

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Інженерно-енергетичний факультет
Кафедра вищої та прикладної математики

**ВИЩА МАТЕМАТИКА.
ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ
ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ.
ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ.**

Методичні рекомендації
для виконання самостійної роботи здобувачами
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
ОПП «Комп'ютерні науки»
спеціальності ФЗ «Комп'ютерні науки»
денної та заочної форми здобуття вищої освіти

МИКОЛАЇВ – 2025

УДК 51
В55

Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету (протокол № 3 від 17.11.2025р.)

Укладач:

В.В. Поживатенко — к.ф.-м.н., старший викладач кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського національного аграрного університету.

Рецензенти:

Передерій В.І. — д-р техн. наук, професор кафедри комп'ютерних технологій та інформаційної безпеки Національного університету кораблебудування ім. адмірала Макарова.

Пархоменко О.Ю. — к. ф.-м. н., доцент кафедри економічної кібернетики, комп'ютерних наук та інформаційних технологій Миколаївського національного аграрного університету.

ЗМІСТ

1	Невизначений інтеграл	4
1.1	Первісна та невизначений інтеграл	4
1.2	Інтегрування розкладенням підінтегральної функції на доданки .	5
1.3	Інтегрування заміною змінної	6
1.4	Інтегрування частинами	8
1.5	Інтеграли від функцій, що містять квадратний тричлен	10
1.6	Інтегрування тригонометричних функцій	12
1.7	Інтегрування раціональних функцій	15
1.8	Інтегрування деяких ірраціональних функцій	22
1.9	Інтегрування деяких трансцендентних (неалгебраїчних) функцій .	25
2	Визначений інтеграл та його прикладення	27
2.1	Визначений інтеграл	27
2.2	Заміна змінної у визначеному інтегралі	30
2.3	Інтегрування частинами у визначеному інтегралі	32
2.4	Площа плоскої фігури	35
2.5	Об'єм тіла за площинами його паралельних перерізів	38
2.6	Об'єм тіла обертання	40
2.7	Довжина дуги плоскої фігури	43
2.8	Площа поверхні обертання	46
	Література	49
	Додаток А. Таблиця первісних	50

1 Невизначений інтеграл

1.1 Первісна та невизначений інтеграл

Розшук функції $F(x)$ за відомим її диференціалом $dF(x) = f(x) dx$ або за відомою її похідною $F'(x) = f(x)$, тобто дія зворотня до диференціювання, називається *інтегруванням*, а шукана функція $F(x)$ називається *первісною* функцією від функції $f(x)$.

Загальний вираз $F(x) + C$, де C – довільна стала, сукупності всіх первісних від функції $f(x)$ називається невизначеним інтегралом від цієї функції і позначається знаком $\int$:

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad \text{якщо} \quad d[F(x) + C] = f(x) dx.$$

Властивості невизначеного інтегралу.

I. $\frac{d}{dx} [f(x) dx] = f(x)$ або $d \int f(x) dx = f(x) dx$.

II. $F'(x) dx = F(x) + C$ або $\int dF(x) = F(x) + C$.

III. $\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$ (a – стала).

IV. $\int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx - \int f_3(x) dx$.

Основні формули інтегрування представлені у Додатку А.

Приклад 1. Знайти інтеграли: 1) $\int x dx$; 2) $\int x^2 dx$; 3) $\int x^4 dx$; 4) $\int \sqrt{x} dx$; 5) $\int \sqrt[3]{x^2} dx$; 6) $\int \sqrt{x^3} dx$; 7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Розв'язок. Користуючись формулами з Додатку А знаходимо:

1) $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$; 2) $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$; 3) $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$;

4) $\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + C$;

5) $\int \sqrt[3]{x^2} dx = \int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{5} x \sqrt[3]{x^2} + C$;

6) $\int \sqrt{x^3} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + C$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = 2 \sqrt{x} + C$.

Приклад 2. Обчислити інтеграли 1) $\int 5 dx$; 2) $\int 7x^2 dx$.

Розв'язок. З формул, представлених у Додатку А, знаходимо:

1) $\int 5 dx = 5 \int dx = 5x + C$; 2) $\int 7x^2 dx = 7 \int x^2 dx = 7 \cdot \frac{x^3}{3} + C$.

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int \frac{dt}{t^2 + 3}$.

Розв'язок. Безпосередньо з формули з Додатку А знаходимо:

$$\int \frac{dt}{t^2 + 3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} + C.$$

Приклад 4. Знайти інтеграл $\int 5 \sin 5t \, dt$.

Розв'язок. Можна перетворити підінтегральний вираз, що приводить до нового диференціалу

$$\int 5 \sin 5t \, dt = \int \sin 5t \, d(5t) = -\cos 5t + C.$$

Завдання та вправи для самостійної роботи студента

Знайти інтеграли:

1. $\int x^3 \, dx$. 2. $\int \sqrt[5]{x^2} \, dx$. 3. $\int \frac{dx}{3x^2}$. 4. $\int \frac{dx}{x+3}$.
5. $\int (x-5)^8 \, dx$. 6. $\int \frac{dx}{x^2+9}$. 7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+7}}$. 8. $\int \frac{dx}{2x^2-4}$.
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$. 10. $\int \sin \frac{x}{3} \, dx$. 11. $\int e^{4x} \, dx$. 12. $\int \frac{3 \, dt}{5^{2t}}$.
13. $\int \frac{dx}{2x+5}$. 14. $\int \frac{dx}{(3x+2)^3}$. 15. $\int 3 \sqrt[4]{x^3} \, dx$. 16. $\int \cos 3\varphi \, d\varphi$.

1.2 Інтегрування розкладенням підінтегральної функції на доданки

Якщо підінтегральна функція є алгебраїчною сумою декількох доданків, то може бути зручно, користуючись властивістю IV, інтегрувати кожний доданок окремо. Багато інтегралів таким способом приводяться до суми більш простих інтегралів.

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int (3x^2 - 2x + 5) \, dx$.

Розв'язок. Інтегруючи кожний доданок окремо, одержимо:

$$\begin{aligned} \int (3x^2 - 2x + 5) \, dx &= \int 3x^2 \, dx - \int 2x \, dx + \int 5 \, dx = \\ &= 3 \int x^2 \, dx - 2 \int x \, dx + 5 \int dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 5x + C = \\ &= x^3 - x^2 + 5x + C. \end{aligned}$$

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int \frac{x^2}{x^2+1} \, dx$.

Розв'язок. Використаємо дуже корисний в таких випадках прийом, а саме додавання і віднімання однієї і тієї ж величини:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{x^2+1} \, dx &= \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} \, dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1} \right) \, dx = \\ &= \int dx - \int \frac{dx}{x^2+1} = x - \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int \frac{3x^4 + 5x^3 - 6x\sqrt{x} + 4}{x} dx$.

Розв'язок. Маємо

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^4 + 5x^3 - 6x\sqrt{x} + 4}{x} dx &= 3 \int x^3 dx + 5 \int x^2 dx - 6 \int x^{\frac{1}{2}} dx + 4 \int \frac{dx}{x} = \\ &= \frac{3}{4} x^4 + \frac{5}{3} x^3 - \frac{24}{5} x^{\frac{5}{4}} + 4 \ln |x| + C. \end{aligned}$$

Приклад 4. Обчислити інтеграл $\int \frac{\sqrt{4+x^2} - 3\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{16-x^4}} dx$.

Розв'язок. Знаходимо

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{4+x^2} - 3\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{16-x^4}} dx &= \int \frac{\sqrt{4+x^2}}{\sqrt{16-x^4}} dx - 3 \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{16-x^4}} dx = \\ &= \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} - 3 \int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \arcsin \frac{x}{2} - 3 \ln \left| x + \sqrt{x^2+4} \right| + C. \end{aligned}$$

Завдання та вправи для самостійної роботи студента

Знайти інтеграли:

- | | |
|---|---|
| 1. $\int (x+2)^3(3x-5) dx$. | 2. $\int \frac{x^4 - 6x^2 + 3\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 1}{x\sqrt{x}} dx$. |
| 3. $\int (2\sqrt[5]{x} - \sqrt[3]{2x} + 5) dx$. | 4. $\int (\sin \varphi - \cos \varphi)^2 d\varphi$. |
| 5. $\int \frac{5x^2 - 6x + 1}{\sqrt{x}} dx$. | 6. $\int (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 dx$. |
| 7. $\int \frac{x^3}{x^2 + 6} dx$. | 8. $\int (e^x - e^{-x})^2 dx$. |
| 9. $\int \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx$. | 10. $\int \frac{x^2 - 2}{x + 2} dx$. |
| 11. $\int \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{x})^4}{\sqrt{ax}} dx$. | 12. $\int (3^x + 5^x)^2 dx$. |

1.3 Інтегрування заміною змінної

Для знаходження інтегралу $\int f(x) dx$ можна замінити змінну x новою змінною t , що пов'язана з x формулою $x = \varphi(t)$. Визначивши з цієї формули $dx = \varphi'(t) dt$ і підставляючи, одержимо

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = \int F(t) dt.$$

Коли інтеграл з новою змінною інтегрування t буде знайдений треба перетворити результат до змінної x , користуючись вихідною формулою $x = \varphi(t)$. Так знаходиться шуканий вираз заданого інтегралу.

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int \cos(\ln x) \frac{dx}{x}$.

Розв'язок. Так як $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$, то

$$\int \cos(\ln x) \frac{dx}{x} = \int \cos(\ln x) d(\ln x) = \sin(\ln x) + C.$$

Іноді більш зручно явно вводити нову змінну. Тоді краще це вказувати при проведенні обчислень таким чином:

$$\int \cos(\ln x) \frac{dx}{x} = \left[\begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{array} \right] = \int \cos t dt = \sin t + C = \sin(\ln x) + C.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x} + 5}}$.

Розв'язок. Помітимо, що $e^x dx = d(e^x)$. Так як $e^{2x} = (e^x)^2$ то одержуємо:

$$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x} + 5}} = \int \frac{d(e^x)}{\sqrt{(e^x)^2 + 5}} = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x} + 5}) + C.$$

Або якщо знаходити через явне введення нової змінної:

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x} + 5}} &= \left[\begin{array}{l} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{array} \right] = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 5}} = \ln(t + \sqrt{t^2 + 5}) + C = \\ &= \ln(e^x + \sqrt{e^{2x} + 5}) + C. \end{aligned}$$

Якщо підінтегральна функція є дробом, чисельник якої дорівнює похідній знаменника, то інтеграл дорівнює натуральному логарифму модуля знаменника

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \int \frac{d[\varphi(x)]}{\varphi(x)} = \ln |\varphi(x)| + C.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int \frac{(3x^2 + 1) dx}{x^3 + x + 8}$.

Розв'язок. Так як $(x^3 + x + 8)' = 3x^2 + 1$, то

$$\int \frac{(3x^2 + 1) dx}{x^3 + x + 8} = \ln |x^3 + x + 8| + C.$$

Приклад 4. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

Розв'язок. В таких випадках зручно вводити заміну $x = \sin \varphi$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \left[\begin{array}{l} x = \sin \varphi \\ dx = \cos \varphi d\varphi \end{array} \right] = \int \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \operatorname{tg} \varphi + C =$$

$$= \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

Завдання та вправи для самостійної роботи студента

Знайти інтеграли:

1. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x+1}}$ (підстановка $x+1 = t^2$).
2. $\int \frac{x^2 dx}{5-x^6}$ (підстановка $t = x^3$).
3. $\int \frac{e^x dx}{3+4e^x}$ (підстановка $z = 3+4e^x$).
4. $\int \operatorname{tg}^3 \varphi d\varphi$ (підстановка $\varphi = \operatorname{arctg} t$).
5. $\int x^3 \sqrt{a-x^2} dx$ (підстановка $\sqrt{a-x^2} = z$).
6. $\int \frac{x^2-x}{(x-2)^3} dx$ (підстановка $x-2 = t$).
7. $\int x \sqrt{a-x} dx$ (підстановка $a-x = t^2$).
8. $\int \frac{dx}{x \sqrt{1+x^2}}$ (підстановка $x = \frac{1}{t}$).
9. $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}}$ (підстановка $x = \frac{1}{t}$).
10. $\int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2}$ (підстановка $x = \operatorname{tg} t$).
11. $\int \frac{x^2+3}{\sqrt{(2x-5)^3}} dx$ (підстановка $\sqrt{2x-5} = t$).
12. $\int \frac{dx}{\sin 2x}$ (підстановка $\operatorname{tg} x = t$).

1.4 Інтегрування частинами

Формула інтегрування частинами

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

одержується з формули диференціала добутку інтегруванням обидвох частин рівності.

В цьому методі інтеграл $\int u dv$ зводиться до іншого інтегралу $\int v du$, тому важливо, щоб останній інтеграл був в якомусь сенсі простіше першого, або в деяких випадках хоча б подібний до нього.

Як видно з формули підінтегральний вираз представляється у вигляді добутку двох множників: u та dv . Так як диференціал dv треба інтегрувати, щоб знайти v , бажано, щоб він не приводив до досить складних інтегралів, які самі по собі можуть представляти загрозу використанню цього методу. У якості u , зрозуміло, бажано обирати функцію, яка при диференціюванні спрощується.

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int \ln x \, dx$.

