Оскільки $\Phi(-1) = -0,3413$, $\Phi(2,5) = 0,4938$, то $P_{225}(39; 60) \cong 0,4938 + 0,3413 = 0,8351$.

Відповідь: 0,8351.

6. Схожість насіння сорго рівна 65%. Яка ймовірність того, що з посіяних 850 зерен проросте: а) не більше 550; б) не менше 570?

Розв'язання:

Застосуємо формулу $P_n(m_1; m_2) \cong \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, де $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

За умовою $p = 0,65$, $q = 1 - 0,65 = 0,35$, $n = 850$, тоді:

$$\text{а) } m_1 = 0, \quad x_1 = \frac{0 - 850 \cdot 0,65}{\sqrt{850 \cdot 0,65 \cdot 0,35}} \approx -39,73, \quad \Phi(-39,73) = -0,5; \quad m_2 = 550, \\ x_2 = \frac{550 - 850 \cdot 0,65}{\sqrt{850 \cdot 0,65 \cdot 0,35}} \approx -0,19, \quad \Phi(-0,19) = -0,0753; \quad P_{850}(0; 550) = 0,5 - 0,0753 = 0,4247.$$

$$\text{б) } m_1 = 570, \quad x_1 = \frac{570 - 850 \cdot 0,65}{\sqrt{850 \cdot 0,65 \cdot 0,35}} \approx 1,26, \quad \Phi(1,26) = 0,3962; \quad m_2 = 850, \\ x_2 = \frac{850 - 850 \cdot 0,65}{\sqrt{850 \cdot 0,65 \cdot 0,35}} \approx 21,39, \quad \Phi(21,39) = 0,5; \quad P_{850}(570; 850) = 0,5 - 0,3962 = 0,1038.$$

Відповідь: а) 0,4247; б) 0,1038.

7. Схожість насіння сорго рівна 65%. Яка ймовірність того, що з посіяних 850 зерен проросте: а) не більше 630; б) більше 630?

Розв'язання:

За умовою $p = 0,65$, $q = 1 - 0,65 = 0,35$, $n = 850$, тоді:

$$\text{а) } m_1 = 0, \quad x_1 = \frac{0 - 850 \cdot 0,65}{\sqrt{850 \cdot 0,65 \cdot 0,35}} \approx -39,73, \quad \Phi(-39,73) = -0,5; \quad m_2 = 630, \\ x_2 = \frac{630 - 850 \cdot 0,65}{\sqrt{850 \cdot 0,65 \cdot 0,35}} \approx 5,57, \quad \Phi(5,57) = 0,5; \quad P_{850}(0; 630) = 0,5 - (-0,5) = 1.$$

$$\text{б) } P_{850}(630; 850) \text{ визначимо як } P_{850}(630; 850) = 1 - P_{850}(0; 630) = 0.$$

Відповідь: а) 1; б) 0.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Схожість насіння складає 80%. Яка ймовірність того, що з посіяних $100\alpha^2$ зерен проросте рівно $80\alpha^2$?

2. Схожість насіння пшениці складає $(60 + \alpha)\%$. Яка ймовірність того, що з посіяних $(10\alpha + 300)$ зерен проросте рівно $(10\alpha + 150)$?

3. На тракторному заводі робітник за зміну виготовляє n деталей. Ймовірність того, що виготовлена деталь буде першого сорту дорівнює p . Яка ймовірність того, що деталей першого сорту буде рівно m штук?

1	$n = 100$	$p = 0,9$	$m = 96$	6	$n = 150$	$p = 0,6$	$m = 75$
2	$n = 400$	$p = 0,9$	$m = 372$	7	$n = 300$	$p = 0,75$	$m = 240$
3	$n = 225$	$p = 0,8$	$m = 165$	8	$n = 600$	$p = 0,6$	$m = 375$
4	$n = 400$	$p = 0,8$	$m = 330$	9	$n = 625$	$p = 0,64$	$m = 370$
5	$n = 625$	$p = 0,64$	$m = 424$	10	$n = 192$	$p = 0,75$	$m = 150$

4. Схожість насіння кукурудзи рівна $(70 + \alpha)\%$. Яка ймовірність того, що з $(10\alpha + 200)$ зерен проросте не менше $(10\alpha + 140)$ і не більше $(12\alpha + 140)$?

5. Задано ймовірність p появи події A в кожному з n незалежних випробувань. Знайдіть ймовірність того, що подія A відбудеться в цих випробуваннях не менше m_1 разів і не більше m_2 разів.

	n	p	m_1	m_2		n	p	m_1	m_2
1	150	0,6	78	96	6	625	0,36	225	255
2	100	0,8	72	84	7	400	0,5	190	215
3	400	0,9	345	372	8	225	0,2	45	60
4	600	0,4	210	352	9	300	0,25	75	90
5	300	0,75	210	225	10	625	0,64	400	430

6. Схожість насіння сорго дорівнює 70%. Яка ймовірність того, що з посіяних 100α зерен проросте: а) не більше 68α зерен; б) не менше 72α зерен?

7. Схожість насіння сорго дорівнює 70%. Яка ймовірність того, що з посіяних 100α зерен проросте: а) не більше 80α зерен; б) більше 80α зерен?

ФОРМУЛА ПУАССОНА

1. Основні поняття та теореми

Використання асимптотичної формули локальної теореми Муавра – Лапласа у випадках $p \approx 0$ приводить до значних відхилень від точного значення $P_n(m)$. Тому при малих значеннях p застосовують асимптотичну формулу Пуассона

$P_n(m) \cong \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$, де $\lambda = np$. Формула використовується, якщо $\lambda \leq 10$.

2. Приклади виконання завдань

1. Серед зерен жита 0,07% насінин пшениці. Яка ймовірність того, що при випадковому відборі 5000 зерен серед них буде чотири насінини пшениці?

Розв'язання:

Кількість випробувань $n = 5000$. Ймовірність того, що випадкове зерно є зерном пшениці, складає $p = 0,0007$. Так як $\lambda = np = 3,5 \leq 10$, то скористаємося

формулою $P_n(m) \cong \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$, де $m = 4$. Маємо $P_{5000}(4) = \frac{3,5^4 \cdot e^{-3,5}}{4!} \approx 0,189$.

Відповідь: 0,189.

2. Ймовірність того, що виготовлена деталь станком-автоматом буде з браком, рівна 0,008. Знайдіть ймовірність того, що серед 500 виготовлених деталей з браком буде рівно три.

Розв'язання:

Кількість випробувань $n = 500$. Ймовірність того, що випадкова деталь є бракованою, складає $p = 0,008$. Так як $\lambda = np = 4 \leq 10$, то застосуємо формулу

$P_n(m) \cong \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$, де $m = 3$. Маємо $P_{500}(3) = \frac{4^3 \cdot e^{-4}}{3!} \approx 0,195$.

Відповідь: 0,195.

3. Ймовірність влучення у мішень при кожному пострілі дорівнює 0,001. Знайдіть ймовірність влучення у мішень двох та більше куль, якщо число пострілів дорівнює 1050.

Розв'язання:

Ймовірність влучення у мішень двох та більше куль ($m \geq 2$) визначимо за формулою $P_{1050}(\geq 2) = 1 - P_{1050}(0) - P_{1050}(1)$. З умови $n = 1050$, $p = 0,001$, тоді $\lambda = np = 1,05 \leq 10$, застосуємо формулу $P_n(m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$. Так як при $m = 0$ і $m = 1$

$$P_{1050}(0) = \frac{1,05^0 \cdot e^{-1,05}}{0!} \approx 0,350, \quad P_{1050}(1) = \frac{1,05^1 \cdot e^{-1,05}}{1!} \approx 0,367, \quad \text{то отримаємо}$$

$$P_{1050}(\geq 2) = 1 - 0,350 - 0,367 = 0,283.$$

Відповідь: 0,283.

4. Ймовірність пошкодження довгоносином коренеплоду цукрового буряка рівна 0,003. Знайдіть ймовірність того, що серед 1000 коренеплодів пошкоджених буде: 1) рівно чотири; 2) менше чотирьох; 3) не менше чотирьох; 4) хоча б один.

Розв'язання:

Оскільки $\lambda = pn = 3 \leq 10$, то застосуємо формулу $P_n(m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$, тоді:

1) Ймовірність того, що серед 1000 коренеплодів пошкоджених буде рівно 4 ($m = 4$), рівна $P_{1000}(4) = \frac{3^4 \cdot e^{-3}}{4!} \approx 0,168$.

2) Ймовірність того, що серед 1000 коренеплодів пошкоджених буде менше 4 ($m < 4$), визначимо як $P_{1000}(< 4) = P_{1000}(0) + P_{1000}(1) + P_{1000}(2) + P_{1000}(3)$, де

$$P_{1000}(0) = \frac{3^0 \cdot e^{-3}}{0!} \approx 0,050, \quad P_{1000}(1) = \frac{3^1 \cdot e^{-3}}{1!} \approx 0,151, \quad P_{1000}(2) = \frac{3^2 \cdot e^{-3}}{2!} \approx 0,226,$$

$$P_{1000}(3) = \frac{3^3 \cdot e^{-3}}{3!} \approx 0,226; \text{ отже, } P_{1000}(< 4) \approx 0,653.$$

3) Ймовірність того, що серед 1000 коренеплодів пошкоджених буде менше 4 ($m \geq 4$), визначимо як $P_{1000}(\geq 4) = 1 - P_{1000}(< 4) \approx 1 - 0,653 = 0,347$.

4) Ймовірність того, що серед 1000 коренеплодів пошкоджених буде хоча б 1 ($m \geq 1$), визначимо як $P_{1000}(\geq 1) = 1 - P_{1000}(0) \approx 1 - 0,050 = 0,950$.

Відповідь: 1) 0,168; 2) 0,653; 3) 0,347; 4) 0,950.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Серед зерен жита $\frac{\alpha}{10000}$ насінин пшениці. Яка ймовірність того, що при випадковому відборі 5000 зерен серед них буде знайдено дві насінини пшениці?

2. Ймовірність того, що виготовлена деталь станком-автоматом буде з браком, рівна $\frac{\alpha}{1000}$. Знайдіть ймовірність того, що серед 500 виготовлених деталей з браком буде рівно три.

3. Ймовірність влучення у мішень при кожному пострілі дорівнює 0,001. Знайдіть ймовірність влучення у мішень двох та більше куль, якщо число пострілів дорівнює $(1000+10\alpha)$.

4. Ймовірність пошкодження довгоносином коренеплоду цукрового буряка на деякій ділянці рівна 0,003. Знайдіть ймовірність того, що серед $(1000+10\alpha)$ коренеплодів пошкоджених буде: 1) рівно три; 2) менше трьох; 3) не менше трьох; 4) хоча б один.

ВІДХИЛЕННЯ ВІДНОСНОЇ ЧАСТОТИ ВІД СТАЛОЇ ЙМОВІРНОСТІ

1. Основні поняття та теореми

Ймовірність p появи випадкової події в кожному експерименті визначають за відносною частотою цієї події $W(A) = \frac{m}{n}$, встановлюючи в скількох m експериментах з n проведених подія відбулася. Звичайно, має місце похибка $\left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon$.

Ймовірність того, що абсолютне відхилення відносної частоти події від сталої ймовірності появи цієї випадкової події в кожному експерименті за абсолютною величиною не перевищує заданого числа $\varepsilon > 0$, визначається формулою $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \cong 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$.

2. Приклади виконання завдань

1. До складу надійшло 625 виробів, з яких 80% є виробами вищого сорту. Яка ймовірність того, що абсолютне відхилення відносної частоти виробів вищого сорту від ймовірності 0,8 становить 0,01?

Розв'язання:

Так як $n = 625$, $p = 0,8$, $q = 0,2$, $\varepsilon = 0,01$, тоді з $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \cong 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$ маємо $P(|W(A) - 0,8| < 0,01) \cong 2\Phi\left(0,01\sqrt{\frac{625}{0,2 \cdot 0,8}}\right) = 2\Phi(0,625) \approx 2 \cdot 0,2340 = 0,4680$.

Відповідь: 0,4680.

2. Ймовірність влучення у мішень при кожному з 700 пострілів рівна 0,5. Яке максимальне відхилення частоти влучань від ймовірності влучення при одному пострілі можна очікувати з ймовірністю 0,997?

Розв'язання:

За умовою задачі $p = q = 0,5$, $n = 700$, $\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = \frac{0,997}{2} = 0,4985$. Так як $\Phi(2,96) = 0,4985$, то $\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} = 2,96$, звідки $\varepsilon = 2,96\sqrt{\frac{pq}{n}} = 2,96\sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{700}} \approx 0,056$.

Відповідь: 0,056.

3. Ймовірність пошкодження яблука паршею рівна 0,2. Для якої кількості яблук з ймовірністю 0,995 відхилення частоти пошкодження яблук від ймовірності пошкодження яблука за абсолютною величиною не більше ніж на 0,3?

Розв'язання:

За умовою задачі $p = 0,2$, $q = 0,8$, $\varepsilon = 0,3$, $\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = \frac{0,995}{2} = 0,4975$. Так як $\Phi(2,81) = 0,4975$, то $\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} = 2,81$, звідки $n = \frac{2,81^2 pq}{\varepsilon^2} = \frac{2,81^2 \cdot 0,8 \cdot 0,2}{0,3^2} \approx 14$.

Відповідь: 14.

3. Завдання для самостійного виконання

1. До складу надійшло 100α виробів, з яких 80% першосортні. Яка ймовірність того, що абсолютне відхилення відносної частоти першосортних виробів від ймовірності 0,8 становить 0,01?

2. Ймовірність влучення у мішень при кожному з 400 пострілів рівна $\frac{5}{\alpha + 5}$.

Яке максимальне відхилення частоти влучань від ймовірності влучення при одному пострілі можна очікувати з ймовірністю 0,997?

3. Ймовірність пошкодження яблук паршею рівна $\frac{2}{\alpha + 5}$. Для якої кількості яблук з ймовірністю 0,995 відхилення частоти пошкодження яблук від ймовірності пошкодження яблука за абсолютною величиною не більше ніж на 0,2?

МОДУЛЬ 2 «ВИПАДКОВА ВЕЛИЧИНА»

ДИСКРЕТНА ВИПАДКОВА ВЕЛИЧИНА, ХАРАКТЕРИСТИКИ

1. Основні поняття та теореми

Випадковою називають величину, яка в результаті випробування може прийняти одне і тільки одне числове значення, причому наперед невідомо яке саме, тому що воно залежить від багатьох факторів, які заздалегідь не можуть бути враховані.

Розрізняють два види випадкових величин: дискретні та неперервні.

Випадкова величина називається *дискретною*, якщо всі можливі її значення ізольовані одне від одного (тобто між двома сусідніми можливими значеннями немає інших можливих значень). Число можливих значень дискретної випадкової величини може бути скінченним або нескінченним.

Закон розподілу дискретної випадкової величини можна записати у вигляді таблиці (ряду розподілу), перший рядок якої – можливі значення величини, а другий – відповідні ймовірності.

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

В одному випробуванні випадкова величина приймає одне і тільки одне можливе значення, тобто події $X = x_1, X = x_2, \dots, X = x_n$ створюють повну групу.

Отже, сума ймовірностей цих подій $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, де $p_i = P(X = x_i)$.

Ряд розподілу можна представити графічно многокутником розподілу – ламана, що послідовно з'єднує точки $(x_1; p_1), (x_2; p_2), \dots, (x_n; p_n)$.

Закон розподілу дискретної випадкової величини X може бути заданий аналітично (у вигляді формули). Найбільш загальною формою закону розподілу випадкової величини є функція розподілу або *інтегральний закон розподілу*. Функція розподілу ймовірностей має вигляд $F(x) = \sum_{x_i < x} P(x_i)$, тобто це сума всіх

ймовірностей випадкової величини, меншої аргументу функції.

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини називають суму добутків усіх її можливих значень на відповідні ймовірності $M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$.

Дисперсія дискретної випадкової величини – математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання

$D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2 p_i$. Ще одна формула дисперсії: $D(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - M^2(X)$.

Середнє квадратичне відхилення визначається як $\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$.

Модом M_0 дискретної випадкової величини X називають те її можливе значення, якому відповідає найбільша ймовірність появи.

2. Приклади виконання завдань

1. а) Дискретна випадкова величина задана рядом розподілу. Знайдіть ймовірність p_3 .

Розв'язання:

X	-1	0	1
P	$\frac{5}{70}$	$\frac{50}{70}$	?

Сума ймовірностей випадкової величини рівна 1. Тому $p_3 = P\{X = 1\} = \frac{15}{70}$.

б) Дискретна випадкова величина задана рядом розподілу. Знайдіть ймовірність того, що величина приймає значення, що не перевищує за абсолютною величиною 1.

X	-2	-1	0	1	2
P	$\frac{4}{30}$	$\frac{9}{30}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{2}{30}$

Розв'язання:

Подія полягає в тому, що випадкова величина може прийняти значення або -1, або 0, або 1. Тоді $P\{|X| \leq 1\} = \frac{9}{30} + \frac{7}{30} + \frac{8}{30} = 0,8$.

в) Дискретна випадкова величина задана рядом розподілу. Знайдіть ймовірність того, що величина приймає значення, що не перевищує 15.

X	5	10	15	20	25
P	$\frac{1}{60}$	$\frac{53}{120}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{15}$

Розв'язання:

Подія полягає в тому, що випадкова величина може приймати значення або 5, або 10, або 15. Тоді $P\{X \leq 15\} = \frac{1}{60} + \frac{53}{120} + \frac{9}{20} = \frac{109}{120}$.

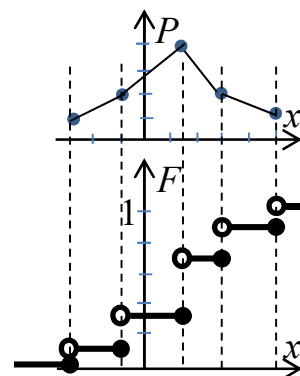
Відповідь: а) $\frac{3}{14}$; б) 0,8; в) $\frac{109}{120}$.

2. Дискретна випадкова величина задана рядом розподілу. Побудуйте многокутник розподілу заданої випадкової величини. Визначте інтегральну функцію розподілу та побудуйте її графік.

X	-2,5	-1	1,5	3	5
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Розв'язання:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(x_i), F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -2,5; \\ 0,1 & -2,5 < x \leq -1; \\ 0,3 & -1 < x \leq 1,5; \\ 0,7 & 1,5 < x \leq 3; \\ 0,9 & 3 < x \leq 5; \\ 1 & x > 5. \end{cases}$$



3. Дискретна випадкова величина задана рядом розподілу. Визначте інтегральну функцію розподілу та побудуйте її графік.

X	1	3	5	7	9
P	$\frac{1}{60}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{40}$

Розв'язання:

Якщо $x \leq 1$, то $F(x) = 0$.

Якщо $x > 9$, то $F(x) = 1$.

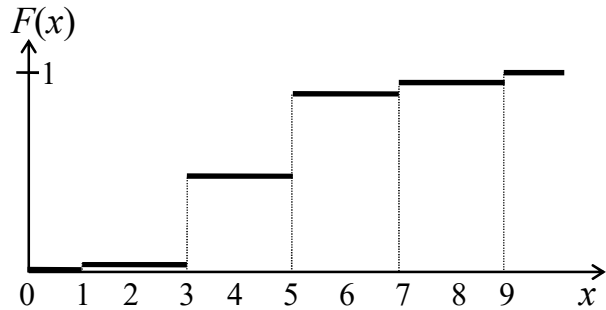
Якщо $1 < x \leq 3$, то $F(x) = \frac{1}{60}$.

Якщо $3 < x \leq 5$, то $F(x) = \frac{1}{60} + \frac{7}{15} = \frac{1+28}{60} = \frac{29}{60}$.

Якщо $5 < x \leq 7$, то $F(x) = \frac{29}{60} + \frac{11}{24} = \frac{58+55}{120} = \frac{113}{120}$.

Якщо $7 < x \leq 9$, то $F(x) = \frac{113}{120} + \frac{1}{30} = \frac{113+4}{120} = \frac{117}{120}$.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1, \\ 1/60 & \text{при } 1 < x \leq 3, \\ 29/60 & \text{при } 3 < x \leq 5, \\ 113/120 & \text{при } 5 < x \leq 7, \\ 117/120 & \text{при } 7 < x \leq 9, \\ 1 & \text{при } x > 9. \end{cases}$$



4. Дискретна випадкова величина задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ 5/30 & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 14/30 & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ 21/30 & \text{при } 2 < x \leq 3, \\ 29/30 & \text{при } 3 < x \leq 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Знайдіть ймовірності того, що випадкова

величина приймає значення, яке: а) рівне 2; б) менше 2; в) більше 2.

Розв'язання:

а) Ймовірність того, що випадкова величина приймає значення, яке дорівнює 2, визначається як приріст функції на інтервалі $(2-0; 2+0)$. Тобто

$$P(X = 2) = F(2+0) - F(2-0) = \frac{21}{30} - \frac{14}{30} = \frac{7}{30}.$$

б) Ймовірність події, що випадкова величина приймає значення менше 2, відповідає функції розподілу при $0 < x \leq 1$, тобто $P(X < 2) = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$.

в) Ймовірність події, що випадкова величина приймає значення більше 2, доповнює до одиниці значення функції розподілу при $2 < x \leq 3$, тобто $P(X > 2) = 1 - \frac{21}{30} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$.

Відповідь: а) $\frac{7}{30}$; б) $\frac{7}{15}$; в) $\frac{3}{10}$.

5. Задано закон розподілу дискретної випадкової величини X . Знайдіть числові характеристики: математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ двома способами, середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

X	21	25	28	31
P	0,1	0,4	0,2	0,3

Побудуйте багатокутник розподілу заданої випадкової величини та покажіть на ньому знайдені значення математичного сподівання $M(X)$ та середнього квадратичного відхилення $\sigma(X)$.

Розв'язання:

Математичне сподівання $M(X) = 21 \cdot 0,1 + 25 \cdot 0,4 + 28 \cdot 0,2 + 31 \cdot 0,3 = 27$.

Знайдемо дисперсію за визначенням. Для цього обчислимо значення квадратів відхилення значень випадкової величини від математичного сподівання:

$$x_1 - M(X) = 21 - 27 = -6, (x_1 - M(X))^2 = 36,$$

$$x_2 - M(X) = 25 - 27 = -2, (x_2 - M(X))^2 = 4,$$

$$x_3 - M(X) = 28 - 27 = 1, (x_3 - M(X))^2 = 1,$$

$$x_4 - M(X) = 31 - 27 = 4, (x_4 - M(X))^2 = 16.$$

$X - M(X)$	-6	-2	1	4
$(X - M(X))^2$	36	4	1	16
P	0,1	0,4	0,2	0,3

$$\text{Тоді } D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2 p_i = 36 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,4 + 1 \cdot 0,2 + 16 \cdot 0,3 = 10,2.$$

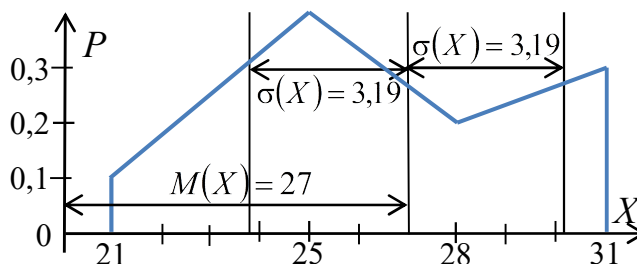
Обчислимо дисперсію за формулою $D(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - M^2(X)$. Для цього

знаходимо спочатку $\sum_{i=1}^n x_i^2 p_i = 21^2 \cdot 0,1 + 25^2 \cdot 0,4 + 28^2 \cdot 0,2 + 31^2 \cdot 0,3 = 739,2$. Тоді

$$D(X) = 739,2 - 27^2 = 10,2. \text{ Значення дисперсії в обох випадках одне й те саме.}$$

Середнє квадратичне відхилення рівне $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{10,2} \approx 3,19$.

