

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА ЕКОНОМІЧНОЇ КІБЕРНЕТИКИ, КОМП'ЮТЕКНИХ НАУК ТА
ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

СТАТИСТИЧНИЙ АНАЛІЗ І МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ В АГРОНОМІЇ

методичні рекомендації для практичних занять та самостійної роботи
здобувачів третього освітньо-наукового рівня вищої освіти ОНП
«Агрономія» спеціальності **Н1 Агрономія** денної форми здобуття
вищої освіти



Миколаїв - 2025

Друкується за рішенням науково-методичної комісії факультету менеджменту Миколаївського національного університету від 20.11.2025 року протокол № 4.

Укладачі:

- О. В. Шибаніна – д-р екон. наук, професор, професор кафедри економічної кібернетики, комп’ютерних наук та інформаційних технологій, Миколаївський національний аграрний університет;
- С. І. Тищенко – канд. пед. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики, комп’ютерних наук та інформаційних технологій, Миколаївський національний аграрний університет;
- О. Ю. Пархоменко – канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики, комп’ютерних наук та інформаційних технологій, Миколаївський національний аграрний університет;
- С.І. Ємельянов - доктор філософії, старший викладач кафедри економічної кібернетики, комп’ютерних наук та інформаційних технологій, Миколаївський національний аграрний університет;
- В. О. Крайній – канд. екон. наук, старший викладач кафедри економічної кібернетики, комп’ютерних наук та інформаційних технологій, Миколаївський національний аграрний університет;
- І. І. Хилько – старший викладач кафедри економічної кібернетики, комп’ютерних наук та інформаційних технологій, Миколаївський національний аграрний університет.

Рецензенти:

Кравченко А.В. - заступник начальника відділу супроводження інформаційних систем, адміністрування баз даних, адміністраторів безпеки та адміністрування служби каталогів управління інформаційних технологій Головного управління ДПС у Миколаївській області

Христенко О.А. – канд. екон. наук, доцент, завідувач кафедри економіки підприємств факультету менеджменту, Миколаївський національний аграрний університет

ЗМІСТ

ВСТУП	4
Перелік практичних занять та їх обсяг	5
Практичне заняття № 1. Ряди розподілу та їх статистичне оцінювання	6
Практичне заняття № 2. Аналіз тенденцій розвитку.....	22
Практичне заняття № 3. Кореляційний аналіз.....	25
Практичне заняття № 4. Багатовимірний статистичний аналіз в агрономії.....	37
Практичне заняття № 5. Графічна інтерпретація задачі лінійного програмування.....	44
Практичне заняття № 6. Ставлення і розв’язування транспортної задачі та її використання в агрономії.....	49
Практичне заняття №7. Математичне моделювання виробничих процесів в агрономії.....	60
САМОСТІЙНА РОБОТА	70
Теми та завдання обов’язкового самостійного опрацювання	70
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	73

ВСТУП

Для забезпечення розвитку та інтенсифікації сільського господарства необхідно широко впроваджувати сучасні досягнення науки і техніки. З метою обґрунтованого та швидкого прийняття оптимальних рішень, фахівці в галузі сільського господарства мають володіти сучасними методами статистичного аналізу і моделювання технологічних процесів в агрономії та виконувати достатньо складні розрахункові роботи, які без застосування обчислювальних засобів реалізувати важко.

Ефективність та якість управління такою складною економічною системою, якою є сучасне виробництво сільськогосподарської продукції, в тому числі рослинництва, суттєво зростають при застосуванні статистичних методів, математичного моделювання та комп'ютерної техніки як інструментів дослідницької роботи. Стохастична природа факторів сільськогосподарського виробництва створює в сільському господарстві деяку невизначеність у динаміці розвитку та вимагає застосування дієвих інструментів і методів статистичного аналізу експериментальних даних. Використання специфічних методів статистики, математичного моделювання та новітніх інформаційних технологій дає змогу систематизації, обробки і аналізу даних спостережуваних явищ з метою встановлення притаманних для них статистичних закономірностей та застосування останніх у практичній діяльності в агрономії. Статистичні моделі використовують для діагностики стану об'єктів дослідження в агрономії, при вивченні причинно-наслідкового механізму формування варіації та динаміки агротехнологічних явищ і процесів, у моніторингу кон'юнктури ринку, при прогнозуванні та прийнятті рішень.

Перелік практичних занять та їх обсяг

Змістовий модуль 1. Методи статистичного аналізу в агрономії

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 1. Ряди розподілу та їх статистичне оцінювання.....2 год.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 2. Аналіз тенденцій розвитку.....2 год.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 3. Кореляційний аналіз.....2 год.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 4. Багатовимірний статистичний аналіз в агрономії.....2 год.

Змістовий модуль 2. Задачі лінійного програмування та їх застосування в агрономії

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 5. Графічна інтерпретація задачі лінійного програмування.....2 год.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 6. Ставлення і розв'язування транспортної задачі та її використання в агрономії.....2 год.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 7. Математичне моделювання виробничих процесів в агрономії.....2 год.

Разом 14 годин

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 1.

Ряди розподілу та їх статистичне оцінювання

1. Оцінка концентрації значень ознаки

При аналізі рядів розподілу також дуже важливою є характеристика нерівномірності розподілу певної ознаки між окремими складовими сукупності, а також оцінка концентрації значень ознаки в окремих її частинах. Для оцінки міри концентрації визначають коефіцієнт концентрації за формулою:

$$K_{\text{кон}} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n |d_j - D_j|,$$

де d_j – частка елементів сукупності в загальному обсязі,

D_j – частка обсягу значень ознаки в загальному обсязі.

Значення коефіцієнта концентрації коливаються в межах від нуля до одиниці: $0 \leq K_{\text{кон}} \leq 1$. У рівномірному розподілі $K_{\text{кон}} = 0$, якщо $K_{\text{кон}} = 1$ спостерігається повна концентрація. Чим більший ступень концентрації, тим більше значення коефіцієнта концентрації.

Розглянемо порядок розрахунку даного коефіцієнта на основі умовних даних про розподіл підприємств регіону за вартістю основних виробничих фондів та обсягом споживання електроенергії (табл. 1).

Таблиця 1.

Робоча таблиця для розрахунку коефіцієнта концентрації

Вартість основних виробничих фондів, млн. грн.	У % до підсумку		Модуль відхилень часток $\frac{ d_j - D_j }{100}$
	кількість підприємств d_j	спожито електроенергії D_j	
до 5	35	8	0,27
50-100	40	11	0,29
100-500	18	30	0,12
500 і більше	7	51	0,44
<i>Всього</i>	100	100	1,12

$$K_{\text{кон}} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n |d_j - D_j| = \frac{1,12}{2} = 0,56$$

Висновок: таким чином, на основі даних про розподіл підприємств регіону за вартістю основних виробничих фондів та обсягом спожитої електроенергії можна зробити висновок про нерівномірне споживання електроенергії. Коефіцієнт концентрації складає 0,56, що свідчить про високий ступінь концентрації споживання електроенергії в окремих групах підприємств, так 51 % спожитої електроенергії припадає на підприємства, які складають тільки 7 % загальної кількості підприємств.

Коефіцієнти концентрації широко використовують для оцінювання рівномірності територіального розподілу фінансових ресурсів, виробничих потужностей при розподілі доходів між окремими групами населення тощо.

Ступінь нерівномірності в розподілі доходів населення характеризує коефіцієнт концентрації доходів Джини, який розраховується за спеціальною формулою.

При аналізі оцінки концентрації структур двох сукупностей обчислюється коефіцієнт подібності (схожості). Коефіцієнт подібності визначається за формулою:

$$P = 1 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n |d_{j1} - d_{j2}|,$$

де d_{j1} , d_{j2} – частки j -ї ознаки відповідно у першій та другій сукупностях.

Якщо структури двох сукупностей однакові, то коефіцієнт подібності = 1, якщо абсолютно протилежні, то коефіцієнт подібності = 0. Чим більше схожі структури, тим більше значення даного коефіцієнта.

Розглянемо порядок розрахунку коефіцієнта подібності на прикладі аналізу структури валового внутрішнього продукту, виробленого у різних галузях у двох країнах (табл. 2).

Таблиця 2.

Структура валового внутрішнього продукту двох країн

Країна	Промисловість	Сільське господарство	Транспорт	Інші галузі
А	56,2	22,2	19,2	2,4
Б	24,5	45,9	23,5	6,1

$$P = 1 - \frac{|0,562 - 0,245| + |0,222 - 0,459| + |0,192 - 0,235| + |0,024 - 0,061|}{2} = 0,683$$

Висновки: структура ВВП, створеного у різних галузях економіки двох країн, відхиляється в середньому на 31,7 п. п.

Важливе місце при проведенні статистичних досліджень займає аналіз у різних регіонах. У даному випадку визначається коефіцієнт локалізації, який показує співвідношення частки ознаки в окремих регіонах і факторів, які його визначають. Коефіцієнт локалізації визначають за формулою:

$$L_j = \frac{D_j}{d_j} 100$$

Розглянемо порядок розрахунку даного коефіцієнта на основі умовних даних про чисельність населення та обсяг товарообігу у різних регіонах країни.

Таблиця 3.

Робоча таблиця для розрахунку коефіцієнтів локалізації по регіонах

Регіон	У % до підсумку		$L_j = \frac{D_j}{d_j} 100$
	Чисельність населення d_j	Обсяг товарообігу D_j	
А	22	28	127,3
Б	43	30	69,8
В	15	17	113,3
Д	20	25	125,0
<i>Всього</i>	100	100	—

Висновки: коефіцієнти локалізації свідчать про нерівномірність кулі продажу на душу населення у різних регіонах країни, одною з причин може бути варіація життєвого рівня населення різних регіонів країни.

2. Коефіцієнти диференціації, їх значення та порядок розрахунку

Для характеристики структури варіаційного ряду розподілу додатково до медіани обчислюють квартилі, децилі та процентилі. Квартилі поділяють ряд розподілу за сумою частот на чотири однакові частини, децилі – на десять частин, процентилі – на сто рівних частин.

У статистичній практиці при аналізі рівня життя населення дуже часто використовують децильні та квартильні коефіцієнти диференціації. За допомогою даних коефіцієнтів проводять аналіз розподілу населення за рівнем доходів. Тому зупинимося детально на розрахунках даних коефіцієнтів.

Децильний коефіцієнт диференціації доходів населення характеризує, у скільки разів мінімальні доходи 10 % найбільш багатого (забезпеченого) населення перевищують максимальні доходи 10 % найменш забезпеченого населення.

$$KD_{\text{д}} = \frac{K_9}{K_1}$$

Квартильний коефіцієнт диференціації доходів населення характеризує, у скільки разів мінімальні доходи 25 % найбільш багатого (забезпеченого) населення перевищують максимальні доходи 25 % найменш забезпеченого населення.

$$KD_{\text{к}} = \frac{K_3}{K_1},$$

де K_1 , K_3 , K_9 – відповідно перший, третій та десятий квартиль.

Другий квартиль (K_2) – це медіана, порядок її розрахунку був розглянутий раніше. Перший, третій та десятий квартиль розраховуються аналогічно другої квартилі. Виняток складає порядок розрахунку інтервалів. Так при визначенні K_1 беруть інтервал, в якому лежить варіанта, що відсікає 1/4 кількості частот, а для третього квартиля K_3 – варіанта, що відсікає 3/4 усіх частот.

Розглянемо порядок розрахунку квартильного коефіцієнта диференціації на основі наступних даних.

Таблиця 4.

Розподіл середньодушового доходу населення міста за звітний період

Середньодушовий дохід, грн.	до 300	300-600	600-900	900-1200	1200-1500	1500 і більше
Кількість сімей	85	216	619	817	1128	315

Визначить квартильний коефіцієнт деференціації середньодушового доходу населення міста. Зробити висновки.

Таблиця 5.

Робоча таблиця для розрахунку накопичених (кумулятивних) частот

Середньодушовий дохід, грн.	Кількість сімей	Кумулятивні (накопичені) частоти
до 300	85	$85 + 0 = 85$
300-600	216	$216 + 85 = 301$
600-900	619	$619 + 301 = 920$
900-1200	817	$817 + 920 = 1737$
1200-1500	1128	$1128 + 1737 = 2865$
1500 і більше	315	$315 + 2865 = 3180$
Разом	3180	—

$$\frac{1 \cdot 3180}{4} = 795 \Rightarrow 600-900 \text{ інтервал для першого квартиля.}$$

$$K_1 = 600 + 300 \cdot \frac{\frac{3180}{4} - 301}{619} = 839 \text{ грн.}$$

$$\frac{3 \cdot 3180}{4} = 2385 \Rightarrow 1200-1500 \text{ інтервал для третього квартиля.}$$

$$K_3 = 1200 + 300 \cdot \frac{\frac{3 \cdot 3180}{4} - 1737}{1128} = 1372 \text{ грн.}$$

$$K_{Дк} = \frac{K_3}{K_1} = \frac{1372}{839} = 1,635$$

Висновки: мінімальний середньодушовий дохід 25 % найбільш

забезпечених сімей міста перевищує максимальний середньодушовий дохід 25 % найменш забезпечених сімей у 1,635 разів.

Розв'язання типових завдань

Завдання 1.

Для того, щоб найкраще зрозуміти сутність медіани, розглянемо елементарний приклад. Відомі дані про денний виробіток 7 членів бригади: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 шт. Необхідно визначити медіану, тобто значення ознаки у середині ряду розподілу.

Номер одиниці сукупності, який знаходиться у середині ряду визначається

за формулою:
$$\frac{\sum_{j=1}^n f_j + 1}{2}.$$

У нашому прикладі порядковий номер медіани складає $4 \left(\frac{7+1}{2} = 4 \right)$.

З будь-якого кінця ряду 4-ий порядковий номер буде знаходитися у середині ряду: 4; 5; 6; **7**; 8; 9; 10. Його значення = 7. Медіана = 7 шт., тобто половина робітників бригади має денний виробіток до 7 шт., а друга половина – понад 7 шт.

Завдання № 2

Результати здачі екзаменів з курсу “Статистика”

в одній з груп інституту характеризуються наступними даними

Екзаменаційна оцінка	2	3	4	5
Кількість студентів, чол.	1	6	14	8

Визначити середній бал успішності, моду та медіану. Визначити характер ряду розподілу. Зробити висновки.

Розв'язок:

Логічна формула для розрахунку середнього балу успішності:

$$\text{середній бал успішності} = \frac{\text{загальний бал успішності}}{\text{кількість студентів}}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^n x_j f_j}{\sum_{j=1}^n f_j} = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 14 + 5 \cdot 8}{1 + 6 + 14 + 8} = 4 \text{ б.}$$

Висновки: середній бал успішності здобівачів становить 4 бали.

Ряд розподілу дискретний варіаційний.

Визначення моди:

Найбільша частота 14, вона відповідає варіанті 4. \Rightarrow мода = 4

Висновки: більше всього здобівачів у групі, які отримали на іспиті оцінку „4”.