Розв'язок. Треба покласти $u = \ln x$, $dv = dx$, звідки $du = \frac{dx}{x}$ і $v = \int dx = x$. За формулою інтегрування частинами одержимо:

$$\begin{aligned} \int \ln x \, dx &= \left[\begin{array}{ll} u = \ln x & dv = dx \\ du = \frac{dx}{x} & v = x \end{array} \right] = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = \\ &= x \ln x - x + C. \end{aligned}$$

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int x^2 e^x \, dx$.

Розв'язок. Покладемо $u = x^2$, $dv = e^x \, dx$, звідки $du = 2x \, dx$, $v = \int e^x \, dx = e^x$. Тоді

$$I = \int x^2 e^x \, dx = \left[\begin{array}{ll} u = x^2 & dv = e^x \, dx \\ du = 2x \, dx & v = e^x \end{array} \right] = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx.$$

Щоб обчислити останній інтеграл знов треба скористатись формулою інтегрування частинами. Покладемо $u = x$, $dv = e^x \, dx$, звідки $du = dx$, $v = \int e^x \, dx = e^x$. Тоді

$$\int x e^x \, dx = \left[\begin{array}{ll} u = x & dv = e^x \, dx \\ du = dx & v = e^x \end{array} \right] = x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x.$$

Підставляємо:

$$I = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int \sqrt{1+x^2} \, dx$.

Розв'язок. Іноді після інтегрування частинами і перетворень в правій частині з'являється той самий інтеграл, який ми розшукуємо і який міститься в лівій частині. Тоді треба одержане рівняння розв'язати відносно цього інтегралу.

Покладемо $u = \sqrt{1+x^2}$, $dv = dx$, звідки

$$du = \frac{x \, dx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad v = x.$$

Тоді,

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{1+x^2} \, dx = \left[\begin{array}{ll} u = \sqrt{1+x^2} & dv = dx \\ du = \frac{x \, dx}{\sqrt{1+x^2}} & v = x \end{array} \right] = \\ &= x \sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} \, dx = x \sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2 + 1 - 1}{\sqrt{1+x^2}} \, dx = \\ &= x \sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2} \, dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = x \sqrt{1+x^2} - I + \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}. \end{aligned}$$

Звідки

$$2I = x \sqrt{1+x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = x \sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C.$$

і остаточно маємо:

$$I = \frac{1}{2} \left[x \sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right] + C.$$

Приклад 4. Знайти інтеграл $\int x \cos x \, dx$.

Розв'язок. Покладемо $u = x$, $dv = \cos x \, dx$, знайдемо $du = dx$, $v = \int \cos x \, dx = \sin x$. Підставляємо в формулу інтегрування частинами:

$$\int x \cos x \, dx = \left[\begin{array}{ll} u = x & dv = \cos x \, dx \\ du = dx & v = \sin x \end{array} \right] = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Завдання та вправи для самостійної роботи студента

Знайти інтеграли:

- | | |
|--------------------------------------|---|
| 1. $\int x \sin x \, dx$. | 2. $\int \ln x \, dx$. |
| 3. $\int \ln^2 x \, dx$. | 4. $\int x^2 \ln x \, dx$. |
| 5. $\int \arcsin x \, dx$. | 6. $\int \arcsin^2 x \, dx$. |
| 7. $\int \arctg x \, dx$. | 8. $\int \operatorname{arcctg} x \, dx$. |
| 9. $\int x^2 \arctg 4x \, dx$. | 10. $\int x^2 \arcsin 2x \, dx$. |
| 11. $\int (x^2 + 1) e^{-2x} \, dx$. | 12. $\int x \ln(x - 1) \, dx$. |
| 13. $\int \ln(1 + x^2) \, dx$. | 14. $\int e^{ax} \sin bx \, dx$. |
| 15. $\int e^{-x} \sin^2 x \, dx$. | 16. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} \, dx$. |
| 17. $\int \sqrt{x} \ln x \, dx$. | 18. $\int (1+x^2)^2 \cos x \, dx$. |
| 19. $\int x^5 \sin 5x \, dx$. | 20. $\int e^{2x} \sin^2 x \, dx$. |

1.5 Інтеграли від функцій, що містять квадратний тричлен

Часто зустрічаються інтеграли, що містять у підінтегральній функції квадратний тричлен. Наприклад,

$$\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} \, dx, \quad \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \, dx, \quad \int \sqrt{ax^2 + bx + c} \, dx$$

та інші.

Для розшукування вказаних інтегралів від функцій такого роду, перетворюючи їх до формул інтегрування треба виділити *повний квадрат* з квадратного тричлена, в результаті чого він перетворюється в квадратний дво-член

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) =$$

$$= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \pm k^2 \right].$$

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 8}$.

Розв'язок. Виділяємо із квадратного тричлена повний квадрат $x^2 + 4x + 8 = (x + 2)^2 + 4$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 8} &= \int \frac{dx}{(x + 2)^2 + 4} = \left[\begin{array}{l} u = x + 2 \\ du = dx \end{array} \right] = \int \frac{du}{u^2 + 4} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{u}{2} + C = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x + 2}{2} + C. \end{aligned}$$

Можна проводити обчислення, не долучаючи нову змінну явно:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 8} = \int \frac{d(x + 2)}{(x + 2)^2 + 4} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x + 2}{2} + C.$$

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int \frac{7 - 8x}{2x^2 - 3x + 1} dx$.

Розв'язок. Виділимо з квадратного тричлену повний квадрат

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3x + 1 &= 2 \left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \right) = 2 \left[\left(x - \frac{3}{4} \right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{9}{16} \right] = \\ &= 2 \left[\left(x - \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{1}{16} \right] \end{aligned}$$

та замінимо змінну x , вважаючи $x - \frac{3}{4} = t$.

$$\begin{aligned} \int \frac{7 - 8x}{2x^2 - 3x + 1} dx &= \left[\begin{array}{l} t = x - \frac{3}{4} \\ dt = dx \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int \frac{1 - 8t}{t^2 - \frac{1}{16}} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 - \frac{1}{16}} - 2 \int \frac{2t dt}{t^2 - \frac{1}{16}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}} \ln \left| \frac{t - \frac{1}{4}}{t + \frac{1}{4}} \right| - 2 \ln \left| t^2 - \frac{1}{16} \right| + C = \\ &= \ln \left| \frac{x - 1}{1 - 1/2} \right| - 2 \ln \left| x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \right| + C. \end{aligned}$$

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int \frac{3x - 2}{x^2 + 6x + 9} dx$.

Розв'язок. Виділимо повний квадрат $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$ та введемо нову змінну $t = x + 3$, тоді одержимо $dx = dt$ і

$$\int \frac{3x - 2}{x^2 + 6x + 9} dx = \left[\begin{array}{l} t = x + 3 \\ dt = dx \end{array} \right] = \int \frac{3t - 11}{t^2} dt = \int \left(\frac{3}{t} - \frac{11}{t^2} \right) dt =$$

$$= 3 \int \frac{dt}{t} - 11 \int \frac{dt}{t^2} = 3 \ln |t| + \frac{11}{t} + C = 3 \ln |x + 3| + \frac{11}{x + 3} + C.$$

Приклад 4. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x - 3}}$.

Розв'язок. Виіділяємо з тричлена повний квадрат $x^2 - 4x - 3 = (x - 2)^2 - 7$, записуємо $d(x - 2)$ замість dx і інтегруємо:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x - 3}} = \int \frac{d(x - 2)}{\sqrt{(x - 2)^2 - 7}} = \ln \left| x - 2 + \sqrt{(x - 2)^2 - 7} \right| + C,$$

або

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x - 3}} &= \left[\begin{array}{l} t = x - 2 \\ dt = dx \end{array} \right] = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 7}} = \ln \left| t + \sqrt{t^2 - 7} \right| + C = \\ &= \ln \left| x - 2 + \sqrt{(x - 2)^2 - 7} \right| + C. \end{aligned}$$

Завдання та вправи для самостійної роботи студента

Знайти інтеграли:

1. $\int \frac{dx}{x^2 - x - 6}$.

2. $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 29}$.

3. $\int \frac{dx}{4x - 1 - 4x^2}$.

4. $\int \frac{(4x - 3) dx}{x^2 + 3x + 4}$.

5. $\int \frac{(3x + 4) dx}{x^2 + 5x}$.

6. $\int \frac{18x^2 + 13x}{1 + 6x + 9x^2} dx$.

7. $\int \frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x^2 + 2x - 3} dx$.

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 + x - x^2}}$.

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x}}$.

10. $\int \frac{(x + 3) dx}{\sqrt{1 - 4x^2}}$.

11. $\int \sqrt{x^2 + 4x} dx$.

12. $\int \sqrt{1 - 2x - x^2} dx$.

1.6 Інтегрування тригонометричних функцій

Якщо підінтегральна функція містить тригонометричні вирази, то доречним стає скористатись тригонометричними формулами для спрощення її вигляду. Насправді тригонометричних формул дуже багато і неможливо описати різноманітні перетворення підінтегральної функції загального вигляду. Тому приходить обмежуватись деякими порадами лише для підінтегральних функцій певного вигляду.

I. $\int \sin^n x dx$, $\int \cos^n x dx$, де n – ціле додатне число.

1. Інтеграл від парного ступеню сінуса або косинуса можна знайти шляхом зниження ступеню (вдвічі) за формулами:

$$\sin^2 u = \frac{1}{2} (1 - \cos 2u);$$

$$\cos^2 u = \frac{1}{2}(1 + \cos 2u).$$

2. Інтеграли від непарного ступеню сінуса або косинуса можна знайти шляхом відокремлення від нього одного множника і заміни кофункції новою змінною.

II. $\int \sin^m x \cos^n x dx$, де m і n – цілі додатні числа.

Інтеграли такого вигляду можна знайти за правилом 1. Можливо при цьому знадобиться ще і формула

$$\sin u \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u,$$

якщо m і n обидва парні. У всіх інших випадках, якщо непарними є m або n , а може бути, що m і n одночасно, треба використовувати правило 2.

III. $\int \operatorname{tg}^n x dx$, $\int \operatorname{ctg}^n x dx$, де n – ціле додатне число.

Ці інтеграли знаходять шляхом заміни $\operatorname{tg} x$, або відповідно $\operatorname{ctg} x$, новою змінною.

IV. $\int \sin ax \cos bx dx$, $\int \sin ax \sin bx dx$, $\int \cos ax \cos bx dx$, де a та b – сталі.

Тут треба застосувати відомі тригонометричні формули:

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2} [\sin(a+b)x + \sin(a-b)x],$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2} [\cos(a-b)x - \cos(a+b)x],$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2} [\cos(a+b)x + \cos(a-b)x].$$

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int \sin^2 3x dx$.

Розв'язок. За правилом I.1 маємо

$$\begin{aligned} \sin^2 3x dx &= \frac{1}{2} \int (1 - \cos 6x) dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{12} \int \cos 6x d(6x) = \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{12} \sin 6x + C. \end{aligned}$$

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int \cos^4 x dx$.

Розв'язок. Знов застосовуємо правило I.1:

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x dx &= \int (\cos^2 x)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 + \cos 2x)^2 dx = \\ &= \frac{1}{4} \left[\int dx + \int \cos 2x d(2x) + \int \cos^2 2x dx \right]. \end{aligned}$$

Останній інтеграл знаходимо за правилом I.1:

$$\begin{aligned}\int \cos^2 2x \, dx &= \frac{1}{2} \int (1 + \cos 4x) \, dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{8} \int \cos 4x \, d(4x) = \\ &= \frac{x}{2} + \frac{1}{8} \sin 4x.\end{aligned}$$

Підставляючи в попередню рівність, одержимо

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x \, dx &= \frac{1}{4} \left(x + \sin 2x + \frac{x}{2} + \frac{1}{8} \sin 4x \right) + C = \\ &= \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C.\end{aligned}$$

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int \sin^5 x \, dx$.

Розв'язок. За правилом I.2 відокремлюємо від парного ступеню один множник

$$\begin{aligned}\int \sin^5 x \, dx &= \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x \, dx = \left[\begin{array}{l} z = \cos x \\ dz = -\sin x \, dx \end{array} \right] = \\ &= \int (1 - z^2)^2 (-dz) = - \int (1 - 2z^2 + z^4) \, dz = -z + \frac{2z^3}{3} - \frac{z^5}{5} + C = \\ &= C - \cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x.\end{aligned}$$

Приклад 4. Знайти інтеграл $\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx$.