Будуємо багатокутник розподілу за точками $(x_i; p_i)$. Від початку координат по осі абсцис відкладаємо значення математичного сподівання $M(X)$. Від значення вправо та вліво відкладаємо відрізки за довжиною рівні $\sigma(X)$.

**3. Завдання для самостійного виконання**

1. а) Дискретна випадкова величина задана рядом розподілу. Знайдіть ймовірність p_3 .

X	-1	0	1
P	$\frac{7}{30}$	$\frac{\alpha}{30}$	?

1. б) За рядом розподілу дискретної випадкової величини знайдіть ймовірність того, що значення величини не перевищує за абсолютною величиною 1.

X	-2	-1	0	1	2
P	$\frac{5}{2\alpha + 20}$	$\frac{9}{2\alpha + 20}$	$\frac{\alpha + 2}{2\alpha + 20}$	$\frac{\alpha + 3}{2\alpha + 20}$	$\frac{1}{2\alpha + 20}$

1. в) Дискретна випадкова величина задана рядом розподілу. Знайдіть ймовірність того, що величина приймає значення, що не перевищує 15.

X	5	10	15	20	25
P	$\frac{1}{\alpha + 10}$	$\frac{\alpha + 3}{2\alpha + 20}$	$\frac{\alpha + 4}{2\alpha + 20}$	$\frac{3}{2\alpha + 20}$	$\frac{4}{\alpha + 10}$

2. а) Дискретна випадкова величина задана рядом розподілу. Побудуйте багатокутник розподілу заданої випадкової величини.

2. б) Визначте інтегральну функцію розподілу та побудуйте її графік.

X	-1	1,5	3	4,5	6
P	0,1	$\frac{\alpha + 20}{100}$	$\frac{50 - 2\alpha}{100}$	$\frac{\alpha + 10}{100}$	0,1

3. Дискретна випадкова величина задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ 5/(2\alpha + 20) & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 14/(2\alpha + 20) & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ (\alpha + 16)/(2\alpha + 20) & \text{при } 2 < x \leq 3, \\ (2\alpha + 19)/(2\alpha + 20) & \text{при } 3 < x \leq 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Знайдіть ймовірності того, що

випадкова величина приймає значення, яке: а) рівне 2; б) менше 2; в) більше 2.

4. Задано закон розподілу дискретної випадкової величини X . Знайдіть числові характеристики: математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ двома способами, середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$. Побудуйте багатокутник розподілу та покажіть на ньому знайдені значення математичного сподівання $M(X)$ та середнього квадратичного відхилення $\sigma(X)$.

1 варіант

X	23	26	28	29
P	0,3	0,2	0,4	0,1

4 варіант

X	24	26	28	30
P	0,2	0,2	0,5	0,1

7 варіант

X	12	16	19	21
P	0,1	0,5	0,3	0,1

10 варіант

X	12	14	16	20
P	0,1	0,2	0,5	0,2

13 варіант

X	60	64	67	70
P	0,1	0,3	0,2	0,4

16 варіант

X	46	49	51	55
P	0,2	0,3	0,1	0,4

19 варіант

X	78	80	84	85
P	0,2	0,3	0,1	0,4

22 варіант

X	25	28	30	33
P	0,1	0,2	0,4	0,3

2 варіант

X	15	29	42	56
P	0,1	0,3	0,2	0,4

5 варіант

X	10	18	25	34
P	0,3	0,2	0,4	0,1

8 варіант

X	23	29	35	40
P	0,1	0,3	0,2	0,4

11 варіант

X	21	35	48	51
P	0,1	0,4	0,2	0,3

14 варіант

X	12	26	39	51
P	0,1	0,5	0,3	0,1

17 варіант

X	25	27	30	32
P	0,2	0,4	0,3	0,1

20 варіант

X	26	38	50	64
P	0,2	0,3	0,4	0,1

23 варіант

X	16	29	41	55
P	0,2	0,3	0,1	0,4

3 варіант

X	17	21	25	27
P	0,2	0,4	0,3	0,1

6 варіант

X	25	27	30	32
P	0,2	0,4	0,3	0,1

9 варіант

X	30	32	35	40
P	0,1	0,5	0,2	0,2

12 варіант

X	21	25	28	31
P	0,1	0,4	0,2	0,3

15 варіант

X	45	47	50	52
P	0,2	0,4	0,3	0,1

18 варіант

X	18	22	23	26
P	0,2	0,3	0,4	0,1

21 варіант

X	37	41	43	45
P	0,2	0,1	0,5	0,2

24 варіант

X	56	58	60	64
P	0,2	0,3	0,4	0,1

25 варіант

X	15	27	40	52
P	0,2	0,4	0,3	0,1

28 варіант

X	20	23	27	30
P	0,1	0,4	0,3	0,2

26 варіант

X	31	34	37	40
P	0,3	0,5	0,1	0,1

29 варіант

X	28	32	34	36
P	0,1	0,1	0,2	0,5

27 варіант

X	11	25	38	51
P	0,1	0,4	0,2	0,3

30 варіант

X	28	40	54	65
P	0,2	0,3	0,1	0,4

ВЛАСТИВОСТІ ХАРАКТЕРИСТИК ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ

1. Основні поняття та теореми

Математичне сподівання сталої величини дорівнює цій величині.

Сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання.

Математичне сподівання суми двох випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань. Математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань.

Дисперсія сталої величини дорівнює нулю.

Сталий множник можна виносити за знак дисперсії у квадраті.

Дисперсія суми чи різниці двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин.

2. Приклади виконання завдань

1. Дискретна випадкова величина задана рядом розподілу.

Побудуйте ряд розподілу випадкової величини $Y = X \cdot X$.

Розв'язання:

Значення $Y = X \cdot X$ та відповідні їм ймовірності відповідно до теореми множення незалежних подій записані в таблиці.

Y	$-1 \cdot (-1)$	$-1 \cdot 1$	$1 \cdot (-1)$	$1 \cdot 1$
P	$\frac{37}{75} \cdot \frac{37}{75}$	$\frac{37}{75} \cdot \frac{38}{75}$	$\frac{38}{75} \cdot \frac{37}{75}$	$\frac{38}{75} \cdot \frac{38}{75}$

Y приймає значення 1 і -1 . За теоремою додавання ймовірностей двох несумісних подій отримаємо ряд розподілу величини Y .

X	-1	1
P	$\frac{37}{75}$	$\frac{38}{75}$

$$P(-1) \cdot P(1) + P(1) \cdot P(-1) = \frac{37}{75} \cdot \frac{38}{75} + \frac{38}{75} \cdot \frac{37}{75} = \frac{2812}{5625} \approx 0,499;$$

$$P(-1) \cdot P(-1) + P(1) \cdot P(1) = \frac{37}{75} \cdot \frac{37}{75} + \frac{38}{75} \cdot \frac{38}{75} = \frac{2813}{5625} \approx 0,501.$$

Y	-1	1
P	0,499	0,501

2. Дискретні випадкові величини X і Y задані законами розподілів.

а) Знайдіть математичні сподівання та дисперсії величин X і Y .

X	-1	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

Y	-1	1
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

б) Побудуйте ряди розподілів випадкових величин $X + Y$, $2X + Y$, $X \cdot Y$.

в) Знайдіть математичні сподівання та дисперсії $X + Y$, $2X + Y$, $X \cdot Y$.

г) Перевірте властивості характеристик випадкової величини $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$, $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$, $M(2X + Y) = 2M(X) + M(Y)$, $D(2X + Y) = 4D(X) + D(Y)$, $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$, $D(X \cdot Y) \neq D(X) \cdot D(Y)$.

Розв'язання:

а) Математичні сподівання та дисперсії:

$$M(X) = (-1) \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}; \quad D(X) = (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} + 0^2 \cdot \frac{1}{6} + 1^2 \cdot \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{5}{6} - \frac{1}{36} = \frac{29}{36}.$$

$$M(Y) = (-1) \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}; \quad D(Y) = (-1)^2 \cdot \frac{2}{3} + 1^2 \cdot \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

б) Складемо ряди розподілів величин $X + Y$, $2X + Y$, $X \cdot Y$. Скористаємось теоремами множення незалежних подій та додавання несумісних подій.

Значення $X + Y$, $2X + Y$, $X \cdot Y$ та відповідні ймовірності записані в таблиці:

$X + Y$	$-1 + (-1)$	$0 + (-1)$	$1 + (-1)$	$-1 + 1$	$0 + 1$	$1 + 1$
$2X + Y$	$2 \cdot (-1) + (-1)$	$2 \cdot 0 + (-1)$	$2 \cdot 1 + (-1)$	$2 \cdot (-1) + 1$	$2 \cdot 0 + 1$	$2 \cdot 1 + 1$
$X \cdot Y$	$-1 \cdot (-1)$	$0 \cdot (-1)$	$1 \cdot (-1)$	$-1 \cdot 1$	$0 \cdot 1$	$1 \cdot 1$
P	$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

Тоді ряд розподілу $X + Y$

$X + Y$	-2	-1	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9} + \frac{1}{6} = \frac{7}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$

ряд розподілу $2X + Y$

$2X + Y$	-3	-1	1	3
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{5}{18}$	$\frac{2}{9} + \frac{1}{18} = \frac{5}{18}$	$\frac{1}{9}$

ряд розподілу $X \cdot Y$

$X \cdot Y$	-1	0	1
P	$\frac{2}{9} + \frac{1}{6} = \frac{7}{18}$	$\frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$

в) Математичні сподівання та дисперсії:

$$M(X + Y) = (-2) \cdot \frac{1}{3} + (-1) \cdot \frac{1}{9} + 0 \cdot \frac{7}{18} + 1 \cdot \frac{1}{18} + 2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{-12 - 2 + 1 + 4}{18} = \frac{-9}{18} = -\frac{1}{2};$$

$$M(2X + Y) = (-3) \cdot \frac{1}{3} + (-1) \cdot \frac{5}{18} + 1 \cdot \frac{5}{18} + 3 \cdot \frac{1}{9} = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3};$$

$$M(X \cdot Y) = (-1) \cdot \frac{7}{18} + 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{4}{9} = \frac{-7 + 8}{18} = \frac{1}{18}.$$

$$D(X + Y) = (-2)^2 \cdot \frac{1}{3} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{9} + 0^2 \cdot \frac{7}{18} + 1^2 \cdot \frac{1}{18} + 2^2 \cdot \frac{1}{9} - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{24 + 2 + 1 + 8}{18} - \frac{1}{4} = \frac{61}{36};$$

$$D(2X + Y) = (-3)^2 \cdot \frac{1}{3} + (-1)^2 \cdot \frac{5}{18} + 1^2 \cdot \frac{5}{18} + 3^2 \cdot \frac{1}{9} - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 3 + \frac{10}{18} + 1 - \frac{4}{9} = \frac{37}{9};$$

$$D(X \cdot Y) = (-1)^2 \cdot \frac{7}{18} + 0^2 \cdot \frac{1}{6} + 1^2 \cdot \frac{4}{9} - \left(\frac{1}{18}\right)^2 = \frac{7 + 8}{18} - \frac{1}{324} = \frac{269}{324}.$$

г) Перевіримо формули:

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y), \quad -\frac{1}{2} = -\frac{1}{6} + \left(-\frac{1}{3}\right), \quad -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2};$$

$$\begin{array}{lll}
D(X+Y)=D(X)+D(Y), & \frac{61}{36}=\frac{29}{36}+\frac{8}{9}, & \frac{61}{36}=\frac{61}{36}; \\
M(2X+Y)=2M(X)+M(Y), & -\frac{2}{3}=2\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right), & -\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}; \\
D(2X+Y)=4D(X)+D(Y), & \frac{37}{9}=4\cdot\frac{29}{36}+\frac{8}{9}, & \frac{37}{9}=\frac{37}{9}; \\
M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y), & \frac{1}{18}=-\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right), & \frac{1}{18}=\frac{1}{18}; \\
D(X\cdot Y)\neq D(X)\cdot D(Y), & \frac{269}{324}\neq\frac{29}{36}\cdot\frac{8}{9}, & \frac{269}{324}\neq\frac{232}{324}.
\end{array}$$

3. Завдання для самостійного виконання

1. Дискретна випадкова величина задана рядом розподілу. Побудуйте ряд розподілу випадкової величини $Y = X \cdot X$.

X	-1	1
P	$\frac{\alpha}{2\alpha+1}$	$\frac{\alpha+1}{2\alpha+1}$

2. Дискретні випадкові величини X і Y задані законами розподілів.

а) Знайдіть математичні сподівання та дисперсії величин X і Y .

X	-1	1
P	$\frac{\alpha}{2\alpha+1}$	$\frac{\alpha+1}{2\alpha+1}$

б) Побудуйте ряди розподілів випадкових величин $X+Y$, $2X+Y$, $X\cdot Y$.

в) Знайдіть математичні сподівання та дисперсії $X+Y$, $2X+Y$, $X\cdot Y$.

Y	$-(\alpha+1)$	$2\alpha+1$
P	0,2	0,8

г) Перевірте формули: $M(X+Y)=M(X)+M(Y)$, $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$, $M(2X+Y)=2M(X)+M(Y)$, $D(2X+Y)=4D(X)+D(Y)$, $M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y)$.

ЦІЛОЧИСЛОВІ ДИСКРЕТНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

1. Основні поняття та теореми

Дискретна випадкова величина X має *біноміальний* закон розподілу, якщо ймовірності її можливих значень обчислюються за формулою Бернуллі $P_m = P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, де m – число появи подій в n незалежних випробуваннях, p – ймовірність появи події в кожному випробуванні, $q = 1 - p$.

Якщо число випробувань n велике, а ймовірність p появи події в кожному випробуванні дуже мала, то випадкова величина X (число m появи подій в n незалежних випробуваннях) має *пуассонівський* закон розподілу, а ймовірності її значень визначають за наближеною формулою Пуассона $P_m = P(X = m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$,

де $\lambda = np$ – середнє число появи події в n випробуваннях.

Інколи спроби здійснюють до першої появи випадкової події. Число проведених спроб (невдалих спроб) є цілочисловою випадковою величиною X , що має *геометричний* закон розподілу. Формула ймовірностей її можливих значень: $P_m = P(X = m) = pq^{m-1}$, $m = 1, 2, \dots$ або $P_m = P(X = m) = pq^m$, $m = 0, 1, \dots$ (якщо рахуються лише невдалі спроби).

Цілочислова випадкова величина X має рівномірний закон розподілу, якщо ймовірності її можливих значень однакові. Якщо величина може приймати n значень, то ймовірності її можливих значень величини рівні $P_m = P(X = m) = \frac{1}{n}$.

Нехай є деяка множина n однотипних елементів, з яких n^* елементів мають, наприклад, ознаку A , а решта $n - n^*$ елементів мають ознаку B . З множини навмання беруть k елементів. Число елементів m з ознакою A (або B), що буде серед k навмання взятих елементів є цілочисловою випадковою величиною з *гіпергеометричним* законом розподілу, ймовірності її можливих значень обчислюються за формулою $P_m = P(X = m) = \frac{C_{n^*}^m C_{n-n^*}^{k-m}}{C_n^k}$.

Формули для обчислення характеристик цілочислових дискретних величин наведені в таблиці:

Розподіл	Формула	$M(X)$	$D(X)$
Біноміальний	$P_m = P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}$	np	npq
Пуассонівський	$P_m = P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$	λ	λ
Геометричний $m = 1, 2, 3, \dots$	$P_m = P(X = m) = pq^{m-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
$m = 0, 1, 2, \dots$	$P_m = P(X = m) = pq^m$	$\frac{q}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
Рівномірний	$P_m = P(X = m) = \frac{1}{n}$	$\frac{1+n}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Гіпергеометричний	$P_m = P(X = m) = \frac{C_{n^*}^m C_{n-n^*}^{k-m}}{C_n^k}$	$\frac{kn^*}{n}$	$\frac{kn^*(n-k)}{n^2} \cdot \frac{n-n^*}{n-1}$

2. Приклади виконання завдань

1. Схожість насіння рівна $\frac{11}{12}$. Для дослідження відібрано 5 насінин.

Напишіть біноміальний розподіл випадкової величини X (числа сходів насінин).

Розв'язання:

За умовою $n = 5$, $p = \frac{11}{12}$, тоді $q = 1 - p = \frac{1}{12}$. Випадкова величина X приймає значення 0, 1, 2, 3, 4, 5. Відповідні ймовірності визначимо за формулою $P_m = P(X = m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}$:

$$P_0 = P(X = 0) = \frac{5!}{0!(5-0)!} \left(\frac{11}{12}\right)^0 \left(\frac{1}{12}\right)^5 = \frac{1}{12^5} \approx 0,$$

$$P_1 = P(X = 1) = \frac{5!}{1!(5-1)!} \left(\frac{11}{12}\right)^1 \left(\frac{1}{12}\right)^4 = \frac{55}{12^5} \approx 0,0002,$$

$$P_2 = P(X = 2) = \frac{5!}{2!(5-2)!} \left(\frac{11}{12}\right)^2 \left(\frac{1}{12}\right)^3 = \frac{1210}{12^2} \approx 0,0049,$$

$$P_3 = P(X = 3) = \frac{5!}{3!(5-3)!} \left(\frac{11}{12}\right)^3 \left(\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{13310}{12^2} \approx 0,0535,$$

$$P_4 = P(X = 4) = \frac{5!}{4!(5-4)!} \left(\frac{11}{12}\right)^4 \left(\frac{1}{12}\right)^1 = \frac{73205}{12^2} \approx 0,2942,$$

$$P_5 = P(X = 5) = \frac{5!}{5!(5-5)!} \left(\frac{11}{12}\right)^5 \left(\frac{1}{12}\right)^0 = \frac{161051}{12^2} \approx 0,6472.$$

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{12^2}$	$\frac{55}{12^2}$	$\frac{1210}{12^2}$	$\frac{13310}{12^2}$	$\frac{73205}{12^2}$	$\frac{161051}{12^2}$

Умова нормування $\frac{1 + 55 + 1210 + 13310 + 73205 + 161051}{12^5} = 1$ виконується.

2. По мішені виконують чотири незалежні постріли. Ймовірність влучення у випадку одного пострілу дорівнює 0,25. Обчисліть числові характеристики випадкової величини X (кількості влучень у мішень).

Розв'язання:

Випадкова величина X може приймати значення 0, 1, 2, 3, 4 і має біноміальний розподіл. За умовою $n = 4$, $p = 0,25$, $q = 1 - p = 0,75$, тоді отримаємо $M(X) = np = 4 \cdot 0,25 = 1$, $D(X) = npq = 4 \cdot 0,25 \cdot 0,75 = 0,75$.

Відповідь: 1; 0,75.

3. Прилад має 1000 мікроелементів, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що мікроелемент вийде із ладу під час роботи приладу, є величиною сталою і рівна 0,004. Визначте числові характеристики випадкової величини X (числа мікроелементів, що вийдуть із ладу під час роботи приладу).

Розв'язання:

Випадкова величини X є цілочисловою і має пуассонівський розподіл. Так як $\lambda = np = 1000 \cdot 0,004 = 4$, то $M(X) = \lambda = 4$, $D(X) = \lambda = 4$, $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 2$.

Відповідь: 4; 4; 2.

4. У деякому населеному пункті 4,9% дальтоніків. Навмання обирають 1000 мешканців цього населеного пункту. Визначте числові характеристики випадкової величини X (числа дальтоніків, яких буде виявлено серед обраних мешканців).

Розв'язання:

$\lambda = np = 1000 \cdot 0,049 = 49$, $M(X) = \lambda = 49$, $D(X) = \lambda = 49$, $\sigma(X) = \sqrt{49} = 7$.

Відповідь: 49; 49; 7.

5. Спортсмен стріляє зі спортивної рушниці по одній і тій самій мішені. Ймовірність влучити в мішень при одному пострілі є величиною сталою і дорівнює 0,8. Стрільба по мішені ведеться до першого влучення. Визначте числові характеристики випадкової величини X (числа витрачених спортсменом набоїв).

Розв'язання:

Випадкова величина X має геометричний розподіл. Так як $p = 0,8$, $q = 0,2$, то $M(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,8} = 1,25$, $D(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{0,2}{0,8^2} = 0,3125$, $\sigma(X) = \sqrt{0,3125} \approx 0,56$.

Відповідь: 1,25; 0,3125; 0,56.

6. Знайдіть числові характеристики випадкової цілочислової величини X , що має рівномірний закон розподілу, якщо можливі значення її такі: 1, 2, ..., 50.

Розв'язання:

Оскільки $n = 50$, то математичне сподівання $M(X) = \frac{1+n}{2} = \frac{1+50}{2} = 25,5$, дисперсія $D(X) = \frac{n^2-1}{12} = \frac{50^2-1}{12} = 208,25$, середнє квадратичне відхилення $\sigma(X) = \sqrt{208,25} \approx 14,4$.

Відповідь: 25,5; 208,25; 14,4.

7. В ящику міститься 10 однотипних деталей, із них 7 стандартних, а решта є бракованими. Навмання із ящика беруть k деталей. Обчисліть основні числові характеристики випадкової величини X (кількості числа стандартних деталей серед k навмання взятих), якщо а) $k = 3$; б) $k = 5$; в) $k = 7$.

Розв'язання:

Величина X має гіпергеометричний закон розподілу, де $n = 10$, $n^* = 7$. Тоді:

$$\text{а) } M(x) = \frac{kn^*}{n} = \frac{3 \cdot 7}{10} = 2,1; D(x) = \frac{kn^*(n-k)}{n^2} \cdot \frac{n-n^*}{n-1} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 7}{10^2} \cdot \frac{3}{9} = 0,49.$$

$$\text{б) } M(x) = \frac{kn^*}{n} = \frac{5 \cdot 7}{10} = 3,5; D(x) = \frac{kn^*(n-k)}{n^2} \cdot \frac{n-n^*}{n-1} = \frac{5 \cdot 7 \cdot 5}{10^2} \cdot \frac{3}{9} \approx 0,583.$$

$$\text{в) } M(x) = \frac{kn^*}{n} = \frac{7 \cdot 7}{10} = 4,9; D(x) = \frac{kn^*(n-k)}{n^2} \cdot \frac{n-n^*}{n-1} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 3}{10^2} \cdot \frac{3}{9} = 0,49.$$

Відповідь: а) 2,1; 0,49; б) 3,5; 0,583; в) 4,9; 0,49.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Схожість насіння рівна $\frac{\alpha}{\alpha+5}$. Для дослідження відібрано 5 насінин.

Напишіть біноміальний розподіл випадкової величини X (числа сходів насінин).

2. По мішені виконують чотири незалежні постріли. Ймовірність влучення у випадку одного пострілу дорівнює $\frac{30+\alpha}{100}$. Обчисліть числові характеристики випадкової величини X (кількості влучень у мішень).

3. Прилад має 500 мікроелементів, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що мікроелемент вийде із ладу під час роботи приладу, є величиною сталою і дорівнює $\frac{5+\alpha}{1000}$. Визначте числові характеристики випадкової величини X (числа мікроелементів, що вийдуть із ладу під час роботи приладу).