Визначення медіани:

1) Визначаємо суму частот $\sum_{j=1}^n f_j = 1 + 6 + 14 + 8 = 29$

2) Порядковий номер медіани $\frac{\sum_{j=1}^n f_j + 1}{2} = \frac{29 + 1}{2} = 15$, таким чином медіанним значенням ознаки володіє студент за № 15. Для того, щоб визначити, яку оцінку він отримав, необхідно розрахувати накопичені частоти.

3) Накопичені (кумулятивні) частоти:

$$1 + 0 = 1; \quad 6 + 1 = 7; \quad 14 + 7 = 21; \quad 8 + 21 = 29.$$

$1 < 15; \quad 7 < 15; \quad 21 > 15$, таким чином порядковий номер варіанти 15 відповідає третьому значенню ознаки, \Rightarrow медіана = 4.

Висновки: половина студентів у групі отримали оцінку менше 4 балів, а друга половина студентів отримали оцінку більше 4 балів.

Між характеристиками ряду розподілу існує рівність, $\bar{X} = Me = Mo$, \Rightarrow це симетричний ряд розподілу.

Завдання 3.

Відомі наступні дані про денний виробіток робітників підприємства

Денний виробіток, шт.	4-6	6-8	8-10	10-12
Кількість робітників, чол.	12	39	51	6

Визначити середній денний виробіток на 1 робітника, моду та медіану.

Визначити характер ряду розподілу. Зробити висновки.

Розв'язок:

Ряд розподілу інтервальний варіаційний, тому для обчислення середньої величини спочатку потрібно перетворити інтервальний ряд у дискретний, для

чого необхідно визначити середнє значення (середину) кожного інтервалу.

Робоча таблиця

Денний виробіток, шт.	Кількість робітників, чол.	Розрахунок середнього значення (середини) інтервалу
4-6	12	$\frac{4+6}{2} = 5$
6-8	39	$\frac{6+8}{2} = 7$
8-10	51	$\frac{8+10}{2} = 9$
10-12	6	$\frac{10+12}{2} = 11$

Логічна формула для розрахунку середнього виробітку на 1 робітника:

$$\text{Середній виробіток продукції на одного робітника} = \frac{\text{Загальний обсяг виготовленої продукції}}{\text{Чисельність (кількість) робітників}}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^n x_j f_j}{\sum_{j=1}^n f_j} = \frac{5 \cdot 12 + 7 \cdot 39 + 9 \cdot 51 + 11 \cdot 6}{12 + 39 + 51 + 6} = \frac{60 + 273 + 459 + 66}{108} = 7,9 \text{ шт.}$$

Визначення моди:

Найбільша частота 51, вона відповідає інтервалу 8-10, це модальний інтервал, а далі моду визначаємо за формулою:

$$M_o = X_{Mo} + h \frac{f_2 - f_1}{(f_2 - f_1) + (f_2 - f_3)},$$

де X_{Mo} – нижня межа модального інтервалу;

h – розмір (ширина) модального інтервалу;

f_2 – частота модального інтервалу;

f_1 , – частота інтервалу, попереднього модальному (передмодального);

f_3 – частота інтервалу, наступного за модальним (післямодального).

$$M_o = 8 + 2 \cdot \frac{51 - 39}{(51 - 39) + (51 - 6)} = 8,4 \text{ шт.}$$

Висновки: більше всього робітників, у яких денний виробіток складає 8,4 шт.

Визначення медіани:

1) Спочатку необхідно визначити медіанний інтервал. Медіанний інтервал - це інтервал, накопичена частота якого рівна або більше половини суми частот.

1.1. Визначаємо суму частот $\sum_{j=1}^n f_j = 12+39+51+6=108$

1.2. Порядковий номер медіанного інтервалу $\frac{\sum_{j=1}^n f_j}{2} = \frac{108}{2} = 54$

1.3. Накопичені частоти: $12+0=12$; $39+12=51$; $51+51=102$; $6+102=108$.
 $12 < 54$; $51 < 54$; $102 > 54$, накопичена частота 102 відповідає інтервалу 8- 10, це медіанний інтервал.

2) Потім медіану визначаємо за формулою:

$$M_e = X_{Me} + h \frac{\sum_{j=1}^n f_j}{2} - f_{\text{нак}}}{f_{Me}},$$

де X_{Me} – нижня межа медіанного інтервалу;

h – розмір (ширина) медіанного інтервалу;

$\sum_{j=1}^n f_j$ – сума частот;

$f_{\text{нак}}$ – сума накопичених частот інтервалу, попереднього медіанному (передмедіанного);

f_{Me} – частота медіанного інтервалу.

$$M_e = 8 + 2 \cdot \frac{54 - 51}{51} = 8,1 \text{ шт.}$$

Висновки: половина робітників підприємства, у яких денний виробіток складає до 8,1 шт., а друга половина робітників, у яких денний виробіток більше 8,1 шт.

Між характеристиками ряду розподілу існує розбіжність: $\bar{X} < M_e < M_o$

$8 < 8,1 < 8,4 \Rightarrow$ це лівостороння асиметрія.

Завдання 4.

За підприємством відомі наступні дані про стаж роботи робітників

Стаж роботи, роки	до 5	5-10	10-15	15 і більше
Кількість робітників, чол.	11	37	49	13

Визначити показники варіації. Зробити висновки.

Розв'язок:

Вихідні дані є згрупованими, тому для розрахунку показників варіації необхідно використовувати формули показників варіації для згрупованих даних. Для визначення показників варіації доцільно проміжкові розрахунки роботи у робочій таблиці.

Робоча таблиця

Вихідні показники		Розраховані показники					
Стаж роботи, роки	Кількість робітників, f_j	Середина інтервалу x_j	$x_j f_j$	$ x_j - \bar{x} $	$ x_j - \bar{x} f_j$	$(x_j - \bar{x})^2$	$(x_j - \bar{x})^2 f_j$
A	1	2	3	4	5	6	7
до 5	11	2,5	27,5	7,9	86,9	62,41	686,51
5-10	37	7,5	277,5	2,9	107,3	8,41	311,17
10-15	49	12,5	612,5	2,1	102,9	4,41	216,09
15 і більше	13	17,5	227,5	7,1	92,3	50,41	655,33
Разом	110	-	1145	-	389,4	-	1869,1

Основою для розрахунку показників варіації є середня величина. На основі вихідних даних необхідно визначити середню величину за даними інтервального варіаційного ряду розподілу. Порядок розрахунку середньої величини був розглянутий у главі 4.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^n x_j f_j}{\sum_{j=1}^n f_j} = \frac{1145}{110} = 10,4 \text{ років.}$$

Визначаємо перший показник варіації – розмах варіації:

$$R = X_{\max} - X_{\min} \quad R = 20 - 0 = 20 \text{ років.}$$

Перед тим як розрахувати середнє лінійне відхилення необхідно провести

проміжкові розрахунки (графи 4 та 5), а потім розрахуємо середнє лінійне відхилення за формулою:

$$\bar{d} = \frac{\sum_{j=1}^n |x_j - \bar{x}| f_j}{\sum_{j=1}^n f_j} = \frac{389,4}{110} = 3,54 \text{ років.}$$

Для розрахунку дисперсії необхідно провести проміжкові розрахунки (графи 6 та 7), а потім розрахуємо дисперсію за формулою:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2 f_j}{\sum_{j=1}^n f_j} = \frac{1869,1}{110} = 16,992.$$

Середнє квадратичне відхилення визначаємо за формулою:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2 f_j}{\sum_{j=1}^n f_j}} = \sqrt{16,992} = 4,122 \text{ років.}$$

Квадратичний коефіцієнт варіації визначаємо за формулою:

$$V_\sigma = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100 = \frac{4,122}{10,4} \cdot 100 = 39,6 \%$$

Висновки: квадратичний коефіцієнт варіації 39,6 %, це свідчить про значні коливання стажу роботи окремих робітників підприємства відносно середнього стажу роботи в цілому за підприємством. Таким чином, сукупність робітників підприємства за стажем роботи є неоднорідною ($V_\sigma > 33 \%$) і обчислена середня величина не є типовою характеристикою для даної сукупності.

Завдання 5.

Результати вибіркового обстеження якості товару сиру від терміну його зберігання

№ з/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Термін зберігання, міс	1	2	1	2	3	1	3	2	2	1	2
Бал якості	8,5	7,2	8,4	7,0	6,6	8,9	6,2	7,4	7,1	9,0	7,3

Визначити: 1) загальну, групові та міжгрупову дисперсії якості сиру;
 2) за допомогою коефіцієнта детермінації встановити ступінь впливу на результативну ознаку груповальної та інших ознак. Зробити висновки

Розв'язок:

Робоча таблиця розрахунку загальної та групових дисперсій

Вихідні дані			Розрахункові показники						
№ з/п	Термін зберігання, міс.	Бал якості x_j	$(x_j - \bar{x})^2$	1-ша група		2-га група		3-тя група	
				y_i	$(y_i - \bar{y}_1)^2$	y_i	$(y_i - \bar{y}_2)^2$	y_i	$(y_i - \bar{y}_3)^2$
1	1	8,5	0,81	8,5	0,04				
2	2	7,2	0,16			7,2	0,00		
3	1	8,4	0,64	8,4	0,09				
4	2	7,0	0,36			7,0	0,04		
5	3	6,6	1,00					6,6	0,04
6	1	8,9	1,69	8,9	0,04				
7	3	6,2	1,96					6,2	0,04
8	2	7,4	0,04			7,4	0,04		
9	2	7,1	0,25			7,1	0,01		
10	1	9,0	1,96	9,0	0,09				
11	2	7,3	0,09			7,3	0,01		
разом	–	83,6	8,96	34,8	0,26	36,0	0,10	12,8	0,08
середня	–	7,6	–	8,7	–	7,2	–	6,4	–
дисперсія	–	–	0,815	–	0,065	–	0,020		0,04

Середня величина (бал якості) за усією сукупністю:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 \dots x_n}{n} = \frac{\sum_{j=1}^n x_j}{n} = \frac{83,6}{11} = 7,6 \text{ бал.}$$

Загальна дисперсія балів якості товару „А”:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2}{n} = \frac{8,96}{11} = 0,815$$

Середня величина за кожною групою:

$$\bar{y}_1 = \frac{34,8}{4} = 8,7 \text{ бал.} \quad \bar{y}_2 = \frac{36,0}{5} = 7,2 \text{ бал.} \quad \bar{y}_3 = \frac{12,8}{2} = 6,4 \text{ бал.}$$

Значення середніх величин за групами (групових середніх) підтверджують залежність якості товару від терміну його зберігання, тобто збільшення терміну зберігання призводить до зниження якості товару.

Групові дисперсії:

$$\sigma_1^2 = \frac{0,26}{4} = 0,065 \quad \sigma_2^2 = \frac{0,10}{5} = 0,02 \quad \sigma_3^2 = \frac{0,08}{2} = 0,04.$$

Середня з групових дисперсій:

$$\overline{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2 k_i}{\sum_{i=1}^m k_i} = \frac{0,065 \cdot 4 + 0,02 \cdot 5 + 0,04 \cdot 2}{4 + 5 + 2} = 0,04.$$

Міжгрупова дисперсія:

$$\delta^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (\bar{y}_i - \bar{x})^2 k_i}{\sum_{i=1}^m k_i} = \frac{(8,7 - 7,6)^2 \cdot 4 + (7,2 - 7,6)^2 \cdot 5 + (6,4 - 7,6)^2 \cdot 2}{4 + 5 + 2} = 0,775.$$

Сума міжгрупової дисперсії та середньої з групових дисперсій дорівнює загальній дисперсії: $0,775 + 0,04 = 0,815$.

$$\text{Коефіцієнт детермінації } \eta^2 = \frac{\delta^2}{\sigma^2} = \frac{0,775}{0,815} = 0,951 \text{ або } 95,1 \%$$

Таким чином 95,1% варіації якості сиру пов'язані з терміном його зберігання, на інші фактори припадає тільки 4,9% (100-95,1).

Завдання для проведення практичних занять

План практичних занять:

1. Визначити характеристики центра розподілу: середній рівень, моду та медіану у дискретних та інтервальних варіаційних рядах розподілу
2. На основі співвідношення характеристик центра розподілу зробити висновок щодо характеру розподілу
3. Провести порівняльний аналіз рядів розподілу за допомогою показників варіації

4. Провести комплексну оцінку рядів розподілу за допомогою коефіцієнтів асиметрії й ексцесу

5. Розкласти загальну дисперсію на міжгрупову та групові (внутрішньогрупові)

Завдання № 1.

Відомі наступні дані про денний виробіток робітників бригади

Денний виробіток, шт.	3	4	5	6
Кількість робітників, чол..	2	3	16	7

Визначити середній виробіток, моду і медіану. Вкажіть характер ряду розподілу. Зробити висновки.

Завдання № 2.

Маємо такі дані про розподіл магазинів за обсягом товарообігу

Товарообіг, тис. грн.	10-50	50-90	90-130	130-170	170-210
Кількість магазинів	26	19	37	22	4

Визначити: середній обсяг товарообігу; моду і медіану. Вкажіть характер ряду розподілу. Зробити висновки.

Завдання № 3.

За підприємством відомі наступні дані про кваліфікацію робітників

Тарифний розряд	1	2	3	4	5	6
Кількість робітників, чол.	2	10	40	46	40	13

Визначити характеристики ряду розподілу. Вкажіть характеристику ряду розподілу. Зробити висновки.

Завдання № 4.

Відомі такі дані про розподіл робітників заводу за розміром заробітної плати

Групи робітників за розміром заробітної плати, грн.	до 500	500-1000	1000-1500	1500-2000	2000 і більше
Кількість робітників, чол.	2	17	67	98	18

Визначити середній розмір заробітної плати, моду і медіану. Вкажіть характер ряду розподілу. Зробити висновки.

Завдання № 5.

Результати здачі екзаменів з курсу “Статистика”

в одній з академічних груп інституту характеризуються такими даними

Екзаменаційна оцінка	2	3	4	5
Число студентів, чол.	3	8	13	6

Визначити показники варіації. Зробити висновки.

Завдання № 6.

Середній бал успішності дорівнює 4,5 бал., квадратичний коефіцієнт варіації складає 17,2 %. Визначити дисперсію.

Завдання № 7.

Маємо такі дані про товарообіг в магазинах міста за звітний період

Товарообіг, тис. грн.	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
Кількість магазинів	17	19	37	35	13

Обчислити показники варіації. Зробити висновки.

Завдання № 8.

За цехом підприємства відомі наступні дані про денний виробіток робітників

Денний виробіток, шт.	до 5	5-10	10-15	15 і більше
Питома вага робітників, %	11	39	43	7

Визначити показники варіації. Зробити висновки.

Завдання № 9.

За підприємством відомі такі дані про розподіл робітників за стажем роботи

Стаж роботи, роки	до 5	5-10	10-15	15-20
Кількість робітників, чол.	12	37	41	3

Визначити: 1) моду та медіану; 2) показники варіації; 3) коефіцієнт асиметрії. Зробити висновки.

Завдання № 10.