Розв'язок. За правилом II одержимо

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx &= \int \sin^2 x (\sin x \cos x)^2 \, dx = \\ &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \cdot \frac{\sin^2 2x}{4} \, dx = \frac{1}{8} \left(\int \sin^2 2x \, dx - \int \sin^2 2x \cos 2x \, dx \right).\end{aligned}$$

Перший інтеграл знаходимо за правилом I.1:

$$\begin{aligned}\int \sin^2 2x \, dx &= \frac{1}{2} \int (1 - \cos 4x) \, dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{8} \int \cos 4x \, d(4x) = \\ &= \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} \sin 4x.\end{aligned}$$

Другий інтеграл знаходимо за правилом II:

$$\int \sin^2 2x \cos 2x \, dx = \left[\begin{array}{l} z = \sin 2x \\ dz = 2 \cos 2x \, dx \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int z^2 \, dz = \frac{z^3}{6} = \frac{1}{6} \sin^3 2x.$$

Підставляючи ці результати, маємо

$$\int \sin^4 x \cos^2 x dx = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{8} \sin 4x - \frac{1}{6} \sin^3 2x \right) + C.$$

Завдання та вправи для самостійної роботи студента

Знайти інтеграли:

- | | |
|--------------------------------------|--|
| 1. $\int \cos^2 5x dx.$ | 2. $\int \cos^5 x dx.$ |
| 3. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx.$ | 4. $\int \sin^3 x \cos^2 x dx.$ |
| 5. $\int \sin^3 x \cos^3 x dx.$ | 6. $\int \sin^4 x dx.$ |
| 7. $\int \operatorname{ctg}^4 y dy.$ | 8. $\int \cos \frac{4}{3} x \cos 3x dx.$ |
| 9. $\int \sin 5x \sin 6x dx.$ | 10. $\int \sin at \cos bt dt.$ |
| 11. $\int \sin 5x \sin 2x dx.$ | 12. $\int \sin 3x \cos 2x dx.$ |

1.7 Інтегрування раціональних функцій

Раціональні функції завжди інтегруються в елементарних функціях.

Ціла раціональна функція (поліном) інтегрується безпосередньо:

$$\int (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n) dx = \frac{a_0}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_1}{n} x^n + \dots + a_n x + C.$$

Інтеграл від дробової раціональної функції $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, де $P(x)$ і $Q(x)$ – поліноми, можна виразити через елементарні функції, розкладаючи на доданки, які завжди перетворюються до формул інтегрування.

Неправильний раціональний дріб, у якого ступінь чисельника вище або дорівнює ступеню знаменника, можна діленням чисельника на знаменник представити у вигляді суми поліному і правильного раціонального дробу, у якого ступінь чисельника нижче ступеня знаменника.

Правильний раціональний дріб можна розкласти на елементарні, що завжди інтегруються складові дробу наступних двох видів:

$$\frac{A}{(x-a)^m}, \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n},$$

m і n – цілі додатні числа.

Для розкладення правильного раціонального дробу $\frac{P(x)}{Q(x)}$ на елементарні складові дробу, потрібно:

а) Розкласти знаменник $Q(x)$ на найпростіші дійсні множники.

У загальному випадку, відповідно до основної теореми алгебри, це розкладення може містити лінійні та квадратичні множники:

$$Q(x) = a_0(x-a)^m \dots (x-b)^k \cdot (x^2+px+q)^n \dots (x^2+cx+d)^r.$$

б) Написати схему розкладення даного дробу на елементарні доданки у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{R(Q)}{Q(x)} = & \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_m}{(x-a)^m} + \dots + \\ & + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_k}{(x-b)^k} + \\ & + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{M_nx + N_n}{(x^2 + px + q)^n} + \dots + \\ & + \frac{C_1x + D_1}{x^2 + cx + d} + \frac{C_2x + D_2}{(x^2 + cx + d)^2} + \dots + \frac{C_rx + D_r}{(x^2 + cx + d)^r}, \end{aligned}$$

де $A_1, \dots, B_1, \dots, M_1, \dots, N_1, \dots, C_1, \dots, D_1, \dots$ – деякі сталі. В цю схему для кожного множника в розкладенні знаменника $Q(x)$ вписується стільки елементарних доданків дробів, яка є його кратність $(m, k, n, r, \dots)$.

Знаменниками елементарних дробів є всі цілі ступені кожного множника в розкладенні $Q(x)$, починаючи з першого ступеня і закінчуючи тим ступенем, який множник має в розкладенні $Q(x)$.

Чисельниками елементарних дробів служать або сталі $A_1, A_2, \dots$, або лінійні функції $M_1x + N_1, \dots$, зважаючи на те, чи є знаменник дробу деяким ступенем лінійної чи квадратної функції.

в) Звільнитися від знаменників, помножуючи обидві частини рівності на $Q(x)$.

г) Скласти систему рівнянь, порівнюючи коефіцієнти при однакових ступенях x в обох частинах здобутої тотожності. (Число цих рівнянь має дорівнювати числу невідомих $A_1, \dots, B_1, \dots, M_1, \dots, N_1, \dots, C_1, \dots, D_1, \dots$).

д) Розв'язати систему і підставити знайдені значення $A_1, \dots, B_1, \dots, M_1, \dots, N_1, \dots, C_1, \dots, D_1, \dots$ в схему розкладення.

Після розкладення на елементарні складові дробі інтегрування всякого правильного раціонального дробу зводиться до знаходження інтегралів вигляду

$$I_1 = \int \frac{dx}{(x-a)^m} \quad \text{і} \quad I_2 = \int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n}.$$

Інтеграл I_1 при $m \neq 1$:

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m} = \int (x-a)^{-m} d(x-a) = \frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1} + C.$$

а при $m = 1$:

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln |x-a| + C.$$

Інтеграл I_2 при $n = 1$ можна знайти, користуючись способом, вказаним в пункті 1.5, а при $n = 2, 3, 4, \dots$ треба скористатись наступним алгоритмом.

Зробимо підстановку

$$x + \frac{p}{2} = t, \quad dx = dt,$$

$$x^2 + px + q = t^2 + a^2, \quad Mx + N = Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right).$$

Тоді

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^m} dx &= \int \frac{Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{(t^2 + a^2)^m} dt = \\ &= \frac{M}{2} \int \frac{2t dt}{(t^2 + a^2)^m} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m}. \end{aligned} \quad (1)$$

Перший із інтегралів справа обчислюється підстановкою $t^2 + a^2 = u$, $2t dt = du$

$$\begin{aligned} \int \frac{2t dt}{(t^2 + a^2)^m} &= \int \frac{du}{u^m} = -\frac{1}{m-1} \frac{1}{u^{m-1}} + C = \\ &= -\frac{1}{m-1} \frac{1}{(t^2 + a^2)^{m-1}} + C. \end{aligned} \quad (2)$$

Другий із інтегралів справа, за будь-якого m , може бути обчислений за рекурентної формули

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} \frac{1}{a^2} J_n, \quad (3)$$

де

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}.$$

Потім треба покласти в результаті $t = \frac{2x+p}{2}$, щоб повернутися до змінної x .

Приклад 1. Обчислити інтеграл

$$\int \frac{x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^2 + 4} dx.$$

Розв'язок. Розкладемо знаменник на множники. Помічаючи, що $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$, $x_4 = 2$ є коренями полінома $x^4 - 5x^2 + 4$, одержуємо

$$x^4 - 5x^2 + 4 = (x-1)(x-2)(x+1)(x+2).$$

Тому підінтегральну функцію розкладемо на такі найпростіші дробі:

$$\frac{x^2 - x + 2}{(x-1)(x-2)(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{x-2}. \quad (4)$$

Приводимо рівність (4) до спільного знаменника та відкидаємо його:

$$x^2 - x + 2 = A(x-1)(x+2)(x-2) + B(x+1)(x+2)(x-2) + C(x+1)(x-1)(x-2) + D(x+1)(x-1)(x+2). \quad (5)$$

Звідси, перемноживши і привівши подібні члени, матимемо:

$$x^2 - x + 2 = x^3(A+B+C+D) + x^2(-A+B-2C+2D) + x(-4A-4B-C-D) + 4A-4B+2C-2D.$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових ступенях x в обох частинах тотожності, отримаємо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів A, B, C, D :

$$\begin{cases} A+B+C+D=0, \\ -A+B-2C+2D=1, \\ -4A-4B-C-D=-1, \\ 4A-4B+2C-2D=2. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, одержимо: $A = \frac{2}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = -\frac{2}{3}$, $D = \frac{1}{3}$. Отже, ми отримали розкладення раціонального дробу на найпростіші:

$$\frac{x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^2 + 4} = \frac{2}{3(x+1)} - \frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{3(x+2)} + \frac{1}{3(x-2)}.$$

Інтегруючи, одержимо:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^2 + 4} dx &= \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-2} = \\ &= \frac{2}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{2}{3} \ln|x+2| + \frac{1}{3} \ln|x-2| + C = \\ &= \frac{1}{3} \ln \left| \frac{(x+1)^2(x-2)}{(x-1)(x+2)^2} \right| + C. \end{aligned}$$

Зауваження. Знаходження коефіцієнтів розкладення значно спрощується, якщо застосувати так званий метод *довільних значень*. Особливо якщо знаменник підінтегрального виразу містить лише дійсні прості корені.

Наприклад, одержана рівність (5), є тотожність, що виконується при будь-якому значенні x . Тому оберемо чотири (за кількістю невідомих коефіцієнтів) значення x таким чином, щоб кожне обертало в нуль якийсь із співмножників в правій стороні (5).

Такими значеннями є корені знаменника $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$, $x_4 = 2$.

Підставляючи по черзі ці значення в рівність (5), одержимо:

при $x = -1$ маємо: $4 = A(-2)(1)(-3) + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D \cdot 0$, звідки $A = \frac{2}{3}$;

при $x = 1$ маємо: $2 = A \cdot 0 + B \cdot 2 \cdot 3(-1) + C \cdot 0 + D \cdot 0$, звідки $B = -\frac{1}{3}$;
 при $x = -2$ маємо: $8 = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C(-1)(-3)(-4) + D \cdot 0$, звідки $C = -\frac{2}{3}$;
 при $x = 2$ маємо: $4 = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D \cdot 3 \cdot 1 \cdot 4$, звідки $D = \frac{1}{3}$.

Приклад 2. Обчислити інтеграл

$$\int \frac{(x-1) dx}{x^2(x-2)(x+1)^2}.$$

Розв'язок. Розкладення на найпростіші дробі має вигляд

$$\frac{(x-1)}{x^2(x-2)(x+1)^2} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{(x+1)^2} + \frac{F}{x+1}.$$

Приводимо праву частину до спільного знаменника та прирівнюємо чисельники

$$x-1 = A(x-2)(x+1)^2 + Bx(x-2)(x+1)^2 + Cx^2(x+1)^2 + Dx^2(x-2) + Fx^2(x+1)(x-2). \quad (6)$$

Припускаючи послідовно $x = 0$, $x = 2$, $x = -1$, знаходимо, що

$$\begin{cases} -1 = -2A, \\ 1 = 36D, \\ -2 = -3D, \end{cases}$$

звідки $A = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{36}$, $D = \frac{2}{3}$. Підставимо ці значення в (6) і розкриємо дужки.
 Одержимо:

$$x-1 = \left(B + F + \frac{1}{36}\right)x^4 + \left(\frac{11}{9} - F\right)x^3 + \left(-3B - 2F - \frac{23}{36}\right)x^2 + \left(-\frac{3}{2} - 2B\right)x - 1.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при x^3 і x , одержимо:

$$\frac{11}{9} - F = 0, \quad -\frac{3}{2} - 2B = 1$$

звідки $B = -\frac{5}{4}$, $F = \frac{11}{9}$. Отже,

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{5}{4}, \quad C = \frac{1}{36}, \quad D = \frac{2}{3}, \quad F = \frac{11}{9}.$$

Тоді маємо

$$\int \frac{(x-1) dx}{x^2(x-2)(x+1)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2} - \frac{5}{4} \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{36} \int \frac{dx}{x-2} + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{(x+1)^2} + \frac{11}{9} \int \frac{dx}{x+1} =$$

$$= -\frac{1}{2x} - \frac{5}{4} \ln|x| + \frac{1}{36} \ln|x-2| - \frac{2}{3(x+1)} + \frac{11}{9} \ln|x+1| + C.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл

$$\int \frac{3x^2 + 5x + 12}{(x^2 + 3)(x^2 + 1)} dx.$$

Розв'язок. Знаменник не має дійсних коренів. Множники знаменника другого ступеня й не повторюються, тому розкладення даного правильного дробу на найпростіші має вигляд:

$$\frac{3x^2 + 5x + 12}{(x^2 + 3)(x^2 + 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 3} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}.$$

Приводимо дробу в правій частині рівності до спільного знаменника і прирівнюємо чисельники:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 5x + 12 &= (Ax + B)(x^2 + 1) + (Cx + D)(x^2 + 3) = \\ &= (A + C)x^3 + (B + D)x^2 + (A + 3C)x + (B + 3D). \end{aligned}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових ступенях x в лівій та правій частинах рівності, будемо мати:

$$\begin{cases} A + C = 0, \\ B + D = 3, \\ A + 3C = 5, \\ B + 3D = 12. \end{cases}$$

Звідси, розв'язуючи систему, одержимо $A = -\frac{5}{2}$, $B = -\frac{3}{2}$, $C = \frac{5}{2}$, $D = \frac{9}{2}$, звідки

$$\frac{3x^2 + 5x + 12}{(x^2 + 3)(x^2 + 1)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{5x + 3}{x^2 + 3} + \frac{5x + 9}{2(x^2 + 1)}$$

і

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 + 5x + 12}{(x^2 + 3)(x^2 + 1)} dx &= -\frac{5}{2} \int \frac{x dx}{x^2 + 3} - \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 3} + \frac{5}{2} \int \frac{x dx}{x^2 + 1} + \frac{9}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \\ &= -\frac{5}{4} \ln(x^2 + 3) - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{5}{4} \ln(x^2 + 1) + \frac{9}{2} \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