4. У деякому населеному пункті 4,3% дальтоніків. Навмання обирають 100α мешканців цього населеного пункту. Визначте числові характеристики випадкової величини X (числа дальтоніків, яких буде виявлено серед обраних мешканців).

5. Спортсмен стріляє зі спортивної рушниці по одній і тій самій мішені. Ймовірність влучити в мішень при одному пострілі є величиною сталою і дорівнює $\frac{79-\alpha}{100}$. Стрільба по мішені ведеться до першого влучення. Визначте числові характеристики випадкової величини X (числа витрачених спортсменом набойів).

6. Знайдіть числові характеристики випадкової цілочислової величини X , що має рівномірний закон розподілу, якщо можливі значення її такі: $1, 2, \dots, (\alpha + 15)$.

7. В ящику міститься 10 однотипних деталей, із них 7 стандартних, а решта є бракованими. Навмання із ящика беруть k деталей. Обчисліть основні числові характеристики випадкової величини X (кількості числа стандартних деталей серед k навмання взятих), якщо а) $k = 4$; б) $k = 6$.

НЕПЕРЕРВНА ВИПАДКОВА ВЕЛИЧИНА, ХАРАКТЕРИСТИКИ

1. Основні поняття та теореми

Неперервною називають таку випадкову величину, яка може приймати всі значення з деякого скінченного або нескінченного інтервалу.

Задати неперервну випадкову можна аналітично або графічним способом.

Аналітично випадкову неперервну величину задають за допомогою інтегральної функції розподілу або за допомогою відповідної диференціальної функції розподілу.

Інтегральна функція розподілу – функція $F(x)$, яка визначає для кожного значення x ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення менше x , тобто $F(x) = P(X < x)$. Значення інтегральної функції розподілу $0 \leq F(x) \leq 1$.

Диференціальною функцією (щільністю) розподілу $f(x)$ неперервної випадкової величини X називають першу похідну від $F(x)$, тобто $f(x) = F'(x)$. Тоді, якщо для неперервної випадкової величини X відома диференціальна функція $f(x)$, то її інтегральна функція $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$ або $F(x) = \int_a^x f(x)dx$.

Ймовірність того, що неперервна випадкова величина X прийме значення з проміжку $\langle a; b \rangle$, можна визначити як $P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx$ або за формулою $P(a < x < b) = F(b) - F(a)$.

Умова нормування для неперервної випадкової величини X має вигляд $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ або $\int_a^b f(x)dx = 1$ (якщо X приймає значення тільки з проміжку $\langle a; b \rangle$).

Модом M_0 для неперервної випадкової величини X називають те її можливе значення, якому відповідає максимальне значення щільності розподілу, тобто $f(M_0) = \max$.

Медіаною M_E розподілу неперервної випадкової величини X є те її значення, для якого виконується $P(-\infty < X < M_E) = P(M_E < X < +\infty)$ або $F(M_E) = 0,5$.

Математичне сподівання неперервної випадкової величини X визначають як $M(X) = \int_a^b x \cdot f(x) dx$, якщо значення X належать проміжку $\langle a; b \rangle$, або як

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx, \text{ якщо значення } X \text{ належать всій вісі } Ox.$$

Дисперсію неперервної випадкової величини X визначають як $D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2 \cdot f(x) dx$, якщо значення X належать проміжку $\langle a; b \rangle$, або

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 \cdot f(x) dx, \quad M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx, \text{ якщо значення } X \text{ належать}$$

всій вісі Ox .

Використовують для обчислення дисперсії також формули $D(X) = \int_a^b x^2 \cdot f(x) dx - M^2(X)$ або $D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx - M^2(X)$.

Середнє квадратичне відхилення визначається як $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

2. Приклади виконання завдань

1. Неперервна випадкова величина задана інтегральною функцією розподілу Коші $F(x) = \frac{A}{50} + \frac{1}{\pi} \arctg x$, $-\infty < x < +\infty$. Знайдіть коефіцієнт A .

Розв'язання:

$$\text{Так як } F(-\infty) = 0, \text{ то } \frac{A}{50} + \frac{1}{\pi} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \frac{A}{50} = \frac{1}{2}, \quad A = 25.$$

Відповідь: 25.

2. Неперервна випадкова величина задана щільністю розподілу Лапласа $f(x) = A \cdot e^{-50|x|}$. Знайдіть коефіцієнт A .

Розв'язання:

За умовою нормування $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ маємо $\int_{-\infty}^{+\infty} A \cdot e^{-50|x|} dx = 2A \int_0^{+\infty} e^{-50x} dx = 1$. Так

$$\text{як } \int_0^{+\infty} e^{-50x} dx = -\frac{1}{50} e^{-50x} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{50} e^{-50x} \Big|_{+\infty}^0 = \frac{1}{50} \cdot 1 - \frac{1}{50} \cdot 0 = \frac{1}{50}, \text{ то } \frac{2A}{50} = 1, \quad A = 25.$$

Відповідь: 25.

3. Неперервна випадкова величина задана диференціальною функцією

$$\text{розподілу } f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{A(50x - x^2)}{50^2}, & 0 < x \leq 50; \\ 0 & x > 50. \end{cases} \text{ Знайдіть коефіцієнт } A, \text{ побудуйте}$$

графік $f(x)$.

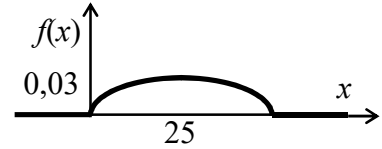
Розв'язання:

Умова нормування має вигляд $\int_0^{50} \frac{A(50x - x^2)}{50^2} dx = 1$. Оскільки

$$\frac{A}{50^2} \int_0^{50} (50x - x^2) dx = \frac{A}{50^2} \left(\frac{50x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{50} = \frac{A}{50^2} \cdot \frac{50^3}{6} = \frac{50A}{6}, \text{ то } A = \frac{3}{25}.$$

Графік приведено.

Відповідь: $\frac{3}{25}$; $f(x) = \frac{3(50x - x^2)}{62500}$ при $0 < x \leq 50$.



4. Неперервна випадкова величина X задана інтегральною функцією розподілу $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 50; \\ (x-50)^2, & 50 < x \leq 51; \\ 1, & x > 51. \end{cases}$ Знайдіть ймовірність попадання величини X в інтервал $\left(50\frac{50}{51}; 100\right)$.

Розв'язання:

$$P\left(50\frac{50}{51} < X < 100\right) = F(100) - F\left(50\frac{50}{51}\right) = 1 - \left(50\frac{50}{51} - 50\right)^2 = 1 - \left(\frac{50}{51}\right)^2 = \frac{101}{2601}.$$

Відповідь: $\frac{101}{2601}$.

5. Неперервна випадкова величина X задана диференціальною функцією розподілу $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{x+51}{10100}, & 0 < x \leq 100; \\ 0, & x > 100. \end{cases}$ Знайдіть ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $(25; 50)$.

Розв'язання:

$$P(25 < X < 50) = \int_{25}^{50} \frac{x+51}{10100} dx = \frac{1}{10100} \left(\frac{(x+51)^2}{2} \right) \Big|_{25}^{50} = \frac{101^2 - 76^2}{10100 \cdot 2} = \frac{177 \cdot 25}{20200} \approx 0,219.$$

Відповідь: 0,219.

6. Неперервна випадкова величина X задана інтегральною функцією розподілу $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -51; \\ \frac{(x+51)^3}{8 \cdot 51^3}, & -51 < x \leq 51; \\ 1, & x > 51. \end{cases}$ Запишіть диференціальну функцію розподілу та визначте ймовірність попадання величини X в інтервал $(25; 100)$.

Розв'язання:

$$P(25 < X < 100) = F(100) - F(25) = 1 - \frac{76^3}{8 \cdot 51^3} \approx 0,586.$$

Оскільки $f(x) = F'(x)$, то $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -51; \\ \frac{3(x+51)^2}{8 \cdot 51^3}, & -51 < x \leq 51; \\ 0, & x > 51. \end{cases}$

$$P(25 < X < 100) = \int_{25}^{51} \frac{3(x+51)^2}{8 \cdot 51^3} dx + \int_{51}^{100} 0 dx = \frac{(x+51)^3}{8 \cdot 51^3} \Big|_{25}^{51} = 1 - \frac{76^3}{8 \cdot 51^3} \approx 0,586.$$

Відповідь: $f(x) = \frac{3(x+51)^2}{8 \cdot 51^3}$ при $-51 < x \leq 50$; 0,586.

7. Неперервна випадкова величина X задана інтегральною функцією розподілу $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 49; \\ \frac{(x-49)^2}{101^2}, & 49 < x \leq 150; \\ 1, & x > 150. \end{cases}$ Яка ймовірність того, що в результаті

п'яти незалежних випробувань величина X рівно три рази прийме значення з інтервалу (100; 200)?

Розв'язання:

$$P(100 < X < 200) = F(200) - F(100) = 1 - \frac{(100-49)^2}{101^2} \approx 0,745 = p, \quad q = 0,255.$$

Тоді з $P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$ маємо $P_5(3) = \frac{5!}{3!2!} \cdot 0,745^3 \cdot 0,255^2 \approx 0,269$.

Відповідь: 0,269.

8. Неперервна випадкова величина X задана диференціальною функцією розподілу $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{x+60}{4250}, & 0 < x \leq 50; \\ 0, & x > 50. \end{cases}$ Визначте моду та медіану.

Розв'язання:

Так як $f(50) = \max$, то мода $M_0 = 50$.

Так як $F(x) = \int_0^x \frac{x+60}{4250} dx = \frac{(x+60)^2}{8500} \Big|_0^x = \frac{(x+60)^2}{8500} - \frac{60^2}{8500} = \frac{x^2 + 120x}{8500}$, то

інтегральна функція розподілу має вигляд $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{x^2 + 120x}{8500}, & 0 < x \leq 50; \\ 1, & x > 50. \end{cases}$

З рівняння $F(M_E) = 0,5$ маємо $\frac{x^2 + 120x}{8500} = 0,5$, тоді $x^2 + 120x = 4250$, корені

рівняння $x_{1,2} = -60 \pm \sqrt{60^2 + 4250} = -60 \pm \sqrt{7850}$. Тоді $M_E = -60 + \sqrt{7850} \approx 28,6$.

Відповідь: 50; 28,6.

9. Крива щільності розподілу неперервної випадкової величини X являє собою верхню частину еліпса з центром у початку координат, з горизонтальною піввіссю 15 та з вертикальною піввіссю $\frac{2}{15\pi}$. Знайдіть математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення випадкової величини X .

Розв'язання:

Диференціальна функція розподілу
$$f(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{225-x^2}}{225\pi} & x \in (-15;15); \\ 0, & x \notin (-15;15). \end{cases}$$

Розподіл симетричний відносно Oy , тому математичне сподівання $M(X)=0$. Тоді

$$D(X) = \int_{-15}^{15} \frac{2x^2}{225\pi} \sqrt{225-x^2} dx = \frac{4}{225\pi} \int_0^{15} x^2 \sqrt{225-x^2} dx = \left[\begin{array}{ll} x=15 \sin t & dx=15 \cos t dt \\ x=0 & t=0 \\ x=15 & t=\pi/2 \end{array} \right] =$$

$$= \frac{4 \cdot 225}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{225}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt = \frac{225}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 4t}{2} dt = \frac{225}{2\pi} \left(t - \frac{\sin 4t}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{225}{4},$$

середнє квадратичне відхилення $\sigma(X) = \frac{15}{2}$.

Відповідь: 0; 56,25; 7,5.

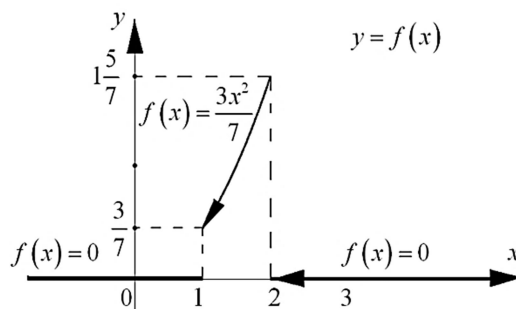
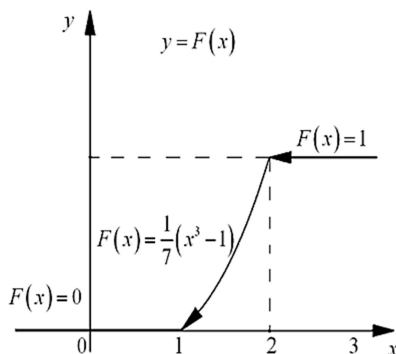
10. Неперервна випадкова величина X задана інтегральною функцією

розподілу
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1; \\ \frac{x^3-1}{7}, & 1 < x \leq 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$
 Визначте: 1) диференціальну функцію

розподілу та побудуйте графіки інтегральної та диференціальної функцій; 2) математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратне відхилення величини X ; 3) ймовірність того, що величина X набуде значення з інтервалу $(1,5;3)$.

Розв'язання:

1) $f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1; \\ \frac{3x^2}{7}, & 1 < x \leq 2; \\ 0, & x > 2. \end{cases}$ Графіки функцій $F(x)$ та $f(x)$ наведені.



2) Знаходимо математичне сподівання за формулою $M(X) = \int_a^b x \cdot f(x) dx$,

$$\text{отримуємо } M(X) = \int_1^2 x \cdot \frac{3x^2}{7} dx = \frac{3}{7} \int_1^2 x^3 dx = \frac{3}{7} \left. \frac{x^4}{4} \right|_1^2 = \frac{3}{28} (16 - 1) = \frac{45}{28}.$$

Знаходимо дисперсію двома способами:

$$\begin{aligned} \text{- за формулою } D(X) &= \int_a^b (x - M(X))^2 \cdot f(x) dx \text{ маємо } D(X) = \int_1^2 \left(x - \frac{45}{28}\right)^2 \cdot \frac{3x^2}{7} dx = \\ &= \frac{3}{7} \int_1^2 \left(x^2 - \frac{45}{14}x + \frac{2025}{784}\right) x^2 dx = \frac{3}{7} \int_1^2 \left(x^4 - \frac{45}{14}x^3 + \frac{2025}{784}x^2\right) dx = \frac{3}{7} \left(\frac{x^5}{5} - \frac{45}{14} \frac{x^4}{4} + \frac{2025}{784} \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \\ &= \frac{3}{7} \left(\frac{x^5}{5} - \frac{45x^4}{56} + \frac{675x^3}{784} \right) \Big|_1^2 = \frac{3}{7} \left[\frac{31}{5} - \frac{675}{56} + \frac{4725}{784} \right] = \frac{3}{7} \cdot \frac{679}{3920} = \frac{291}{3920}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{- за формулою } D(X) &= \int_a^b x^2 \cdot f(x) dx - M^2(X) \text{ маємо } D(X) = \int_1^2 x^2 \cdot \frac{3x^2}{7} dx - \left(\frac{45}{28}\right)^2 = \\ &= \frac{3}{7} \int_1^2 x^4 dx - \left(\frac{45}{28}\right)^2 = \frac{3}{7} \left. \frac{x^5}{5} \right|_1^2 - \frac{2025}{784} = \frac{3}{35} (32 - 1) - \frac{2025}{784} = \frac{93}{35} - \frac{2025}{784} = \frac{291}{3920}. \end{aligned}$$

$$\text{Середнє квадратичне відхилення } \sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{291}{3920}}.$$

3) ймовірність $P(1,5 < X < 3)$ можна обчислити двома способами:

$$\begin{aligned} \text{- за інтегральною функцією маємо } P(1,5 < X < 3) &= P(1,5 < X \leq 2) + P(2 < X < 3) = \\ &= F(2) - F(1,5) + F(3) - F(2) = \frac{2^3 - 1}{7} - \frac{1,5^3 - 1}{7} + 1 - 1 = 1 - \frac{27 - 8}{56} = \frac{37}{56}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{- за диференціальною функцією маємо ймовірність } P(1,5 < X < 3) &= \int_{1,5}^3 f(x) dx = \\ &= \int_{1,5}^2 \frac{3}{7} x^2 dx + \int_2^3 0 dx = \frac{3}{7} \left. \frac{x^3}{3} \right|_{1,5}^2 = \frac{2^3}{7} - \frac{1,5^3}{7} = \frac{64 - 27}{56} = \frac{37}{56}. \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь: } f(x) = \frac{3x^2}{7} \quad (1 < x \leq 2); \quad M(X) = \frac{45}{28}, \quad D(X) = \frac{291}{3920}, \quad \sigma(X) = \sqrt{\frac{291}{3920}};$$

$$P(1,5 < X < 3) = \frac{37}{56}.$$

3. Завдання для самостійного виконання

1. Неперервна випадкова величина задана інтегральною функцією розподілу Коші $F(x) = \frac{A}{\alpha} + \frac{1}{\pi} \arctg x$, $-\infty < x < +\infty$. Знайдіть коефіцієнт A .

2. Неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу Лапласа $f(x) = A \cdot e^{-\alpha|x|}$, $\alpha > 0$. Знайдіть коефіцієнт A .

3. Неперервна випадкова величина задана диференціальною функцією

$$\text{розподілу } f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{A(\alpha x - x^2)}{\alpha^2}, & 0 < x \leq \alpha; \\ 0, & x > \alpha. \end{cases}$$

Знайдіть коефіцієнт A , побудуйте графік $f(x)$.

4. Неперервна випадкова величина X задана інтегральною функцією

$$\text{розподілу } F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \alpha; \\ (x - \alpha)^2, & \alpha < x \leq \alpha + 1; \\ 1, & x > \alpha + 1. \end{cases}$$

Знайдіть ймовірність попадання величини X в інтервал $\left(\alpha + \frac{\alpha}{\alpha + 1}; 2\alpha\right)$.

5. Неперервна випадкова величина X задана диференціальною функцією

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{x + \alpha + 1}{4\alpha^2 + 2\alpha}, & 0 < x \leq 2\alpha; \\ 0, & x > 2\alpha. \end{cases}$$

Знайдіть ймовірність попадання величини X в інтервал $\left(\frac{\alpha}{2}; \alpha\right)$.

6. Неперервна випадкова величина X задана інтегральною функцією

$$\text{розподілу } F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\alpha - 1; \\ \frac{(x + \alpha + 1)^3}{8 \cdot (\alpha + 1)^3}, & -\alpha - 1 < x \leq \alpha + 1; \\ 1, & x > \alpha + 1. \end{cases}$$

Запишіть диференціальну функцію розподілу та визначте ймовірність попадання величини X в інтервал $\left(\frac{\alpha}{2}; 2\alpha\right)$.

7. Неперервна випадкова величина X задана інтегральною функцією

$$\text{розподілу } F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \alpha - 1; \\ \frac{(x - \alpha + 1)^2}{(2\alpha + 1)^2}, & \alpha - 1 < x \leq 3\alpha; \\ 1, & x > 3\alpha. \end{cases}$$

Знайдіть ймовірність того, що в результаті п'яти незалежних випробувань величина X рівно три рази прийме значення, що належить інтервалу $(2\alpha; 4\alpha)$?

8. Неперервна випадкова величина X задана диференціальною функцією

$$\text{розподілу } f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{2(x + \alpha + 10)}{3\alpha^2 + 20\alpha}, & 0 < x \leq \alpha; \\ 0, & x > \alpha. \end{cases}$$

Визначте і моду та медіану.

9. Крива щільності розподілу неперервної випадкової величини X являє собою верхню частину еліпса з центром у початку координат, з горизонтальною піввіссю α та з вертикальною піввіссю $\frac{2}{\alpha\pi}$. Знайдіть математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення випадкової величини X .

10. Неперервна випадкова величина X задана інтегральною функцією

$$\text{розподілу } F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \alpha; \\ \frac{x^2 - \alpha^2}{3\alpha^2}, & \alpha < x \leq 2\alpha; \\ 1, & x > 2\alpha. \end{cases}$$

Визначте: 1) диференціальну функцію розподілу та побудуйте графіки інтегральної та диференціальної функцій; 2) математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення величини X ; 3) ймовірність того, що величина X прийме значення з інтервалу $\left(\frac{3\alpha}{2}; \frac{5\alpha}{2}\right)$.

ОСНОВНІ РОЗПОДІЛИ НЕПЕРЕРВНОЇ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ

1. Основні поняття та теореми

Неперервна випадкова величина X , рівномірно розподілена на відрізку $[a; b]$,

$$\text{має щільність розподілу } f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \frac{1}{b-a}, & a < x \leq b, \\ 0, & x > b \end{cases} \text{ і числові характеристики}$$

$$M(X) = \frac{b+a}{2}, \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Неперервна випадкова величина X , розподілена за показниковим законом з параметром $\lambda > 0$, має щільність розподілу $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$ та числові

$$\text{характеристики } M(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Неперервна випадкова величина X , розподілена за законом Лапласа з параметром $\lambda > 0$, має щільність розподілу $f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$ і числові

$$\text{характеристики } M(X) = 0, \quad D(X) = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Неперервна випадкова величина X , розподілена за законом прямокутного трикутника, має щільність розподілу $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{b} \left(1 - \frac{x}{b}\right), & x \in (0; b), \\ 0, & x \notin (0; b) \end{cases}$ та числові

$$\text{характеристики } M(X) = \frac{b}{3}, \quad D(X) = \frac{b^2}{18}.$$

Неперервна випадкова величина X , розподілена за законом Сімпсона, має

щільність розподілу $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b} \left(1 - \frac{|x|}{b}\right), & x \in (-b; b), \\ 0, & x \notin (-b; b) \end{cases}$ і числові характеристики

$$M(X) = 0, D(X) = \frac{b^2}{6}.$$

Неперервна випадкова величина називається нормально розподіленою з

параметрами a, σ , якщо щільність її розподілу має вигляд $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$,

$x \in (-\infty; +\infty)$. $F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}} dz$ називається нормальною функцією розподілу.

Для неперервної випадкової величини, розподіленої нормально, математичне сподівання, мода і медіана дорівнюють параметру a , а середнє квадратичне відхилення дорівнює σ .

Нормальний закон позначають $N(a; \sigma)$. Якщо параметри $a = 0, \sigma = 1$, то нормальний закон називають нормованим.

Якщо випадкова величина X має нормальний закон розподілу $N(a; \sigma)$, то

випадкова величина $Y = kX + b$ має розподіл $f(y) = \frac{1}{\sigma|k|\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-(ka+b))^2}{2k^2\sigma^2}}$, тобто

при лінійному перетворенні випадкова величина Y також має нормальний закон розподілу $N(ka + b; |k|\sigma)$.

Ймовірність того, що нормально розподілена величина X прийме значення,

яке належить інтервалу $(\alpha; \beta)$, рівна $P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$, де $\Phi(x)$ – функція Лапласа.

Ймовірність того, що абсолютна величина відхилення випадкової величини X , розподіленої нормально, від її математичного сподівання менше додатного числа ε , дорівнює $P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$.

2. Приклади виконання завдань

1. Неперервна випадкова величина X рівномірно розподілена на ділянці $(50; 100)$. Знайдіть математичне сподівання та дисперсію величини.

Розв'язання:

За умовою неперервна випадкова величина X розподілена рівномірно,

$$a = 50, b = 100. \text{ Тоді } M(X) = \frac{100 + 50}{2} = 75, D(X) = \frac{(100 - 50)^2}{12} = \frac{625}{3}.$$

Відповідь: $75, \frac{625}{3}$.

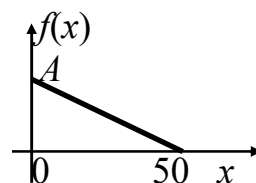
2. Неперервна випадкова величина X розподілена за законом Лапласа $f(x) = \frac{15}{2} e^{-15|x|}$, $-\infty < x < \infty$. Знайдіть дисперсію величини.