Результати вибіркового обстеження 9 геологорозвідувальних партій характеризуються такими даними за звітний період

Кількість бурових установок, шт.	11	12	13	11	11	12	11	13	12
Обсяг отриманого газу, м ³	43	46	51	46	44	48	45	52	48

Визначити:

- 1) загальну, середню з групових та міжгрупову дисперсії, перевірити взаємозв'язок між ними.
- 2) за допомогою коефіцієнта детермінації встановити ступінь впливу на результативну ознаку груповальної та інших ознак. Зробити висновки.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 2.

Аналіз тенденцій розвитку

Розв'язання типових завдань

Порядок виявлення тенденцій розвитку способом збільшення інтервалів та способом згладжування за допомогою ковзної середньої за непарним числом членів ряду

Завдання 1.

Виробництво продукції на підприємстві „Крона” за останні роки

Роки	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Виробництво продукції, тис. шт.	417	411	432	430	447	445	440	457	451

Провести згладжування ряду динаміки методом 4-членної ковзної середньої.

Зробити висновок щодо тенденції розвитку.

Розв'язок:

Робоча таблиця

Рік	Виробництво продукції, тис. шт.		
	річне	розрахунок ковзної (плинної) середньої	згладжені рівні з урахуванням центрування
1999	417	-	-
2000	411	-	-
		$(417+411+432+430) : 4 = 422,5$	
2001	432		$(422,5 + 430,0) : 2 = 426,3$
		$(411+432+430+447) : 4 = 430,0$	
2002	430		$(430,0 + 438,5) : 2 = 434,3$
		$(432+430+447+445) : 4 = 438,5$	
2003	447		$(438,5 + 440,5) : 2 = 439,5$
		$(430+447+445+440) : 4 = 440,5$	
2004	445		$(440,5 + 447,3) : 2 = 443,9$
		$(447+445+440+457) : 4 = 447,3$	
2005	440		$(447,3 + 448,3) : 2 = 447,8$
		$(445+440+457+451) : 4 = 448,3$	
2006	457	-	-
2007	451	-	-

Новий ряд динаміки з ковзних середніх: 426,3; 434,3; 439,5; 443,9; 447,8. Він описує основну тенденцію збільшення виробництва продукції на підприємстві.

Завдання для проведення практичних занять

План практичних занять:

1. Виявити й охарактеризувати основну тенденцію розвитку за допомогою методу укрупнення інтервалів
2. Виявити й охарактеризувати основну тенденцію розвитку способом згладжування за допомогою ковзної середньої за непарним та парним числам членів ряду
3. Визначити коефіцієнти нерівномірності та пояснити їх зміст
4. Визначити індекси сезонності

Завдання № 1

По підприємству відомі наступні дані про виробництво продукції

Місяць	Виробництво продукції, тис. грн.			Місяць	Виробництво продукції, тис. грн.		
	2005 р.	2006 р.	2007 р.		2005 р.	2006 р.	2007р.
січень	35	43	36	липень	37	36	40
лютий	38	36	46	серпень	37	42	42
березень	32	34	34	вересень	37	36	36
квітень	39	38	39	жовтень	39	36	43
травень	37	37	41	листопад	36	40	40
червень	34	39	37	грудень	37	39	37

Для вивчення загальної тенденції виробництва продукції за 2005 – 2007 роки провести укрупнення періодів часу у кварталні рівні.

Зробити висновок щодо загальної тенденції виробництва продукції на підприємстві.

Завдання № 2

Динаміка врожайності зернових культур у господарстві

Рік	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
Врожайність, ц /га	32,2	37,7	31,9	36,0	38,5	34,4	38,2	32,2	36,2	39,9

Провести згладжування ряду динаміки методом п'ятичленної ковзної середньої. Зробити висновок щодо загальної тенденції урожайності.

Завдання № 3

Відомі наступні дані про середній розмір товарних запасів у магазині

Місяць	січень	лютий	березень	квітень	травень	червень	липень	серпень	вересень	жовтень	листопад	грудень
Товарні запаси, тис. грн.	21,4	24,3	18,2	20,3	22,2	22,8	19,6	18,5	23,6	20,6	21,0	16,8

Провести згладжування ряду динаміки методом 4-ої ковзної середньої. Зробити висновок щодо тенденції середніх товарних запасів у магазині.

Завдання № 4

Обсяги споживання води у місті протягом доби становили

Час доби	0-3	3-6	6-9	9-12	12-15	15-18	18-21	21-24
Обсяг споживання, тис. м ³	80	40	150	135	130	140	210	145

Визначити коефіцієнти нерівномірності споживання води у місті протягом доби. Зробити висновки.

Завдання № 5

Обсяг виробництва на підприємстві характеризуються даними, тис. шт.

Період часу	1 квартал	2 квартал	3 квартал	4 квартал
2015 р.	234	229	237	266
2016 р.	278	269	250	269
2017 р.	254	250	282	280

Визначте індекси сезонності на основі постійної середньої та опишіть сезонну хвилю графічно. Зробити висновки.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 3.

Кореляційний аналіз

Мета роботи: здійснити кореляційний аналіз статистичної сукупності спостережень факторів.

Зміст роботи: виявлення взаємозв'язку між випадковими змінними шляхом точкової оцінки парних (частинних) коефіцієнтів кореляції, розрахунку та перевірки значущості множинних коефіцієнтів кореляції та детермінації. На основі проведеного аналізу здійснення відбору факторів, що виробляють найбільший вплив на результуючий показник, та дослідження наявності мультиколінеарності.

Завдання до роботи:

1. Знайти парні коефіцієнти кореляції між залежною та незалежними змінними.
2. Визначити, який з факторів значно впливає на результуючий показник, а який не значимо.
3. Визначити множинний коефіцієнт кореляції результуючого показника з пояснюючими, коефіцієнт детермінації та оцінити їх значущість.
4. Дослідити наявність мультиколінеарності між пояснюючими змінними, скориставшись алгоритмом Фаррара-Глобера.
5. Додатково здійснити розрахунки по знаходженню кореляційної матриці за допомогою MS Excel.
6. Зробити висновки щодо взаємозв'язку статистичної сукупності спостережень факторів та обґрунтувати відбір факторів, що в наступному можуть бути включені до регресійного рівняння.
7. Додатково здійснити розрахунки коефіцієнтів кореляції за допомогою спеціалізованого інструментарію MS Excel (надбудова «Аналіз даних», функції КОРРЕЛ(), СТЬЮДРАСПОБР(), ФРАСПРОБР()).
8. Визначити залежність оцінок параметрів економетричної моделі і коефіцієнтів парної кореляції за алгоритмом покрокової регресії (*на оцінку «відмінно»*).

Початкові дані:

Для дослідження мультиколінеарності наведено статистичну сукупність спостережень факторів, що впливають на прибуток підприємства (табл. 1.1).

Номери N_1, N_2, N_3, N_4 вибираються з таблиці 1.2.

Таблиця 1.1 – Фактори, що впливають на прибуток підприємства

Місяць	Прибуток на місяць, грн., Y	Фондовіддача, грн., X_1	Продуктивність праці, грн., X_2	Питомі інвестиції, грн., X_3
1	$70-3*N_4$	$32-2*N_4$	$5+N_4$	$25-N_2$
2	$75-3*N_3$	$37-2*N_4$	$7+N_1$	$28-N_4$
3	$70-3*N_1$	$33-2*N_2$	$6+N_3$	$26-N_4$
4	$73-3*N_2$	$34-2*N_1$	$7+N_1$	$27-N_2$
5	$78-3*N_4$	$36-2*N_2$	$6+N_4$	$30-N_2$
6	$69-3*N_4$	$35-2*N_3$	$5+N_1$	$25-N_1$
7	$72-3*N_1$	$34-2*N_4$	$6+N_3$	$26-N_1$
8	$75-3*N_2$	$37-2*N_3$	$9+N_2$	$28-N_2$
9	$68-3*N_1$	$32-2*N_1$	$5+N_3$	$29-N_4$
10	$78-3*N_2$	$38-2*N_1$	$10+N_3$	$30-N_2$
11	$80-3*N_4$	$40-2*N_1$	$11+N_2$	$32-N_1$
12	$78-3*N_3$	$37-2*N_4$	$10+N_4$	$31-N_2$
13	$79-3*N_1$	$38-2*N_4$	$12+N_4$	$31-N_3$
14	$75-3*N_4$	$39-2*N_1$	$8+N_1$	$30-N_4$
15	$79-3*N_2$	$40-2*N_2$	$9+N_4$	$32-N_1$
16	$82-3*N_1$	$42-2*N_2$	$14+N_4$	$33-N_2$
17	$84-3*N_4$	$44-2*N_3$	$15+N_2$	$34-N_4$
18	$81-3*N_2$	$41-2*N_4$	$13+N_4$	$30-N_3$
19	$85-3*N_3$	$45-2*N_4$	$16+N_3$	$34-N_1$
20	$86-3*N_2$	$47-2*N_1$	$18+N_1$	$35-N_4$

Таблиця 1.2 – Варіанти завдань

Варіант	N_1	N_2	N_3	N_4
1	7	6	1	7
2	7	7	2	2
3	2	6	8	6
4	7	6	4	7
5	4	8	3	4
6	3	2	6	8
7	3	3	3	7
8	4	5	6	5
9	7	4	2	9
10	8	8	1	8
11	7	3	6	3
12	4	3	7	7
13	3	6	6	4
14	4	8	5	3
15	3	3	4	2
16	5	6	8	1
17	8	5	7	8

Вимоги до звіту: назва, тема, мета, завдання, розрахункові формули. Результати аналітичного розв’язання задачі та комп’ютерного у вигляді таблиці MS Excel з вихідними умовами експерименту, таблиці MS Excel з результатами обчислень, висновок про отримані результати. Опис інструментів та функцій MS Excel, що використовувались при вирішенні задачі. Короткий опис технології вирішення задачі в MS Excel.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

1. Знайдемо парні коефіцієнти кореляції між залежною (Y) та незалежними (X_1, X_2, X_3) змінними.

Нехай задано дві вибірки (обов’язково з однаковою кількістю даних, в нашому випадку $n = 20$), що відображають дві випадкові величини X_1, Y :

Місяць	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Y	40	45	40	43	48	39	42	45	38	48	50	48	49	45	49	52	54	51	55	56
X_1	12	17	13	14	16	15	14	17	12	18	20	17	18	19	20	22	24	21	25	27

Коефіцієнт парної кореляції визначають як коваріацію, нормовану за стандартними відхиленнями випадкових величин

$$\rho(X_1, Y) = \frac{cov(X_1, Y)}{\sigma_{X_1} \sigma_Y}, \quad cov(X_1, Y) = \frac{1}{n-1} \sum X_{1i} * Y_i - \bar{X}\bar{Y}, \quad (1)$$

де σ_{X_1} – середньоквадратичне відхилення незалежної змінної,

σ_Y – середньоквадратичне відхилення залежної змінної.

	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AG
1																							
2	Місяць	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Середнє	
3	Y	40	45	40	43	48	39	42	45	38	48	50	48	49	45	49	52	54	51	55	56	46,85	
4	X_1	12	17	13	14	16	15	14	17	12	18	20	17	18	19	20	22	24	21	25	27	18,05	

Середньоквадратичне відхилення — дорівнює кореню квадратному з дисперсії випадкової величини:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Відповідно до формул з обчислення дисперсії:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (2)$$

У комірках L7 та L8 записуються формули `=СТАНДОТКЛОН(L3:AE3)` і `=СТАНДОТКЛОН(L4:AE4)` для розрахунку середньоквадратичних відхилень залежної та незалежної змінної.

	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AG
1																							
2		Місяць	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Середнє
3		Y	40	45	40	43	48	39	42	45	38	48	50	48	49	45	49	52	54	51	55	56	46,85
4		X ₁	12	17	13	14	16	15	14	17	12	18	20	17	18	19	20	22	24	21	25	27	18,05
7		σ_Y	5,383		r_{YX_1}	0,90																	
8		σ_{X_1}	4,2609																				

Коефіцієнт парної кореляції визначають за формулою `=КОВАР(L3:AE3;L4:AE4)/L7/L8`, що записується в комірці O7.

2. Коефіцієнт кореляції набуває значення від -1 до $+1$.

Визначити значущі коефіцієнти кореляції, використовуючи розподіл Фішера-Ійтса.

Отже, якщо виявиться, що знайдений за вибіркою коефіцієнт r задовольняє нерівності

$$|r| > r_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

то його потрібно визнати значущим.

Але можливе нелінійна взаємодія, а це потребує додаткової перевірки.

За таким принципом розраховуються коефіцієнти парної кореляції для пар: Y-X₁, Y-X₂, Y-X₃.

2.1. Знайдемо коефіцієнти кореляції між пояснюючими змінними.

Обчислимо середні значення та стандартні відхилення пояснюючих змінних X₁, X₂, X₃. Для цього можна скористатись стандартними функціями MS Excel. В майстрі функцій знайдемо категорію «статистичні» і в ній функції «СРЗНАЧ» та «СТАНДОТКЛ».

Дані величини можна також розрахувати за формулами:

$$\bar{X}_j = \frac{\sum X_{ij}}{n}, \quad (3)$$

$$\delta_j = \sqrt{\frac{\sum (X_{ij} - \bar{X}_j)^2}{n-1}}, \quad (4)$$

де \bar{X}_j – середнє значення j -тої пояснюючої змінної;

X_{ij} – індивідуальне значення j -тої пояснюючої змінної;

j – номер пояснюючої змінної;

i – номер точки спостереження (місяця);

δ_j – стандартне відхилення j -тої пояснюючої змінної;

n – число спостережень.

Додаткові розрахунки наведено в табл. 1.

Таблиця 1 – Проміжні розрахунки

Місяць	Y	X_1	X_2	X_3	$(X_{1i} - \bar{X}_1)^2$	$(X_{2i} - \bar{X}_2)^2$	$(X_{3i} - \bar{X}_3)^2$
1	40	12	5	15	36,60	21,16	23,04
2	45	17	7	18	1,10	6,76	3,24
3	40	13	6	16	25,50	12,96	14,44
4	43	14	7	17	16,40	6,76	7,84
5	48	16	6	20	4,20	12,96	0,04
6	39	15	5	15	9,30	21,16	23,04
7	42	14	6	16	16,40	12,96	14,44
8	45	17	9	18	1,10	0,36	3,24
9	38	12	5	19	36,60	21,16	0,64
10	48	18	10	20	0,00	0,16	0,04
11	50	20	11	22	3,80	1,96	4,84
12	48	17	10	21	1,10	0,16	1,44
13	49	18	12	21	0,00	5,76	1,44
14	45	19	8	20	0,90	2,56	0,04
15	49	20	9	22	3,80	0,36	4,84
16	52	22	14	23	15,60	19,36	10,24
17	54	24	15	24	35,40	29,16	17,64
18	51	21	13	20	8,70	11,56	0,04
19	55	25	16	24	48,30	40,96	17,64
20	56	27	18	25	80,10	70,56	27,04
Всього	937	361	192	396	344,95	298,80	175,21

$$\bar{X}_1 = \frac{361}{20} = 18,05; \quad \bar{X}_2 = \frac{192}{20} = 9,60; \quad \bar{X}_3 = \frac{396}{20} = 19,80.$$

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{344,95}{19}} = 4,26; \quad \delta_2 = \sqrt{\frac{298,80}{19}} = 3,96; \quad \delta_3 = \sqrt{\frac{175,21}{19}} = 3,03.$$

Нормалізуємо пояснюючі змінні. Серед статистичних функцій MS Excel знайдемо функцію «НОРМАЛІЗАЦІЯ» та нормалізуємо X_1, X_2, X_3 .