Приклад 4. Обчислити інтеграл

$$\int \frac{3x + 1}{x(1 + x^2)^2} dx.$$

Розв'язок. Розкладемо даний дроб на найпростіші

$$\frac{3x+1}{x(1+x^2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} + \frac{Dx+F}{(1+x^2)^2}.$$

Приведемо до спільного знаменника праву частину рівності та прирівнюємо чисельники, одержуємо:

$$\begin{aligned} 3x+1 &= A(1+x^2)^2 + (Bx+C)x(1+x^2) + (Dx+F)x = \\ &= (A+B)x^4 + Cx^3 + (2A+B+D)x^2 + (C+F)x + A. \end{aligned}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових ступенях x в правій і лівій частинах, одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} A+B=0, \\ C=0, \\ 2A+B+D=0, \\ C+F=3, \\ A=1. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, отримуємо: $A=1$, $B=-1$, $C=0$, $D=-1$, $F=3$. Отже,

$$\begin{aligned} \frac{3x+1}{x(1+x^2)^2} &= \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} + \frac{-x+3}{(1+x^2)^2}, \\ \int \frac{3x+1}{x(1+x^2)^2} dx &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x dx}{1+x^2} - \int \frac{x dx}{(1+x^2)^2} + 3 \int \frac{dx}{(1+x^2)^2}. \end{aligned}$$

Знаходимо інтеграли:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x} &= \ln|x|, \\ \int \frac{x dx}{1+x^2} &= \left[\begin{matrix} t=1+x^2 \\ dt=2x dx \end{matrix} \right] = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| = \frac{1}{2} \ln(1+x^2), \\ \int \frac{x dx}{(1+x^2)^2} &= \left[\begin{matrix} t=1+x^2 \\ dt=2x dx \end{matrix} \right] = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{t} = -\frac{1}{2(1+x^2)} \end{aligned}$$

Для останнього інтеграла використовуємо рекурентну формулу (3):

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 1^2} \frac{x}{x^2+1} + \frac{2 \cdot 1 - 1}{2 \cdot 1} \frac{1}{1^2} \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x.$$

Отже, остаточно маємо:

$$\int \frac{3x+1}{x(1+x^2)^2} dx = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{3x+1}{2(x^2+1)} + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} x + C.$$

Завдання та вправи для самостійної роботи студента

Знайти інтеграли:

1. $\int \frac{dx}{x^3 - x^2}.$

3. $\int \frac{x dx}{x^3 - 1}.$

5. $\int \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^3 - x} dx.$

7. $\int \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)(x^2 - 4)} dx.$

9. $\int \frac{7x - 15}{x^3 - 2x^2 + 5x} dx.$

11. $\int \frac{z^2 dz}{z^4 + 5z^2 + 4}.$

13. $\int \frac{5x - 14}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx.$

15. $\int \frac{11x + 16}{(x - 1)(x + 2)^2} dx.$

2. $\int \frac{dx}{x^3 + x}.$

4. $\int \frac{(x^2 + 1) dx}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}.$

6. $\int \frac{x^2 - 3}{x^2 - 1} dx.$

8. $\int \frac{x^3 + 5}{(x - 1)(x^2 + 4)} dx.$

10. $\int \frac{2t^5 - 2t + 1}{1 - t^4} dt.$

12. $\int \frac{x^4 dx}{x^4 - 2x^2 + 1}.$

14. $\int \frac{dx}{(x - 1)^3 (x + 1)^2}.$

16. $\int \frac{(x - 1)^2 dx}{(x + 1)^2 (x - 4)}.$

1.8 Інтегрування деяких ірраціональних функцій

Ірраціональні функції інтегруються в елементарних функціях лише в деяких певних випадках. Розглянемо найбільш уживані види інтегралів від ірраціональних функцій, які виражаються через елементарні функції:

I. Інтеграл $\int R(x, x^\alpha, x^\beta, \dots) dx$, де R – раціональна функція, $\alpha = \frac{m_1}{n_1}$, $\beta = \frac{m_2}{n_2}$, $\dots$ – раціональні числа, зводиться до інтегралу від раціональної функції, і, отже, виражається в елементарних функціях за допомогою підстановки $x = t^k$, де k – спільний знаменник всіх дробових показників у x .

Інтеграли більш загального вигляду $\int R[x, (ax + b)^\alpha, (ax + b)^\beta, \dots] dx$ або $\int R\left[x, \left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)^\alpha, \left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)^\beta, \dots\right] dx$ знаходяться (приводяться до раціонального вигляду) за допомогою аналогічних підстановок: $ax + b = t^k$ або $\frac{ax + b}{cx + d} = t^k$.

II. До інтегралів від функцій, що раціонально залежать від тригонометричних функцій, зводяться інтеграли:

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx - \text{підстановкою } x = a \sin t;$$

$$\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx - \text{підстановкою } x = a \operatorname{tg} t;$$

$$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx - \text{підстановкою } x = a/\cos t.$$

III. Інтеграл від диференціального біному $\int x^m(a + bx^n)^p dx$ зводиться до інтегралу від раціональних функцій в трьох випадках:

1) коли p – ціле число, – розкладенням на доданки за формулою біному Ньютона.

2) коли $\frac{m+1}{n}$ – ціле число, – підстановкою $a + bx^n = z^r$.

3) коли $\frac{m+1}{n} + p$ – ціле число, – підстановкою $a + bx^n = x^n z^r$.

Приклад 1. Обчислити інтеграл

$$\int \frac{x^{1/2} dx}{x^{3/4} + 1}.$$

Розв'язок. Під інтегралом маємо раціональну функцію від дробових ступенів x . Спільне найменше кратне знаменників 2 та 4 дорівнює 4, тому вважаємо: $x = t^4$, $dx = 4t^3 dt$. Звідси

$$\int \frac{x^{1/2} dx}{x^{3/4} + 1} = \left[\begin{array}{l} x = t^4 \\ dx = 4t^3 dt \end{array} \right] = 4 \int \frac{t^2 t^3}{t^3 + 1} dt = 4 \int \frac{t^5 dt}{1 + t^3}.$$

Підстановка призвела до раціонального дробу:

$$4 \int \frac{t^5 dt}{1 + t^3} = 4 \int \left(t^2 - \frac{t^2}{t^3 + 1} \right) dt = \frac{4}{3} t^3 - \frac{4}{3} \ln |t^3 + 1| + C.$$

Повертаючись до змінної x , отримаємо:

$$\int \frac{x^{1/2} dx}{x^{3/4} + 1} = \frac{4}{3} \left(x^{3/4} - \ln |x^{3/4} + 1| \right) + C.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл

$$\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}.$$

Розв'язок. Так як

$$(1-x)\sqrt{1-x^2} = (1-x)\sqrt{(1-x)(1+x)} = (1-x)(1+x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

то підінтегральний вираз є раціональною функцією від x і $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, тому зро-

бимо підстановку $\frac{1-x}{1+x} = t^2$, звідки

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{-4t dt}{(1+t^2)^2}, \quad 1-x = \frac{2t^2}{1+t^2}, \quad 1+x = \frac{2}{1+t^2}.$$

Отже

$$\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} = - \int \frac{4t dt}{(1+t^2)^2 \cdot \frac{2t^2}{1+t^2} \cdot \frac{2}{1+t^2} \cdot t} = - \int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} + C.$$

Повертаючись до змінної x , одержуємо:

$$\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C.$$

Приклад 3. Знайти інтеграл

$$\int \frac{1 + \sqrt[4]{x}}{x + \sqrt{x}} dx.$$

Розв'язок. Поклавши $x = t^4$, маємо $dx = 4t^3 dt$:

$$\begin{aligned} \int \frac{1 + \sqrt[4]{x}}{x + \sqrt{x}} dx &= \left[\begin{array}{l} x = t^4 \\ dx = 4t^3 dt \end{array} \right] = \int \frac{1+t}{t^4 + t^2} 4t^3 dt = 4 \int \frac{t^2 + t}{t^2 + 1} dt = \\ &= 4 \int \left(1 + \frac{t-1}{t^2+1} \right) dt = 4 \left(\int dt + \int \frac{t dt}{t^2+1} - \int \frac{dt}{t^2+1} \right) = \\ &= 4t + 2 \ln(t^2 + 1) - 4 \operatorname{arctg} t + C, \end{aligned}$$

Повертаючись до змінної x , маємо

$$\int \frac{1 + \sqrt[4]{x}}{x + \sqrt{x}} dx = 4 \sqrt[4]{x} + 2 \ln(1 + \sqrt{x}) - 4 \operatorname{arctg} \sqrt[4]{x} + C.$$

Приклад 4. Знайти інтеграл

$$\int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx.$$

Розв'язок. Візьмемо підстановку $\frac{1+x}{x} = t^2$, звідки знаходимо $x = \frac{1}{t^2-1}$,

$$dx = -\frac{2t dt}{(t^2-1)^2},$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx &= \int (t^2-1)^2 t \cdot \frac{-2t dt}{(t^2-1)^2} = -2 \int t^2 dt = \\ &= -\frac{2}{3} t^3 + C = C - \frac{2}{3} \sqrt{\left(\frac{1+x}{x}\right)^3}. \end{aligned}$$

Завдання та вправи для самостійної роботи студента

Знайти інтеграли:

1. $\int \frac{dx}{(1 + \sqrt[3]{x}) \sqrt{x}}.$

2. $\int x \sqrt{3-x} dx.$

3. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx.$

4. $\int \frac{x^3 dx}{1 + \sqrt[3]{x^4+1}}.$

5. $\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx.$

6. $\int \frac{1 - \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt{x+1}} dx.$

7. $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-2}{x}} dx.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}.$

9. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx.$

10. $\int x^2 \sqrt{4-x^2} dx.$

11. $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2-9}}.$

12. $\int \frac{\sqrt[3]{(1+2x^3)^2}}{x^6} dx.$

1.9 Інтегрування деяких трансцендентних (неалгебраїчних) функцій

До інтегралів від раціональних функцій зводяться наступні інтеграли (R – раціональна функція):

I. $\int R(\sin x, \cos x) dx$ – підстановкою $z = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

При цьому $\sin x = \frac{2z}{1+z^2}, \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \quad dx = \frac{2dz}{1+z^2}.$

II. $\int R(\operatorname{tg} x) dx$ – підстановкою $\operatorname{tg} x = z$.

При цьому $x = \operatorname{arctg} z, \quad dx = \frac{dz}{1+z^2}.$

III. $\int R(e^x) dx$ – підстановкою $e^x = z$.

При цьому $x = \ln z, \quad dx = \frac{dz}{z}.$

Приклад 1. Обчислити інтеграл

$$\int \frac{1 + \sin x}{\sin x (1 + \cos x)} dx.$$

Розв'язок. Робимо підстановку $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ згідно з правилом I. Тоді маємо:

$$\int \frac{1 + \sin x}{\sin x (1 + \cos x)} dx = \int \frac{\left(1 + \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} \left(1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t} + t + 2\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\ln |t| + \frac{1}{2} t^2 + 2t \right) + C = \frac{1}{2} \left(\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C.$$

Приклад 2. Знайти інтеграл

$$\int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x}.$$

Розв'язок. Вважаючи $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = z$, відповідно правилу I одержимо

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x} &= \int \frac{2 dz}{z^2 + 4z - 1} = 2 \int \frac{d(z+2)}{(z+2)^2 - 5} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{z+2-\sqrt{5}}{z+2+\sqrt{5}} \right| + C = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{2-\sqrt{5}+\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{2+\sqrt{5}+\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right| + C. \end{aligned}$$

Приклад 3. Знайти інтеграл

$$\int \frac{\operatorname{tg} x \, dx}{1 - \operatorname{ctg}^2 x}.$$

Розв'язок. Вважаючи $\operatorname{tg} x = z$, відповідно правилу II одержимо

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{tg} x \, dx}{1 - \operatorname{ctg}^2 x} &= \int \frac{z^3 dz}{z^4 - 1} = \frac{1}{4} \int \frac{d(z^4 - 1)}{z^4 - 1} = \\ &= \frac{1}{4} \ln |z^4 - 1| + C = \frac{1}{4} \ln |\operatorname{tg}^4 x - 1| + C. \end{aligned}$$

Приклад 4. Обчислити інтеграл

$$\int \frac{dx}{e^x (1 - e^x)}.$$

Розв'язок. За правилом III робимо підстановку $e^x = t$, $x = \ln t$, $dx = \frac{dt}{t}$.

$$\int \frac{dx}{e^x (1 - e^x)} = \int \frac{\frac{dt}{t}}{t(1-t)} = \int \frac{dt}{t^2(1-t)}.$$

Інтегруємо:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{e^x (1 - e^x)} &= \int \frac{dt}{t^2} + \int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{1-t} = -\frac{1}{t} + \ln |t| + \ln |1-t| + C = \\ &= -\frac{1}{e^x} + x + \ln |1 - e^x| + C = e^{-x} + x + \ln |1 - e^x| + C. \end{aligned}$$