Розв'язання:

За умовою параметр розподілу $\lambda = 15$, тоді $D(X) = \frac{2}{\lambda^2} = \frac{2}{15^2} = \frac{2}{225}$.

Відповідь: $\frac{2}{225}$.

3. Неперервна випадкова величина X розподілена за законом прямокутного трикутника в інтервалі $(0;50)$. Запишіть вираз щільності розподілу, обчисліть математичне сподівання та дисперсію величини.



Розв'язання:

За умовою нормування $\int_a^b f(x)dx = 1$ площа прямокутного трикутника під графіком диференціальної функції рівна $S = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot h = 1$, тоді $h = \frac{1}{25}$. Складемо рівняння прямої у відрізках на осях: $\frac{x}{50} + \frac{y}{\frac{1}{25}} = 1$, тоді щільність розподілу

$$f(x) = \frac{1}{25} \left(1 - \frac{x}{50} \right). \text{ Так як } b = 50, \text{ то } M(X) = \frac{b}{3} = \frac{50}{3}, D(X) = \frac{b^2}{18} = \frac{1250}{9}.$$

Відповідь: $f(x) = \frac{1}{25} - \frac{x}{1250}$, $x \in (0;50)$; $\frac{50}{3}$, $\frac{1250}{9}$.

4. Неперервна випадкова величина X розподілена за законом Сімпсона $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{50} \left(1 - \frac{|x|}{50} \right), & x \in (-50;50); \\ 0, & x \notin (-50;50). \end{cases}$ Знайдіть дисперсію величини.

Розв'язання:

Оскільки $b = 50$, то дисперсія рівна $D(X) = \frac{b^2}{6} = \frac{50^2}{6}$.

Відповідь: $\frac{2500}{6}$.

5. Знайдіть математичне сподівання суми $X_1 + X_2$ незалежних випадкових величин з нормальними розподілами $f_1(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-72)^2}{2\sigma^2}}$, $f_2(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-73)^2}{2\sigma^2}}$.

Розв'язання:

$$M(X_1) = 72, M(X_2) = 73, M(X_1 + X_2) = M(X_1) + M(X_2) = 72 + 73 = 145.$$

Відповідь: 145.

6. Знайдіть дисперсію суми $X_1 + X_2$ незалежних випадкових величин, які мають нормальні розподіли $f_1(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{50}}$, $f_2(x) = \frac{1}{7\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{98}}$.

Розв'язання:

$$D(X_1) = 25, D(X_2) = 49, D(X_1 + X_2) = D(X_1) + D(X_2) = 25 + 49 = 74.$$

Відповідь: 74.

7. Неперервна випадкова величина X має нормальний розподіл $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-50)^2}{2}}$. Знайдіть таке значення сталої B , щоб лінійна функція $Y = 2X + B$ мала нормований нормальний розподіл.

Розв'язання:

Так як $M(2X + B) = 2M(X) + B$, $M(X) = 50$, $M(Y) = 0$, то маємо $0 = 2 \cdot 50 + B$, $B = -100$.

Відповідь: -100.

8. Неперервна випадкова величина X має нормальний розподіл $f(x) = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{200}}$. Знайдіть таке значення сталої A , щоб лінійна функція $Y = AX + B$ мала нормований нормальний розподіл.

Розв'язання:

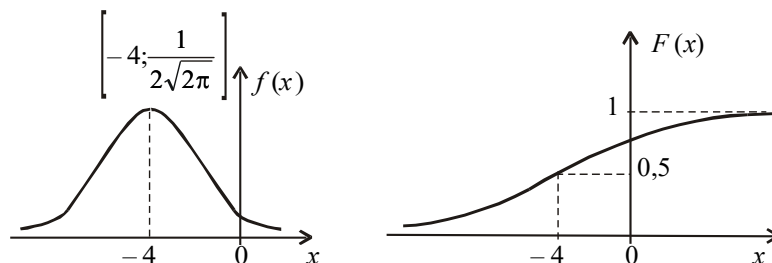
Так як $D(AX + B) = A^2 D(X)$, $D(X) = 100$, $D(Y) = 1$, то $1 = A^2 \cdot 100$, $A = 0,1$.

Відповідь: 0,1.

9. Випадкова величина X має закон розподілу $N(-4; 2)$. Запишіть вирази для щільності розподілу $f(x)$ та функції розподілу $F(x)$ і накресліть їх графіки. Чому дорівнюють мода і медіана?

Розв'язання:

Так як $N(a; \sigma)$ – позначення нормального розподілу, то маємо щільність розподілу $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+4)^2}{8}}$, $-\infty < x < +\infty$, звідки $F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+4)^2}{8}} dx$, $-\infty < x < +\infty$. Графіки $f(x)$, $F(x)$ наведені. $M_O = M_E = a = -4$.



Відповідь: $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+4)^2}{8}}$, $F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+4)^2}{8}} dx$, $M_O = M_E = -4$.

10. Неперервна випадкова величина X має закон розподілу $N(-4; 2)$. Оцініть ймовірність $P(-6 < X < 1)$.

Розв'язання:

Використовуючи формулу $P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$, обчислюємо

$$P(-6 < x < 1) = \Phi\left(\frac{1+4}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-6+4}{2}\right) = \Phi(2,5) - \Phi(-1) = 0,4938 + 0,3413 = 0,8351.$$

Відповідь: 0,8351.

11. Неперервна випадкова величина X має нормальний розподіл

$$f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{50}}. \text{ Оцініть ймовірність } P(|X - a| \geq 7,5).$$

Розв'язання:

Згідно $P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ маємо $P(|X - a| < 7,5) = 2\Phi\left(\frac{7,5}{5}\right)$. Так як $\Phi(1,5) = 0,4332$, то $P(|X - a| < 7,5) = 0,8664$. Тоді $P(|X - a| \geq 7,5) = 1 - 0,8664 = 0,1336$.

Відповідь: 0,1336.

12. Деталі, що випускає цех, розподілені за нормальним законом. Стандартна довжина деталі (математичне сподівання) дорівнює $a = 5\text{мм}$, середнє квадратичне відхилення рівне $\sigma = 3\text{мм}$. Знайдіть: а) ймовірність того, що діаметр навання взятої деталі буде більше $\alpha = 4\text{мм}$ і менше $\beta = 8\text{мм}$; б) ймовірність того, що діаметр деталі відхилиться від стандартної довжини не більше, як на $\delta = 4\text{мм}$.

Розв'язання:

а) Підставимо дані у формулу $P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$, маємо

$$P(4 < X < 8) = \Phi\left(\frac{8-5}{3}\right) - \Phi\left(\frac{4-5}{3}\right) = \Phi(1) - \Phi(-0,33) \approx 0,3413 + 0,1293 = 0,4706;$$

б) у відповідності з формулою $P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ після підстановки даних одержимо $P(|X - 5| < 4) = 2\Phi\left(\frac{4}{3}\right) = 2\Phi(1,33) = 2 \cdot 0,4082 = 0,8164$.

Відповідь: 0,4706, 0,8164.

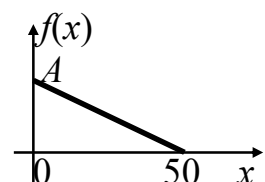
3. Завдання для самостійного виконання

1. Неперервна випадкова величина X рівномірно розподілена на ділянці $(\alpha; 2\alpha)$. Знайдіть математичне сподівання та дисперсію величини.

2. Неперервна випадкова величина X розподілена за законом Лапласа

$$f(x) = \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|x|}, \quad -\infty < x < \infty. \text{ Знайдіть дисперсію величини.}$$

3. Неперервна випадкова величина X розподілена за законом прямокутного трикутника в інтервалі $(0; \alpha)$. Запишіть вираз щільності розподілу величини та обчисліть математичне сподівання та дисперсію величини.



4. Неперервна випадкова величина X розподілена за законом Сімпсона

(рівнобедреного трикутника)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{|x|}{\alpha}\right), & x \in (-\alpha; \alpha); \\ 0, & x \notin (-\alpha; \alpha). \end{cases}$$
 Знайдіть дисперсію

величини.

5. Знайдіть математичне сподівання суми $X_1 + X_2$ незалежних випадкових

величин з нормальними розподілами $f_1(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}}$, $f_2(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\alpha-1)^2}{2\sigma^2}}$.

6. Знайдіть дисперсію суми $X_1 + X_2$ незалежних випадкових величин, які

мають нормальні розподіли $f_1(x) = \frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}$, $f_2(x) = \frac{1}{(\alpha+1)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2(\alpha+1)^2}}$.

7. Неперервна випадкова величина X має нормальний розподіл

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2}}$. Знайдіть таке значення сталої B , щоб лінійна функція

$Y = 2X + B$ мала нормований нормальний розподіл.

8. Неперервна випадкова величина X має нормальний розподіл

$f(x) = \frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}$. Знайдіть таке значення сталої A , щоб лінійна функція

$Y = AX + B$ мала нормований нормальний розподіл.

9. Випадкова величина X має закон розподілу $N(\alpha+1;2)$. Запишіть вирази для щільності розподілу $f(x)$ та функції розподілу $F(x)$ і накресліть їх графіки. Чому дорівнюють мода і медіана?

10. Неперервна випадкова величина X має закон розподілу $N(\alpha+1;2)$. Оцініть ймовірність $P(\alpha-2 < X < \alpha+5)$.

11. Неперервна випадкова величина X має нормальний розподіл

$f(x) = \frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\alpha^2}}$. Оцініть ймовірність $P\left(|x-a| \geq \frac{3\alpha}{2}\right)$.

10. Деталі, що випускає цех, розподілені за нормальним законом. Стандартна довжина деталі (математичне сподівання) дорівнює a мм, середнє квадратичне відхилення рівне σ мм. Знайдіть: а) ймовірність того, що діаметр навантаження взятої деталі буде більше α мм і менше β мм; б) ймовірність того, що діаметр деталі відхилиться від стандартної довжини не більше, як на δ .

№	a	σ	α	β	δ	№	a	σ	α	β	δ
1	50	6	45	52	3	6	30	3	24	33	1,5
2	20	3	17	26	1,5	7	35	4	27	37	2
3	36	4	30	40	2	8	45	5	40	48	3
4	60	5	54	70	8	9	40	3	34	43	1,5
5	48	4	45	56	3	10	25	2	20	27	1

НЕРІВНІСТЬ МАРКОВА. НЕРІВНІСТЬ ЧЕБИШОВА

1. Основні поняття та теореми

Нерівність Маркова: ймовірність того, що неперервна додатна випадкова величина X перевищить деяке додатне число, не більше відношення її математичного сподівання до заданого числа, тобто $P(X \geq \mu) < \frac{M(X)}{\mu}$.

Так як $X \geq \mu$ і $0 \leq X < \mu$ – протилежні події, то $P(X < \mu) \geq 1 - \frac{M(X)}{\mu}$.

Нерівність Чебишова: якщо випадкова величина X має обмежені характеристики $M(X)$, $D(X)$, то ймовірність попадання цієї величини в ε -окіл ($\varepsilon > 0$) свого $M(X)$ не перевищує $1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$, тобто $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$.

Для протилежної події має місце $P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) < \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$.

2. Приклади виконання завдань

1. Середнє число фахівців, які щорічно вступають до аспірантури при економічних вузах, дорівнює 120. Використовуючи нерівність Маркова оцініть ймовірність того, що в даному році буде вступати менше 140 фахівців.

Розв'язання:

Випадкова величина X – число фахівців, що вступають до аспірантури. За умовою $M(X) = 120$, $\mu = 140$, тоді отримаємо $P(X < 140) \geq 1 - \frac{120}{140} \approx 0,14$.

Відповідь: $\geq 0,14$.

2. Електроламповий завод щомісяця відправляє замовникам 100000 ламп. Ймовірність того, що випадково вибраному замовнику відправлять не менше 500 ламп, дорівнює 0,4. Оцініть максимально можливу кількість замовників.

Розв'язання:

Випадкова величина X – кількість ламп, що відправить завод протягом місяця випадково вибраному замовнику. Позначимо n – кількість замовників, тоді $M(X) = \frac{100000}{n}$. Використаємо нерівність Маркова $P(X \geq \mu) < \frac{M(X)}{\mu}$. Тоді

маємо $P(X \geq 500) = 0,4 < \frac{100000}{500n}$, звідки $n < \frac{200}{0,4} = 500$.

Відповідь: < 500 .

3. Дискретна випадкова величина X задана рядом розподілу. Оцініть ймовірність того, що $|X - M(X)| < 0,4$.

X	0,1	0,2	0,3	0,5
P	0,2	0,1	0,6	0,1

Розв'язання:

Математичне сподівання $M(X) = 0,1 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 0,6 + 0,5 \cdot 0,1 = 0,27$, дисперсія $D(X) = 0,1^2 \cdot 0,2 + 0,2^2 \cdot 0,1 + 0,3^2 \cdot 0,6 + 0,5^2 \cdot 0,1 - 0,27^2 = 0,0121$. Тоді з $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$ отримаємо $P(|X - 0,27| < 0,4) \geq 1 - \frac{0,0121}{0,4^2} \approx 0,92$.

Відповідь: $\geq 0,92$.

4. Пристрій складається з 12 незалежно працюючих елементів. Ймовірність відмови кожного елемента дорівнює 0,09. Оцініть ймовірність того, що абсолютна величина різниці між числом елементів, що відмовили, і середнім числом відмов буде не менше 3.

Розв'язання:

Випадкова величина X – число елементів, що відмовили. За умовою $n = 12$, $p = 0,09$, $\varepsilon = 3$, тоді $q = 0,91$, $M(X) = np = 1,08$, $D(X) = npq = 0,9828$. З $P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) < \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$ маємо $P(|X - 1,08| \geq 3) < \frac{0,9828}{3^2} \approx 0,11$.

Відповідь: $< 0,11$.

5. Ймовірність появи події A в кожному випробуванні дорівнює 0,5. Використовуючи нерівність Чебишова, оцініть ймовірність того, що випадкова величина X – число появи події A – буде знаходитись в межах від 75 до 90, якщо буде проведено 156 незалежних випробувань.

Розв'язання:

За умовою $n = 156$, $p = 0,5$, тоді $q = 0,5$, математичне сподівання $M(X) = np = 78$, дисперсія $D(X) = npq = 39$. Максимальна різниця між заданим граничним числом появи події і математичним сподіванням $\varepsilon = 90 - 78 = 12$, тоді з $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$ маємо $P(|X - 78| < 12) \geq 1 - \frac{39}{12^2} \approx 0,73$.

Відповідь: $\geq 0,73$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Середнє число фахівців, які щорічно вступають до аспірантури при юридичних вузах дорівнює 100. Використовуючи нерівність Маркова оцініть ймовірність того, що в даному році буде вступати не менше $100 + \alpha$ фахівців.

2. Електроламповий завод щомісяця відправляє замовникам 100000 ламп. Ймовірність того, що випадково вибраному замовнику відправлять менше 500 ламп, дорівнює 0,6. Оцініть максимально можливу кількість замовників.

3. Дискретна випадкова величина X задана рядом розподілу. Оцініть ймовірність того, що $|X - M(X)| \geq 3$.

X	α	$\alpha + 1$	$\alpha + 3$
P	0,3	0,5	0,2

4. Пристрій складається з 10 незалежно працюючих елементів. Ймовірність відмови кожного елемента дорівнює $\frac{\alpha}{100}$. Оцініть ймовірність того, що абсолютна величина різниці між числом елементів, що відмовили, і середнім числом відмов буде не менше 2.

5. Ймовірність появи події A в кожному випробуванні дорівнює $\frac{\alpha}{2\alpha + 1}$.

Використовуючи нерівність Чебишова, оцініть ймовірність того, що випадкова величина X – число появи події A – буде знаходитись в межах від 40 до 60, якщо буде проведено 100 незалежних випробувань.

МОДУЛЬ 3 «МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА»

ДИСКРЕТНИЙ СТАТИСТИЧНИЙ РОЗПОДІЛ ВИБІРКИ

1. Основні поняття та теореми

Нехай з генеральної сукупності кількісної ознаки X зроблено вибірку. Значення x_i кількісної ознаки X , які спостерігаються, називаються *варіантами*.

Варіаційний ряд розподілу вибірки – це впорядкована статистична сукупність варіант, розміщених у порядку зростання (спадання) їх значень.

Кожна варіанта вибірки може бути спостереженою n_i разів, число n_i називають *частотою варіанти* x_i . Так, значення x_1 спостерігається n_1 разів, x_2 – n_2 разів, x_k – n_k разів. При цьому обсяг вибірки $n = \sum_{i=1}^k n_i$, де k – кількість варіант.

Відносною частотою варіанти x_i називають відношення її частоти n_i до обсягу вибірки n , тобто $W_i = \frac{n_i}{n}$. Для кожної вибірки виконується $\sum_{i=1}^k W_i = 1$.

Перелік варіант варіаційного ряду та відповідних їм частот або відносних частот, називають *дискретним статистичним розподілом вибірки*.

Для графічного зображення дискретного статистичного розподілу вибірки використовують *полігон частот* – ламану, відрізки якої послідовно сполучають точки $(x_i; n_i)$, або *полігон відносних частот* – ламану, відрізки якої послідовно сполучають точки $(x_i; W_i)$.

Функція аргументу x , що визначає відносну частоту події $X < x$, тобто $F^*(x) = W(X < x) = \frac{n_x}{n}$, де n_x – число варіант статистичного розподілу вибірки, значення яких менше за фіксовану варіанту x , – *емпірична (комулята)*.

Розглянемо числові характеристики дискретних статистичних розподілів.

1) *Вибіркова середня величина* дискретного статистичного розподілу вибірки $\bar{x}_B = \frac{\sum x_i n_i}{n}$, тут і далі $\sum = \sum_{i=1}^k$. Якщо всі варіанти з'являються у вибірці лише по одному разу, то $\bar{x}_B = \frac{\sum x_i}{n}$. По суті $\bar{x}_B$ – це середня арифметична величина $\bar{x}_{\text{арифм}} = \frac{\sum x_i n_i}{n}$.

Крім середньої арифметичної величини є ще середня квадратична $\bar{x}_{\text{квадр}} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 n_i}{n}}$, середня геометрична $\bar{x}_{\text{геом}} = \sqrt[n]{x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \dots \cdot x_n^{n_n}}$, середня гармонійна $\bar{x}_{\text{гарм}} = \frac{n}{\sum \frac{n_i}{x_i}}$. Між середніми величинами виконується нестрога

нерівність $\bar{x}_{\text{гарм}} \leq \bar{x}_{\text{геом}} \leq \bar{x}_{\text{арифм}} \leq \bar{x}_{\text{квадр}}$ (властивість мажорантності).

2) Для вимірювання розсіювання варіант вибірки відносно $\bar{x}_B$ вибирається *дисперсія вибірки* – це середнє арифметичне квадратів відхилень варіант відносно $\bar{x}_B$, що обчислюється як $D_B = \frac{\sum (x_i - \bar{x}_B)^2 n_i}{n}$ або $D_B = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - (\bar{x}_B)^2$.

3) При обчисленні дисперсії вибірки відхилення підноситься до квадрата, а отже, змінюється одиниця виміру ознаки X , тому на основі дисперсії вводиться *середнє квадратичне відхилення вибірки* $\sigma_B = \sqrt{D_B}$, яке вимірює розсіювання варіант вибірки відносно $\bar{x}_B$ в тих самих одиницях, в яких вимірюється ознака X .

4) *Коефіцієнт варіації* обчислюється за формулою $V = \frac{\sigma_B}{\bar{x}_B} \cdot 100\%$ і характеризує відносне розсіювання варіант вибірки відносно $\bar{x}_B$, що не рівне нулю;

5) *Моду* M_o^* дискретного статистичного розподілу вибірки називають варіанту, що має найбільшу частоту появи. Мод може бути кілька. Якщо дискретний статистичний розподіл вибірки має одну моду, то він називається *одномодальним*, якщо має дві моди – *двомодальним* і т.д.;

6) *Медіаною* M_E^* дискретного статистичного розподілу вибірки називають варіанту, яка поділяє варіаційний ряд на дві частини, рівні за кількістю варіант;

7) Для грубого оцінювання розсіювання варіант застосовується *розмах вибірки* – різниця між найбільшою і найменшою варіантами варіаційного ряду, тобто $R = x_{\max} - x_{\min}$.

2. Приклади виконання завдань

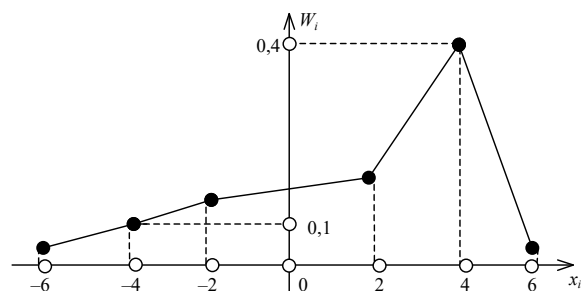
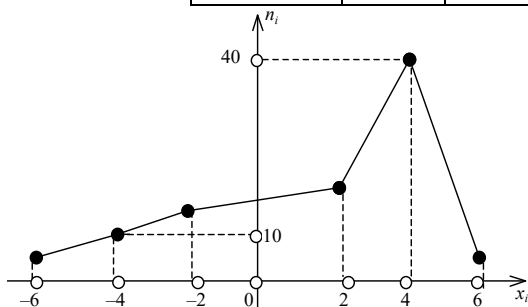
1. За даним дискретним статистичним розподілом вибірки накресліть полігони частот і відносних частот.

x_i	-6	-4	-2	2	4	6
n_i	5	10	15	20	40	10

Розв'язання:

Знайдемо обсяг вибірки $n = 5 + 10 + 15 + 20 + 40 + 10 = 100$ та відносні частоти варіант: $W_1 = \frac{n_1}{n} = 0,05$, $W_2 = \frac{n_2}{n} = 0,1$, $W_3 = \frac{n_3}{n} = 0,15$, $W_4 = \frac{n_4}{n} = 0,2$, $W_5 = \frac{n_5}{n} = 0,4$, $W_6 = \frac{n_6}{n} = 0,1$. Полігони частот та відносних частот зображено.

x_i	-6	-4	-2	2	4	6
W_i	0,05	0,1	0,15	0,2	0,4	0,1



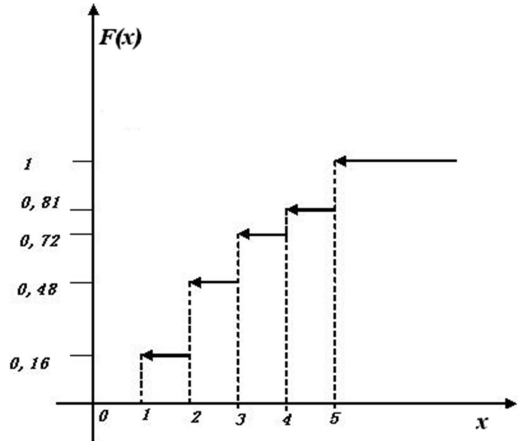
2. За даним дискретним статистичним розподілом вибірки а) запишіть емпіричну функцію $F^*(x)$ та побудуйте її графік; б) визначте $F^*(4)$; в) обчисліть стрибок $F^*(x)$ у точці $x = 3$.

x_i	1	2	3	4	5
n_i	16	32	24	19	9

Розв'язання:

а) Обсяг вибірки: $n = 16 + 32 + 24 + 19 + 8 + 1 = 100$. Тоді емпірична функція

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1; \\ 0 + \frac{16}{100} = \frac{16}{100} & \text{при } 1 < x \leq 2; \\ \frac{16}{100} + \frac{32}{100} = \frac{48}{100} & \text{при } 2 < x \leq 3; \\ \frac{48}{100} + \frac{24}{100} = \frac{72}{100} & \text{при } 3 < x \leq 4; \\ \frac{72}{100} + \frac{9}{100} = \frac{81}{100} & \text{при } 4 < x \leq 5; \\ \frac{81}{100} + \frac{19}{100} = 1 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$



б) $F^*(4) = 0,72$.