Для цього у комірки F3, G3, H3 запишемо формули нормалізації:

=НОРМАЛИЗАЦИЯ(С3:\$С\$22;СРЗНАЧ(\$С\$3:\$С\$22);СТАНДОТКЛОН(\$С\$3:\$С\$22))

=НОРМАЛИЗАЦИЯ(D3:D\$22;СРЗНАЧ(\$D\$3:\$D\$22);СТАНДОТКЛОН(\$D\$3:\$D\$22))

=НОРМАЛИЗАЦИЯ(E7:E\$22;СРЗНАЧ(\$E\$3:\$E\$22);СТАНДОТКЛОН(\$E\$3:\$E\$22))

та за

допомогою маркера заповнення скопіюємо їх у діапазон F3: H22. Отримаємо наступний результат:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	Місяць	Y	X_1	X_2	X_3	X_1^*	X_2^*	X_3^*
3	1	40	12	5	15	-1,42	-1,16	-1,58
4	2	45	17	7	18	-0,25	-0,66	-0,59
7	5	48	16	6	20	-0,48	-0,91	0,07
8	6	39	15	5	15	-0,72	-1,16	-1,58
9	7	42	14	6	16	-0,95	-0,91	-1,25
10	8	45	17	9	18	-0,25	-0,15	-0,59
11	9	38	12	5	19	-1,42	-1,16	-0,26
12	10	48	18	10	20	-0,01	0,10	0,07
13	11	50	20	11	22	0,46	0,35	0,72
14	12	48	17	10	21	-0,25	0,10	0,40
15	13	49	18	12	21	-0,01	0,61	0,40
16	14	45	19	8	20	0,22	-0,40	0,07
17	15	49	20	9	22	0,46	-0,15	0,72
18	16	52	22	14	23	0,93	1,11	1,05
19	17	54	24	15	24	1,40	1,36	1,38
20	18	51	21	13	20	0,69	0,86	0,07
21	19	55	25	16	24	1,63	1,61	1,38
22	20	56	27	18	25	2,10	2,12	1,71
23	Всього	937	361	192	396			

Для цього можна також скористатись формулою:

$$x_j^* = \frac{x_j - \bar{x}_j}{\delta_{x_j}} \quad (5)$$

$X^* =$	X_1^*	X_2^*	X_3^*
	-1,4199	-1,1600	-1,5807
	-0,2464	-0,6556	-0,5928
	-1,1852	-0,9078	-1,2514
	-0,9505	-0,6556	0,9221
	-0,4811	-0,9078	0,0660
	-0,7158	-1,1600	-1,5807
	-0,9505	-0,9078	-1,2514
	-0,2464	-0,1513	-0,5928
	-1,4199	-1,1600	-0,2635
	-0,0117	0,1009	0,0659
	0,4577	0,3530	0,7245
	-0,2464	0,1009	0,3952
	-0,0117	0,6052	0,3952
	0,2230	-0,4035	0,0659
	0,4577	-0,1513	0,7245
	0,9270	1,1095	1,0538
	1,3964	1,3617	1,3831
	0,6923	0,8574	0,0659
	1,6311	1,6139	1,3831
2,1005	2,1182	1,7124	

Транспонуємо матрицю X^* (нормалізовану) в матрицю X^{*1}

Для транспонування матриці використовуємо стандартну функцію MS Excel «ТРАНСП». Для використання даної функції слід виконати наступні кроки:

Крок 1: У комірку B25 формулу: `=ТРАНСП(F3:H22)`.

Крок 2: Виділити весь діапазон, де буде розміщена транспонована матриця: B25:U27.

Крок 3: Натиснути функціональну клавішу F2, а потім клавіші Ctrl+Shift+Enter. В результаті отримаємо транспоновану матрицю X^{*1} :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
24	Транспонована матриця																				
25	X_1^*	-1,42	-0,25	-1,19	-0,95	-0,48	-0,72	-0,95	-0,25	-1,42	-0,012	0,4576	-0,2	-0,01	0,223	0,458	0,9	1,4	0,7	1,63	2,1
26	X_2^*	-1,16	-0,66	-0,91	-0,66	-0,91	-1,16	-0,91	-0,15	-1,16	0,1009	0,353	0,1	0,605	-0,4	-0,15	1,1	1,4	0,9	1,61	2,1
27	X_3^*	-1,58	-0,59	-1,25	-0,92	0,066	-1,58	-1,25	-0,59	-0,26	0,0659	0,7245	0,4	0,395	0,066	0,724	1,1	1,4	0,1	1,38	1,7

2.2. Перемножимо матриці X^{*1} та X^* .

Для множення матриць використовується функцію MS Excel «МУМНОЖ». Для використання даної функції слід виконати наступні кроки:

Крок 1: Виділити комірку, яка буде лівим верхнім кутом результуючої матриці, наприклад B29.

Крок 2: У виділену комірку записати формулу: =МУМНОЖ(F3:H22;B25:U27), де першим аргументом є діапазон транспонованої нормалізованої матриці X^{*1} , а другим – вихідної нормалізованої матриці X^* .

Крок 3: Виділити весь діапазон, де буде розміщений результат множення матриць (B29:D31).

Крок 4: Натиснути функціональну клавішу F2, а потім клавіші Ctrl+Shift+Enter. В результаті отримаємо перемножені матриці $X^{*1} X^*$.

	A	B	C	D
28				
29		19	17,9	16,9
30	$X^{*1} X^*$	17,9	19	16,6
31		16,9	16,64	19

2.3. Знайдемо кореляційну матрицю r .

Для знаходження кореляційної матриці r необхідно кожний елемент матриці $X^* X^{*1}$ помножити на $\frac{1}{n-1}$ (у нашому випадку $n-1 = 20-1 = 19$):

$$r = \begin{vmatrix} 1 & 0,9419 & 0,8914 \\ 0,9419 & 1 & 0,8759 \\ 0,8917 & 0,8759 & 1 \end{vmatrix}$$

Визначити значущі коефіцієнти кореляції, використовуючи розподіл Фішера-Ійтса.

Отже, якщо виявиться, що знайдений за вибіркою коефіцієнт r задовольняє нерівності

$$|r| > r_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

то його потрібно визнати значущим.

4. Знайдемо визначник матриці r ($\det r$).

Для знаходження $\det r$ необхідно серед математичних функцій MS Excel знайти функцію «МОПРЕД». Так як кореляційна матриця знаходиться в комірках діапазону G29:I31, тоді для встановлення визначника слід задати формулу: =МОПРЕД(G29:I31) . Скориставшись нею, дістанемо: $\det r = 0,0218$.

Оскільки $\det r$ наближається до нуля, то в масиві пояснюючих змінних може існувати мультиколінеарність.

Прологарифмуємо визначник матриці r : $\ln \det r = -3,8249$

5. Обчислимо критерій Пірсона χ^2 за формулою:

$$\chi^2 = -\left\{n - 1 - \frac{1}{6}(2m + 5)\right\} \ln(\det r), \quad (6)$$

$$\chi^2 = -\left\{20 - 1 - \frac{1}{6}(2 * 3 + 5)\right\}(-3,8249) = 65,6738.$$

Знайдене значення χ^2 порівняємо з табличним значенням ($\chi_{кр}^2 = 7,8$), коли маємо $\frac{1}{2}m(m-1) = 3$ ступенів свободи та при рівні значущості $\alpha = 0,05$.

Оскільки $\chi_{факт}^2 > \chi_{кр}^2$, то в масиві пояснюючих змінних (продуктивність праці, питомі інвестиції та фондівіддача) існує мультиколінеарність.

6. Обчислимо F –критерій.

Для визначення F –критеріїв необхідно знайти матрицю \tilde{N} , яка є оберненою до матриці r .

Для знаходження оберненої матриці використовується функція MS Excel «МОБР». Для використання даної функції слід виконати наступні кроки:

Крок 1: Виділити комірку, яка буде лівим верхнім кутом результуючої матриці, наприклад G33.

Крок 2: У виділену комірку записати формулу: =МОБР(G29:I31) , де аргументами є діапазон кореляційної матриці r .

Крок 3: Виділити весь діапазон, де буде розміщена обернена матриці (G33:I35).

Крок 4: Натиснути функціональну клавішу F2, а потім клавіші Ctrl+Shift+Enter. В результаті отримаємо обернену матрицю \tilde{N} :

	F	G	H	I
28				
29		1	0,9419	0,89165
30	$r =$	0,9419	1	0,87587
31		0,8917	0,8759	1
32				
33		10,671	-7,376	-3,0546
34	\tilde{N}	-7,376	9,3929	-1,65019
35		-3,0546	-1,65	5,169

Безпосередньо F – критерій обчислюється за формулою:

$$F = (C_{kk} - 1) \left(\frac{n - m}{m - 1} \right), \quad (7)$$

де C_{kk} – діагональний елемент матриці \tilde{N} .

$$F_1 = (10,6712 - 1) \left(\frac{20 - 3}{3 - 1} \right) = 82,2052 ;$$

$$F_2 = (9,3929 - 1) \left(\frac{20 - 3}{3 - 1} \right) = 71,3398 ;$$

$$F_3 = (5,1690 - 1) \left(\frac{20 - 3}{3 - 1} \right) = 35,4365 .$$

Обчислені критерії порівнюються з табличним значенням $F = 8,69$, коли є $n - m = 17$ ступенів свободи та при рівні значущості $\alpha = 0,05$.

У розглядуваному випадку $F_1 > F_{кр}$, $F_2 > F_{кр}$, $F_3 > F_{кр}$. Це означає, що кожна з пояснюючих змінних мультиколінеарна з іншими.

7. Визначимо частинні коефіцієнти кореляції r .

Частинні коефіцієнти кореляції показують тісноту зв'язку між двома пояснюючими змінними за умови, що всі інші змінні не впливають на цей зв'язок і обчислюються за формулою:

$$r_{kj.s} = \frac{-c_{kj}}{\sqrt{c_{kk}c_{jj}}}. \quad (8)$$

$$r_{12.3} = \frac{7,3760}{\sqrt{10,6712 * 9,3929}} = 0,7367 ;$$

$$r_{13.2} = \frac{3,0546}{\sqrt{10,6712 * 5,1690}} = 0,4113 ;$$

$$r_{23.1} = \frac{1,6502}{\sqrt{9,3929 * 5,1690}} = 0,2368 .$$

Отже, спираючись на здобуті нами значення окремих (частинних) коефіцієнтів кореляції, можна сказати, що зв'язок між фондівдачею та продуктивністю праці є тісним, якщо не враховувати вплив питомих інвестицій, зв'язок між фондівдачею та питомими інвестиціями є слабким, якщо не брати до уваги вплив продуктивності праці. Зв'язок між продуктивністю праці та питомими інвестиціями також є слабким, якщо не враховувати фондівдачу.

8. Визначимо t – критерій.

Ці критерії застосовуються для визначення мультиколінеарності двох пояснюючих змінних і обчислюються за формулою:

$$t_{kj} = \frac{(r_{kj.s} \sqrt{n-m})}{(\sqrt{1-r_{kj.s}^2})}. \quad (9)$$

$$t_{12} = \frac{(0,7367 * \sqrt{20-3})}{(\sqrt{1-(0,7367)^2})} = 4,4956 ;$$

$$t_{13} = \frac{(0,4113 * \sqrt{20-3})}{(\sqrt{1-(0,4113)^2})} = 1,8581 ;$$

$$t_{23} = \frac{(0,2368 * \sqrt{20-3})}{(\sqrt{1-(0,2368)^2})} = 1,0051 .$$

Обчислені t –критерії порівнюються з табличним значенням ($t = 1,740$), коли маємо $n - m = 17$ ступенів свободи та при рівні значущості $\alpha = 0,05$.

Оскільки $t_{12} > t_{кр}$, то продуктивність праці та фондівіддача є відповідно мультиколінеарними між собою;

$t_{13} > t_{кр}$, тому відповідно продуктивність праці та питомі інвестиції є мультиколінеарними між собою;

$t_{23} < t_{кр}$, тому продуктивність праці та питомі інвестиції не є мультиколінеарними між собою.

9. Визначити залежність оцінок параметрів економетричної моделі і коефіцієнтів парної кореляції за алгоритмом покрокової регресії (на оцінку «відмінно»).

Висновки: Дослідження, проведені за алгоритмом Фаррара-Глобера показали, що мультиколінеарність між пояснюючими змінними даного прикладу існує. Отже, для того, щоб можна було застосувати метод 1МНК для оцінювання параметрів моделі за цією інформацією, необхідно в першу чергу звільнитися від мультиколінеарності.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 4.

Багатовимірний статистичний аналіз в агрономії

Кластеризація. Базові алгоритми кластеризації

Мета роботи: Отримання навичок практичного застосування методів кластерного аналізу.

Література

<https://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.cluster.KMeans.html>

<http://pypr.sourceforge.net/kmeans.html#k-means-example>

Scipy.org : <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/cluster.hierarchy.html>

Hierarchical clustering https://en.wikipedia.org/wiki/Hierarchical_clustering

KMeans: [https://scikit-](https://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.cluster.KMeans.html)

[learn.org/stable/modules/generated/sklearn.cluster.KMeans.html](https://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.cluster.KMeans.html)

Зміст роботи

Завдання 1. Ретельно опрацювати теоретичні відомості:

- ознайомитися з алгоритмом K- Means;
- ознайомитися з різними мірами відстаней;
- розібрати приклад;

Завдання 2. За допомогою алгоритму K-means розбити заданий набір даних на кластери.