Завдання та вправи для самостійної роботи студента

Знайти інтеграли:

$$1. \int \frac{\cos x \, dx}{1 + \cos x} \qquad 2. \int \frac{dx}{\sin^3 x}.$$

- | | |
|--|--|
| 3. $\int \frac{dx}{4 \cos x + 3 \sin x}.$ | 4. $\int \operatorname{tg}^5 3x \, dx.$ |
| 5. $\int \frac{dx}{8 - 4 \sin x + 7 \cos x}.$ | 6. $\int \frac{dx}{(1 + \cos x) \sin x}.$ |
| 7. $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{tg} x}.$ | 8. $\int \frac{dx}{(1 + \sin x) \cos x}.$ |
| 9. $\int \frac{dx}{3 + 5 \cos x}.$ | 10. $\int \frac{-3 \sin x + 2 \cos x}{2 \sin x + 3 \cos x} \, dx.$ |
| 11. $\int \frac{(1 + \sin x) \, dx}{\sin x (1 + \cos x)}.$ | 12. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}.$ |
| 13. $\int \frac{e^{2t} - 2e^t}{1 + e^{2t}} \, dt.$ | 14. $\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \, dx.$ |
| 15. $\int \frac{1 + e^x}{(1 - e^{2x}) e^x} \, dx.$ | 16. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} + e^x + 1}}.$ |

2 Визначений інтеграл та його прикладення

2.1 Визначений інтеграл

Визначений інтеграл від функції $f(x)$ в межах від a до b позначається

$$\int_a^b f(x) \, dx.$$

При знаходженні визначених інтегралів можуть стати у нагоді наступні властивості цих інтегралів:

1. При перестановці меж змінюється знак інтегралу:

$$\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx.$$

2. Інтеграл з однаковими межами дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x) \, dx = 0.$$

3. Відрізок інтегрування можна розбиват на частини:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

4. Інтеграл від суми (різниці) функцій дорівнює сумі (різниці) інтегралів від всіх доданків:

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_3(x) dx.$$

5. Постійний множник можна виносити за знак інтегралу:

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx.$$

Для обчислення визначеного інтегралу, коли можна знайти відповідний невизначений інтеграл, служить *формула Ньютона – Лейбніца*

$$\int_a^b f(x) dx = \int f(x) dx \Big|_a^b = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

тобто, визначений інтеграл дорівнює різниці значень невизначеного інтегралу при верхній та нижній межах інтегрування.

Приклад 1. Обчислити інтеграл

$$\int_2^3 3x^2 dx.$$

Розв'язок. Застосуємо формулу Ньютона – Лейбніца:

$$\int_2^3 3x^2 dx = 3 \int_2^3 x^2 dx = x^3 \Big|_2^3 = 3^3 - 2^3 = 27 - 8 = 19.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл

$$\int_0^4 (1 + e^{\frac{x}{4}}) dx.$$

Розв'язок. Знаходимо:

$$\int_0^4 (1 + e^{\frac{x}{4}}) dx = \int_0^4 dx + \int_0^4 e^{\frac{x}{4}} dx = \left[\begin{array}{ccc} t = \frac{x}{4} & x = 4 & t = 1 \\ dt = \frac{1}{4} dx & x = 0 & t = 0 \end{array} \right] =$$

$$\int_0^4 dx + 4 \int_0^1 e^t dt = x|_0^4 + 4e^t|_0^1 = 4 - 0 + 4e^1 - 4e^0 = 4 + 4e - 4 = 4e.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}.$$

Розв'язок. Так як однією з первісних для функції $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ є функція $F(x) = -\operatorname{ctg} x$, то

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -(0 - 1) = 1.$$

Приклад 4. Обчислити інтеграл

$$\int_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx.$$

Розв'язок. Маємо: $\sqrt{1 - \cos 2x} = \sqrt{2} |\sin x|$. Тому

$$\begin{aligned} \int_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx &= \sqrt{2} \int_0^{100\pi} |\sin x| dx = \\ &= \sqrt{2} \left(\int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx + \int_{2\pi}^{3\pi} \sin x dx - \int_{3\pi}^{4\pi} \sin x dx + \dots + \int_{99\pi}^{100\pi} \sin x dx \right) = \\ &= \sqrt{2} (2 + 2 + 2 + \dots + 2) = 200\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Завдання та вправи для самостійної роботи студента

Обчислити інтеграли:

1. $\int_1^5 \frac{dx}{3x - 2}.$

2. $\int_0^1 \frac{dx}{(2z + 1)^3}.$

3. $\int_1^2 \frac{dt}{t^2 + 5t + 4}.$

4. $\int_0^2 \frac{x + 3}{x^2 + 4} dx.$

5. $\int_1^{\sqrt[3]{e}} \frac{dx}{x \sqrt{1 - (\ln x)^2}}.$

6. $\int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx.$

$$7. \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}.$$

$$9. \int_0^1 \frac{z^3}{z^8+1} dz.$$

$$11. \int_{-a}^a x \cos \frac{x}{a} dx.$$

$$13. \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}.$$

$$15. \int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \cos x dx.$$

$$8. \int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx.$$

$$10. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x \sin^4 x}.$$

$$12. \int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} dx.$$

$$14. \int_1^2 \frac{e^x dx}{e^x - 1}.$$

$$16. \int_1^e (1 + \ln y)^2 dy.$$

2.2 Заміна змінної у визначеному інтегралі

При обчисленні визначених інтегралів часто зручно замінити змінну інтегрування. При цьому, якщо визначений інтеграл $\int_a^b f(x) dx$ перетворюється за допомогою підстановки $x = \varphi(t)$ [або $t = \psi(x)$] в інший інтеграл, з новою змінною інтегрування t , то старі межі $x_1 = a$ і $x_2 = b$ необхідно замінити новими межами $t_1 = \alpha$ і $t_2 = \beta$, які визначаються з вихідної підстановки, тобто з рівнянь $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ [або $\alpha = \psi(a)$, $\beta = \psi(b)$]. Якщо $\varphi'(t)$ безперервна на відрізку $[\alpha, \beta]$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} F(t) dt.$$

Приклад 1. Обчислити інтеграл

$$\int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{1+3x}}.$$

Розв'язок. Після того як ми вводимо нову змінну $\sqrt{1+3x} = t$ треба знайти нові межі інтегрування: $t_1 = 1$ при $x_1 = 0$; $t_2 = 4$ при $x_2 = 5$. Тоді маємо

$$\begin{aligned} \int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{1+3x}} &= \left[\begin{array}{ll} \sqrt{1+3x} = t & 1+3x = t^2 \\ x = \frac{t^2-1}{3} & dx = \frac{2}{3} t dt \end{array} \right] = \\ &= \frac{2}{9} \int_1^4 (t^2 - 1) dt = \frac{2}{9} \left(\frac{t^3}{3} - t \right) \Big|_1^4 = \frac{2}{9} \left(\frac{64-1}{3} - 4 + 1 \right) = 4. \end{aligned}$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}}.$$

Розв'язок. Вважаючи $e^x = t$ знаходимо нові межі: $t_1 = 2$ при $x_1 = \ln 2$; $t_2 = 3$ при $x_2 = \ln 3$. Далі знаходимо

$$\begin{aligned} \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}} &= \left[\begin{array}{l} e^x = t \\ x = \ln t \quad dx = \frac{dt}{t} \end{array} \right] = \int_2^3 \frac{dt}{t(t - t^{-1})} = \int_2^3 \frac{dt}{t^2 - 1} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{t-1}{t+1} \Big|_2^3 = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{2}{4} - \ln \frac{1}{3} \right) = \frac{\ln 1,5}{2}. \end{aligned}$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл

$$\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx.$$

Розв'язок. Зробимо підстановку $\sqrt{e^x - 1} = t$, звідси при $x_1 = 0$ $t_1 = 0$; при $x_2 = \ln 5$ $t_2 = 2$. Тоді маємо:

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx &= \left[\begin{array}{l} \sqrt{e^x - 1} = t \quad e^x = 1 + t^2 \\ x = \ln(1 + t^2) \quad dx = \frac{2t dt}{1 + t^2} \end{array} \right] = 2 \int_0^2 \frac{t^2 dt}{t^2 + 4} = \\ &= 2 \int_0^2 \frac{(t^2 + 4 - 4) dt}{t^2 + 4} = 2 \int_0^2 \left(1 - \frac{4}{t^2 + 4} \right) dt = 2 \left(t - 2 \operatorname{arctg} \frac{t}{2} \right) \Big|_0^2 = 4 - \pi. \end{aligned}$$

Приклад 4. Обчислити інтеграл

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{(x^3 + 1) dx}{x^2 \sqrt{4 - x^2}}.$$

Розв'язок. Покладемо $x = 2 \sin t$. Тоді одержимо нові межі: $t_1 = \frac{\pi}{6}$ при $x_1 = 1$; $t_2 = \frac{\pi}{3}$ при $x_2 = \sqrt{3}$. Далі одержуємо:

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{(x^3 + 1) dx}{x^2 \sqrt{4 - x^2}} = \left[\begin{array}{l} x = 2 \sin t \\ dx = 2 \cos t dt \end{array} \right] = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{8 \sin^3 t + 1}{4 \sin^2 t} dt =$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin t \, dt + \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\sin^2 t} = \left(-2 \cos t - \frac{1}{4} \operatorname{ctg} t \right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \\
&= -2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} \right) = \frac{7}{2\sqrt{3}} - 1.
\end{aligned}$$

Завдання та вправи для самостійної роботи студента

Обчислити інтеграли:

1. $\int_0^1 \frac{x^2 \, dx}{(x+1)^4}.$

3. $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{7}} \frac{x^3 \, dx}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}.$

5. $\int_{-3}^3 x^2 \sqrt{9-x^2} \, dx.$

7. $\int_{\ln 3}^0 \frac{1-e^x}{1+e^x} \, dx.$

9. $\int_3^8 \frac{x \, dx}{\sqrt{1+x}}.$

11. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} \, dx.$

13. $\int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2} \, dx}{3 + \sqrt[3]{(x-2)^2}}.$

15. $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} \, dx.$

17. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos x}.$

19. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + a^2 \sin^2 x}.$

2. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} \, dx.$

4. $\int_1^e \frac{\sqrt[4]{1+\ln x}}{x} \, dx.$

6. $\int_5^1 \frac{t \, dt}{\sqrt{5+4t}}.$

8. $\int_{-1}^0 \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}}.$

10. $\int_1^2 \frac{dx}{x \sqrt{1+x^2}}.$

12. $\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x} \, dx}{\sqrt{e^x + e^{-x}}}}.$

14. $\int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4} \, dx.$

16. $\int_0^a \frac{dx}{x + \sqrt{a^2 - x^2}}.$

18. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}.$

20. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \, dx}{6 - 5 \sin x + \sin^2 x}.$

2.3 Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Формула інтегрування частинами для визначених інтегралів має вигляд

$$\int_a^b u \, dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \, du,$$

де функції u і v мають безперервні похідні на $[a, b]$.

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int_0^1 x^3 \operatorname{arctg} x \, dx$.

Розв'язок. Знаходимо

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 x^3 \operatorname{arctg} x \, dx &= \left[\begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x & dv = x^3 \, dx \\ du = \frac{dx}{1+x^2} & v = \frac{x^4}{4} \end{array} \right] = \\
 &= \frac{x^4}{4} \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{x^4 \, dx}{1+x^2} = \frac{1}{4} \cdot \operatorname{arctg} 1 - 0 - \frac{1}{4} \left[\int_0^1 \frac{x^4 - 1 + 1}{1+x^2} \, dx \right] = \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \left[\int_0^1 \frac{x^4 - 1}{x^2 + 1} \, dx + \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \right] = \\
 &= \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4} \left[\int_0^1 \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x^2 + 1} \, dx + \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 \right] = \\
 &= \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4} \left[\int_0^1 (x^2 - 1) \, dx + \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 \right] = \\
 &= \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4} \left[\frac{x^3}{3} \Big|_0^1 - x \Big|_0^1 + \frac{\pi}{4} - 0 \right] = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4} \left[\frac{1}{3} - 0 - 1 + \frac{\pi}{4} \right] = \\
 &= \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) - \frac{\pi}{16} = \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int_0^1 x^2 \operatorname{arctg} x \, dx$.

Розв'язок. Знаходимо

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 x^2 \operatorname{arctg} x \, dx &= \left[\begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x & dv = x^2 \, dx \\ du = \frac{dx}{1+x^2} & v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right] = \\
 &= \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{x^3 \, dx}{1+x^2} = \left[\begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x \, dx \end{array} \right] = \\
 &= \frac{1}{3} \operatorname{arctg} 1 - 0 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t \, dt}{1+t} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} \int_0^1 \frac{t+1-1}{t+1} \, dt =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6} \left[\int_0^1 dt - \int_0^1 \frac{dt}{1+t} \right] = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6} (t - \ln |1+t|) \Big|_0^1 = \\
&= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6} [1 - 0 - \ln 2 + \ln 1] = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6} (1 - \ln 2).
\end{aligned}$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x \, dx$.

Розв'язок. Знаходимо

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x \operatorname{arctg} x \, dx &= \left[\begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x & dv = x \, dx \\ du = \frac{dx}{1+x^2} & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right] = \\
&= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2 \, dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 1 - 0 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} \, dx = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \left[\int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \right] = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} [1 - 0 - \operatorname{arctg} x \Big|_0^1] = \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} [1 - \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 0] = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\pi}{4} \right] = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Приклад 4. Обчислити інтеграл $\int_0^1 \operatorname{arctg} x \, dx$.