в) Щоб знайти значення стрибка в точці $x = 3$ знайдемо різницю значень функції у точках $x = 3$ і $x = 3 + 0$, тоді $F^*(3+0) - F^*(3) = 0,72 - 0,48 = 0,24$.

3. За результатами дослідів отримано вибірку: 6, 2, 7, 10, 7, 2, 7, 4, 5, 4.

а) Запишіть варіаційний ряд. Чому рівні $\frac{x_{\max} + x_{\min}}{2}$ і розмах вибірки R ?

б) Запишіть дискретний статистичний розподіл вибірки. Чому дорівнюють мода M_o^* і медіана M_E^* ?

в) Обчисліть вибірккову середню величину $\bar{x}_B$, дисперсію D_B вибірки (двома методами), середнє квадратичне відхилення вибірки σ_B , коефіцієнт варіації V .

Розв'язання:

а) Запишемо варіанти у зростаючому порядку, отримаємо варіаційний ряд 2, 2, 4, 4, 5, 6, 7, 7, 7, 10. Максимальне з цих значень $x_{\max} = 10$, мінімальне

$x_{\min} = 2$, тоді $\frac{x_{\max} + x_{\min}}{2} = \frac{10 + 2}{2} = 6$, розмах вибірки $R = x_{\max} - x_{\min} = 10 - 2 = 8$.

б) Запишемо перелік варіант варіаційного ряду, а також відповідні їм частоти, дістанемо дискретний статистичний розподіл вибірки.

x_i	2	4	5	6	7	10
n_i	2	2	1	1	3	1

Оскільки значення варіанти 7 спостерігалось найбільшу кількість разів, то $M_o^* = 7$. Наведений статистичний розподіл вибірки одномодальний.

Медіану визначимо як середину варіаційного ряду, тобто $M_E^* = \frac{5 + 6}{2} = 5,5$.

в) Вибіркову середню величину вибірки обчислимо як середнє арифметичне

$$\bar{x}_B = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \frac{2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 7 \cdot 3 + 10 \cdot 1}{10} = 5,4.$$

Обчислимо дисперсію вибірки D_B за формулою $D_B = \frac{\sum (x_i - \bar{x}_B)^2 n_i}{n}$,

x_i	2	4	5	6	7	10
n_i	2	2	1	1	3	1
відхилення варіант $x_i - \bar{x}_B$	-3,4	-1,4	-0,4	0,6	1,6	4,6
$(x_i - \bar{x}_B)^2$	11,56	1,96	0,16	0,36	2,56	21,16
$(x_i - \bar{x}_B)^2 n_i$	23,12	3,92	0,16	0,36	7,68	21,16

$$\text{маємо } D_B = \frac{23,12 + 3,92 + 0,16 + 0,36 + 7,68 + 21,16}{10} = 5,64.$$

Обчислимо дисперсію вибірки D_B за формулою $D_B = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - (\bar{x}_B)^2$,

x_i	2	4	5	6	7	10
n_i	2	2	1	1	3	1
x_i^2	4	16	25	36	49	100
$x_i^2 n_i$	8	32	25	36	147	100

$$\text{отримаємо } D_B = \frac{8 + 32 + 25 + 36 + 147 + 100}{10} - 5,4^2 = \frac{348}{10} - 5,4^2 = 5,64.$$

Середнє квадратичне відхилення вибірки становить $\sigma_B = \sqrt{D_B} \approx 2,37$.

Визначимо коефіцієнт варіації $V = \frac{\sigma_B}{\bar{x}_B} \cdot 100\% = \frac{2,37}{5,4} \cdot 100\% \approx 44\%$.

4. Для даного дискретного статистичного розподілу вибірки визначте геометричну, арифметичну, квадратичну, гармонійну середні величини та перевірте властивість мажорантності.

x_i	4	6	7	9	11
n_i	4	2	2	3	2

Розв'язання:

Обсяг вибірки дорівнює $n = 4 + 2 + 2 + 3 + 2 = 13$. Тоді середні величини:

$$\bar{x}_{\text{арифм}} = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_n n_n}{n} = \frac{4 \cdot 4 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 11 \cdot 2}{13} = \frac{91}{13} = 7;$$

$$\bar{x}_{\text{квадр}} = \sqrt{\frac{x_1^2 n_1 + \dots + x_n^2 n_n}{n}} = \sqrt{\frac{4^2 \cdot 4 + 6^2 \cdot 2 + 7^2 \cdot 2 + 9^2 \cdot 3 + 11^2 \cdot 2}{13}} = \sqrt{\frac{719}{13}} \approx 7,44;$$

$$\bar{x}_{\text{геом}} = \sqrt[n]{x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \dots \cdot x_n^{n_n}} = \sqrt[13]{4^4 \cdot 6^2 \cdot 7^2 \cdot 9^3 \cdot 11^2} = \sqrt[13]{256 \cdot 36 \cdot 49 \cdot 729 \cdot 121} \approx 6,54;$$

$$\bar{x}_{\text{гарм}} = \frac{n}{\sum \frac{n_i}{x_i}} = \frac{13}{\frac{4}{4} + \frac{2}{6} + \frac{2}{7} + \frac{3}{9} + \frac{2}{11}} = \frac{13}{1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{7} + \frac{1}{3} + \frac{2}{11}} = \frac{13}{\frac{5}{3} + \frac{36}{77}} = \frac{13}{\frac{493}{231}} \approx 6,09.$$

Властивість мажорантності середніх $\bar{x}_{\text{гарм}} \leq \bar{x}_{\text{геом}} \leq \bar{x}_{\text{арифм}} \leq \bar{x}_{\text{квадр}}$ виконується, оскільки $6,09 < 6,54 < 7 < 7,44$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. За даним дискретним статистичним розподілом вибірки накресліть полігони частот і відносних частот.

x_i	$-6 + \alpha$	$-4 + \alpha$	$-2 + \alpha$	$2 + \alpha$	$4 + \alpha$	$6 + \alpha$
n_i	10	15	30	20	15	10

2. За даним дискретним статистичним розподілом вибірки

а) запишіть емпіричну функцію розподілу $F^*(x)$ та побудуйте її графік;

б) визначте значення $F^*(40)$;

в) обчисліть стрибок $F^*(x)$ у точці $x = 30$.

x_i	10	20	30	40	50
n_i	α	$\alpha + 10$	$\alpha + 40$	$\alpha + 30$	$\alpha + 20$

3. За результатами дослідів отримано вибірку: $6 + \alpha$, $2 + \alpha$, $7 + \alpha$, $10 + \alpha$, $7 + \alpha$, $2 + \alpha$, $7 + \alpha$, $4 + \alpha$, $5 + \alpha$, $4 + \alpha$.

а) Запишіть варіаційний ряд. Чому рівні $\frac{x_{\max} + x_{\min}}{2}$ і розмах вибірки R ?

б) Запишіть дискретний статистичний розподіл вибірки. Чому дорівнюють мода M_o^* і медіана M_E^* ?

в) Обчисліть вибірккову середню величину $\bar{x}_B$, дисперсію вибірки D_B (двома методами), середнє квадратичне відхилення вибірки σ_B , коефіцієнт варіації V .

4. Для даного дискретного статистичного розподілу вибірки визначте геометричну, арифметичну, квадратичну, гармонійну середні величини та перевірте властивість мажорантності.

x_i	$4 + \alpha$	$6 + \alpha$	$7 + \alpha$	$9 + \alpha$	$11 + \alpha$
n_i	4	2	2	3	2

ІНТЕРВАЛЬНИЙ СТАТИСТИЧНИЙ РОЗПОДІЛ ВИБІРКИ

1. Основні поняття та теореми

Перелік часткових інтервалів значень кількісної ознаки X і відповідних їм частот (або відносних частот) називається *інтервальним статистичним розподілом вибірки*.

У табличній формі цей розподіл має такий вигляд. $h_i = x_{i+1} - x_i$ – довжина (або крок) часткового i -ого інтервалу. Як правило, h береться однаковою.

h_i	$x_1 - x_2$	$x_2 - x_3$	...	$x_k - x_{k+1}$
n_i	n_1	n_2	...	n_k
W_i	W_1	W_2	...	W_k

Інтервальний статистичний розподіл вибірки можна подати графічно у вигляді гістограми частот або відносних частот, а також емпіричною функцією (комулятою).

Гістограма частот – фігура, яка складається з прямокутників, кожний з яких має основу h і висоту $\frac{n_i}{h}$.

Гістограмою відносних частот є фігура, що складається з прямокутників, кожний з яких має основу h і висоту $\frac{W_i}{h}$.

Емпірична функція (кумулята) $F^*(x)$ будується за інтервальним статистичним розподілом вибірки наступним чином: в точках на межах інтервалів $F^*(x \leq a_1) = 0$, $F^*(x_2) = W_1$, $F^*(x_3) = W_1 + W_2$, $F^*(x_4) = W_1 + W_2 + W_3$, ..., $F^*(x_k) = W_1 + W_2 + \dots + W_{k-1}$, $F^*(\geq x_{k+1}) = W_1 + W_2 + \dots + W_{k-1} + W_k = 1$; на кожному частинному інтервалі кумюлята зростає рівномірно. Отже, графік емпіричної функції має вигляд ламаної, що послідовно з'єднує точки з координатами $(x_i; F^*(x_i))$.

Аналогом емпіричної функції у теорії ймовірностей є інтегральна функція $F(x) = P(X < x)$.

Для визначення $\bar{x}_B$, D_B і σ_B інтервального статистичного розподілу вибірки переходять до відповідного дискретного розподілу, варіантами якого є середини часткових інтервалів x_i^* .

x_i^*	x_1^*	x_2^*	x_3^*	...	x_k^*
n_i	n_1	n_2	n_3	...	n_k

$$\text{Тоді } \bar{x}_B = \frac{\sum x_i^* n_i}{n}, D_B = \frac{\sum (x_i^*)^2 n_i}{n} - (\bar{x}_B)^2, \sigma_B = \sqrt{D_B}.$$

Для визначення моди інтервального статистичного розподілу вибірки необхідно знайти модальний інтервал, тобто такий інтервал, що має найбільшу частоту. Моду обчислюють за формулою $M_O^* = x_{i-1} + \frac{n_{M_O} - n_{M_O-1}}{2n_{M_O} - n_{M_O-1} - n_{M_O+1}} h$, де x_{i-1} — початок модального інтервалу; h — довжина, або крок, часткового інтервалу; n_{M_O} — частота модального інтервалу; n_{M_O-1} — частота домодального інтервалу; n_{M_O+1} — частота післямодального інтервалу.

Медіаною інтервального статистичного розподілу вибірки є те значення варіанти, якій відповідає значення емпіричної функції $F^*(M_E^*) = 0,5$.

Для визначення медіани інтервального статистичного розподілу вибірки необхідно визначити медіанний частковий інтервал. Це інтервал, на кінцях якого емпірична функція $F^*(x_{i-1}) < 0,5$ і $F^*(x_i) > 0,5$. Якщо виявиться, що $F^*(x_i) = 0,5$, то це і є медіана. В іншому випадку медіана визначається за формулою $M_E^* = x_{i-1} + \frac{0,5 - F^*(x_{i-1})}{F^*(x_i) - F^*(x_{i-1})} h$, де x_{i-1} — початок медіанного інтервалу.

2. Приклади виконання завдань

1. За даним інтервальним статистичним розподілом вибірки побудуйте гістограму частот і гістограму відносних частот.

$h = 8$	Межі інтервалу	0–8	8–16	16–24	24–32	32–40	40–48
n_i	Число варіант в інтервалі	10	15	20	25	20	10

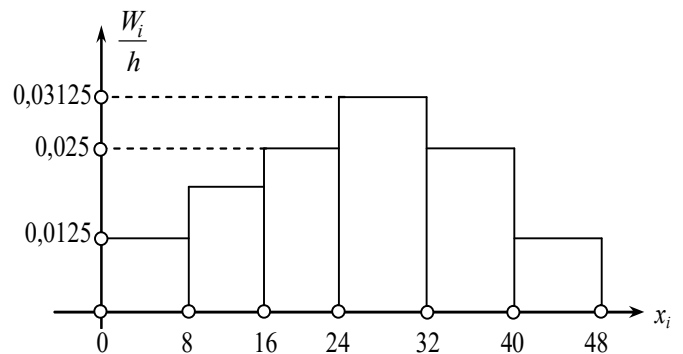
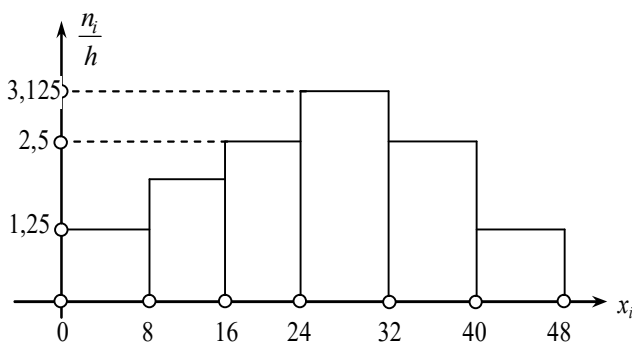
Розв'язання:

Обсяг вибірки $n = 10 + 15 + 20 + 25 + 20 + 10 = 100$. Знайдемо відносні частоти $W_i = \frac{n_i}{n}$, а також $\frac{n_i}{h}$, $\frac{W_i}{h} = \frac{n_i}{hn}$ на кожному інтервалі.

$h = 8$	0–8	8–16	16–24	24–32	32–40	40–48
W_i	0,1	0,15	0,2	0,25	0,2	0,1
$\frac{n_i}{h}$	1,25	1,875	2,5	3,125	2,5	1,25
$\frac{W_i}{h}$	0,0125	0,01875	0,025	0,03125	0,025	0,0125

Для побудови гістограми частот на осі Ox відкладемо частинні інтервали довжиною $h = 8$, а над ними проведемо відрізки, паралельно осі абсцис на відстані $\frac{n_i}{h}$ від неї.

Для побудови гістограми відносних частот на осі Ox відкладемо частинні інтервали довжиною $h = 8$, а над ними проведемо відрізки, паралельно осі абсцис на відстані $\frac{W_i}{h}$ від неї.



2. За даним інтервальним статистичним розподілом вибірки запишіть емпіричну функцію $F^*(x)$ та представте її графічно.

Розв'язання:

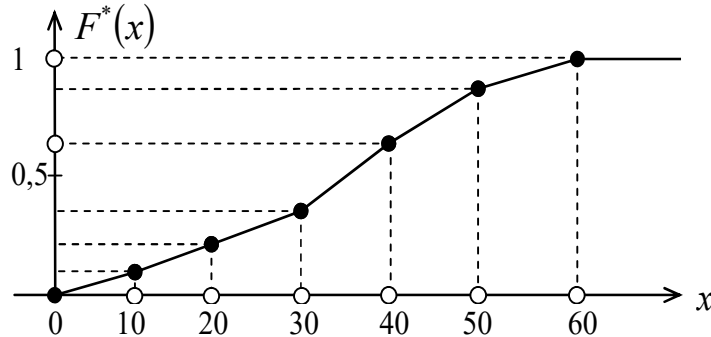
Обсяг вибірки становить $n = 5 + 15 + 20 + 25 + 30 + 5 = 100$. При $x \leq 0$ $F^*(x) = 0$, при $x \geq 60$ $F^*(x) = 1$, тоді емпірична функція має вигляд

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ 0,05 & x = 10, \\ 0,05 + 0,15 & x = 20, \\ 0,05 + 0,15 + 0,2 & x = 30, \\ 0,05 + 0,15 + 0,2 + 0,25 & x = 40, \\ 0,05 + 0,15 + 0,2 + 0,25 + 0,3 & x = 50, \\ 1 & x \geq 60 \end{cases} \quad \text{або} \quad F^*(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ 0,05 & x = 10, \\ 0,2 & x = 20, \\ 0,4 & x = 30, \\ 0,65 & x = 40, \\ 0,95 & x = 50, \\ 1 & x \geq 60. \end{cases}$$

$h = 10$	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60
n_i	5	15	20	25	30	5

Наносимо точки $(0;0)$, $(10;0,05)$, $(20;0,2)$, $(30;0,4)$, $(40;0,65)$, $(50;0,95)$, $(60;1)$ і послідовно з'єднуємо відрізками. Також проводимо горизонтальні промені: з початком у точці $(0;0)$ вліво та з початком у точці $(60;1)$ вправо.

Графік $F^*(x)$ представлено.



3. За даним інтервальним статистичним розподілом вибірки визначте моду і медіану.

$h = 4$	0–4	4–8	8–12	12–16	16–20	20–24
n_i	5	15	20	25	30	5

Розв'язання:

Модальний інтервал – це інтервал 16–20 з найбільшою частотою. Беручи до уваги, що $n_{Mo} = 30$, $n_{Mo-1} = 25$, $n_{Mo+1} = 5$, $h = 4$, $x_{i-1} = 16$, отримаємо моду

$$M_O^* = x_{i-1} + \frac{n_{Mo} - n_{Mo-1}}{2n_{Mo} - n_{Mo-1} - n_{Mo+1}} \cdot h = 16 + \frac{30 - 25}{2 \cdot 30 - 25 - 5} \cdot 4 = 16 + \frac{5}{30} \cdot 4 = 16 \frac{2}{3}.$$

Обсяг вибірки $n = 6 + 14 + 20 + 25 + 30 + 5 = 100$, емпірична функція

$$F^*(12) = \frac{6 + 14 + 20}{100} = 0,4 < 0,5, \quad F^*(16) = \frac{6 + 14 + 20 + 25}{100} = 0,65 > 0,5. \quad \text{Отже,}$$

медіанний інтервал – це інтервал 12–16. Тоді з формули обчислення медіани

$$\text{маємо } M_E^* = x_{i-1} + \frac{0,5 - F^*(x_{i-1})}{F^*(x_i) - F^*(x_{i-1})} \cdot h = 12 + \frac{0,5 - 0,4}{0,65 - 0,4} \cdot 4 = 12 + \frac{0,1}{0,25} \cdot 4 = 13,6.$$

4. Для даного інтервального статистичного розподілу вибірки господарств за врожайністю зернових культур обчисліть вибірккову середню врожайність $\bar{x}_B$, дисперсію вибірки D_B , середнє квадратичне відхилення вибірки σ_B , коефіцієнт варіації V .

Межі інтервалів за врожайністю зернових культур, ц/га	14,0–18	18,1–22	22,1–26	26,1–30	30,1–34	34,1–38	38,1–42
Число господарств (частоти)	5	7	9	14	7	5	3

Розв'язання:

Побудуємо дискретний статистичний розподіл вибірки за даним інтервальним статистичний розподіл вибірки, де x_i^* – середина i -ого інтервалу.

x_i^* , ц/га	16	20	24	28	32	36	40
n_i	5	7	9	14	7	5	3

Обчислимо добутки $x_i^* \cdot n_i$, $(x_i^*)^2 \cdot n_i$, а також суми у всіх рядках.

$x_i^*, \text{ц/га}$	16	20	24	28	32	36	40	сума
n_i	5	7	9	14	7	5	3	$\sum n_i = 50$
$x_i^* \cdot n_i, \text{ц/га}$	80	140	216	392	224	180	120	$\sum n_i x_i^* = 1352$
$(x_i^*)^2 \cdot n_i, \text{ц}^2/\text{га}^2$	1280	2800	5184	10976	7168	6480	4800	$\sum n_i (x_i^*)^2 = 38688$

Розрахуємо вибірку середню врожайність зернових культур

$$\bar{x}_B = \frac{\sum n_i x_i^*}{\sum n_i} = \frac{1352}{50} = 27,04 \text{ ц/га}.$$

Тоді дисперсія вибірки становить

$$D_B = \frac{\sum n_i (x_i^*)^2}{\sum n_i} - (\bar{x}_B)^2 = \frac{38688}{50} - 27,04^2 \approx 42,60 \text{ ц}^2/\text{га}^2,$$

середнє квадратичне

відхилення вибірки дорівнює $\sigma_B = \sqrt{D_B} \approx 6,53 \text{ ц/га}$, тоді коефіцієнт варіації

$$V = \frac{\sigma_B}{\bar{x}_B} \cdot 100\% = \frac{6,53}{27,04} \cdot 100\% \approx 24\%.$$

Отже, врожайність зернових культур в розглянутому статистичному розподілі вибірки коливається в межах $\pm 6,53 \text{ ц/га}$ або на 24% відносно середньої врожайності вибірки $27,04 \text{ ц/га}$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. За заданим інтервальним статистичним розподілом вибірки побудуйте гістограму частот і гістограму відносних частот.

$h=5$	Межі інтервалу	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	31–35	35–40
n_i	Число варіант в інтервалі	$4+\alpha$	$6+\alpha$	$16+\alpha$	$36+\alpha$	$24+\alpha$	$10+\alpha$	$4+\alpha$

2. За заданим інтервальним статистичним розподілом вибірки побудуйте емпіричну функцію $F^*(x)$ і представте її графічно.

$h=\alpha$	$0-\alpha$	$\alpha-2\alpha$	$2\alpha-3\alpha$	$3\alpha-4\alpha$	$4\alpha-5\alpha$	$5\alpha-6\alpha$
n_i	10	15	20	30	20	5

3. За даним інтервальним статистичним розподілом вибірки визначте моду і медіану.

$h=\alpha$	$0-\alpha$	$\alpha-2\alpha$	$2\alpha-3\alpha$	$3\alpha-4\alpha$	$4\alpha-5\alpha$	$5\alpha-6\alpha$
n_i	10	15	20	30	20	5

4. Для даного інтервального статистичного розподілу вибірки господарств за врожайністю зернових культур обчисліть вибірку середню врожайність $\bar{x}_B$, дисперсію вибірки D_B , середнє квадратичне відхилення вибірки σ_B , коефіцієнт варіації V .

Межі інтервалів за врожайністю зернових культур, ц/га	14,0–18	18,1–22	22,1–26	26,1–30	30,1–34	34,1–38	38,1–42
Число господарств (частоти)	$5+\alpha$	$7+\alpha$	$9+\alpha$	$14+\alpha$	$7+\alpha$	$5+\alpha$	$3+\alpha$

ДВОВИМІРНИЙ СТАТИЧНИЙ РОЗПОДІЛ ВИБІРКИ

1. Основні поняття та теореми

Перелік варіант y_i , x_j та відповідних частот n_{ij} спільної їх появи утворюють *двовимірний статистичний розподіл вибірки*, що реалізована з генеральної сукупності, для елементів якої притаманні кількісні ознаки X і Y .

Цей розподіл зручно представляти у табличній формі.

Тут рядки – варіанти y_i ознаки Y , стовпчики – варіанти x_j ознаки X ; на перетині рядків та стовпців – частоти n_{ij} спільної появи варіант y_i , x_j ; $n_{y_i} = \sum_{j=1}^m n_{ij}$ і $n_{x_j} = \sum_{i=1}^k n_{ij}$ – відповідно сумарні частоти появи варіанти y_i та x_j ; $n = \sum_{i=1}^k n_{y_i} = \sum_{j=1}^m n_{x_j}$ – обсяг вибірки.