Розібрати приклад 1;

Згенерувати масив даних для проведення кластеризації;

Варіант	Кількість точок	Кількість кластерів
1, 6, 11	2500	12
2, 7, 12	1300	10
3, 8, 13	2100	25
4, 9, 14	3500	17
5, 10, 15	3600	8

Вибрати різне число кластерів випадково;

Для визначення кількості кластерів застосувати метод «ліктя»

Завдання 3. Провести кластерний аналіз заданого набору даних:

Варіант	Вхідні дані
1, 6, 11	[7,8],[2,2],[7,9],[6,5],[3,7],[7,5],[7,5],[2,8],[3,6],[8,6]
2, 7, 12	[1,8],[2,8],[17,9],[6,15],[13,7],[7,15],[8,5],[7,28],[3,16],[18,6]
3, 8, 13	[7,25],[12,2],[7,19],[26,15],[13,17],[7,5],[27,15],[12,8],[13,26],[28,16]
4, 9, 14	[4,8],[23,22],[17,29],[16,5],[13,17],[27,35],[27,25],[12,28],[23,6],[18,6]
5, 10, 15	[7,14],[32,2],[17,29],[16,15],[13,27],[17,25],[11,15],[32,18],[23,6],[13,4]

Розібрати приклад 2;

Побудуйте дендрограму;

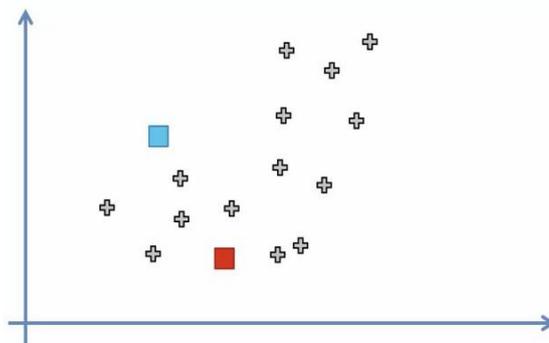
Методичні рекомендації

Кластеризація (або кластерний аналіз) - це задача розбиття множини об'єктів на групи, які називаються кластерами. У середині кожної групи повинні виявитися «схожі» об'єкти, а об'єкти різних групи повинні бути якомога більш відмінні. Головна відмінність кластеризації від класифікації полягає в тому, що перелік груп чітко не заданий і визначається в процесі роботи алгоритму.

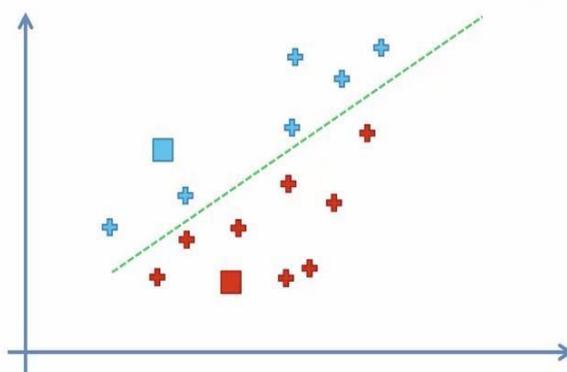
K- Means (MacQueen, 1967) - один з найпростіших алгоритмів навчання без контролю, який вирішує добре відому проблему кластеризації. Це простий спосіб класифікації заданого набору даних через певну кількість кластерів (наприклад, k). Основна ідея полягає в тому, щоб визначити k центроїдів, по одному для кожного кластера. Кращий вибір центроїда - розмістити їх якомога далі один від одного.

Алгоритм складається з наступних кроків:

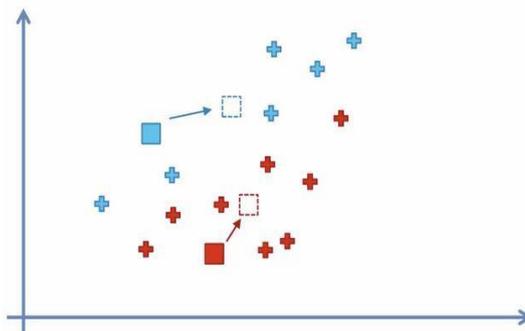
Виберіть K (на прикладі 2) випадкових точок як центри кластерів, що називаються центроїдами:



Згрупуйте точки даних до найближчого кластера, обчисливши їх відстань відносно кожного центроїда:



Визначте новий центр кластера, обчисливши середнє значення точок:



Повторіть кроки 2 і 3 до того моменту, поки не досягнемо критерія збіжності:

Цей алгоритм спрямований на мінімізацію цільової функції, в даному випадку квадрат функції помилок. Цільова функція:

$$J = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n \|x_i^j - \mu_j\|^2,$$

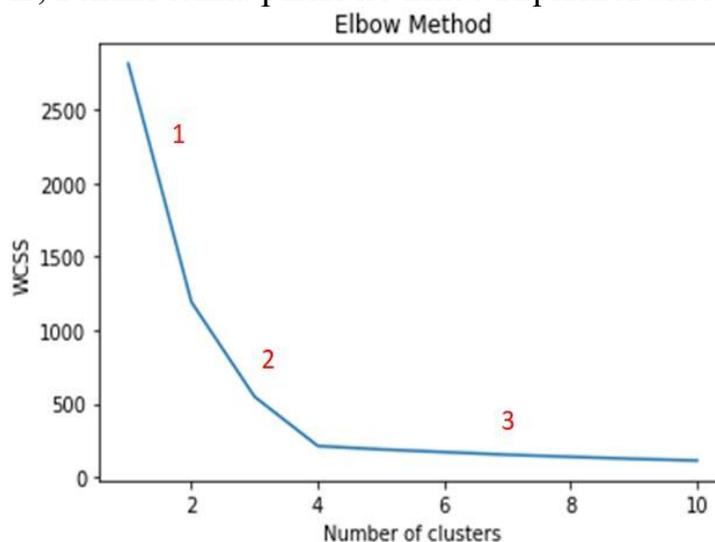
де $\|x_i^j - \mu_j\|^2$ обрана міра відстані між точкою даних x_i^j і центром кластера μ_j , є показником відстані n точок даних від їх відповідних центрів кластера.

Алгоритм k-Means не завжди знаходить найбільш оптимальну конфігурацію, відповідну мінімуму глобальної цільової функції. Алгоритм також істотно чутливий до початкового випадково вибраного кластерного центра.

Як вибрати потрібну кількість кластерів?

Часто дані матимуть декілька вимірів, що ускладнює їх візуалізацію і як наслідок, кількість кластерів вже не очевидна. Є спосіб визначити це математично.

Необхідно побудувати графік залежності між кількістю кластерів і сумою квадратів в кластері (Within Cluster Sum of Squares,WCSS), а потім вибрати кількість кластерів, в яких зміна рівня починає вирівнюватися (метод ліктя).



WCSS визначається як сума квадратів відстані між кожним членом кластера і його центроїдом.

$$WCSS = \sum_{i=1}^n (x_i^j - \mu_j)^2,$$

де μ_j - центр кластера, j – номер кластера

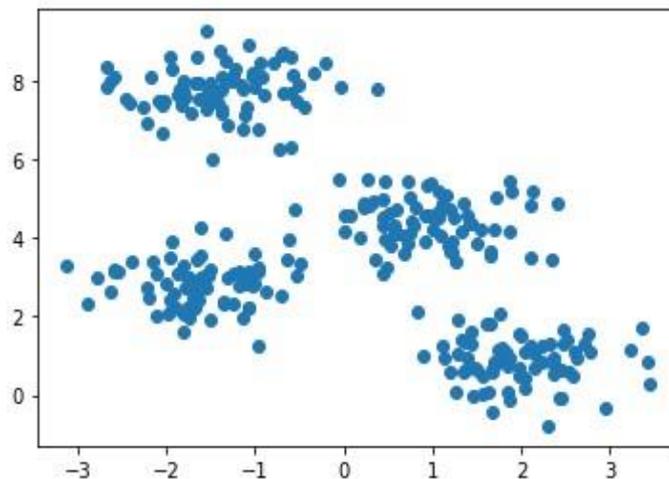
Приклад 1:

Як завжди, потрібно почати з імпорту потрібних бібліотек.

```
import numpy as np
import pandas as pd
from matplotlib import pyplot as plt
from sklearn.datasets.samples_generator import make_blobs
from sklearn.cluster import KMeans
```

Генеруємо дані за допомогою функції `make_blobs` з модуля `sklearn.datasets`. Параметр `centers` вказує кількість кластерів.

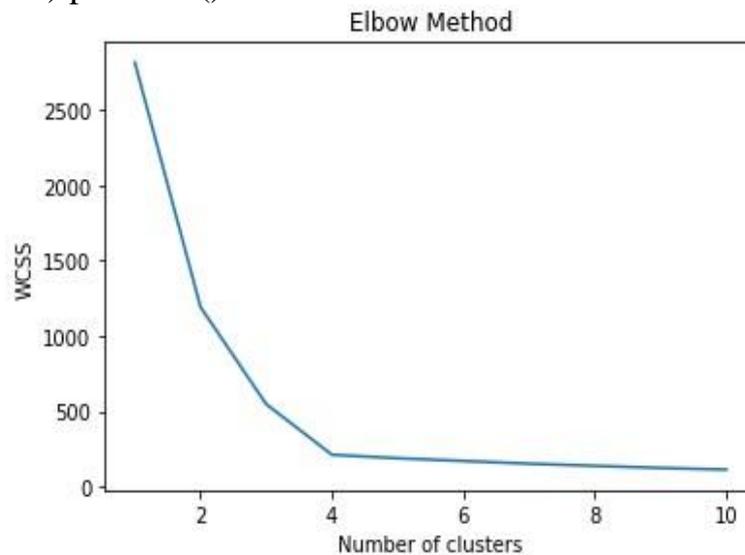
```
X,y=make_blobs(n_samples=300, centers=4, cluster_std=0.60,
random_state=0)
plt.scatter(X[:,0], X[:,1])
```



Незважаючи на те, що відома кількість кластерів, перевіримо визначення кількості кластерів методом «ліктя». `wcss = []`

`for i in range(1, 11):`

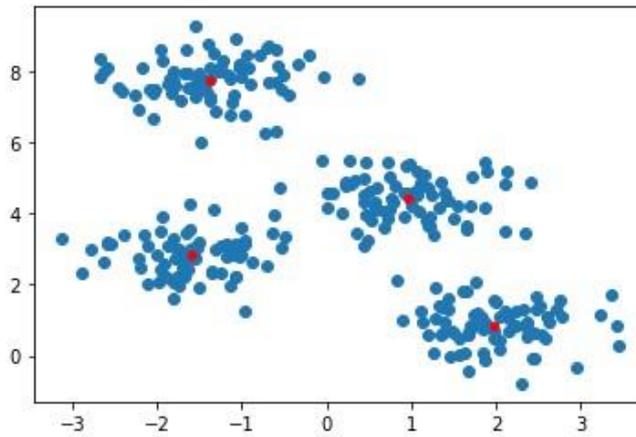
`kmeans = KMeans(n_clusters=i, init='kmeans++', max_iter=300, n_init=10, random_state=0)`
`kmeans.fit(X)`
`wcss.append(kmeans.inertia_)`
`plt.plot(range(1, 11), wcss)`
`plt.title('Elbow Method')`
`plt.xlabel('Number of clusters')`
`plt.ylabel('WCSS')`
`plt.show()`



Далі проводимо класифікацію, використовуючи оптимальну кількість кластерів (4), яку визначили на попередньому кроці.

`kmeans = KMeans(n_clusters=4, init='kmeans++', max_iter=300, n_init=10, random_state=0)`
`pred_y = kmeans.fit_predict(X)`

`plt.scatter(X[:,0], X[:,1])`
`plt.scatter(kmeans.cluster_centers_[:, 0], kmeans.cluster_centers_[:, 1], s=300, c='red')`
`plt.show()`



На даний час існує багато варіацій цього методу, що частково усувають недоліки, середніх: K-Medoids, K-Medians, K-Modes, K-means++, Intelligent K-Means, Genetic K-Means.

Приклад 2

Для відображення масиву даних знадобляться наступні бібліотеки:

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
import numpy as np
```

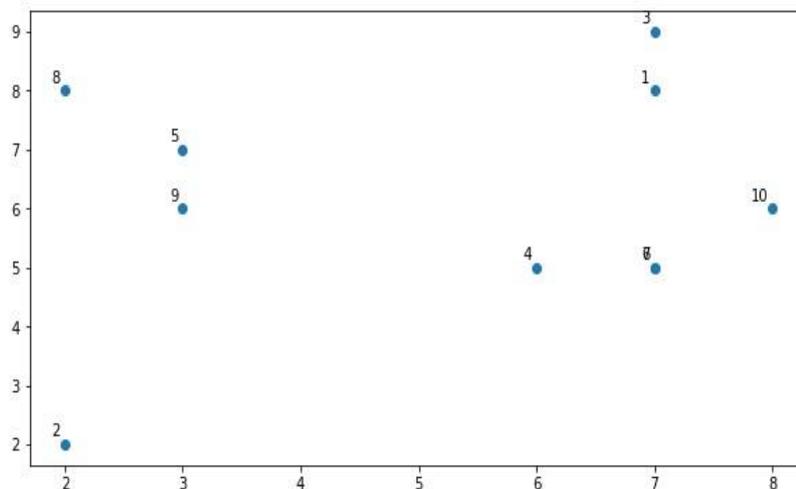
Побудуємо на координатній площині задані точки:

```
X=np.array([[7,8],[2,2],[7,9],[6,5],[3,7],[7,5],[7,5],[2,8],[3,6],[8,6,]) labels =
range(1, 11) plt.figure(figsize = (10, 5)) plt.subplots_adjust(bottom = 0.1)
plt.scatter(X[:,0],X[:,1], label = 'True Position')
```

```
for label, x, y in zip(labels, X[:, 0], X[:, 1]):
```

```
    plt.annotate(    label,xy = (x, y), xytext = (-
3, 3),textcoords = 'offset points', ha = 'right', va = 'bottom') plt.show()
```

Результат:

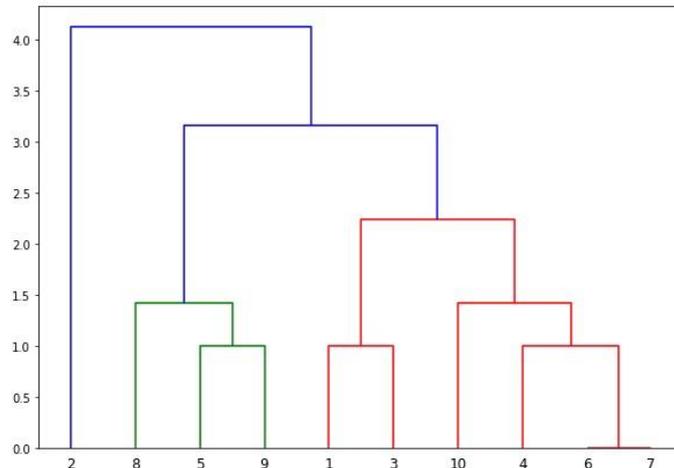


На діаграмі можна побачити 3 або 4 кластери, але у реальних даних може бути тисячі кластерів. Далі потрібно будувати дендрограми точок даних за допомогою бібліотеки Scipy

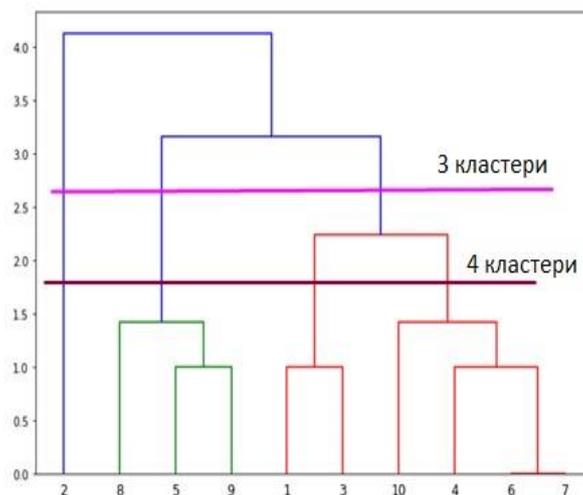
```
from scipy.cluster.hierarchy import dendrogram, linkage from matplotlib
import pyplot as plt
```