Розв'язок. Знаходимо

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \operatorname{arctg} x \, dx &= \left[\begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x & dv = dx \\ du = \frac{dx}{1+x^2} & v = x \end{array} \right] = \\
&= x \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x \, dx}{1+x^2} = \left[\begin{array}{l} t = 1+x^2 \\ dt = 2x \, dx \end{array} \right] = \\
&= \operatorname{arctg} 1 - 0 - \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{dt}{t} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln x \Big|_1^2 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2.
\end{aligned}$$

Завдання та вправи для самостійної роботи студента

Обчислити інтеграли:

1. $\int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx.$

2. $\int_0^1 \arcsin x \, dx.$

$$3. \int_{-a}^a \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

$$5. \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx.$$

$$7. \int_0^\pi e^x \sin 2x dx.$$

$$9. \int_0^\pi x^3 \sin x dx.$$

$$11. \int_1^2 \frac{\ln x}{x^5} dx.$$

$$4. \int_{\frac{1}{2}}^2 (3x+2) \ln x dx.$$

$$6. \int_0^1 x \ln(1+x^2) dx.$$

$$8. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x dx}{\sin^2 x}.$$

$$10. \int_{\frac{1}{e}}^1 (1 - \ln x)^2 dx.$$

$$12. \int_0^1 (\arcsin x)^2 dx.$$

2.4 Площа плоскої фігури

Площа будь-якої плоскої фігури, віднесеної до прямокутної системи координат, може бути складена з площ криволінійних трапецій, прилеглих до осі Ox або до осі Oy .

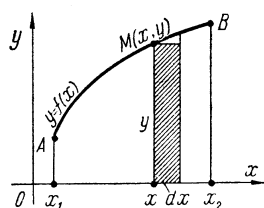


Рис. 2.1

а) Для криволінійної трапеції, прилеглої до осі Ox (Рис. 2.1), диференціал змінної площі $S(x) = S_{x_1AMx}$ є площею прямокутника зі сторонами y і dx , тобто $dS = y dx$.

Площа $S_{x_1ABx_2}$, якщо вся трапеція розташована над віссю Ox , виражається інтегралом

$$S = \int_{x_1}^{x_2} y dx.$$

б) Для криволінійної трапеції, прилеглої до осі Oy (Рис. 2.2), диференціал змінної площі $S(y) = S_{y_1AMy}$ є площею прямокутника зі сторонами x і dy , тобто $dS = x dy$.

Площа $S_{y_1AB y_2}$, якщо вся трапеція розташована справа від осі Oy , виражається інтегралом

$$S = \int_{y_1}^{y_2} x dy.$$

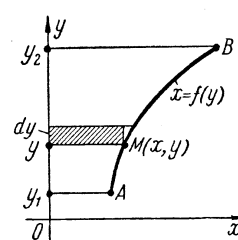


Рис. 2.2

Площа будь-якої плоскої фігури, віднесеної до полярної системи координат, може бути складена з площ криволінійних секторів OAB (Рис. 2.3).

Диференціал змінної площі $S(\varphi) = S_{OAM}$ є площею кругового сектора з центральним кутом $d\varphi$ і радіусом ρ , тобто

$$dS = \frac{1}{2} \rho^2 d\varphi.$$

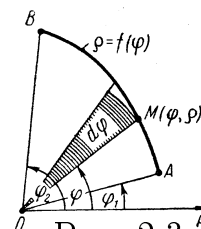


Рис. 2.3

Площа криволінійного сектора OAB виражається формулою

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 d\varphi. \quad (7)$$

Приклад 1. Визначити площу, що обмежена параболою $y^2 = 2px$ і $x^2 = 2py$.

Розв'язок. Знайдемо точки перетину парабол, щоб визначити відрізок інтегрування. З першого рівняння $y = \sqrt{2px}$ ($y > 0$, так як точка перетину – в першій чверті), з другого $y = \frac{x^2}{2p}$. Прирівнюючи ці значення, одержуємо

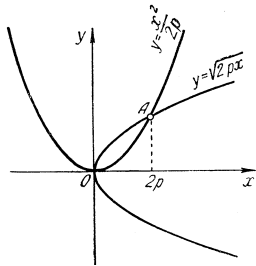


Рис. 2.4

$$\sqrt{2px} = \frac{x^2}{2p}, \quad \text{або} \quad 2px = \frac{x^4}{4p^2}.$$

Звідси $x^4 - 8p^3x = 0$; $x(x^3 - 8p^3) = 0$; $x(x - 2p)(x^2 + 2px + 4p^2) = 0$, тобто $x = 0$; $x - 2p = 0$; $x^2 + 2px + 4p^2 = 0$. Корені перших двох рівнянь: $x_1 = 0$; $x_2 = 2p$. Останнє рівняння має комплексні корені. Отже, параболи перетинаються в початку координат ($x = 0$) і в точці A з абсцисою $x = 2p$. Шукаємо площину за формулою

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx,$$

коли площа обмежена двома неперервними кривими $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ та двома прямими $x = a$ і $x = b$. При цьому $f_2(x) \geq f_1(x)$ всюди на відрізку $[a, b]$.

В цьому випадку $f_2(x) = \sqrt{2px}$, а $f_1(x) = \frac{x^2}{2p}$. Маємо

$$S = \int_0^{2p} \left(\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p} \right) dx = \left(\sqrt{2p} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{6p} \right) \Big|_0^{2p} = \frac{4}{3} p^2.$$

Приклад 2. Обчислити площу фігури, що обмежена прямою $y = x$ і параболою $y = 2 - x^2$.

Розв'язок. Знайдемо абсциси точок перетину прямої з параболою, розв'язавши систему рівнянь (див. рис. 2.5).

$$\begin{cases} y = x, \\ y = 2 - x^2. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, одержимо $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ – це будуть межі інтегрування.

Шукана площа дорівнює:

$$S = \int_{-2}^1 [(2 - x^2) - x] dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-2}^1 =$$

$$= \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) - \left(-4 + \frac{8}{3} - 2 \right) = \frac{9}{2}.$$

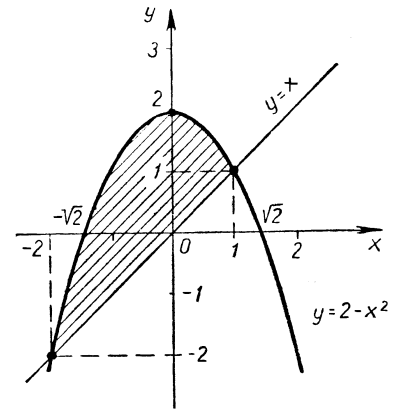


Рис. 2.5

Приклад 3. Знайти площу фігури, що обмежена двома гілками кривої $(y - x)^2 = x^3$ і прямою $x = 1$.

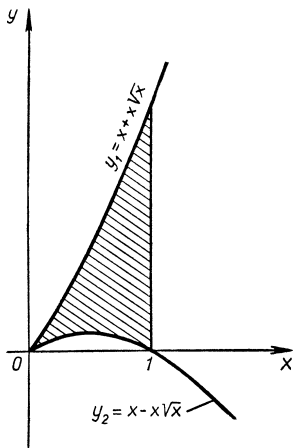


Рис. 2.6

Розв'язок. Бачимо, що y як неявна функція від x визначена лише за $x \geq 0$ (ліва частина рівняння завжди невід'ємна). Знайдемо рівняння двох гілок кривої: $y - x = \pm x \sqrt{x}$, $y_1 = x + x \sqrt{x}$, $y_2 = x - x \sqrt{x}$. Очевидно, що $y_1(x) \geq y_2(x)$ при $x \geq 0$ (див. рис. 2.6). Тому

$$S = \int_0^1 [y_1(x) - y_2(x)] dx = \int_0^1 (x + x \sqrt{x} - x + x \sqrt{x}) dx =$$

$$= 2 \int_0^1 x \sqrt{x} dx = \frac{4}{5} x^{\frac{5}{2}} \Big|_0^1 = \frac{4}{5}.$$

Приклад 4. Знайти площу фігури, що обмежена однією пелюсткою кривої $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (лемніска́та).

Розв'язок. Права сторона рівняння кривої невід'ємна при значеннях φ , для яких $\cos 2\varphi \geq 0$. Тому права пелюстка (див. рис. 2.7) лежить у куті, де $-\frac{\pi}{2} \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2}$, тобто $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$. Скориставшись формулою (7), маємо

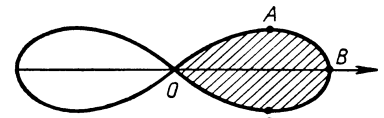


Рис. 2.7

$$S_{OABCO} = \frac{a^2}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{2}.$$

Завдання та вправи для самостійної роботи студента

Знайти площу, що обмежена лініями:

1. Параболою $y = 6x - x^2$ та віссю Ox .
2. Напівкубічною параболою $y^2 = x^3$ та прямими $x = 0$, $y = 4$.
3. Астроїдою $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.
4. Однією аркою циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ та віссю Ox .
5. Параболою $y = x^2 + 4x$ і прямою $x - y + 4 = 0$.

6. Ланцюговою лінією $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$ та прямими $x = 0, x = a$.
7. Гіперболою $xy = 6$ і прямою $y = 7 - x$.
8. Кубічною параболою $y = x^3$ та прямими $y = x, y = 2x$.
9. Окружністю $x^2 + y^2 = 4x$ і параболою $y^2 = 2x$.
10. Першим завитком спіралі Архімеда $\rho = a\varphi$ та полярною віссю.
11. Параболою $y = x^2 + 1$ і прямою $x + y = 3$.
12. $y = 0, y = (x + 1)^2$ та $y = 4 - x$.
13. $y^2 = 2x + 1$ і $x - y - 1 = 0$.
14. $y = 2 - x^2$ і $y^2 = x^3$.
15. $y^2 = 2px, 27py^2 = 8(x - p)^3$.
16. $y = \sin^3 x, y = \cos^3 x, x = 0 \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \right)$.

2.5 Об'єм тіла за площинами його паралельних перерізів

Якщо відома площа $S(x)$ будь-якого перерізу тіла площиною, що паралельна до деякої площини P , де x – відстань перерізу від площини P (Рис. 2.8), то при зміні x на величину dx диференціал об'єму тіла дорівнює об'єму прямого циліндру з висотою dx і площею основи $S(x)$, тобто $dv = S(x) dx$, а об'єм всього тіла виражається інтегралом

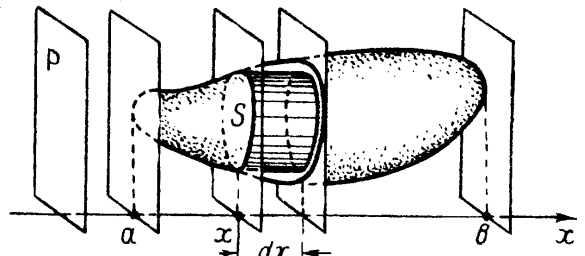


Рис. 2.8

$$V = \int_a^b S(x) dx, \quad (8)$$

де a та b – ліва і права межі змінення x .

Приклад 1. Знайти об'єм тривісного еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

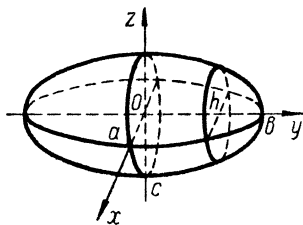


Рис. 2.9

Розв'язок. Плоский переріз еліпсоїда, паралельний площині xOz і віддалений від неї на відстані $y = h$ (Рис. 2.9), представляє еліпс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}, \quad \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{z^2}{c_1^2} = 1,$$

з напівосями

$$a_1 = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - h^2} \quad \text{і} \quad c_1 = \frac{c}{b} \sqrt{b^2 - h^2}.$$

Знайдемо площу цього перерізу, як площу еліпса

$$S(h) = \pi a_1 c_1 = \pi \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - h^2} \frac{c}{b} \sqrt{b^2 - h^2} = \frac{\pi ac}{b^2} (b^2 - h^2).$$

підставляємо у формулу (8):

$$V = \int_{-b}^b \frac{\pi ac}{b^2} (b^2 - h^2) dh = \frac{2\pi ac}{b^2} \int_0^b (b^2 - h^2) dh =$$

$$= \frac{2\pi ac}{b^2} \left(b^2 h - \frac{h^3}{3} \right) \Big|_0^b = \frac{4}{3} \pi abc.$$

Приклад 2. Знайти об'єм, що обмежений двома прямими круговими циліндрами: $x^2 + y^2 = a^2$ і $y^2 + z^2 = a^2$.

Розв'язок. Побудуємо восьму частину тіла, розташовану у першому октанті (Рис. 2.10).