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\dots$	x_m	n_{y_i}
y_1	n_{11}	n_{12}	$\dots$	n_{1m}	n_{y_1}
y_2	n_{21}	n_{22}	$\dots$	n_{2m}	n_{y_2}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
y_k	n_{k1}	n_{k2}	$\dots$	n_{km}	n_{y_k}
n_{x_j}	n_{x_1}	n_{x_2}	$\dots$	n_{x_m}	n

Числові характеристики ознаки X :	Числові характеристики ознаки Y :
загальна середня величина	
$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m x_j n_{ij}}{n} = \frac{\sum_{j=1}^m x_j n_{x_j}}{n}$	$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m y_i n_{ij}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^k y_i n_{y_i}}{n}$
загальна дисперсія	
$D_X = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m x_j^2 n_{ij}}{n} - (\bar{x})^2 = \frac{\sum_{j=1}^m x_j^2 n_{x_j}}{n} - (\bar{x})^2$	$D_Y = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m y_i^2 n_{ij}}{n} - (\bar{y})^2 = \frac{\sum_{i=1}^k y_i^2 n_{y_i}}{n} - (\bar{y})^2$
загальне середнє квадратичне відхилення	
$\sigma_X = \sqrt{D_X}$	$\sigma_Y = \sqrt{D_Y}$

Умовним статистичним розподілом ознаки Y при фіксованому значенні x_j називають перелік варіант ознаки Y та відповідних їм частот, узятих при фіксованому значенні X . Тобто $Y_{X=x_j}$. Тут $n_{x_j} = \sum_{i=1}^k n_{ij}$.

y_i	y_1	y_2	$\dots$	y_k
n_{ij}	n_{1j}	n_{2j}	$\dots$	n_{kj}

Числові характеристики для такого статистичного розподілу – умовна середня величина, умовна дисперсія, умовне середнє квадратичне відхилення

$$\text{ознаки } Y: \bar{y}_{X=x_j} = \frac{\sum_{i=1}^k y_i n_{ij}}{\sum_{i=1}^k n_{ij}} = \frac{\sum_{i=1}^k y_i n_{ij}}{n_{x_j}}, D_{Y_{X=x_j}} = \frac{\sum_{i=1}^k y_i^2 n_{ij}}{n_{x_j}} - (\bar{y}_{X=x_j})^2, \sigma_{Y_{X=x_j}} = \sqrt{D_{Y_{X=x_j}}}.$$

$D_{Y_{X=x_j}}$, $\sigma_{Y_{X=x_j}}$ вимірюють розсіювання варіант ознаки Y відносно умовної середньої величини $\bar{y}_{X=x_j}$.

Умовним статистичним розподілом ознаки X при фіксованому значенні y_i називають перелік варіант ознаки X та відповідних їм частот, узятих при фіксованому значенні Y . Тобто $X_{Y=y_i}$. Тут $\sum_{j=1}^m n_{ij} = n_{y_i}$.

x_j	x_1	x_2	$\dots$	x_m
n_{ij}	n_{i1}	n_{i2}	$\dots$	n_{im}

Числові характеристики для такого статистичного розподілу – умовна середня величина, умовна дисперсія, умовне середнє квадратичне відхилення

$$\text{ознаки } X: \bar{x}_{Y=y_i} = \frac{\sum_{j=1}^m x_j n_{ij}}{\sum_{j=1}^m n_{ij}} = \frac{\sum_{j=1}^m x_j n_{ij}}{n_{y_i}}, D_{X_{Y=y_i}} = \frac{\sum_{j=1}^m x_j^2 n_{ij}}{n_{y_i}} - (\bar{x}_{Y=y_i})^2, \sigma_{X_{Y=y_i}} = \sqrt{D_{X_{Y=y_i}}}.$$

$D_{X_{Y=y_i}}$, $\sigma_{X_{Y=y_i}}$ вимірюють розсіювання варіант ознаки X відносно умовної середньої величини $\bar{x}_{Y=y_i}$.

Під час дослідження двовимірного статистичного розподілу вибірки постає потреба з'ясувати наявність зв'язку між ознаками X і Y , який у статистиці називають *кореляційним*.

Для цього обчислюється *емпіричний кореляційний момент* K_{XY}^* за

$$\text{формулою } K_{XY}^* = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m y_i x_j n_{ij}}{n} - \bar{x} \cdot \bar{y}. \text{ Якщо } K_{XY}^* = 0, \text{ то кореляційного зв'язку}$$

між ознаками X та Y немає. Отже, емпіричний кореляційний момент лише дає відповідь на запитання: чи є зв'язок між ознаками X і Y .

Для вимірювання тісноти кореляційного зв'язку обчислюється *вибірковий*

коефіцієнт кореляції r_B за формулою $r_B = \frac{K_{XY}^*}{\sigma_X \sigma_Y}$. Цей коефіцієнт $|r_B| \leq 1$. Якщо

$r_B = 0$ – зв'язок відсутній, якщо $|r_B| < 0,5$ – зв'язок слабкий, якщо $|r_B| > 0,7$ – зв'язок тісний.

Якщо частота спільної появи ознак X і Y $n_{ij} = 1$ для всіх варіант, то двовимірний статистичний розподіл вибірки стає *парним статистичним розподілом вибірки*.

y_i	y_1	y_2	$\dots$	y_n
x_j	x_1	x_2	$\dots$	x_n

В парному статистичному розподілі вибірки кожна пара значень ознак X , Y з'являється лише один раз. Обсяг вибірки рівний кількості пар, тобто n .

Числові характеристики ознак X і Y : середні величини $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$ і $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$,

дисперсії $D_X = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - (\bar{x})^2$ і $D_Y = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{n} - (\bar{y})^2$, середні квадратичні відхилення $\sigma_X = \sqrt{D_X}$ і $\sigma_Y = \sqrt{D_Y}$.

Числові характеристики зв'язку ознак X і Y : емпіричний кореляційний

момент $K_{XY}^* = \frac{\sum_{i=1}^n y_i x_i}{n} - \bar{x} \cdot \bar{y}$, вибірковий коефіцієнт кореляції $r_B = \frac{K_{XY}^*}{\sigma_X \sigma_Y}$.

Коефіцієнт детермінації r_B^2 показує, яка частина загальної варіації результативної ознаки обумовлена факторною ознакою.

2. Приклади виконання завдань

1. Для двовимірного статистичного розподілу ознак X та Y проведіть кореляційний аналіз залежності між цими ознаками.

$Y \backslash X$	20	25	30	35	40	n_y
16	4	6	—	—	—	10
26	—	8	10	—	—	18
36	—	—	32	3	9	44
46	—	—	4	12	6	22
56	—	—	—	1	5	6
n_x	4	14	46	16	20	100

Розв'язання:

Обсяг вибірки $n = 100$. Знайдемо вибіркові числові характеристики $\bar{x}$, $\bar{y}$,

σ_X , σ_Y , $\overline{xy}$:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \frac{20 \cdot 4 + 25 \cdot 14 + 30 \cdot 46 + 35 \cdot 16 + 40 \cdot 20}{100} = 31,7;$$

$$D_X = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - (\bar{x})^2 = \frac{20^2 \cdot 4 + 25^2 \cdot 14 + 30^2 \cdot 46 + 35^2 \cdot 16 + 40^2 \cdot 20}{100} - 31,7^2 = 28,61;$$

$$\sigma_X = \sqrt{28,61} \approx 5,35;$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_j n_j}{n} = \frac{16 \cdot 10 + 26 \cdot 18 + 36 \cdot 44 + 46 \cdot 22 + 56 \cdot 6}{100} = 35,6;$$

$$D_Y = \frac{\sum y_j^2 n_j}{n} - (\bar{y})^2 = \frac{16^2 \cdot 10 + 26^2 \cdot 18 + 36^2 \cdot 44 + 46^2 \cdot 22 + 56^2 \cdot 6}{100} - 35,6^2 = 103,84;$$

$$\sigma_Y = \sqrt{103,84} \approx 10,19;$$

$$\begin{aligned} \overline{xy} &= \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m y_i x_j n_{ij}}{n} = \frac{16 \cdot 20 \cdot 4 + 16 \cdot 25 \cdot 6 + 26 \cdot 25 \cdot 8 + 26 \cdot 30 \cdot 10 + 36 \cdot 30 \cdot 32 + \\ &+ 36 \cdot 35 \cdot 3 + 36 \cdot 40 \cdot 9 + 46 \cdot 30 \cdot 4 + 46 \cdot 35 \cdot 12 + 46 \cdot 40 \cdot 6 + 56 \cdot 35 \cdot 1 + 56 \cdot 40 \cdot 5}{100} = 1170,2. \end{aligned}$$

Обчислюємо емпіричний кореляційний момент зв'язку ознак X та Y
 $K_{XY}^* = \overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y} = 1170,2 - 31,7 \cdot 35,6 = 43,68$, тоді вибірковий коефіцієнт

кореляції $r_B = \frac{K_{XY}^*}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{43,68}{5,35 \cdot 10,19} \approx 0,76$. Зв'язок між X та Y є тісним.

2. Використовуючи парний статистичний розподіл даних про врожайність зернових культур Y та якість ґрунту X вибірки з 20 господарств проведіть кореляційний аналіз зв'язку між ознаками Y та X .

Врожайність Y , ц/га	32,2	35,3	27,5	25,1	26,7	18,9	26,1	37,7	24,6	26,6
Якість ґрунту X , бали	84	84	82	71	77	67	75	82	70	75
Врожайність Y , ц/га	29,6	34,7	26,4	18,3	28,6	37,3	28,0	27,6	30,7	22,7
Якість ґрунту X , бали	83	86	73	72	70	89	81	79	85	74

Розв'язання:

Знайдемо добутки y_i^2 , x_i^2 , $y_i x_i$, суми $\sum_{i=1}^{20} y_i$, $\sum_{i=1}^{20} x_i$, $\sum_{i=1}^{20} y_i^2$, $\sum_{i=1}^{20} x_i^2$, $\sum_{i=1}^{20} y_i x_i$,

середні $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{20} y_i}{n}$, $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i}{n}$, $\overline{y^2} = \frac{\sum_{i=1}^{20} y_i^2}{n}$, $\overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i^2}{n}$, $\overline{x \cdot y} = \frac{\sum_{i=1}^{20} y_i x_i}{n}$.

№ з/п	Врожайність Y , ц/га	Якість ґрунту X , бали	y^2 ц ² /га ²	x^2	yx ц/га
1	32,2	84	1036,84	7056	2704,8
2	35,3	84	1246,09	7056	2965,2
3	27,5	82	756,25	6724	2255,0
4	25,1	71	630,01	5041	1782,1
5	26,7	77	712,89	5929	2055,9
6	18,9	67	357,21	4489	1266,3
7	26,1	75	681,21	5625	1957,5
8	37,7	82	1421,29	6724	3091,4
9	24,6	70	605,16	4900	1722,0
10	26,6	75	707,56	5625	1995,0
11	29,6	83	876,16	6889	2456,8
12	34,7	86	1204,09	7396	2984,2
13	26,4	73	696,96	5329	1927,2
14	18,3	72	334,89	5184	1317,6
15	28,6	70	817,96	4900	2002,0
16	37,3	89	1391,29	7921	3319,7
17	28,0	81	784,00	6561	2268,0
18	27,6	79	761,76	6241	2180,4
19	30,7	85	942,49	7225	2609,5
20	22,7	74	515,29	5476	1679,8
сума	564,6	1559	16479,40	122291	44540,4
середнє	28,23	77,95	823,97	6114,55	2227,02

Отримали середню врожайність $\bar{y} = 28,23 \text{ ц/га}$, середню якість ґрунту $\bar{x} = 77,95$ та $\overline{x \cdot y} = 2227,02 \text{ ц/га}$, тоді емпіричний кореляційний момент $K_{XY}^* = \overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y} = 2227,02 - 77,95 \cdot 28,23 \approx 26,49 \text{ ц/га}$. Отже, зв'язок між врожайністю та якістю ґрунту існує.

Визначимо дисперсії $D_Y = \overline{y^2} - (\bar{y})^2 = 823,97 - 28,23^2 \approx 27,04 \text{ ц}^2 / \text{га}^2$ та $D_X = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = 6114,55 - 77,95^2 \approx 38,35$, середні квадратичні відхилення $\sigma_Y = \sqrt{D_Y} = 5,2 \text{ ц/га}$ та $\sigma_X = \sqrt{D_X} \approx 6,2$ для врожайності та якості ґрунту. Тоді вибірковий коефіцієнт кореляції рівний $r_B = \frac{K_{XY}^*}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \approx \frac{26,49}{6,2 \cdot 5,2} \approx 0,82$. Оскільки $r_B > 0,7$, то між врожайністю та якістю ґрунту має місце тісний зв'язок.

Коефіцієнт детермінації $r_B^2 \approx 0,82^2 \approx 0,67$ показує, що 67% загальної варіації врожайності обумовлено якістю ґрунту, а 33% – іншими факторами, які в даній задачі не враховані.

3. Завдання для самостійного виконання

1. За заданою таблицею двовимірного статистичного розподілу ознак X та Y вибірки, проведіть кореляційний аналіз залежності між цими ознаками.

$Y \backslash X$	10	15	20	25	30	n_y
16	4	6	–	–	–	10
26	–	–	$10 - \alpha$	$+\alpha$	–	18
36	–	–	$32 + \alpha$	3	$9 - \alpha$	44
46	–	–	4	$12 - \alpha$	$6 + \alpha$	22
56	–	–	–	1	5	6
n_x	4	14	46	16	20	100

2. Використовуючи парний статистичний розподіл даних про врожайність Y зернових культур та якість ґрунту X вибірки з 20 господарств проведіть кореляційний аналіз зв'язку між ознаками Y та X .

№ з/п	Врожайність Y , ц/га	Якість ґрунту X , бали	№ з/п	Врожайність Y , ц/га	Якість ґрунту X , бали
1	$30,1 + 0,1\alpha$	84	11	$26,1 + 0,1\alpha$	74
2	$26,6 + 0,1\alpha$	76	12	$37,5 + 0,1\alpha$	88
3	$24,8 + 0,1\alpha$	77	13	$24,0 + 0,1\alpha$	74
4	$25,3 + 0,1\alpha$	78	14	$26,5 + 0,1\alpha$	82
5	$32,0 + 0,1\alpha$	86	15	$30,1 + 0,1\alpha$	84
6	$34,1 + 0,1\alpha$	86	16	$34,3 + 0,1\alpha$	86
7	$27,5 + 0,1\alpha$	81	17	$26,4 + 0,1\alpha$	81
8	$25,4 + 0,1\alpha$	80	18	$18,2 + 0,1\alpha$	72
9	$26,6 + 0,1\alpha$	82	19	$28,6 + 0,1\alpha$	82
10	$19,2 + 0,1\alpha$	72	20	$29,2 + 0,1\alpha$	83

РЕГРЕСІЙНИЙ АНАЛІЗ

1. Основні поняття та теореми

За наявності кореляційного зв'язку між величинами X та Y є залежність, яку називають функцією регресії.

Для двовимірного статистичного розподілу вибірки шукають залежність між умовними середніми $\bar{y}_{X=x_j}$ і значеннями x_j . Графічне зображення точок, що відповідають парам $(x_j; \bar{y}_{x_j})$ показує форму емпіричної залежності між величинами X та Y . Теоретична лінія регресії має проходити максимально близько до фактичних даних. Найпростішою залежністю є лінійна, тоді рівняння регресії Y на X має вигляд $y = ax + b$.

Невідомі параметри a та b знаходять способом найменших квадратів, який полягає у тому, щоб сума квадратів відхилень $\bar{y}_x$ від y , обчислених за рівнянням

регресії, була найменшою
$$\sum_{j=1}^m (y_j - \bar{y}_{x_j})^2 = \sum_{j=1}^m \left(ax_j + b - \frac{\sum_{i=1}^k y_i n_{ij}}{n_{x_j}} \right)^2 = \min.$$
 Звідки

маємо систему рівнянь
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m ax_j n_{x_j} + \sum_{j=1}^m bn_{x_j} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k y_i n_{ij}, \\ \sum_{j=1}^m ax_j^2 n_{x_j} + \sum_{j=1}^m bn_{x_j} x_j = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k y_i n_{ij} x_j \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} a\bar{x} + b = \bar{y}, \\ ax^2 + b\bar{x} = \overline{xy}, \end{cases}$$

розв'язки якої є параметрами прямої
$$\begin{cases} b = \bar{y} - a\bar{x}, \\ a = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}. \end{cases}$$

Коефіцієнт a називають *коефіцієнтом регресії Y на X* і позначають ρ_{yx} , отже,

$$a = \rho_{yx} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{K_{XY}^*}{\sigma_X^2} = r_B \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}.$$
 Коефіцієнт регресії показує середню зміну результативної ознаки при зміні факторної на одиницю. Якщо $\rho_{yx} > 0$, то зв'язок прямий, якщо $\rho_{yx} < 0$, то зв'язок обернений, якщо $\rho_{yx} = 0$, зв'язок відсутній.

Рівняння регресії Y на X можна записати як $y - \bar{y} = \rho_{yx}(x - \bar{x})$.

Аналогічно рівняння лінійної регресії X на Y має вигляд $x = cy + d$, де

коефіцієнти рівні
$$\begin{cases} d = \bar{x} - c\bar{y}, \\ c = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{y^2} - \bar{y}^2}. \end{cases}$$
 Коефіцієнт c називають *коефіцієнтом регресії*

X на Y і позначають ρ_{xy} , отже,
$$c = \rho_{xy} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{y^2} - \bar{y}^2} = \frac{K_{XY}^*}{\sigma_Y^2} = r_B \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}.$$

Рівняння регресії X на Y можна записати як $x - \bar{x} = \rho_{xy}(y - \bar{y})$.

2. Приклади виконання завдань

1. При дослідженні впливу кількості фосфорного добрива X на урожай ячменю Y провели три незалежні випробування. У результаті отримали такі пари чисел $(X;Y)$: (20;30), (50;70), (80;110). Знайдіть рівняння прямої лінії регресії Y на X та прямої лінії регресії X на Y .

Розв'язання:

$$\text{Середні величини } \overline{xy} = \frac{20 \cdot 30 + 50 \cdot 70 + 80 \cdot 110}{3} = 4300, \quad \bar{x} = \frac{20 + 50 + 80}{3} = 50,$$

$$\bar{y} = \frac{30 + 70 + 110}{3} = 70, \quad \overline{x^2} = \frac{20^2 + 50^2 + 80^2}{3} = \frac{9300}{3}, \quad \overline{y^2} = \frac{30^2 + 70^2 + 110^2}{3} = \frac{17900}{3}.$$

$$\text{Тоді } a = \rho_{yx} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{4300 - 50 \cdot 70}{3100 - 50^2} = \frac{4}{3}, \text{ рівняння регресії } Y \text{ на } X \text{ має вигляд}$$

$$y - 70 = \frac{4}{3}(x - 50) \quad \text{або} \quad y = \frac{4}{3}x + \frac{10}{3}; \quad c = \rho_{xy} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{y^2} - \bar{y}^2} = \frac{4300 - 50 \cdot 70}{\frac{17900}{3} - 70^2} = \frac{3}{4},$$

$$\text{рівняння регресії } X \text{ на } Y \text{ має вигляд } x - 50 = \frac{3}{4}(y - 70) \text{ або } x = \frac{3}{4}y - \frac{10}{4}.$$

2. При дослідженні впливу кількості фосфорного добрива X на урожай ячменю Y провели п'ять незалежних випробувань. У результаті отримали такі пари чисел $(X;Y)$: (10;20), (30;40), (50;60), (70;80), (80;100). Знайдіть рівняння прямої лінії регресії Y на X та прямої лінії регресії X на Y .

Розв'язання:

$$\text{Середні величини } \overline{xy} = \frac{10 \cdot 20 + 30 \cdot 40 + 50 \cdot 60 + 70 \cdot 80 + 80 \cdot 100}{5} = 3600,$$

$$\bar{x} = \frac{10 + 30 + 50 + 70 + 80}{5} = 48, \quad \overline{x^2} = \frac{10^2 + 30^2 + 50^2 + 70^2 + 80^2}{5} = \frac{14800}{5} = 2960,$$

$$\bar{y} = \frac{20 + 40 + 60 + 80 + 100}{5} = 60, \quad \overline{y^2} = \frac{20^2 + 40^2 + 60^2 + 80^2 + 100^2}{5} = \frac{22000}{5} = 4400.$$

$$\text{Тоді } \rho_{yx} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{3600 - 48 \cdot 60}{2960 - 48^2} = \frac{45}{41}, \text{ рівняння регресії } Y \text{ на } X \text{ має вигляд}$$

$$y - 60 = \frac{45}{41}(x - 48) \quad \text{або} \quad y = \frac{45}{41}x + \frac{300}{41}; \quad \rho_{xy} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{y^2} - \bar{y}^2} = \frac{3600 - 48 \cdot 60}{4400 - 60^2} = 0,9,$$

$$\text{рівняння регресії } X \text{ на } Y \text{ має вигляд } x - 48 = 0,9(y - 60) \text{ або } x = 0,9y - 6.$$

3. Задана кореляційна таблиця про загальну вагу (X) та вагу насіння рослин зернової культури (Y). Знайдіть рівняння прямої лінії регресії Y на X .

Розв'язання:

Рівняння регресії Y на X шукаємо у вигляді

$$y - \bar{y} = \rho_{yx}(x - \bar{x}), \text{ де } \rho_{yx} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}.$$

$Y \backslash X$	20	40	60
45	1	2	—
50	—	6	—
100	—	—	1

Так як $\overline{xy} = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m y_i x_j n_{ij}}{n} = \frac{45 \cdot 20 \cdot 1 + 45 \cdot 40 \cdot 2 + 50 \cdot 40 \cdot 6 + 100 \cdot 60 \cdot 1}{10} = 2250,$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^m x_j n_{x_j}}{n} = \frac{20 \cdot 1 + 40 \cdot 8 + 60 \cdot 1}{10} = 40, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^k y_i n_{y_i}}{n} = \frac{45 \cdot 3 + 50 \cdot 6 + 100 \cdot 1}{10} = 53,5,$$

$$\overline{x^2} = \frac{\sum_{j=1}^m x_j^2 n_{x_j}}{n} = \frac{20^2 \cdot 1 + 40^2 \cdot 8 + 60^2 \cdot 1}{10} = 1680, \quad \text{тоді} \quad \rho_{yx} = \frac{2250 - 40 \cdot 53,5}{1680 - 40^2} = \frac{11}{8}.$$

Рівняння лінії регресії Y на X має вигляд: $y - 53,5 = \frac{11}{8}(x - 40)$ або $y = \frac{11}{8}x - \frac{3}{2}$.

4. Задана кореляційна таблиця про загальну вагу (X) та вагу насіння рослин зернової культури (Y). Знайдіть рівняння прямої лінії регресії X на Y .

Розв'язання:

Рівняння регресії X на Y шукаємо у вигляді $x - \bar{x} = \rho_{xy}(y - \bar{y})$, де $\rho_{xy} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{y^2} - \bar{y}^2}$.