```
linked = linkage(X, 'single') labelList = range(1, 11) plt.figure(figsize = (10, 7))
dendrogram(linked, orientation = 'top', labels = labelList, distance_sort
='descending', show_leaf_counts = True) plt.show()
```

Результат:



Тепер, коли сформовано кластер, вибираємо найдовшу вертикальну відстань. Потім через неї проводимо лінію, як показано на наступному малюнку.

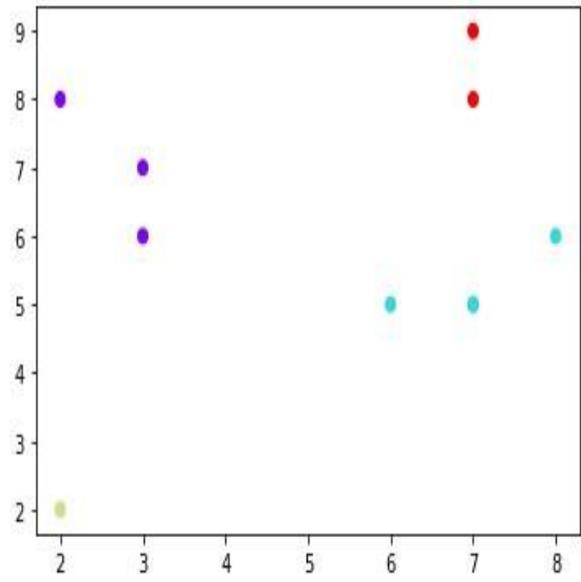
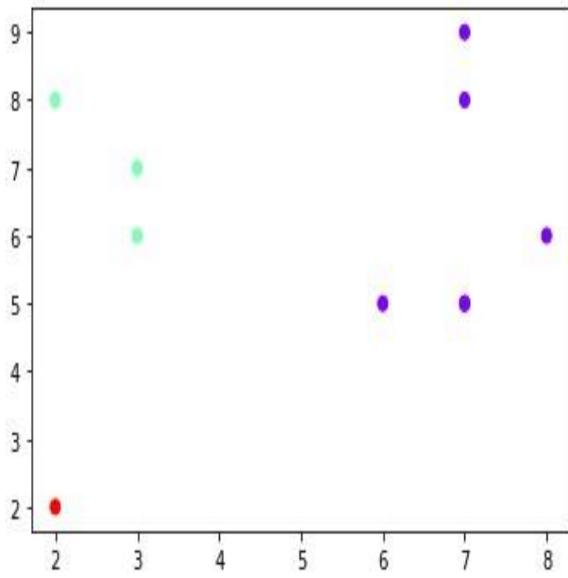


Оскільки горизонтальну лінію можна провести 2 способами, то розглянемо 2 варіанта рішення.

Далі потрібно імпортувати клас для кластеризації і викликати його метод `fit_predict` для прогнозування кластера. Імпортуємо клас `AgglomerativeClustering` бібліотеки `sklearn.cluster` –