Будь-який перетин тіла площиною, паралельною площині xOz , представляє квадрат. Площа перерізу $PQNM$, віддаленого від площини xOz на відстані $OM = h$, знайдемо як площу квадрата зі стороною

$$MP = MN = \sqrt{a^2 - h^2}.$$

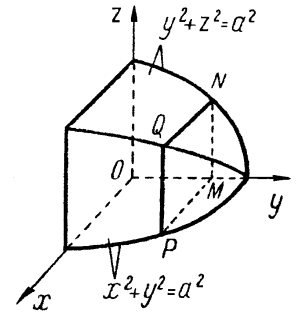


Рис. 2.10

Тоді

$$S(h) = a^2 - h^2, \quad 0 < h < a.$$

Весь об'єм, що шукається, згідно з формулою (8), виразиться інтегралом

$$V = 8 \int_0^a (a^2 - h^2) dh = 8 \left(a^2 h - \frac{h^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{16}{3} a^3.$$

Приклад 3. Обчислити об'єм піраміди з висотою H та площею основи S_0 (Рис. 2.11).

Розв'язок. Вершину піраміди S прийнемо за початок координат і направимо вісь Ox по висоті H піраміди від вершини до основи. Розсічемо піраміду площиною, паралельною основі, що відстоїть від вершини S на відстані x , $0 \leq x \leq H$. Площа цього перерізу залежить від x і ми позначимо її через $S(x)$. Користуючись відомою властивістю перерізів піраміди, паралельних до основи, складаємо пропорцію.

$$\frac{S(x)}{S_0} = \frac{x^2}{H^2},$$

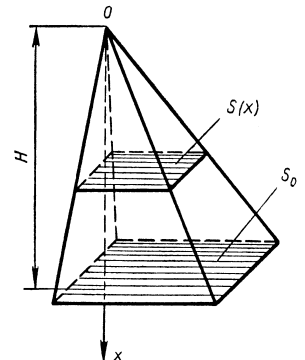


Рис. 2.11

звідки

$$S(x) = \frac{S_0}{H^2} x^2.$$

Об'єм піраміди дорівнює

$$V = \int_0^H S(x) dx = \int_0^H \frac{S_0}{H^2} x^2 dx = \frac{S_0}{H^2} \int_0^H x^2 dx = \frac{S_0}{H^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^H = \frac{S_0 H^3}{3H^2} = \frac{1}{3} S_0 H.$$

Приклад 4. Знайти об'єм кулі радіуса R .

Розв'язок. Треба обчислити площу кола, що утворюється при перетині кулі площиною, що перпендикулярна діаметру. З рис. 2.12 знаходимо, що радіус цього кола $r = \sqrt{R^2 - h^2}$. Його площа є функцією h і дорівнює $S(h) = \pi r^2 = \pi(R^2 - h^2)$, де h – відстань перерізу від екваторіальної площини, яка та змінюється від $-R$ до R .

Тоді маємо

$$V = \int_{-R}^R S(h) dh = \pi \int_{-R}^R (R^2 - h^2) dh = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

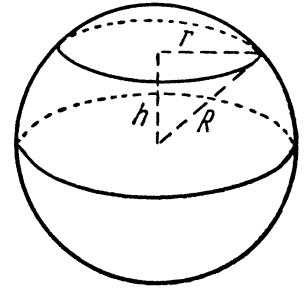


Рис. 2.12

Завдання та вправи для самостійної роботи студента

1. Знайти об'єм тіла, що площиною $z = k$ ($k > 0$) відсікається від еліптичного параболоїда $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

2. Знайти об'єм, обмежений двома еліптичними циліндрами $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ та $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$.

3. Обчислити об'єм частини циліндра, що відсічена площиною, яка проходить через діаметр $2R$ його основи під кутом α до площини основи.

4. Знайти об'єм тіла, обмеженого параболічним циліндром $z = 4 - y^2$, площинами координат і площиною $x = a$.

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 = ax$, $x - z = 0$, $x + z = 0$ розглянувши перерізи, перпендикулярні Ox .

6. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + z^2 = 1$.

7. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 = x$.

8. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$, $x^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = 1$.

2.6 Об'єм тіла обертання

Якщо тіло утворюється при обертанні навколо осі Ox криволінійної трапеції x_1ABx_2 (Рис. 2.13), то будь-який його плоский переріз, перпендикулярний до осі Ox , буде колом, радіус якого дорівнює відповідній ординаті кривої $y = f(x)$.

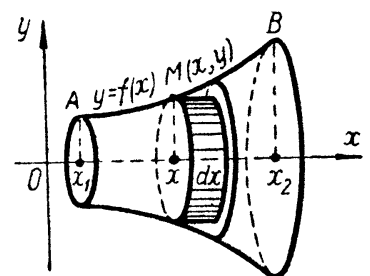


Рис. 2.13

Площа перерізу $S(x)$, що відповідає абсцисі x , як площа кола, дорівнює πy^2 .

Диференціал об'єму тіла, що відповідає приросту dx , буде $dv = \pi y^2 dx$, а весь об'єм тіла обертання визначається формулою

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx \quad (x_1 < x_2). \quad (9)$$

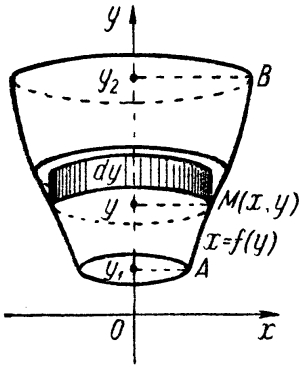


Рис. 2.14

Якщо тіло утворюється при обертанні навколо осі Oy криволінійної трапеції $y_1AB y_2$, прилеглої до осі Oy (Рис. 2.14), то $dv = \pi x^2 dy$, а

$$V = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2 dy \quad (y_1 < y_2). \quad (10)$$

Приклад 1. Визначити об'єм сегмента параболоїда обертання.

Розв'язок. Нехай рівняння параболі, обертання якої навколо осі дає даний параболоїд, буде $y^2 = 2px$. Використаємо наступні позначення: h – висота сегмента параболоїда обертання, r – радіус основи сегмента, x – відстань до площини, яка паралельна основі сегмента від вершини параболі, що обертається, ρ – радіус кола, що утворюється в перерізі параболоїда обертання зазначеною площиною. Тоді $\rho^2 = 2px$, а площа $S(x)$ зазначеного перерізу дорівнює $S(x) = \pi \rho^2 = 2\pi px$. Об'єм сегмента V параболоїда обертання дорівнює:

$$V = \int_0^h 2\pi px dx = \pi px^2 \Big|_0^h = \pi ph^2.$$

Площа S основи сегмента дорівнює πr^2 і так як $r^2 = 2ph$, то $S = 2\pi rh$. Звідси $\pi rh = \frac{S}{2}$, і формулу для об'єму сегмента можна записати так:

$$V = \frac{Sh}{2},$$

тобто об'єм сегмента параболоїда обертання дорівнює половині добутку площі основи сегмента на його висоту

Приклад 2. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox площі, обмеженої параболою $y = x^2 + 1$ і прямою $y = 3x - 1$.

Розв'язок. Тіло утворене обертанням площі, обмеженої заданими кривими (рис. 2.15) навколо осі Ox . Щоб знайти абсциси точок перетину кривих розв'язуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = x^2 + 1, \\ y = 3x - 1. \end{cases}$$

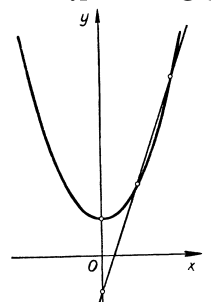


Рис. 2.15

Звідси $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. У нашому випадку $y_1(x) = x^2 + 1$ і $y_2(x) = 3x - 1$. Отже, маємо:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^2 [(3x - 1)^2 - (x^2 + 1)^2] dx = \pi \int_1^2 (7x^2 - 6x - x^4) dx = \\ &= \pi \left[\frac{7}{3} x^3 - 3x^2 - \frac{x^5}{5} \right]_1^2 = \frac{17}{15} \pi. \end{aligned}$$

Приклад 3. Обчислити об'єм тора. *Тором* називається тіло, що виходить при обертанні кола радіуса a навколо осі, що лежить в його площині на відстані b від центру ($b \geq a$).

Розв'язок. Нехай коло обертається навколо прямої AE (рис. 2.16). Тоді об'єм тора може бути розглянутий як різниця об'ємів обертання криволінійних трапецій $ABCDE$ і $ABLDE$ навколо осі Oy .

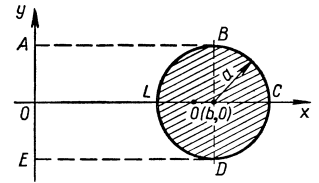


Рис. 2.16

Якщо систему координат помістити, як показано на рис. 2.16, то рівняння окружності $LBCD$ буде мати вигляд: $(x - b)^2 + y^2 = a^2$, звідки $x = b \pm \sqrt{a^2 - y^2}$, причому рівняння кривої BCD

$$x = b + \sqrt{a^2 - y^2},$$

а рівняння кривої BLD

$$x = b - \sqrt{a^2 - y^2}.$$

Отже, шуканий об'єм дорівнює:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-a}^a \left[(b + \sqrt{a^2 - y^2})^2 - (b - \sqrt{a^2 - y^2})^2 \right] dy = \\ &= 4\pi b \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - y^2} dy = 2\pi^2 a^2 b. \end{aligned}$$

Приклад 4. Обчислити об'єм тіла, що утворюється при обертанні однієї арки циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ навколо осі абсцис.

Розв'язок. В формулі

$$V = \pi \int_0^{2\pi a} y^2 dx$$

робимо заміну змінної, вважаючи $x = a(t - \sin t)$. Коли x змінюється від 0 до $2\pi a$, t змінюється від 0 до 2π :

$$V = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = 5\pi^2 a^3.$$

Завдання та вправи для самостійної роботи студента

Обчислити об'єм тіла, що утворюється обертанням фігури, обмеженої лініями:

1. $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ навколо осі Ox .

2. $y^2 = (x + 4)^3$ і $x = 0$ навколо осі Oy .

3. $(y - 3)^2 + 3x = 0$, $x = -3$ навколо осі Ox .

4. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $y = 0$, $y = b$ навколо осі Oy .

5. $y = \sin x$ (одна хвиля), $y = 0$ навколо осі Ox .

6. $y^2 + x - 4 = 0$, $x = 0$ навколо осі Oy .

7. $xy = 4$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$ навколо осі Ox .

8. $y^2 = (x + 4)^3$, $x = 0$ навколо осі Oy .

9. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $x = 0$, $y = 0$ навколо осі Oy .

10. Обчислити об'єм тіла, що одержано при обертанні навколо осі ординат криволінійної трапеції, обмеженої кривою $x^2 + y^{\frac{2}{3}} = 1$.

11. Обчислити об'єм тіла, що одержано при обертанні навколо осі Ox криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y^2(x - 4a) = ax(x - 3a)$ ($0 \leq x \leq 3a$).

12. Обчислити об'єм тіла, що одержано при обертанні навколо осі ординат криволінійної трапеції, обмеженої кривою $(y^2 - b^2)^2 = a^3x$ ($-b \leq y \leq b$).

2.7 Довжина дуги плоскої фігури

Якщо плоска крива віднесена до прямокутної системи координат і задана рівнянням $y = f(x)$, або $x = F(y)$ або параметричними рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то диференціал dl довжини її дуги (рис. 2.17), виражається формулою

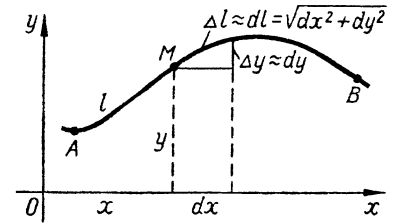


Рис. 2.17

$$dl = \sqrt{1 + (y')^2} dx = \sqrt{1 + (x')^2} dy = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt,$$

а довжина дуги AB визначається формулою

$$L_{AB} = \int_{(A)}^{(B)} dl = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_{y_A}^{y_B} \sqrt{1 + (x')^2} dy = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt. \quad (11)$$

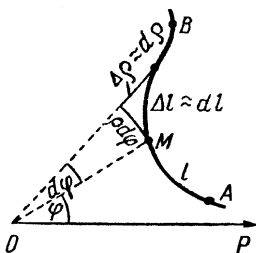


Рис. 2.18

Якщо плоска крива віднесена до полярної системи координат і задана рівнянням $\rho = f(\varphi)$ (рис. 2.18), то $dl = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi$,

$$L_{AB} = \int_{(A)}^{(B)} dl = \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi. \quad (12)$$

Приклад 1. Обчислити довжину дуги ланцюгової лінії, що задана рівнянням

$$y = 2 \left(e^{\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x}{4}} \right),$$

від точки $x = 0$ до точки $x = 4$.

Розв'язок. Скористаємося формулою $L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$. Маємо

$$y' = 2 \left(e^{\frac{x}{4}} - e^{-\frac{x}{4}} \right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \left(e^{\frac{x}{4}} - e^{-\frac{x}{4}} \right)$$

і

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{1}{4} \left(e^{\frac{x}{2}} - 2 + e^{-\frac{x}{2}} \right) = \frac{1}{4} \left(e^{\frac{x}{2}} + 2 + e^{-\frac{x}{2}} \right) = \frac{1}{4} \left(e^{\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x}{4}} \right)^2.$$

Звідси

$$L = \frac{1}{2} \int_0^4 \left(e^{\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x}{4}} \right) dx = 2 \left(e^{\frac{x}{4}} - e^{-\frac{x}{4}} \right) \Big|_0^4 = 2(e - e^{-1}).$$

Приклад 2. Обчислити довжину дуги напівкубічної параболи $y^2 = (x - 1)^3$ між точками $A(2; -1)$ та $B(5; -8)$.