$Y \backslash X$	40	60	100	150
30	1	2	3	—
50	—	2	5	—
70	—	—	4	2
90	—	—	—	1

Так як $\overline{xy} = 100 \frac{3(4 + 6 \cdot 2 + 10 \cdot 3) + 5(6 \cdot 2 + 10 \cdot 5) + 7(10 \cdot 4 + 15 \cdot 2) + 9 \cdot 15}{20} = 5365,$

$$\bar{x} = \frac{40 + 60 \cdot 4 + 100 \cdot 12 + 150 \cdot 3}{10} = 96,5, \quad \bar{y} = \frac{30 \cdot 6 + 50 \cdot 7 + 70 \cdot 6 + 90}{20} = 52,$$

$$\overline{y^2} = \frac{30^2 \cdot 6 + 50^2 \cdot 7 + 70^2 \cdot 6 + 90^2}{20} = 3020, \quad \text{тоді} \quad \rho_{xy} = \frac{5365 - 52 \cdot 96,5}{3020 - 52^2} = \frac{347}{316}.$$

Рівняння лінії регресії X на Y : $x - 96,5 = \frac{347}{316}(y - 52)$ або $x = \frac{347}{316}y + \frac{6225}{158}$.

5. Залежність між ознаками X і Y задано кореляційною таблицею. Вважаючи цю залежність близькою до лінійної, знайдіть вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X .

Розв'язання:

Застосуємо раніше обчислені $\bar{x} = 31,7$, $\sigma_X = \sqrt{28,61}$, $\bar{y} = 35,6$, $\sigma_Y = \sqrt{103,84}$, $r_B \approx 0,76$.

$Y \backslash X$	20	25	30	35	40	n_y
16	4	6	—	—	—	10
26	—	8	10	—	—	18
36	—	—	32	3	9	44
46	—	—	4	12	6	22
56	—	—	—	1	5	6
n_x	4	14	46	16	20	100

Тоді коефіцієнт регресії Y на X становить $\rho_{yx} = r_B \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \approx 0,76 \frac{\sqrt{103,84}}{\sqrt{28,61}} \approx 1,45$.

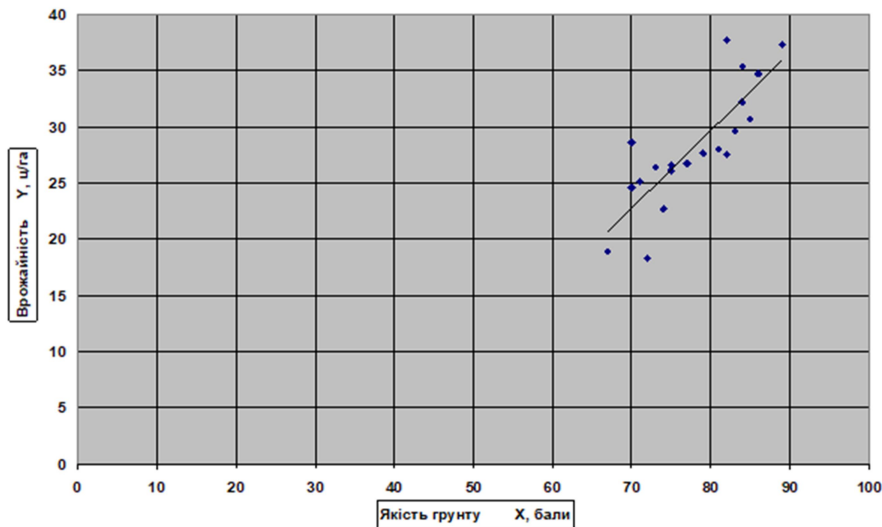
Рівняння лінії регресії Y на X : $y - 35,6 = 1,45(x - 31,7)$ або $y \approx 1,45x - 10,37$.

6. Використовуючи дані 20 господарств про урожайність зернових культур і якість ґрунту статистичної сукупності запишіть рівняння регресії врожайності на якість ґрунту.

Врожайність Y , ц/га	32,2	35,3	27,5	25,1	26,7	18,9	26,1	37,7	24,6	26,6
Якість ґрунту X , бали	84	84	82	71	77	67	75	82	70	75
Врожайність Y , ц/га	29,6	34,7	26,4	18,3	28,6	37,3	28,0	27,6	30,7	22,7
Якість ґрунту X , бали	83	86	73	72	70	89	81	79	85	74

Розв'язання:

Для визначення залежності врожайності (Y) від якості ґрунту (X) побудуємо графік – кореляційне поле (рисунок). На осі абсцис нанесемо значення факторної ознаки (незалежної змінної X – якості ґрунту), а на осі ординат – результативної ознаки (залежної змінної Y – врожайності). Графік показує, що в даному випадку зв'язок близький до прямолінійного і його можна виразити рівнянням прямої лінії $\bar{y}_x = b + kx$.



Застосуємо раніше обчислені середню врожайність $\bar{y} = 28,23 \text{ ц/га}$ з середнім квадратичним відхиленням $\sigma_Y = \sqrt{27,04} \text{ ц/га}$, середню якість ґрунту $\bar{x} = 77,95$ з середнім квадратичним відхиленням $\sigma_X = \sqrt{38,35}$, $r_B \approx 0,82$.

Тоді коефіцієнт регресії Y на X становить $\rho_{yx} = r_B \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \approx 0,82 \frac{\sqrt{27,04}}{\sqrt{38,35}} \approx 0,69$.

Рівняння лінії регресії Y на X : $y - 28,23 = 0,69(x - 77,95)$ або $y \approx 0,69x - 25,56$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. При проведенні вегетаційних дослідів з впливу кількості фосфорного добрива X на урожай ячменю Y виконали три незалежні випробування. У результаті отримали такі пари чисел ($X; Y$): $(20; 30 + \alpha)$, $(40; 50)$, $(60; 100)$. Знайдіть рівняння прямої лінії регресії Y на X та прямої лінії регресії X на Y .

2. При проведенні вегетаційних дослідів з впливу кількості фосфорного добрива X на урожай ячменю Y виконали п'ять незалежних випробувань. У результаті отримали пари чисел $(X; Y)$: $(10; 20 - \alpha)$, $(20; 30)$, $(30; 50)$, $(40; 60)$, $(60; 90)$. Знайдіть рівняння прямої лінії регресії Y на X та прямої лінії регресії X на Y .

$Y \backslash X$	$30 + \alpha$	50	100
20	1	—	—
40	2	6	—
60	—	—	1

3. Задана кореляційна таблиця про загальну вагу (X) та вагу насіння рослин зернової культури (Y). Знайдіть рівняння прямої лінії регресії Y на X .

4. Задана кореляційна таблиця про загальну вагу (X) та вагу насіння рослин зернової культури (Y). Знайдіть рівняння прямої лінії регресії Y на X .

$Y \backslash X$	40	60	100	150
$30 + \alpha$	1	2	3	—
50	—	2	5	—
70	—	—	4	2
90	—	—	—	1

5. Залежність між ознаками X і Y задано кореляційною таблицею. Вважаючи цю залежність близькою до лінійної, знайдіть вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X .

$Y \backslash X$	10	15	20	25	30	n_y
16	4	6	—	—	—	10
26	—	—	$10 - \alpha$	$+\alpha$	—	18
36	—	—	$32 + \alpha$	3	$9 - \alpha$	44
46	—	—	4	$12 - \alpha$	$6 + \alpha$	22
56	—	—	—	1	5	6
n_x	4	14	46	16	20	100

6. Використовуючи дані 20 господарств про урожайність зернових культур і якість ґрунту статистичної сукупності запишіть рівняння регресії врожайності на якість ґрунту.

№ з/п	Врожайність Y , ц/га	Якість ґрунту X , бали	№ з/п	Врожайність Y , ц/га	Якість ґрунту X , бали
1	$30,1 + 0,1\alpha$	84	11	$26,1 + 0,1\alpha$	74
2	$26,6 + 0,1\alpha$	76	12	$37,5 + 0,1\alpha$	88
3	$24,8 + 0,1\alpha$	77	13	$24,0 + 0,1\alpha$	74
4	$25,3 + 0,1\alpha$	78	14	$26,5 + 0,1\alpha$	82
5	$32,0 + 0,1\alpha$	86	15	$30,1 + 0,1\alpha$	84
6	$34,1 + 0,1\alpha$	86	16	$34,3 + 0,1\alpha$	86
7	$27,5 + 0,1\alpha$	81	17	$26,4 + 0,1\alpha$	81
8	$25,4 + 0,1\alpha$	80	18	$18,2 + 0,1\alpha$	72
9	$26,6 + 0,1\alpha$	82	19	$28,6 + 0,1\alpha$	82
10	$19,2 + 0,1\alpha$	72	20	$29,2 + 0,1\alpha$	83

СТАТИСТИЧНА ОЦІНКА ПАРАМЕТРІВ ГЕНЕРАЛЬНОЇ СУКУПНОСТІ

1. Основні поняття та теореми

Вибірковим називається спостереження, за якого досліджуванню підлягає тільки частина одиниць сукупності. За знайденим значенням характеристики θ^* вибірки роблять певні висновки про значення відповідної характеристики θ генеральної сукупності. Отже, θ – оцінювальний параметр генеральної сукупності, а θ^* – його *статистична оцінка*, одержана з вибірки.

Статистична оцінка θ^* , яка визначається одним числом, є *точковою*.

Незміщеною називають статистичну оцінку θ^* , математичне сподівання якої рівне оцінюваному параметру θ за будь-якого обсягу вибірки, тобто $M(\theta^*) = \theta$. Якщо $M(\theta^*) \neq \theta$, то точкова статистична оцінка θ^* є *зміщеною* відносно параметра генеральної сукупності θ . Різниця $\theta^* - \theta = \delta$ називається *зміщенням* статистичної оцінки θ^* .

Ефективною називають таку незміщену оцінку θ^* , яка має найменшу дисперсію серед усіх можливих незміщених оцінок параметра θ , обчислених за вибірками однакового обсягу.

Точкова статистична оцінка називається *грунтовною*, якщо у разі необмеженого збільшення обсягу вибірки θ^* наближається до оцінювального параметра θ , а саме: $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\theta^* - \theta| < \delta) = 1$.

Точковою незміщеною статистичною оцінкою для $\bar{X}_G = M(X)$ є вибіркова середня величина $\bar{x}_B = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{n}$.

Точковою незміщеною статистичною оцінкою для D_G є виправлена вибіркова дисперсія $S^2 = \frac{nD_B}{n-1}$, де $D_B = \frac{\sum (x_i - \bar{x}_B)^2 \cdot n_i}{n}$. При $n > 30$ практично немає різниці між оцінками σ_B^2 і S^2 .

Величину $S = \sqrt{\frac{nD_B}{n-1}}$ називають виправленим середнім квадратичним відхиленням, яке є зміщеною точковою статистичною оцінкою для σ_G .

Точкові статистичні оцінки θ^* є випадковими величинами, а тому наближена заміна θ на θ^* часто призводить до істотних похибок, особливо коли обсяг вибірки малий. У цьому випадку застосовують інтервальні статистичні оцінки.

Статистична оцінка, що визначається двома числами, кінцями інтервалів, є *інтервальною*.

Різниця між статистичною оцінкою θ^* та її оцінювальним параметром θ , взята за абсолютним значенням, тобто $|\theta^* - \theta| < \delta$, називається *точністю* оцінки. Ймовірність, з якою береться ця нерівність, тобто $P(|\theta^* - \theta| < \delta) = \gamma$ називають *надійністю*.

Інтервал $(\theta^* - \delta; \theta^* + \delta)$, що покриває оцінюваний параметр θ генеральної сукупності із заданою надійністю γ , називають *довірчим*.

Якщо дисперсія генеральної σ_G сукупності відома, то точність оцінки δ для $\bar{X}_G$ знаходимо за формулою $\delta = \frac{t\sigma_G}{\sqrt{n}}$, де t – величина, що залежить від надійності.

Для великих вибірок ($n \geq 30$), отриманих з нормального розподілу генеральної сукупності, значення t знаходимо з таблиці значень функції Лапласа, враховуючи рівність $2\Phi(t) = \gamma$.

Для малих вибірок ($n < 30$) значення t знаходимо із таблиці значень двостороннього критерію t -Ст'юдента $t_\gamma = t(\gamma, n-1)$, враховуючи число ступенів вільності $k = n-1$.

За невідомої дисперсії генеральної сукупності точність оцінки δ для $\bar{X}_G$ знаходимо за формулою $\delta = \frac{tS}{\sqrt{n}}$ або $\delta = \frac{t\sigma_B}{\sqrt{n-1}}$.

Довірчі інтервали для оцінки дисперсії та середнього квадратичного відхилення генеральної сукупності з нормальним розподілом мають вигляди $\frac{(n-1)S^2}{\chi_2^2} < D_G < \frac{(n-1)S^2}{\chi_1^2}$, $\frac{S\sqrt{n-1}}{\chi_2} < \sigma_G < \frac{S\sqrt{n-1}}{\chi_1}$, де значення χ_1^2 , χ_2^2 знаходять за таблицею для функції χ^2 згідно з рівностями $P(\chi^2 > \chi_1^2) = 1 - \frac{\alpha}{2}$, $P(\chi^2 > \chi_2^2) = \frac{\alpha}{2}$, де $\alpha = 1 - \gamma$ (рівень значимості).

Довірчий інтервал для оцінки середнього квадратичного відхилення генеральної сукупності можна визначити ще як $\sigma_G \in (S(1-q); S(1+q))$, де q знаходиться з таблиці для функції $q = q(\gamma, n)$.

2. Приклади виконання завдань

1. Вимірявши 200 однотипних деталей, випадково відібраних після шліфування, знайшли вибіркиму середню $\bar{x}_B = 4,004 \text{ мм}$ і дисперсію вибірки $D_B = 0,016 \text{ мм}^2$. Знайдіть точкові незміщені статистичні оцінки для генеральної сукупності $\bar{X}_G$, D_G .

Розв'язання:

Точковою незміщеною оцінкою для $\bar{X}_G \in \bar{x}_B$, тобто $\bar{x}_B = 4,004 \text{ мм}$. Точковою незміщеною статистичною оцінкою для $D_G \in$ виправлена дисперсія що рівна $S^2 = \frac{nD_B}{n-1} = \frac{200 \cdot 0,016}{200-1} \approx 0,016 \text{ мм}^2$.

Відповідь: $\bar{x}_B = 4,004 \text{ мм}$; $S^2 \approx 0,016 \text{ мм}^2$.

2. У результаті вимірювання вмісту пересувних форм фосфатів у орному шарі ґрунту здобуто такі результати (%): 6, 7, 11, 13, 16, 17, 20, 21, 22, 23. Знайдіть точкові незміщені статистичні оцінки для генеральної сукупності $\bar{X}_G$, D_G .

Розв'язання:

Точковою незміщеною оцінкою для $\bar{X}_G \in \bar{x}_B$. Оскільки всі значення вмісту фосфатів вибірки різні, то вибіркова середня дорівнює $\bar{x}_B = \frac{\sum x_i}{n}$. Отже,

$$\bar{x}_B = \frac{6 + 7 + 11 + 13 + 16 + 17 + 20 + 21 + 22 + 23}{10} = 15,6. \text{ Тоді вибіркова дисперсія}$$

$$\text{помилки вимірювання величини вмісту фосфатів становить } D_B = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x}_B)^2 = \frac{6^2 + 7^2 + 11^2 + 13^2 + 16^2 + 17^2 + 20^2 + 21^2 + 22^2 + 23^2}{10} - 15,6^2 \approx 277,4 - 15,6^2 = 34,04.$$

Точковою незміщеною статистичною оцінкою для $D_G \in D_B$ виправлена вибіркова дисперсія $S^2 = \frac{n \cdot D_B}{n-1} = \frac{10 \cdot 34,04}{9} \approx 37,82$.

Відповідь: $\bar{x}_B = 15,6$; $S^2 \approx 37,82$.

3. Випадкова величина X кількості рослин льону, що уражені фузаріозом, має нормальний розподіл з відомим середнім квадратичним відхиленням $\sigma_G = 8$. Знайдіть з надійністю $\gamma = 0,95$ точність оцінки δ , з якою $\bar{x}_B$ оцінює $\bar{X}_G$, якщо обсяг вибірки $n = 400$.

Розв'язання:

Точність оцінки δ знаходимо за формулою $\delta = \frac{t\sigma_G}{\sqrt{n}}$, де t визначимо з рівності $2\Phi(t) = \gamma$. Маємо $\Phi(t) = 0,475$. З таблиці значень функції Лапласа отримуємо $t = 1,96$. Тоді $\delta = \frac{1,96 \cdot 8}{\sqrt{400}} = \frac{1,96 \cdot 8}{20} = 0,784$.

Відповідь: $\delta = 0,784$.

4. Знайдіть обсяг вибірки, за яким з надійністю $\gamma = 0,975$ точність оцінки математичного сподівання генеральної сукупності з нормальним розподілом дорівнює $\delta = 0,4$. Середнє квадратичне відхилення генеральної сукупності дорівнює $\sigma_G = 4$.

Розв'язання:

З рівності $\delta = \frac{t\sigma_G}{\sqrt{n}}$ маємо $n = \frac{t^2 \sigma_G^2}{\delta^2}$. Так як $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$, а $\gamma = 0,975$, то $\Phi(t) = 0,4875$. З таблиці значень функції Лапласа визначаємо $t = 2,24$. Тоді обсяг вибірки $n = \frac{2,24^2 \cdot 4^2}{0,4^2} = 502$.

Відповідь: $n = 502$.

5. За вибіркою обсягом $n = 9$ знайдено виправлене середнє квадратичне відхилення $S = 10$. Знайдіть з надійністю $\gamma = 0,99$ точність оцінки δ , з якою $\bar{x}_B$ оцінює $\bar{X}_G$.

Розв'язання:

Точність δ визначається як $\delta = \frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}}$. З таблиці значень t -розподілу

Стюдента $t_\gamma = t(\gamma, n-1)$ знаходимо $t_\gamma = t(0,99;8) = 3,36$. Тоді $\delta = 3,36 \cdot \frac{10}{\sqrt{9}} = 11,2$.

Відповідь: $\delta = 11,2$.

6. При дослідженні кількісної ознаки X генеральної сукупності за вибіркою обсягом $n=16$ знайдено вибіркове середнє $\bar{x}_B=10$ та виправлене середнє квадратичне відхилення $S=0,8$. Оцініть $\bar{X}_\Gamma$ за допомогою довірчого інтервалу з надійністю $\gamma=0,95$.

Розв'язання:

Довірчий інтервал має вигляд $(\bar{X}_\Gamma - \delta, \bar{X}_\Gamma + \delta)$, де $\bar{X}_\Gamma = \bar{x}_B$, $\delta = \frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}}$. З

таблиці $t_\gamma = t(\gamma, n-1)$ знаходимо $t_\gamma = t(0,95;15) = 2,13$. Тоді $\delta = \frac{2,13 \cdot 0,8}{\sqrt{16}} = 0,426$, довірчий інтервал $(10 - 0,426; 10 + 0,426)$ або $(9,574; 10,426)$.

Відповідь: $(9,574; 10,426)$.

7. Використовуючи середню врожайність зернових культур $\bar{x}_B = 27,04 \text{ ц/га}$ та дисперсію $D_B = 42,60 \text{ ц}^2/\text{га}^2$ вибірки з п'ятдесяти господарств, оцініть середню врожайність у генеральній сукупності $\bar{X}_\Gamma$ за допомогою довірчого інтервалу з надійністю $\gamma=0,95$.

Розв'язання:

Довірчий інтервал має вигляд $(\bar{X}_\Gamma - \delta, \bar{X}_\Gamma + \delta)$, де $\bar{X}_\Gamma = \bar{x}_B$, $\delta = \frac{t\sigma_B}{\sqrt{n-1}}$. З

огляду на великий обсяг вибірки значення t знайдемо з таблиці функції Лапласа. З $P = 2\Phi(t) = \gamma$ при $\gamma = 0,95$ маємо $\Phi(t) = 0,475$, тоді з таблиці маємо $t = 1,96$.

Отже, $\delta = \frac{1,96 \cdot \sqrt{42,60}}{\sqrt{49}} = 1,83 \text{ ц/га}$, довірчий інтервал $(27,04 \text{ ц/га} \pm 1,83 \text{ ц/га})$ або $(25,21 \text{ ц/га}; 28,87 \text{ ц/га})$.

Відповідь: $(25,21 \text{ ц/га}; 28,87 \text{ ц/га})$.

8. Використовуючи врожайності зернових культур $(x_i, \text{ц/га})$ в тридцяти п'яти господарствах вибірки, оцініть середню врожайність у генеральній сукупності $\bar{X}_\Gamma$ за допомогою довірчого інтервалу з надійністю $\gamma=0,95$.

32,2	35,3	27,5	25,1	26,7	18,9	26,1
37,7	24,6	26,6	29,6	34,7	26,4	18,3
28,6	37,3	28,0	27,6	30,7	22,7	29,0
32,9	27,2	38,5	27,4	16,1	33,8	32,8
21,5	31,6	29,1	24,1	25,9	22,1	37,8

Розв'язання:

Визначимо середню врожайність зернових культур за вибірковою сукупністю $\bar{x}_B = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{994,4}{35} \approx 28,41 \text{ ц/га}$.

Обчислені квадрати врожайності зернових культур ($x_i^2, \text{ц}^2/\text{га}^2$) в господарствах вибіркової сукупності наведені в таблиці.

1036,84	1246,09	756,25	630,01	712,89	357,21	681,21
1421,29	605,16	707,56	876,16	1204,09	696,96	334,89
817,96	1391,29	784,00	761,76	942,49	515,29	841,00
1082,41	739,84	1482,25	750,76	259,21	1142,44	1075,84
462,25	998,56	846,81	580,81	670,81	488,41	142,84

Вибіркова дисперсія $D_B = \sigma_B^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}_B^2 = \frac{29329,64}{35} - 28,41^2 \approx 30,86 \text{ ц}^2/\text{га}^2$.

З $P = 2\Phi(t) = \gamma$ при $\gamma = 0,95$ маємо $\Phi(t) = 0,475$, тоді з таблиці функції Лапласа маємо $t = 1,96$. Отже, $\delta = \frac{t\sigma_B}{\sqrt{n-1}} = \frac{1,96 \cdot \sqrt{30,86}}{\sqrt{34}} \approx 1,87 \text{ ц/га}$, довірчий інтервал $(28,41 \pm 1,87) \text{ ц/га}$ або $(26,54 \text{ ц/га}; 30,28 \text{ ц/га})$.

Відповідь: $(26,54 \text{ ц/га}; 30,28 \text{ ц/га})$.

9. Використовуючи дані дослідження якості ґрунту (x_i , бали) в десяти господарствах вибірки, оцініть середню якість ґрунту у генеральній сукупності $\bar{X}_G$ за допомогою довірчого інтервалу з надійністю $\gamma = 0,95$.

84	84	82	71	77	67	75	82	70	75
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Розв'язання:

Визначимо середню якість ґрунту за вибірковою сукупністю: $\bar{x}_B = \frac{767}{10} = 76,7$.

Квадрати якостей ґрунту (x_i^2 , бали²) в господарствах вибірки наведені в таблиці.

7056	7056	6724	5041	5929	4489	5625	6724	4900	5625
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

Вибіркова дисперсія $D_B = \sigma_B^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}_B^2 = \frac{59169}{10} - 76,7^2 = 34,01 \text{ бала}^2$.

За таблицею значень $t_\gamma = t(\gamma, n-1)$ при $\gamma = 0,95$ і $k = n-1 = 10-1 = 9$ маємо

$t_\gamma = 2,2622$. Отже, $\delta = \frac{t\sigma_B}{\sqrt{n-1}} = \frac{2,2622 \cdot \sqrt{34,01}}{\sqrt{9}} \approx 4,4 \text{ бала}$, довірчий інтервал $(76,7 \pm 4,4) \text{ бала}$ або $(72,3 \text{ бала}; 81,1 \text{ бала})$.