```
from sklearn.cluster import AgglomerativeClustering cluster =
AgglomerativeClustering(n_clusters = 3, affinity = 'euclidean', linkage = 'ward')
cluster.fit_predict(X)
```

Потім побудуйте кластер за допомогою наступного коду - `plt.scatter(X[:,0],X[:,1], c = cluster.labels_, cmap = 'rainbow')` Результат:



На першому рисунку представлено 3 кластера на другому 4.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 5.

Графічна інтерпретація задачі лінійного програмування

Графічний метод розв'язання задач лінійного програмування

1. Приклади виконання задач.

Умова задачі.

Для вирощування двох сільськогосподарських культур господарство може виділити 60 га ріллі, 1890 людино-годин та 240ц діючої речовини добрив. Планується цю площу відвести під ячмінь та соняшник.

Відомі затрати праці, затрати добрив та прибуток в розрахунку на 1 га.

Культура	Затрати праці на 1га, людино-годин	Затрати добрив на 1 га, ц.д.р.	Прибуток з 1 га, грн.
Ячмінь	26	2,5	200
Соняшник	31,5	4,8	250

Визначити, які площі слід відвести під кожну культуру, щоб отримати максимальний прибуток.

Рішення.

Розробимо економіко-математичну модель задачі:

X_1 - площа ячменю;

X_2 - площа соняшнику.

Цільова функція (максимальний прибуток) має вигляд:

$$F = 200X_1 + 250X_2 \rightarrow \max$$

Обмеження задачі:

1-ше обмеження характеризує використання площі ріллі

$$X_1 + X_2 \leq 60$$

2-ге обмеження стосується використання затрат праці

$$26X_1 + 31,5X_2 \leq 1890$$

3-тє обмеження описує використання добрив

$$2,5X_1 + 4,8X_2 \leq 240$$

В задачі слід врахувати умову невід'ємності змінних: X_1 та $X_2 \geq 0$

Обмеження задачі запишемо у вигляді системи рівнянь:

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = 60 \\ 26X_1 + 31,5X_2 = 1890 \\ 2,5X_1 + 4,8X_2 = 240 \end{cases}$$

На системі координат намалюємо відповідні прямі:

I. $X_1=0, X_2=60; X_2=0, X_1=60$

II. $X_1=0, X_2=1890/31,5=60; X_2=0, X_1=1890/26=72,7$

III. $X_1=0, X_2=240/4,8=50; X_2=0, X_1=240/2,5=96$

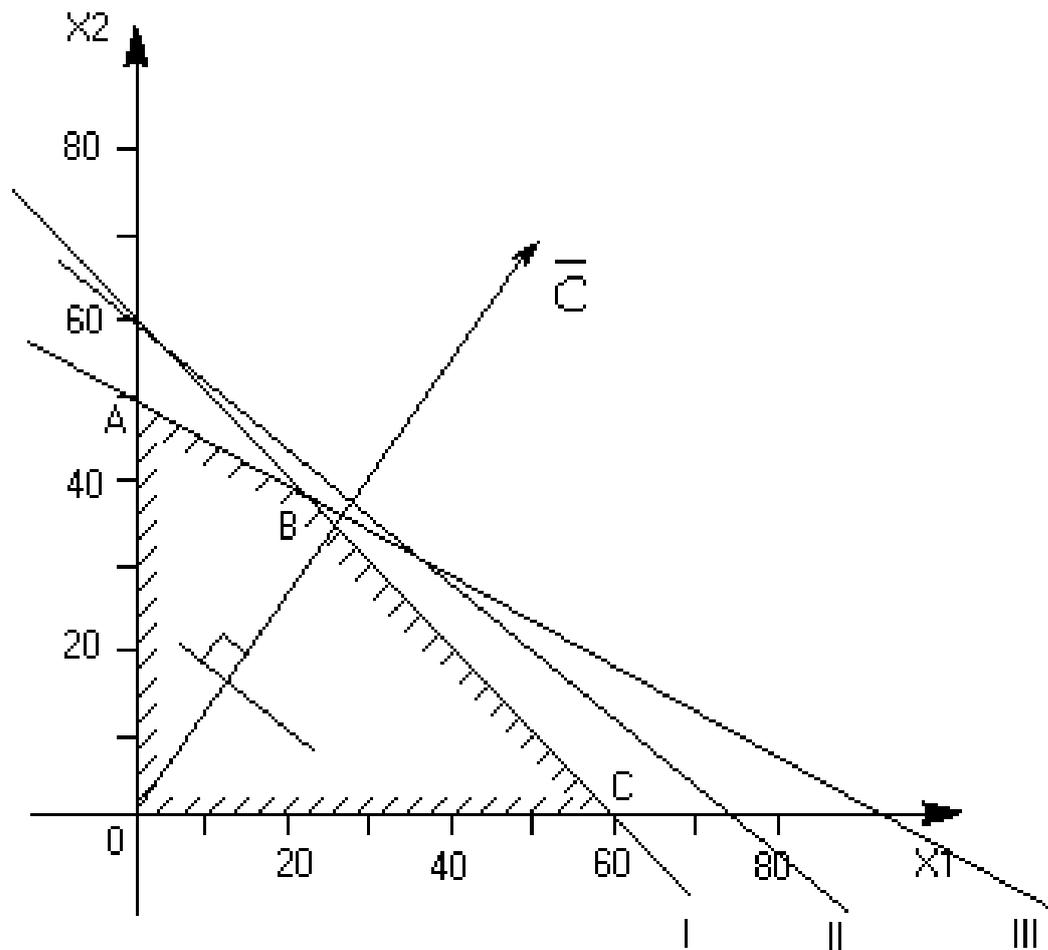


Рис. 1. Побудова області допустимих значень задачі

Кожна пряма розділила площину на дві напівплощини. Координати точок однієї з напівплощин задовольняє умову відповідної нерівності (всі точки цієї напівплощини, підставлені в нерівність не заперечують знаку), другої – ні. Щоб визначити напівплощину рішень, необхідно взяти будь-яку точку, яка належить до однієї з напівплощ, та перевірити, чи задовольняють її координати даній нерівності. Якщо координати взятої точки задовольняють умову відповідної нерівності, то напівплощина, якій належить точка, є напівплощиною рішень; інакше – друга напівплощина.

Знайдемо, наприклад, напівплощину рішень, яка визначається нерівністю $X_1 + X_2 \leq 60$. Для цього, побудувавши пряму $X_1 + X_2 = 60$ (на рис.1 вона I), візьмемо будь-яку точку, яка належить одній з напівплощ, наприклад точку $O(0;0)$. Координати цієї точки задовольняють нерівності $0+0 \leq 60$; значить,

напівплощина, якій належить точка $O(0;0)$, визначається нерівністю $X_1+X_2\leq 60$, що показано стрілками на рис.1.

Перехрещення всіх отриманих напівплощ рішень визначає багатокутник рішень задачі (область можливих значень). Точки цієї області задовольняють всім обмеженням задачі.

$OABC$ - багатокутник рішень.

Необхідно знайти точку, яка належить чотирикутнику $OABC$, в якій цільова функція F приймає максимальне значення. Для цього будується вектор \vec{C} (200;250), координатами якого є коефіцієнти в цільовій функції при відповідних змінних, та до нього проводиться перпендикуляр.

Переміщуємо перпендикуляр за напрямом, який вказує вектор:

- в першій точці дотику перпендикуляра з багатокутником рішень буде точка *min*;

- в останній точці дотику з багатокутником рішень буде точка *max*.

Отже в точці B цільова функція має максимальне значення.

Щоб визначити точні координати точки B , необхідно розв'язати систему з двох рівнянь, лінії яких утворили цю точку. Точка B лежить на перетині першої та третьої ліній, тому беруться саме перше та третє рівняння.

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = 60 \\ 2,5X_1 + 4,8X_2 = 240 \end{cases}$$

З першого рівняння вираз $X_2=60-X_1$ та підставимо в друге рівняння:

$$2,5X_1+4,8(60-X_1)=240$$

$$2,5X_1+288-4,8X_1=240$$

$$2,3X_1=48$$

$$X_1=20,87$$

$$X_2=60-20,87=39,13$$

Таким чином точка $B(20.87;39.13)$ - точка *max*, в якій значення цільової функції дорівнює:

$$F = 200 \cdot 20,87 + 250 \cdot 39,13 = 13956,5$$

Щоб господарству отримати максимальний прибуток в розмірі 13956,5 грн., необхідно посіяти 20,87 га ячменю та 39,13 га соняшнику.

2. Практичні завдання

Задача.

Умова задачі.

Для вирощування двох сільськогосподарських культур господарство може виділити 60 га ріллі, 1890 людино-годин та 240ц діючої речовини добрив.

Визначити площу посіву кожної культури, яка максимізує прибуток.

Розробити економіко-математичну модель та розв'язати задачу.

Вихідні дані взяти згідно варіанту у таб. 1.

Таблиця 1

Варіант	Культури	Показники		
		затрати праці на 1га, людино-годин	затрати добрив на 1га,ц діючої речовини	прибуток з 1га, грн.
1	Озима пшениця	24,1	3,7	162,5
	Ячмінь	18,6	3,1	110,8
2	Озима пшениця	24,7	3,4	136,0
	Цукровий буряк	152,4	6,8	412,6
3	Озима пшениця	25,4	3,9	129,6
	Ячмінь	20,2	3,0	122,5
4	Озиме жито	24,1	3,2	115,6
	Цукровий буряк	173,2	5,1	360,2
5	Яра пшениця	29,2	3,3	151,2
	Ячмінь	17,4	2,6	110,5
6	Ячмінь	30,9	3,3	124,4
	Цукровий буряк	186,8	6,8	372,0
7	Озима пшениця	27,2	3,2	151,2
	Ячмінь	29,3	3,9	117,5
8	Озима пшениця	26,4	4,1	106,9
	Цукровий буряк	149,2	5,7	321,6
9	Озима пшениця	29,6	4,4	105,6
	Ячмінь	26,5	3,1	75,9
10	Просо	26,8	3,8	106,1
	Цукровий буряк	120,6	6,9	513,2
11	Озима пшениця	24,6	3,7	114,4
	Цукровий буряк	174,8	7,1	312,6
12	Овес	28,0	3,8	108,1
	Ячмінь	27,3	3,9	114,0
13	Озима пшениця	25,5	3,6	109,4
	Цукровий буряк	148,6	5,5	505,2
14	Ячмінь	26,8	3,3	126,4
	Цукровий буряк	148,5	6,2	231,1
15	Озима пшениця	28,0	4,0	122,5
	Ячмінь	28,0	3,9	108,0
16	Озиме жито	27,4	3,7	160,1
	Цукровий буряк	132,6	6,4	249,2

Варіант	Культури	Показники		
		затрати праці на 1га, людино-годин	затрати добрив на 1га,ц діючої речовини	прибуток з 1га, грн.
17	Озима пшениця	26,8	4,1	151,2
	Цукровий буряк	161,4	6,2	324,0
18	Озима пшениця	26,1	3,7	124,2
	Ячмінь	18,2	2,8	96,3
19	Ячмінь	28,9	3,2	162,0
	Цукровий буряк	124,6	6,1	280,0
20	Озима пшениця	23,9	4,3	137,1
	Цукровий буряк	128,4	5,6	318,2
21	Озима пшениця	26,0	3,3	153,6
	Ячмінь	19,1	2,8	128,0
22	Ячмінь	22,2	2,3	176,4
	Цукровий буряк	133,2	5,5	399,0
23	Просо	25,1	3,2	161,6
	Цукровий буряк	143,4	6,8	400,8
24	Озима пшениця	29,1	3,5	149,4
	Ячмінь	16,0	2,9	110,0
25	Озима пшениця	26,7	3,3	196,1
	Цукровий буряк	160,4	5,8	466,2
26	Кукурудза	23,2	4,2	151,8
	Цукровий буряк	126,4	6,3	151,8
27	Озима пшениця	21,6	3,6	171,9
	Ячмінь	16,4	2,9	148,0
28	Ячмінь	25,1	3,2	153,5
	Цукровий буряк	143,6	7,1	400,2
29	Кукурудза	22,1	5,1	130,6
	Цукровий буряк	123,3	6,6	380,0
30	Озима пшениця	24,0	3,5	145,8
	Ячмінь	19,0	3,0	102,0

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 6.

Ставлення і розв'язування транспортної задачі та її використання в агрономії

Загальна постановка задачі.

З деяких пунктів відправлення (постачальники) треба перевезти вантаж в ряд пунктів призначення (споживачі). Відомо, скільки вантажу маємо в кожному пункті відправлення і скільки потребується його в кожному пункті призначення. Відомі також витрати доставки одиниці вантажу від постачальника до споживача або відстань між пунктами перевезень. Необхідно визначити, яку кількість вантажу повинен направити постачальник тому або іншому споживачу, щоб спільні витрати на його транспортування (загальна кількість тоно-кілометрів) були мінімальними.

Для запису моделі транспортної задачі приймемо такі позначення:

a_i – наявність вантажу у постачальників A_1, A_2, \dots, A_m ($i = 1, 2, 3, \dots, m$);

b_j – кількість вантажу, необхідне споживачу B_1, B_2, \dots, B_h ($j = 1, 2, 3, \dots, h$);

X_{ij} – кількість вантажу, перевезеного від i -го постачальника до j -го споживача;

C_{ij} – вартість перевезення одиниці вантажу від i -го постачальника до j -го споживача або відстань між пунктами перевезення.

Задача зводиться до того, щоб відшукати невід'ємні значення X_{ij} , при яких цільова функція $F(X)$ прийме мінімальне значення.

$$F(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^h C_{ij} * X_{ij} \rightarrow \min$$

За умовою:

1) $\sum_{j=1}^h X_{ij} = A_i$ (кількість вантажу, призначеного для доставки від i -го постачальника всім споживачам, дорівнює запасу вантажу у цього постачальника).

2) $\sum_{i=1}^m X_{ij} = B_j$ (кількість вантажу, призначеного для B_j -го споживача, завезеного від будь якого постачальника, дорівнює потребі у вантажу цього пункту призначення).

Рішення транспортної задачі можливо тільки при дотриманості рівності загальних запасів та потреб. Така модель задачі називається закритою.

$$\sum_{i=1}^m A_i = \sum_{j=1}^h B_j$$

Якщо баланс ресурсів не дотримується, то модель називається відкритою.

$$\sum_{i=1}^m A_i \neq \sum_{j=1}^h B_j$$

В такому випадку задачу спочатку треба привести до закритого виду шляхом введення в таблицю рядка фіктивного постачальника або стовпчика фіктивного споживача.

В загальному вигляді матрицю транспортної задачі можна представити в такому вигляді:

Транспортна задача в табличному виді

Постачальники	Споживачі					Наявність вантажу
	B_1	B_2	B_3	...	B_h	
A_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	C_{13} X_{13}	...	C_{1h} X_{1h}	a_1
A_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	C_{23} X_{23}	...	C_{2h} X_{2h}	a_2
A_3	C_{31} X_{31}	C_{32} X_{32}	C_{33} X_{33}	...	C_{3h} X_{3h}	a_3
...
A_m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	C_{m3} X_{m3}	...	C_{mh} X_{mh}	a_m
Потреба у вантажу	b_1	B_2	b_3	...	b_h	$\sum b_j = \sum a_i$

Для оволодіння методикою відшукування оптимального рішення розглянемо приклад.

Умова задачі.

В пунктах відправлення A_1, A_2, A_3, \dots знаходиться однорідний вантаж в кількості a_1, a_2, a_3, \dots відповідно, який необхідно перевезти в пункти

призначення V_1, V_2, V_3, \dots , потреба кожного з яких становить b_1, b_2, b_3, \dots .
Відома відстань між пунктами перевезень (оцінки).

Визначити такий план перевезень, при якому загальна кількість тоно-кілометрів буде мінімальною.

Приклад розв'язання транспортної задачі.

Умова задачі.

В пунктах відправлення A_1, A_2, A_3, \dots знаходиться однорідний вантаж в кількості a_1, a_2, a_3, \dots відповідно, який необхідно перевезти в пункти призначення V_1, V_2, V_3, \dots , потреба кожного з яких становить b_1, b_2, b_3, \dots .
Відома відстань між пунктами перевезень (оцінки).

Маємо три постачальника з такими запасами вантажу:

$$A_1 = 26 \text{ т}, A_2 = 33 \text{ т}, A_3 = 45 \text{ т};$$

і чотири споживача з потребою на цей вантаж:

$$V_1 = 14 \text{ т}, V_2 = 19 \text{ т}, V_3 = 20 \text{ т}, V_4 = 5 \text{ т}.$$

Відома відстань між пунктами перевезень.

Відстань між пунктами перевезень, км (C_{ij}).

Постачальники	Споживачі			
	V_1	V_2	V_3	V_4
A_1	6	4	15	19
A_2	13	17	28	3
A_3	5	20	6	10

Необхідно знайти кількість вантажу, який повинен отримати кожен споживач від того або іншого постачальника, щоб загальна кількість тонно-кілометрів була мінімальною.

Рішення.

Рішення транспортної задачі лінійного програмування здійснюється в таблицях. Перша таблиця (опорний план) може бути заповнена декількома методами:

1. метод північно-західного кута;
2. метод найменшої вартості;
3. метод подвійної переваги.

Задача, в якій загальні запаси дорівнюють загальним потребам називається закритою транспортною задачею:

$$\text{- загальні запаси} = 26 + 33 + 45 = 104 \text{ т};$$

$$\text{- загальні потреби} = 14 + 19 + 20 + 5 = 58 \text{ т}.$$

Отже задача відкрита, тому необхідно ввести фіктивного споживача, якому слід перевезти $V_{\text{фікт}} = 104 - 58 = 46 \text{ т}$.

Клітини з фіктивним споживачем (постачальником) заповнюються в останню чергу, порушення умови оптимальності в цих клітинах розглядається

лише після того, як в основних клітинах порушення умови оптимальності не спостерігається.

Першу транспортну таблицю заповнимо методом північно-західного кута: першою заповнюється верхня ліва клітина X_{11} , в яку заноситься або всі запаси A_1 , або вся потреба B_1 в залежності від того, що менше. На кожному наступному кроці розглядається перший з тих, що залишилися, пункт призначення або пункт відправлення:

- якщо це пункт призначення, то потреба його визначається за правилом: $X_{ij} = a_i$ - вивезений вантаж з A_i ;

- якщо це пункт відправлення, то запаси його визначається за правилом: $X_{ij} = b_j$ - завезений вантаж в B_j .

Так заповнюються всі клітини таблиці з X_{11} по X_{mh} (це заповнення має вигляд східців по діагоналі таблиці).

В клітину X_{11} записуємо 14 і відповідно покривається вся потреба першого споживача за рахунок першого постачальника, в якого залишається вантаж в кількості: $26-14=12$ тон, який можна відвезти в другий пункт призначення. Тимчасово не розглядається стовпець B_1 . Потреба другого пункту споживання B_2 становить 19тон, а за рахунок першого постачальника A_1 можна завести лише 12тон, 7тон завозиться з другого пункту відправлення. Тимчасово не розглядається рядок A_1 . В постачальника A_2 було 33тони, з яких 7тон перевозиться в пункт споживання B_2 , 20тон в пункт споживання B_3 та 1тонна в фіктивний пункт споживання $B_{\text{фікт}}$. Потреба фіктивного пункту споживання покривається за рахунок другого та третього постачальника.

Постачальники	Споживачі					Запаси	Потенціали, U_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_{\text{фікт}}$		
A_1	6 14	4 12	15	19	0	26	0
A_2	13	17 7	28 20	3 5	0 1	33	13
A_3	5	20	6 **	10	0 45	45	13
Потреба	14	19	20	5	46	104	
Потенціали V_j	6	4	15	-10	-13		

При такому плані перевезень загальна кількість тонно-кілометрів буде становити:

$$F_{\min} = 14 \cdot 6 + 12 \cdot 4 + 7 \cdot 17 + 20 \cdot 28 + 5 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 45 \cdot 0 = 826 \text{ т-км.}$$

За допомогою методу потенціалів можна визначити оптимальний план транспортної задачі. Задача має оптимальне значення, коли сума потенціалів в усіх клітинах таблиці не перевищує оцінок, тобто при рішенні задачі на мінімум план вважається оптимальним в тому випадку, якщо для всіх вільних клітинок дотримується вимога: $U_i + V_j \leq C_{ij}$, а для зайнятих $U_i + V_j = C_{ij}$.

Для перевірки плану на оптимальність використовують систему оцінок (потенціалів) рядків і стовпчиків, що розраховуються за правилом: для будь-якої заповненої клітинки сума потенціалів відповідного рядка і стовпчика повинна дорівнюватися оцінці (вартість перевезення одиниці вантажу або відстань) цієї клітини.

$$U_i + V_j = C_{ij}$$

де: C_{ij} - оцінка клітинки;

i - рядки ($i = 1, 2, \dots, m$),

j - стовпчики ($j = 1, 2, \dots, h$)

U_i - оцінка i -го рядка ($i = 1, 2, \dots, m$)

V_j - оцінка j -го стовпця ($j = 1, 2, \dots, h$)