Розв'язок. Розв'яжемо дане рівняння відносно y та знаходимо y' :

$$y = \pm(x - 1)^{\frac{3}{2}}; \quad y' = \pm \frac{3}{2}(x - 1)^{\frac{1}{2}}.$$

(Знаки $\pm$ у виразі для y вказують, що крива симетрична осі Ox ; точки A та B , що мають від'ємні ординати, лежать на тій гілці, яка розташована нижче осі Ox .)

Підставляючи в формулу (11), одержимо

$$\begin{aligned} L_{AB} &= \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_2^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4}(x - 1)} dx = \frac{1}{2} \int_2^5 \sqrt{9x - 5} dx = \\ &= \frac{1}{18} \int_2^5 (9x - 5)^{\frac{1}{2}} d(9x - 5) = \frac{1}{27} (9x - 5)^{\frac{3}{2}} \Big|_2^5 \approx 7,63. \end{aligned}$$

Приклад 3. Обчислити довжину дуги однієї арки циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $a(1 - \cos t)$.

Розв'язок. Диференціюємо по t параметричні рівняння циклоїди

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t); \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt} = a \sin t$$

та знаходимо диференціал її дуги

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \sqrt{a^2 (1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = \\ &= a \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = a \sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = 2a \sin \frac{t}{2} dt. \end{aligned}$$

Одна арка циклоїди виходить при зміні параметра t від 0 до 2π , тому

$$L = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 4a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} d\left(\frac{t}{2}\right) = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

Приклад 4. Обчислити довжину дуги кривої $\rho = a \cos^3 \frac{\varphi}{3}$.

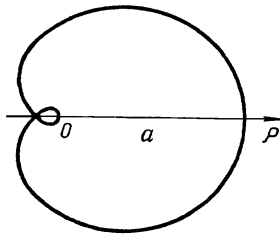


Рис. 2.19

Розв'язок. З даного рівняння кривої $\rho = a \cos^3 \frac{\varphi}{3}$ знаходимо похідну

$$\rho' = \frac{d\rho}{d\varphi} = -a \cos^2 \frac{\varphi}{3} \sin \frac{\varphi}{3}$$

і диференціал її дуги

$$dl = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi = \sqrt{a^2 \cos^6 \frac{\varphi}{3} + a^2 \cos^4 \frac{\varphi}{3} \sin^2 \frac{\varphi}{3}} d\varphi = a \cos^2 \frac{\varphi}{3} d\varphi.$$

Половина цієї кривої (рис. 2.19) описується кінцем полярного радіуса за зміни φ від 0 до $\frac{3}{2}\pi$. Тому згідно з формулою (12) довжина всієї кривої

$$\begin{aligned} L &= 2a \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos^2 \frac{\varphi}{3} d\varphi = a \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \left(1 + \cos \frac{2\varphi}{3}\right) d\varphi = \\ &= a \left(\varphi + \frac{3}{2} \sin \frac{2\varphi}{3} \right) \Big|_0^{\frac{3}{2}\pi} = \frac{3}{2} a \pi. \end{aligned}$$

Завдання та вправи для самостійної роботи студента

Обчислити довжину дуги кривої:

1. $y^2 = x^3$, відсіченою прямою $x = \frac{4}{3}$.

2. $y = \frac{x^2}{2} - 1$, відсіченою віссю Ox .

3. $y^2 = (x + 1)^3$, відсіченою прямою $x = 4$.

4. $9y^2 = x(x - 3)^2$, між точками перетину з віссю Ox .

Знайти периметр фігури, що обмежена лініями:

5. $x^2 = (y + 1)^3$ і $y = 4$.

6. $y^3 = x^2$ і $y = \sqrt{2 - x^2}$.

Знайти довжину дуги кривої:

7.

$$\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t. \end{cases}$$

від $t_1 = 0$ до $t_2 = \pi$.

8.

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t. \end{cases}$$

9.

$$\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t). \end{cases}$$

від $t_1 = 0$ до $t_2 = 1$.

10.

$$\begin{cases} x = a (2 \cos t - \cos 2t), \\ y = a (2 \sin t - \sin 2t). \end{cases}$$

11.

$$\begin{cases} x = 2r \sin^2 t, \\ y = 2r \sin^2 t \operatorname{tg} t. \end{cases}$$

в межах від 0 до t .

12. Знайти довжину кардіоїди $r = a(1 + \cos \varphi)$.

2.8 Площа поверхні обертання

Якщо поверхня утворюється при обертанні дуги AM плоскої кривої навколо осі Ox (рис. 2.20), то диференціал площі дорівнює площі бічної поверхні усіченого круглого конуса з твірною dl та радіусами основ y і $y + dy$:

$$ds = \frac{2\pi y + 2\pi(y + dy)}{2} = \pi(2y + dy) dl \approx 2\pi y dl,$$

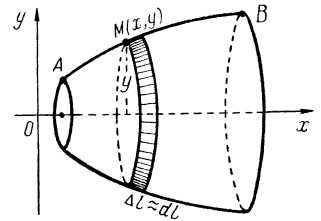


Рис. 2.20

а площа поверхні, утвореної обертанням дуги AB , визначається формулою

$$S = \int_{(A)}^{(B)} ds = 2\pi \int_{(A)}^{(B)} y dl, \quad (13)$$

де (A) та (B) позначають значення в точках A та B обраної змінної інтегрування, dl – диференціал дуги кривої.

При обертанні дуги AB кривої навколо осі Oy (Рис. 2.21) маємо

$$ds \approx 2\pi x dl; \quad S = \int_{(A)}^{(B)} ds = 2\pi \int_{(A)}^{(B)} x dl. \quad (14)$$

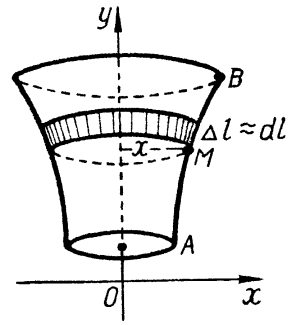


Рис. 2.21

Приклад 1. Обчислити поверхню кулі радіуса a .

Розв'язок. Можна вважати, що куля одержана обертанням навколо осі Ox напівкожухності $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. Звідси

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad 1 + y'^2 = 1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2} = \frac{a^2}{a^2 - x^2},$$

$$y \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2}} = a.$$

Отже, за формулою $S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx$,

$$S = 2\pi \int_{-a}^a a dx = 2\pi ax \Big|_{-a}^a = 4\pi a^2.$$

Приклад 2. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням дуги кубічної параболи $y = x^3$ навколо осі Ox від початку координат до точки з абсцисою $x = 1$.

Розв'язок. У цьому випадку $y' = 3x^2$, $\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + 9x^4}$. Отже,

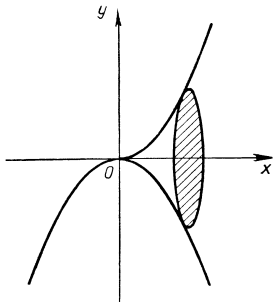


Рис. 2.22

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx = \left[\begin{array}{l} t^2 = 1 + 9x^4 \\ 2t dt = 36x^3 dx \end{array} \right] = \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{18} \int_1^{\sqrt{10}} t^2 dt = \frac{2\pi t^3}{18 \cdot 3} \Big|_1^{\sqrt{10}} = \frac{\pi}{27} (10\sqrt{10} - 1). \end{aligned}$$

Приклад 3. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox астроїди $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

Розв'язок. Застосуємо формулу (13), перетворивши її до змінної t . Виходячи з рівнянь астроїди і враховуючи, що четверта частина астроїди, яка розташована в першому квадранті (рис. 2.23), виходить при зміні t від 0 до $\frac{\pi}{2}$, одержимо

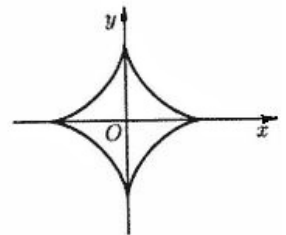


Рис. 2.23

$$S = 2 \cdot 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt =$$

$$\begin{aligned}
&= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin^3 t \sqrt{(-3a \cos^2 t \sin t)^2 + (3a \sin^2 t \cos t)^2} dt = \\
&= 12a^2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t dt = 12a^2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t d\sin t = \frac{12}{5}a^2\pi \sin^5 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{12}{5}\pi a^2.
\end{aligned}$$

Приклад 4. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ($a > b$).

Розв'язок. Диференціюючи по x обидві частини рівняння еліпса

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0, \quad yy' = -\frac{b^2x}{a^2}$$

і підставляючи в формулу (13), знаходимо

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi \int_{-a}^a y \sqrt{1 + (y')^2} dx = 4\pi \int_0^a \sqrt{y^2 + (yy')^2} dx = \\
&= 4\pi \int_0^a \sqrt{b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} + \frac{b^4x^2}{a^4}} dx = \frac{4\pi b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2} dx = \\
&= \frac{4\pi b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2} dx,
\end{aligned}$$

де $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{c}{a}$ – ексцентриситет еліпса.

Вважаючи $\varepsilon x = a \sin t$, одержимо $\varepsilon dx = a \cos t dt$. Також маємо $t_1 = 0$ при $x = 0$; $t_2 = \arcsin \varepsilon$ при $x = a$ і тоді

$$\begin{aligned}
S &= \frac{4\pi b}{a} \int_0^{t_2} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \frac{a}{\varepsilon} \cos t dt = \frac{4\pi ab}{\varepsilon} \int_0^{t_2} \cos^2 t dt = \\
&= \frac{2\pi ab}{\varepsilon} \int_0^{t_2} (1 + \cos 2t) dt = \frac{2\pi ab}{\varepsilon} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{t_2} = 2\pi b \left(b + \frac{a}{\varepsilon} \arcsin \varepsilon \right).
\end{aligned}$$

Завдання та вправи для самостійної роботи студента

Обчислити площу поверхні, що утворена обертанням навколо осі Ox :

1. Окружності $x = a \cos t$, $y = a \sin t$.
2. Дуги параболи $y^2 = 2x$ між точками перетину з прямою $2x = 3$.

3. Однієї арки циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.
4. Однієї хвилі синусоїди $y = \sin x$.
5. Дуги параболи $y^2 = 4 + x$, відсіченою прямою $x = 2$.
6. Кривої $y = \cos \frac{\pi x}{2a}$ від $x_1 = -a$ до $x_2 = a$.
7. Петлі кривої $8y^2 = x^2 - x^4$.
8. Кривої $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$ від $y = 1$ до $y = e$.
9. Кривої $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$ від $t_1 = 0$ до $t_2 = \frac{\pi}{2}$.
10. Петлі кривої $x = t^2$, $y = \frac{t}{3}(t^2 - 3)$.

Обчислити площу поверхні, що утворена обертанням навколо осі Oy :

11. Дуги напівкубічної параболи $x = 4 - \frac{t^2}{2}$, $y = \frac{t^3}{3}$ між точками перетину з осями координат.
12. Еліпса $3x^2 + 4y^2 = 12$.
13. Знайти площу поверхні тора, що утворений обертанням окружності $x^2 + y^2 = a^2$ навколо прямої $y = b$, ($b > a$).
14. Параболи $y = \frac{x^2}{2}$, відсіченою прямою $y = 1, 5$.
15. Петлі кривої $9x^2 = y(3 - y)^2$.
16. Кривої $y^2 + 4x = 2\ln y$ від $y = 1$ до $y = 2$.

Література

- [1] Бубняк Т. І. Вища математика : навчальний посібник. Львів : Новий світ-2000, 2023. 436 с.
- [2] Казановський В. І., Африканова А. Г., Виштакалюк Н. А., Дрозденко О. Л. Вища математика : навч. посіб. Київ : Аграрна освіта, 2014. 367 с.
- [3] Коляда Р. В., Мельник І. О., Мельник О. М. Вища математика. Львів : Магнолія-2006, 2023. 342 с.
- [4] Лозовий Б. Л., Пушак Я. С., Шабат О. Є. Практикум з вищої математики : навч. посіб. Львів : Магнолія-2006, 2023. 385 с.
- [5] Прикладна математика : навч. посіб. / уклад. О. В. Шибаніна, В.П. Ключан, І.В. Ключан та ін. Миколаїв : МНАУ, 2018. 164 с. URL: <https://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/8623>

Додаток А. Таблиця первісних

$$\int 0 \cdot dx = C.$$

$$\int 1 \cdot dx = x + C.$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1.$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C.$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \text{ де } n = 0, \pm 1, \dots\right).$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, \quad (x \neq \pi n, \text{ де } n = 0, \pm 1, \dots).$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C.$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad \left(\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \right).$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C, \quad (-1 < x < 1).$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a}| + C.$$

Навчальне видання

**ВИЩА МАТЕМАТИКА.
ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ
ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ.
ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ.**

Методичні рекомендації

Укладач: **Поживатенко** Віталій Володимирович

Формат 60x84 1/16. Ум. друк. арк. 2,0.
Тираж 20 прим. Зам. № _____

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного університету
54008, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.