Відповідь: $(72,3 \text{ бала}; 81,1 \text{ бала})$.

10. При дослідженні кількісної ознаки X генеральної сукупності за вибіркою обсягом $n = 20$ знайдено виправлене середнє квадратичне відхилення $S = 2$. Знайдіть довірчий інтервал, що покриває генеральне середнє квадратичне відхилення з надійністю $\gamma = 0,95$, застосовуючи χ^2 та q розподіли.

Розв'язання:

Довірчий інтервал для дисперсії має вигляд $\frac{(n-1)s^2}{\chi_2^2} < D_\Gamma < \frac{(n-1)s^2}{\chi_1^2}$. Так як

$$\alpha = 1 - \gamma = 1 - 0,95 = 0,05, \text{ то } P(\chi^2 > \chi_1^2) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975, \quad P(\chi^2 > \chi_2^2) = \frac{\alpha}{2} = 0,025.$$

За таблицею розподілу функції χ^2 при $k = n - 1 = 20 - 1 = 19$ знаходимо $\chi_1^2(0,975; 19) = 8,907$, $\chi_2^2(0,025; 19) = 32,852$. Тоді $\frac{(20-1) \cdot 2^2}{32,852} < D_\Gamma < \frac{(20-1) \cdot 2^2}{8,907}$ або $2,31 < D_\Gamma < 8,53$. Довірчий інтервал для σ_Γ становить $\sqrt{2,31} < \sqrt{D_\Gamma} < \sqrt{8,53}$ або $1,52 < \sigma_\Gamma < 2,92$.

Визначимо довірчий інтервал для оцінки середнього квадратичного відхилення ще як $\sigma_\Gamma \in (S(1-q); S(1+q))$, де q знаходиться з таблиці для функції $q = q(\gamma, n)$. Оскільки $q = q(0,95; 20) = 0,37$, то $2(1-0,37) < \sigma_\Gamma < 2(1+0,37)$ або $1,26 < \sigma_\Gamma < 2,74$.

Відповідь: $1,52 < \sigma_\Gamma < 2,92$, $1,26 < \sigma_\Gamma < 2,74$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Вимірявши $10 + \alpha$ однотипних деталей, випадково відібраних після шліфування, знайшли вибірку середню $\bar{x}_B = 4 + (0,01 \cdot \alpha)$ мм і дисперсію вибірки $D_B = 0,016$ мм². Знайдіть точкові незміщені статистичні оцінки для генеральної сукупності $\bar{X}_\Gamma$, D_Γ .

2. У результаті вимірювання вмісту пересувних форм фосфатів у орному шарі ґрунту здобуто наступні результати (%): $0,5\alpha+1$; $0,5\alpha+2$; $\alpha+1$; $\alpha+3$; $1,5\alpha+1$; $1,5\alpha+2$; 2α ; $2\alpha+1$; $2\alpha+2$; $2\alpha+3$. Знайдіть точкові незміщені статистичні оцінки для генеральної сукупності $\bar{X}_\Gamma$, D_Γ .

3. Випадкова величина X кількості рослин льону, що уражені фузаріозом, має нормальний розподіл з відомим середнім квадратичним відхиленням $\sigma_\Gamma = 2 + \alpha$. Знайдіть з надійністю $\gamma = 0,95$ точність оцінки δ , з якою $\bar{x}_B$ оцінює $\bar{X}_\Gamma$, якщо обсяг вибірки $n = 100$.

4. Знайдіть обсяг вибірки, за яким з надійністю $\gamma = 0,975$ точність оцінки математичного сподівання генеральної сукупності з нормальним розподілом дорівнює $\delta = 0,3$. Середнє квадратичне відхилення генеральної сукупності дорівнює $\sigma_\Gamma = 1,2 + 0,3\alpha$.

5. За вибіркою обсягом $n = 16$ знайдене виправлене середнє квадратичне відхилення $S = 6 + 0,3\alpha$. Знайдіть з надійністю $\gamma = 0,999$ точність оцінки δ , з якою $\bar{x}_B$ оцінює $\bar{X}_\Gamma$.

6. При дослідженні кількісної ознаки X генеральної сукупності за вибіркою обсягом $n = 25$ знайдено вибіркове середнє $\bar{x}_B = 20 + 0,2\alpha$ та виправлене середнє квадратичне відхилення $S = 1,2$. Оцініть $\bar{X}_\Gamma$ за допомогою довірчого інтервалу з надійністю $\gamma = 0,95$.

7. Використовуючи середню врожайність зернових культур $\bar{x}_B = \frac{196\alpha + 1352}{50 + 7\alpha}$ та дисперсію $D_B = \left[\frac{5936\alpha + 38688}{50 + 7\alpha} - (\bar{x}_B)^2 \right] \sigma^2 / 2a^2$ вибірки з $n = 50 + 7\alpha$ господарств, оцініть середню врожайність у генеральній сукупності $\bar{X}_G$ за допомогою довірчого інтервалу з надійністю $\gamma = 0,95$.

8. При дослідженні кількісної ознаки X генеральної сукупності за вибіркою обсягом $n = 25$ знайдено виправлене середнє квадратичне відхилення $S = 0,8 + 0,1\alpha$. Знайдіть довірчий інтервал, що покриває генеральне середнє квадратичне відхилення з надійністю $\gamma = 0,95$, застосовуючи χ^2 та q розподіли.

ПЕРЕВІРКА СТАТИСТИЧНИХ ГІПОТЕЗ

1. Основні поняття та теореми

Будь-які статистичні висновки про властивості генеральної сукупності, здобуті на підставі обробки вибірки, називають *статистичними гіпотезами*.

Висунуту гіпотезу, яку потрібно перевірити, називають *нульовою (основною) H_0* . Гіпотеза, протилежна нульовій, є *конкуруючою (альтернативною) H_A* .

Для перевірки правильності висунутої статистичної гіпотези вибирають статистичний критерій гіпотези – випадкову величину K з відомим законом розподілу. Сукупність значень статистичного критерію, за яких нульова гіпотеза не відхиляється, називають областю прийняття нульової гіпотези. Сукупність значень статистичного критерію, за яких нульова гіпотеза не приймається, називають критичною областю. Точку або кілька точок, що поділяють критичну область і область прийняття нульової гіпотези, називають критичними $K_{кр}$. Існують три види критичних областей: лівобічна ($K < K_{кр}$), правобічна ($K > K_{кр}$), двобічна ($K < K'_{кр}, K > K''_{кр}$).

При перевірці правильності H_0 можуть бути допущені помилки. Якщо H_0 є правильною, але її відхиляють на основі її перевірки, то буде допущена *помилка першого роду*. Ймовірність цієї помилки – *рівень значущості α* . Якщо H_0 є неправильною, але її приймають, то буде допущена *помилка другого роду*. Ймовірність цієї помилки позначають β , тоді $\pi = 1 - \beta$ є ймовірністю обґрунтованого відхилення H_0 і називається *потужністю критерію*. Статистичний критерій вибирається за найбільшою потужністю.

Пропонується такий алгоритм перевірки правильності гіпотези:

1. сформулювати нульову й одночасно альтернативну гіпотези;
2. для нульової гіпотези вибрати найпотужніший статистичний критерій;
3. за результатами вибірки обчислити емпіричне значення критерію $K_{емп}$;
4. побудувати критичну область та визначити критичні точки з виразів $P(K < K_{кр}) = \alpha$, $P(K > K_{кр}) = \alpha$ або $P(K < K'_{кр}) + P(K < K''_{кр}) = \alpha$;
5. якщо $K_{емп}$ потрапляє у критичну область, то гіпотезу H_0 відхиляють; якщо $K_{емп}$ не потрапляє у критичну область, то гіпотезу H_0 приймають.

Розрізняють параметричні та непараметричні статистичні гіпотези.

Непараметричними є гіпотези про закон розподілу ознаки генеральної сукупності. Припущення робиться на основі вигляду полігону чи гістограми емпіричних частот розподілу вибірки. Теоретичні частоти обчислюють за формулою $\tilde{n}_i = nP_i$, де n – обсяг вибірки, P_i – ймовірність спостережуваного значення дискретної випадкової величини $X = x_i$ або ймовірність потрапляння неперервної випадкової величини X в i -ий частковий діапазон згідно з припущеним законом розподілу ймовірностей.

Для перевірки правильності гіпотези про закон розподілу ознаки генеральної сукупності застосовують критерій узгодженості Пірсона. Це випадкова величина,

що має розподіл χ^2 , визначається формулою $K = \chi^2 = \sum_{i=1}^q \frac{(n_i - \tilde{n}_i)^2}{\tilde{n}_i}$ і має

$k = q - m - 1$ ступенів вільності, де q – число спостережень або часткових інтервалів для інтервального статистичного розподілу вибірки, m – число параметрів, якими визначається прийнятий закон розподілу ознаки генеральної сукупності.

Визначивши при заданому рівні значущості α і числу ступенів вільності k критичну точку $\chi_{кр}^2 = \chi^2(\alpha; k)$ за таблицею значень χ^2 , будується правобічна критична область. Якщо виявиться, що $\chi_{емп}^2 < \chi_{кр}^2$, то гіпотеза приймається.

Застосування критерію Пірсона вимагає дотримання таких умов:

- 1) вибірка має бути випадковою;
- 2) обсяг вибірки має бути досить великим ($n \geq 50$), а частота кожної групи – не менше 5. Якщо остання умова не виконується, то малочислені групи об'єднують.

Параметричними є гіпотези про значення числових характеристик генеральної сукупності.

Для перевірки правильності гіпотези про значення генеральної середньої $\bar{X}_G = a$ при заданому рівні значущості α в якості статистичного критерію

беруть випадкову величину $K = Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{x}_B - a)}{\sigma_G}$, що має нормований

нормальний закон розподілу ймовірностей. У випадку симетричної двобічної критичної області критичні точки $Z'_{кр} = -Z''_{кр}$ визначають на основі

$\Phi(Z''_{кр}) = \frac{1 - \alpha}{2}$ за таблицею значень функції Лапласа. У випадку, коли значення σ_G є невідомим, його замінюють S .

При малих обсягах вибірки ($n \leq 40$) за статистичний критерій вибирається

випадкова величина $K = t = \frac{\sqrt{n}(\bar{x}_B - a)}{S}$, що має t -розподіл Стюдента з $k = n - 1$

ступенями вільності. Критичні точки у цьому випадку визначаються за таблицею значень t -розподілу Стюдента як $t_{кр} = t(\alpha; k)$.

При перевірці правильності гіпотези про рівність двох вибірових дисперсій при заданому рівні значущості α статистичним критерієм є випадкова величина $K = F = \frac{S_{more}^2}{S_{less}^2}$, що має розподіл Фішера, де S_{more}^2 – більша, S_{less}^2 – менша з виправлених вибірових дисперсій. Критичні точки визначаються за таблицею значень функції Фішера при заданому рівні значущості та ступенях вільності $k_1 = n_X - 1$ і $k_2 = n_Y - 1$, де n_X і n_Y – обсяги першої і другої вибірок. Якщо $F_{емп} \leq F_{кр}$, то гіпотеза приймається.

2. Приклади виконання завдань

Для даного інтервального статистичного розподілу вибірки господарств за врожайністю зернових культур, застосовуючи обчислені раніше середню врожайність $\bar{x}_B = 27,04 \text{ ц/га}$ та дисперсію вибірки $D_B = 42,60 \text{ ц}^2/\text{га}^2$, перевірте правильність:

I. гіпотези про відповідність емпіричного розподілу нормальному за рівня значущості $\alpha = 0,05$.

II. гіпотези про те, що значення генеральної середньої $\bar{X}_F = 28 \text{ ц/га}$ за рівня значущості $\alpha = 0,01$ і при альтернативній гіпотезі $\bar{X}_F \neq 28 \text{ ц/га}$;

III. гіпотези про однаковість дисперсій даного статистичного розподілу вибірки з емпіричними частотами та статистичного розподілу вибірки з теоретичними частотами за рівня значущості $\alpha = 0,01$.

Межі інтервалів за врожайністю зернових культур, ц/га	14,0–18	18,1–22	22,1–26	26,1–30	30,1–34	34,1–38	38,1–42
Число господарств (частоти) n_i	5	7	9	14	7	5	3

Розв'язання:

I. 1. Нульова гіпотеза H_0 : емпіричний розподіл відповідає нормальному; альтернативна гіпотеза H_A : емпіричний розподіл не відповідає нормальному.

2. Статистичним критерієм перевірки гіпотези H_0 є χ^2 -критерій узгодження Пірсона $\chi^2 = \sum_{i=1}^q \frac{(n_i - \tilde{n}_i)^2}{\tilde{n}_i}$.

3. Обчислимо емпіричне значення критерію $\chi_{емп}^2 = \sum_{i=1}^q \frac{(n_i - \tilde{n}_i)^2}{\tilde{n}_i}$, де $\tilde{n}_i = nP_i$ –

теоретичні частоти, $P_i = \frac{h}{S} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - \bar{x}_B)^2}{2S^2}}$ – ймовірність того, що урожайність господарства потрапить в i -ий частковий діапазон, $n = 50$ – обсяг вибірки, $h = 4$ – довжина часткового інтеграла, x_i – середні значення інтервалів,

$S = \sqrt{\frac{nD_B}{n-1}} = \sqrt{\frac{50 \cdot 42,60}{49}} \approx 6,59 \text{ ц/га}$ – виправлене середнє квадратичне відхилення.

Введемо позначення $t_i = \frac{x_i - \bar{x}_B}{S}$ – нормоване відхилення, $f(t_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t_i^2}{2}}$ – значення функції нормального розподілу (Гаусса) для аргументу t_i , тоді формула теоретичних частот $\tilde{n}_i = \frac{nh}{S} f(t_i)$. Розраховані теоретичні частоти з округленням запишемо в таблицю. Інтервали з числом одиниць менше 5 необхідно об'єднати, тому два перших і два останніх інтервали об'єднаємо. Підрахуємо суми теоретичних і фактичних частот і перевіримо їх рівність загальному числу ($n = 50$).

Емпіричне значення критерію Пірсона $\chi_{емп}^2 = 1,428$. Послідовність розрахунків наведена в таблиці.

x_i	n_i	$t_i = \frac{x_i - \bar{x}_B}{S}$	$f(t_i)$	$\tilde{n}_i$		$n_i - \tilde{n}_i$	$(n_i - \tilde{n}_i)^2$	$\frac{(n_i - \tilde{n}_i)^2}{\tilde{n}_i}$
16	5	-1,68	0,0973	3	10	2	4	0,400
20	7	-1,07	0,2251	7				
24	9	-0,46	0,3589	11	11	-2	4	0,364
28	14	0,15	0,3945	13	13	1	1	0,077
32	7	0,75	0,3011	9	9	-2	4	0,444
36	5	1,36	0,1682	5	7	1	1	0,143
40	3	1,97	0,0573	2				
сума	50	—	—	50	50			1,428

4. Оскільки $\chi^2 > 0$, то будується правобічна критична область. Для встановлення табличного значення $\chi_{кр}^2 = \chi^2(\alpha; k)$ необхідно знати число ступенів вільності $k = q - m - 1$. Оскільки $q = 5$ – число часткових інтервалів з урахуванням укрупнення, $m = 2$ – число параметрів, якими визначається крива нормального розподілу (a, σ), то $k = 2$. За таблицею значень χ^2 при $\alpha = 0,05$ і $k = 2$ визначаємо критичну точку $\chi_{кр}^2 = 5,991$.

5. Оскільки $\chi_{емп}^2 < \chi_{кр}^2$, то нульова гіпотеза про відповідність емпіричного розподілу нормальному приймається.

II. 1. Нульова гіпотеза $H_0: \bar{X}_\Gamma = 28\text{ц/га}$; альтернативна гіпотеза $H_A: \bar{X}_\Gamma \neq 28\text{ц/га}$.

2. Статистичним критерієм перевірки гіпотези H_0 є випадкова величина $Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{x}_B - a)}{\sigma_\Gamma}$, що має нормований нормальний закон розподілу ймовірностей.

3. Обчислимо спостережуване значення статистичного критерію. Прийmemo $a = \bar{X}_\Gamma$, в якості невідомого σ_Γ візьmemo S , тоді отримаємо

$$Z_{емп} = \frac{\sqrt{50}(27,04 - 28)}{6,59} \approx -1,03.$$

4. Оскільки $H_A: \bar{X}_G \neq 28u/2a$, то будується двобічна симетрична критична область. Критичні точки $Z'_{kp} = -Z''_{kp}$ визначимо на основі $\Phi(Z''_{kp}) = \frac{1-\alpha}{2}$ за таблицею значень функції Лапласа. При $\alpha = 0,01$ маємо $\Phi(Z''_{kp}) = \frac{1-\alpha}{2} = 0,495$, звідки $Z''_{kp} \approx 2,58$, $Z'_{kp} \approx -2,58$, тоді критична область $(-\infty; -2,58) \cup (2,58; +\infty)$.

5. Оскільки $Z_{emn} \in [-2,58; 2,58]$, то нульова гіпотеза приймається.

III. 1. Нульова гіпотеза $H_0: D_X = D_Y$; альтернативна гіпотеза $H_A: D_X \neq D_Y$.

2. Статистичним критерієм перевірки гіпотези H_0 є випадкова величина $F = \frac{S_{more}^2}{S_{less}^2}$, що має розподіл Фішера.

3. Розрахуємо S_{more}^2 і S_{less}^2 .

$X(n_i)$	5	7	9	14	7	5	3	$\sum n_i = 50$
X^2	25	49	81	196	49	25	9	$\sum n_i^2 = 434$
$Y(\tilde{n}_i)$	3	7	11	13	9	5	2	$\sum \tilde{n}_i = 50$
Y^2	9	49	121	169	81	25	4	$\sum \tilde{n}_i^2 = 458$

$$\bar{x} = \frac{50}{7}; D_X = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2 = \frac{434}{7} - \frac{50^2}{7^2} \approx 10,98; S_X^2 = \frac{nD_X}{n-1} = \frac{7 \cdot 10,98}{6} \approx 12,81;$$

$$\bar{y} = \frac{50}{7}; D_Y = \frac{\sum y_j^2 n_j}{n} - (\bar{y})^2 = \frac{458}{7} - \frac{50^2}{7^2} = 14,41; S_Y^2 = \frac{nD_Y}{n-1} = \frac{7 \cdot 14,41}{6} \approx 16,81.$$

$$\text{Обчислимо емпіричне значення критерію } F_{emn} = \frac{S_{more}^2}{S_{less}^2} = \frac{16,81}{12,81} \approx 1,31.$$

4. Оскільки $F > 0$, то будується правобічна критична область. Критичну точку знаходимо за таблицею значень функції Фішера відповідно до заданого рівня значущості $\alpha = 0,01$ і чисел ступенів вільності $k_1 = n_X - 1 = 7 - 1 = 6$ та $k_2 = n_Y - 1 = 7 - 1 = 6$. Маємо $F_{kp} = F(\alpha = 0,01; k_1 = 6; k_2 = 6) = 8,47$. Тоді критична область має вигляд $(8,47; +\infty)$.

5. Так як $F_{emn} \notin (8,47; +\infty)$, то нульова гіпотеза про рівність двох дисперсій приймається.

3. Завдання для самостійного виконання

Для даного інтервального статистичного розподілу вибірки $50 + 7\alpha$ господарств за врожайністю зернових культур, застосовуючи обчислені раніше середню врожайність $\bar{x}_B = \frac{196\alpha + 1352}{50 + 7\alpha} u/2a$ та дисперсію вибірки

$$D_B = \left[\frac{5936\alpha + 38688}{50 + 7\alpha} - (\bar{x}_B)^2 \right] u^2/2a^2, \text{ перевірте правильність:}$$

I. гіпотези про відповідність емпіричного розподілу нормальному за рівня значущості $\alpha = 0,05$;

II. гіпотези про те, що значення генеральної середньої $\bar{X}_r = 28\text{ц/га}$ за рівня значущості $\alpha = 0,01$ і при альтернативній гіпотезі $\bar{X}_r \neq 28\text{ц/га}$;

III. гіпотези про однаковість дисперсій даного статистичного розподілу вибірки з емпіричними частотами та статистичного розподілу вибірки з теоретичними частотами за рівня значущості $\alpha = 0,01$.

Межі інтервалів за врожайністю зернових культур, ц/га	14,0–18	18,1–22	22,1–26	26,1–30	30,1–34	34,1–38	38,1–42
Число господарств (частоти)	5+ α	7+ α	9+ α	14+ α	7+ α	5+ α	3+ α

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Барковський В. В., Барковська Н. В., Лопатін О. К. Теорія ймовірностей та математична статистика : навчальний посібник. Київ : ЦНЛ, 2006. 424 с.
2. Василенко О. А., Сенча І. А. Математично-статистичні методи аналізу у прикладних дослідженнях : навч. посіб. Одеса : ОНАЗ ім. О.С. Попова, 2011. 166 с.
3. Вища математика. Випадкова величина. Основи математичної статистики : методичні рекомендації для практичних занять для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти ОПП «Агроінженерія» спеціальності 208 – «Агроінженерія» денної та заочної форм навчання / уклад. О. В. Бойчук. Миколаїв : МНАУ, 2024. 56 с.
4. Вища математика. Модуль «Теорія ймовірностей. Випадкові події» : метод. реком. до виконання самост. роботи для здобувачів вищої освіти ступеня «Бакалавр» спеціальностей 208 «Агроінженерія», 015 «Професійна освіта (Аграрне виробництво, переробка сільськогосподарської продукції та харчові технології)», 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» та 204 «Технологія виробництва і переробки продукції тваринництва» денної форми навчання / уклад. : О. В. Бойчук, С. І. Богданов, Є. Ю. Борчик, О. В. Шептилевський. Миколаїв : МНАУ, 2021. 64 с.
5. Вища математика. Основи математичної статистики : методичні рекомендації для практичних занять для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти ОПП «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» спеціальності 141 – «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» денної та заочної форм навчання / уклад. В. М. Дармосюк. Миколаїв : МНАУ, 2024. 62 с.
6. Герич М. С., Синявська О. О. Математична статистика : навчальний посібник. Ужгород, 2021. 146 с.
7. Дармосюк В. М., Пархоменко О. Ю., Біла В. О. Теорія ймовірностей та математична статистика (завдання для самостійної роботи та методичні вказівки щодо їх виконання). Миколаїв, 2020. 133 с.
8. Дармосюк В. М., Пархоменко О. Ю., Васильєва Л. Я. Математична статистика : посібник для самостійної та дистанційної роботи студентів. Миколаїв, 2023. 153 с.
9. Жлуктенко В. І., Наконечний С. І. Теорія ймовірностей і математична статистика : навч. посібник. Київ : КНЕУ, 2000. Ч. І. Теорія ймовірностей. 304 с.
10. Жлуктенко В. І., Наконечний С. І., Савіна С. С. Теорія ймовірностей і математична статистика : навч. посібник. Київ : КНЕУ, 2001. Ч. ІІ. Математична статистика. 336 с.
11. Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики : навч. посібник / В.В. Голомозий, М.В. Карташов, К.В. Ральченко. К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2015. 366с.
12. Теорія ймовірностей і математична статистика : підручник для студентів ВНЗ. Ч. 1 / М.А. Мартиненко, О.М. Нещадим, В.М. Сафонов. К. : ЦП «Компринт», 2016. 288с.

Навчальне видання

**ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТІ
ТА
МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА**

Методичні рекомендації

Укладач: Бойчук Олена Володимирівна

Формат 60x84/16 Ум. друк. арк.

Тираж __ прим. Зам. №

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Г. Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.