Тобто, якщо відомий потенціал U_i , то $V_j = C_{ij} - U_i$, а якщо відомий V_j , то $U_i = C_{ij} - V_j$. При цьому один з рядків або один з стовпчиків отримує довільну оцінку, а оцінки останніх рядків і стовпчиків треба розрахувати за вказаними формулами.

Нехай $U_1 = 0$, тоді потенціали першого та другого стовпчиків будуть становити:

$$V_1 = C_{11} - U_1 = 6 - 0 = 6 \quad \text{для } B_1$$

$$V_2 = C_{12} - U_1 = 4 - 0 = 4 \quad \text{для } B_2$$

Тепер можна визначити потенціал другого рядка:

$$U_2 = C_{22} - V_2 = 17 - 4 = 13$$

Визначимо потенціали для B_3 , B_4 і $B_{\text{фікт}}$:

$$V_3 = C_{23} - U_2 = 28 - 13 = 15 \quad \text{для } B_3$$

$$V_4 = C_{24} - U_2 = 3 - 13 = -10 \quad \text{для } B_4$$

$$V_5 = C_{25} - U_2 = 0 - 13 = -13 \quad \text{для } B_{\text{фікт}}$$

Тепер можна визначити потенціал A_3 :

$$U_3 = C_{35} - V_5 = 0 - (-13) = 13$$

В усіх зайнятих клітинах умова оптимальності виконується, а для вільних клітин виконуються розрахунки по перевірці плану на оптимальність :

$$\text{Для } X_{13} \text{ сума потенціалів } U_1 + V_3 = 0 + 15 = 15, \text{ що } \leq 15$$

Для X_{14} сума потенціалів $U_1 + V_4 = 0 + (-10) = -10$, що ≤ 19

Для X_{15} сума потенціалів $U_1 + V_5 = 0 + (-13) = -13$, що ≤ 0

Для X_{21} сума потенціалів $U_2 + V_1 = 13 + 6 = 19$, що > 13

Для X_{31} сума потенціалів $U_3 + V_1 = 13 + 6 = 19$, що > 5

Для X_{32} сума потенціалів $U_3 + V_2 = 13 + 4 = 17$, що ≤ 20

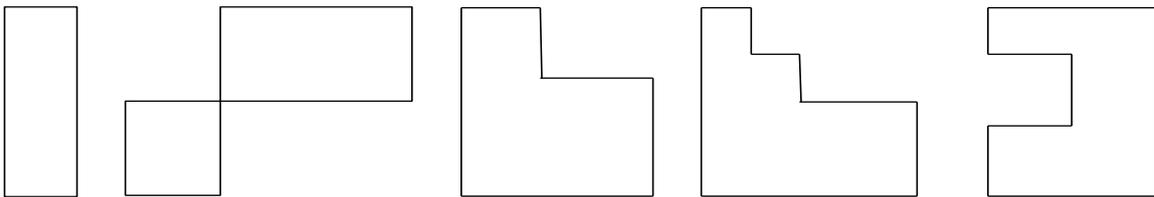
Для X_{33} сума потенціалів $U_3 + V_3 = 13 + 15 = 28$, що > 6

Для X_{34} сума потенціалів $U_3 + V_4 = 13 + (-10) = 3$, що ≤ 10

Отже, даний план перевезень не є оптимальним, тому що в клітинках X_{21} , X_{31} , X_{33} не виконується вимога $U_i + V_j \leq C_{ij}$. Необхідно перейти до наступного плану.

Для цього вибирається клітина, в якій сума потенціалів найбільш перевищує оцінку, це клітина X_{33} і вона називається клітиною перерахунку.

Починаючи з клітини перерахунку будується по зайнятим клітинам фігура перерахунку (замкнутий контур, вершини якого знаходяться в зайнятих клітинах), яка може мати вигляд (деякі варіанти фігури):



Клітини, які ввійшли до фігури перерахунку позначаються по черзі знаками “+”, “-”, “+”, “-”, ... , починаючи з клітини перерахунку.

Заповнюється нова транспортна таблиця:

- кількість вантажу в клітинах, які не ввійшли до фігури перерахунку переноситься в нову таблицю без змін;
- для клітин фігури перерахунку: кількість вантажу в клітинках зі знаком “+” збільшується, а в клітинках зі знаком “-” зменшується на одну і ту ж величину, а саме, на найменшу кількість вантажу у клітинках, позначених знаком “-”.

Виправлений таким чином план перевезень записується у відповідну таблицю і досліджується на оптимальність, як і попередній.

Постачальники	Споживачі					Запаси	Потенціали, U_i
	V_1	V_1	V_1	V_1	$V_{\text{фікт}}$		
A_1	6	4	15	19	0	26	0
	-14	+12					
A_2	13	17	28	3	0	33	13
		-7		5	+21		
A_3	5	20	6	10	0	45	13
	**		20		-25		
Потреба	14	19	20	5	46	104	
Потенціали U_j	6	4	-7	-10	-13		

При такому плані перевезень загальна кількість тонно-кілометрів буде становити:

$$F_{\min} = 14 \cdot 6 + 12 \cdot 4 + 7 \cdot 17 + 5 \cdot 3 + 21 \cdot 0 + 20 \cdot 6 + 25 \cdot 0 = 386 \text{ Т-км.}$$

Обчислимо потенціали за правилом, описаним вище, і перевіримо складений план на оптимальність.

Для вільних клітин зробимо розрахунки:

для X_{13} сума потенціалів $U_1 + V_3 = 0 + (-7) = -7$, що ≤ 15

для X_{14} сума потенціалів $U_1 + V_4 = 0 + (-10) = -10$, що ≤ 19

для X_{15} сума потенціалів $U_1 + V_5 = 0 + (-13) = -13$, що ≤ 0

для X_{21} сума потенціалів $U_2 + V_1 = 13 + 6 = 19$, що > 13

для X_{23} сума потенціалів $U_2 + V_3 = 13 + (-7) = 6$, що ≤ 28

для X_{31} сума потенціалів $U_3 + V_1 = 13 + 6 = 19$, що > 5

для X_{32} сума потенціалів $U_3 + V_2 = 13 + 4 = 17$, що ≤ 20

для X_{34} сума потенціалів $U_3 + V_4 = 13 + (-10) = 3$, що ≤ 10

Даний план перевезень не є оптимальним, тому що в клітинках X_{21} , X_{31} , не виконується умова оптимальності $U_i + V_j \leq C_{ij}$.

Вибирається клітина X_{31} , починаючи з неї будується фігура перерахунку.

Наступна транспортна таблиця має вигляд:

Постачальники	Споживачі					Запаси	Потенціал $U(i)$
	V_1	V_2	V_3	V_4	$V_{\text{фікт}}$		
A_1	6	4	15	19	0	26	0
	-7	19			**		
A_2	13	17	28	3	0	33	-1
			5		28		
A_3	5	20	6	10	0	45	-1
	+7		20		-18		
Потреба	14	19	20	5	46	104	
Потенціали, V_j	6	4	7	4	1		

При такому плані перевезень загальна кількість тонно-кілометрів буде становити:

$$F_{\min} = 7 \cdot 6 + 19 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 28 \cdot 0 + 7 \cdot 5 + 20 \cdot 6 + 18 \cdot 0 = 288 \text{ т-км.}$$

Обчислимо потенціали і для вільних клітин зробимо розрахунки по перевірці плану на оптимальність :

для X_{13} сума потенціалів $U_1 + V_3 = 0 + 7 = 7$, що ≤ 15

для X_{14} сума потенціалів $U_1 + V_4 = 0 + 4 = 4$, що ≤ 19

для X_{15} сума потенціалів $U_1 + V_5 = 0 + 1 = -1$, що > 0

для X_{21} сума потенціалів $U_2 + V_1 = -1 + 6 = 5$, що ≤ 13

для X_{22} сума потенціалів $U_2 + V_2 = -1 + 4 = 3$, що ≤ 17

для X_{23} сума потенціалів $U_2 + V_3 = -1 + 7 = 6$, що ≤ 28

для X_{32} сума потенціалів $U_3 + V_2 = -1 + 4 = 3$, що ≤ 20

для X_{34} сума потенціалів $U_3 + V_4 = -1 + 4 = 3$, що ≤ 10

Даний план перевезень не є оптимальним, тому що в клітинці X_{15} не дотримується вимога оптимальності $U_i + V_j \leq C_{ij}$. Побудуємо фігуру перерахунку та розрахуємо нову таблицю.

Малюємо фігуру перерахунку та розрахуємо нову таблицю.

Постачальники	Споживачі					Запаси	Потенціал U_i
	V_1	V_2	V_3	V_4	$V_{\text{фіктивний}}$		
A_1	6	4	15	19	0	26	0
		19			7		
A_2	13	17	28	3	0	33	0
			5		28		
A_3	5	20	6	10	0	45	0
	14		20		11		
Потреба	14	19	20	5	46	104	
Потенціал U_i, V_j	5	4	6	3	0		

При такому плані перевезень загальна кількість тонно-кілометрів буде становити:

$$F_{\min} = 7 \cdot 6 + 19 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 28 \cdot 0 + 7 \cdot 5 + 20 \cdot 6 + 18 \cdot 0 = 281 \text{ т.-км.}$$

Обчислимо потенціали та для вільних клітин зробимо розрахунки по перевірці плану на оптимальність :

$$\text{для } X_{11} \text{ сума потенціалів } U_1 + V_1 = 0 + 5 = 5, \text{ що } \leq 6$$

$$\text{для } X_{13} \text{ сума потенціалів } U_1 + V_3 = 0 + 6 = 6, \text{ що } \leq 15$$

$$\text{для } X_{14} \text{ сума потенціалів } U_1 + V_4 = 0 + 3 = 3, \text{ що } \leq 19$$

$$\text{для } X_{21} \text{ сума потенціалів } U_2 + V_1 = 0 + 5 = 5, \text{ що } \leq 13$$

$$\text{для } X_{22} \text{ сума потенціалів } U_2 + V_2 = 0 + 4 = 4, \text{ що } \leq 17$$

$$\text{для } X_{23} \text{ сума потенціалів } U_2 + V_3 = 0 + 6 = 6, \text{ що } \leq 28$$

$$\text{для } X_{32} \text{ сума потенціалів } U_3 + V_2 = 0 + 4 = 4, \text{ що } \leq 20$$

$$\text{для } X_{34} \text{ сума потенціалів } U_3 + V_4 = 0 + 3 = 3, \text{ що } \leq 10$$

Даний план перевезень є оптимальним, тому що в усіх клітинах таблиці виконується умова оптимальності.

При оптимальному плані перевезень загальна кількість тонно-кілометрів буде становити 281 т.-км.

Так, перевезення вантажу слід організувати таким чином:

- з пункту A_1 необхідно перевезти 19тон в пункт B_2 та 7тон в пункт $B_{\text{фікт}}$;
- з пункту A_2 необхідно перевезти 5тон в пункт B_4 та 28тон в пункт $B_{\text{фікт}}$;
- з пункту A_3 необхідно перевезти 14тон в пункт B_1 , 20тон в пункт B_3 та 11тон в пункт $B_{\text{фікт}}$.

Практичні завдання.

Вихідні дані згідно варіанту наведені в таблиці 3.

Вказівка: Скласти відповідну задачу математичного програмування, привести її до закритого типу та розв'язати методом потенціалів.

Таблиця 3

Варіант	Відстань між пунктами перевезень, км	Запаси пунктів відправлення, т	Потреба пунктів призначення, т
1	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 12 & 15 & 39 \\ 45 & 22 & 31 \\ 28 & 16 & 12 \\ 33 & 18 & 35 \end{vmatrix}$	$a_1=6$ $a_2=8$ $a_3=5$ $a_4=6$	$b_1=9$ $b_2=8$ $b_3=4$
2	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 12 & 15 & 39 \\ 45 & 22 & 31 \\ 28 & 16 & 12 \\ 33 & 18 & 35 \end{vmatrix}$	$a_1=60$ $a_2=85$ $a_3=52$ $a_4=66$	$b_1=92$ $b_2=81$ $b_3=43$

Варіант	Відстань між пунктами перевезень, км	Запаси пунктів відправлення, т	Потреба пунктів призначення, т
3	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 14 & 15 & 39 \\ 25 & 12 & 31 \\ 27 & 26 & 12 \\ 13 & 18 & 32 \end{vmatrix}$	$a_1=26$ $a_2=28$ $a_3=25$ $a_4=26$	$B_1=29$ $B_2=28$ $B_3=34$
4	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 11 & 33 & 12 \\ 35 & 22 & 31 \\ 28 & 16 & 12 \\ 13 & 18 & 32 \end{vmatrix}$	$a_1=56$ $a_2=58$ $a_3=55$ $a_4=56$	$B_1=69$ $B_2=68$ $B_3=44$
5	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 11 & 15 & 39 \\ 45 & 22 & 31 \\ 28 & 26 & 12 \\ 13 & 18 & 33 \end{vmatrix}$	$a_1=16$ $a_2=18$ $a_3=15$ $a_4=16$	$B_1=19$ $B_2=18$ $B_3=14$
6	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 10 & 15 & 22 \\ 16 & 20 & 11 \\ 18 & 16 & 33 \end{vmatrix}$	$a_1=50$ $a_2=85$ $a_3=52$	$B_1=62$ $B_2=81$ $B_3=43$
7	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 35 & 10 & 24 \\ 16 & 31 & 11 \\ 14 & 16 & 19 \end{vmatrix}$	$a_1=45$ $a_2=43$ $a_3=42$	$B_1=42$ $B_2=40$ $B_3=44$
8	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 10 & 15 & 22 \\ 32 & 16 & 11 \\ 19 & 23 & 17 \end{vmatrix}$	$a_1=15$ $a_2=18$ $a_3=15$	$B_1=20$ $B_2=18$ $B_3=10$
9	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 35 & 18 & 24 \\ 25 & 11 & 25 \\ 19 & 16 & 29 \end{vmatrix}$	$a_1=25$ $a_2=33$ $a_3=22$	$B_1=32$ $B_2=20$ $B_3=24$
10	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 12 & 18 & 24 \\ 25 & 23 & 25 \\ 29 & 16 & 19 \end{vmatrix}$	$a_1=25$ $a_2=31$ $a_3=27$	$B_1=33$ $B_2=20$ $B_3=34$
11	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 & 8 \\ 1 & 7 & 2 & 8 \\ 4 & 6 & 1 & 3 \end{vmatrix}$	$a_1=25$ $a_2=33$ $a_3=32$	$B_1=32$ $B_2=20$ $B_3=24$ $B_4=14$
12	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 9 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 4 & 8 \\ 5 & 2 & 6 & 9 \end{vmatrix}$	$a_1=55$ $a_2=63$ $a_3=72$	$B_1=32$ $B_2=60$ $B_3=54$ $B_4=54$
13	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 8 & 7 \\ 4 & 7 & 6 & 8 \\ 8 & 4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$	$a_1=15$ $a_2=13$ $a_3=12$	$B_1=12$ $B_2=10$ $B_3=14$ $B_4=54$
14	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 9 & 11 \\ 1 & 7 & 6 & 8 \\ 4 & 6 & 1 & 13 \end{vmatrix}$	$a_1=25$ $a_2=33$ $a_3=33$	$B_1=12$ $B_2=10$ $B_3=24$ $B_4=24$
15	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 & 10 \\ 5 & 2 & 6 & 8 \\ 9 & 6 & 1 & 3 \end{vmatrix}$	$a_1=53$ $a_2=40$ $a_3=35$	$B_1=33$ $B_2=30$ $B_3=31$ $B_4=34$

Варіант	Відстань між пунктами перевезень, км	Запаси пунктів відправлення, т	Потреба пунктів призначення, т
16	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 11 & 15 & 40 \\ 39 & 21 & 31 \\ 28 & 26 & 33 \\ 22 & 18 & 10 \end{vmatrix}$	$a_1=2$ $a_2=8$ $a_3=4$ $a_4=6$	$b_1=7$ $b_2=8$ $b_3=4$
17	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 12 & 15 & 28 \\ 45 & 22 & 31 \\ 10 & 36 & 12 \\ 33 & 18 & 10 \end{vmatrix}$	$a_1=16$ $a_2=11$ $a_3=15$ $a_4=16$	$b_1=19$ $b_2=18$ $b_3=24$
18	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 10 & 15 & 14 \\ 36 & 24 & 31 \\ 28 & 36 & 12 \\ 33 & 18 & 12 \end{vmatrix}$	$a_1=7$ $a_2=8$ $a_3=3$ $a_4=6$	$b_1=8$ $b_2=8$ $b_3=7$
19	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 10 & 15 & 39 \\ 33 & 20 & 31 \\ 28 & 19 & 12 \\ 22 & 18 & 12 \end{vmatrix}$	$a_1=60$ $a_2=85$ $a_3=52$ $a_4=66$	$b_1=22$ $b_2=21$ $b_3=33$
20	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 11 & 22 & 32 \\ 31 & 25 & 18 \\ 28 & 10 & 32 \\ 22 & 19 & 12 \end{vmatrix}$	$a_1=10$ $a_2=15$ $a_3=12$ $a_4=6$	$b_1=12$ $b_2=31$ $b_3=33$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 7.

Математичне моделювання виробничих процесів в агрономії

Завдання: Скласти економіко-математичну модель оптимізації структури посівних площ відповідно до індивідуального варіанту з табл. 7.

Загальна постановка задачі.

В сільському господарстві земля - основний засіб виробництва. Її необхідно використовувати з максимальним економічним ефектом, постійно дбаючи про родючість. Успішне рішення задачі раціонального використання землі багато в чому залежить від обґрунтованої структури посівних площ.

Оптимальна структура посівних площ являє собою відображення спеціалізації рослинництва у вигляді такого співвідношення посівних площ по культурах, яке забезпечує отримання максимальної кількості сільськогосподарської продукції.

Постановка задачі: виходячи з виробничих ресурсів (земельних, трудових, матеріальних, тощо) визначити оптимальну структуру посівних площ, яка забезпечить виконання плану продажу продукції по видах, внутрішні потреби господарства в продукції, агрономічні та сівозмінні вимоги при максимальному економічному ефекті.

В якості критерію оптимальності може бути:

- максимум отримання прибутку від виробництва;
- максимум виробництва валової та товарної продукції в грошовому виразі;
- максимум виробництва конкретної продукції (зерна, картоплі, тощо).

Для розробки економіко-математичної моделі необхідна така інформація:

- розмір площі ріллі, сінокосів, пасовищ;
- перелік сільськогосподарських культур, що вирощуються в даній кліматичній зоні, їх можлива врожайність;
- затрати праці та коштів на 1га посіву;
- виручка від реалізації продукції (з 1га або одиниці продукції);
- наявність виробничих ресурсів в господарстві, норми витрат їх на 1га;
- потреба тварин в кормах по видах;

- план продажу та внутрішня потреба господарства по видах продукції;
- агротехнічні вимоги та можливі межі входження окремої культури або групи культур в сівозміну.

Економіко-математичну модель можна представити в загальному виді.

Знайти максимум функції:

$$Z_{\max} = \sum_{j=1}^n C_j X_j$$

при обмеженнях:

- виробничі ресурси господарства обмежені:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} X_j \leq b_i;$$

- окремі культури та групи культур в сівозміну вводяться в обґрунтованих агротехнічних вимогах межах:

$$\overline{X1}_j \leq \sum_{j=1}^n X_j \leq X2_j ;$$

- дотримується співвідношення окремих культур (наприклад: для отримання збалансованих концентрованих кормів, страхові культури, ...):

$$\sum_{j=1}^l W_{ij} X_j - \sum_{j=l+1}^n W'_{ij} X_j \leq 0;$$

- обмеження, на отримання продукції даного виду не менше заданої кількості:

$$\sum_{j=1}^n U_{ij} X_j \geq P_i;$$

- при умові невід'ємності змінних:

$$X_j \geq 0; \overline{X}_j \geq 0;$$

де:

C_j - прибуток з 1га j -ї культури;

X_j - площа посіву j -тої культури;

a_{ij} - затрати ресурсів i -го виду на 1га j -ї культури;

b_i - наявність виробничих ресурсів i -го виду;

$\overline{X1}_j$ - нижня межа входження окремої культури або групи культур в сівозміну;

$\overline{X2}_j$ - верхня межа входження окремої культури або групи культур в сівозміну;

U_{ij} - урожайність j -тої культури;

P_i - необхідна кількість i -го виду продукції;

W_{ij}, W'_{ij} - коефіцієнти пропорційності.

Умова задачі.

Господарство має 1200га оранки, на яких може вирощувати зернові та просапні культури.

Площа зернових у структурі посівних площ повинна бути від 40 до 60%, площа цукрових буряків не повинна перевищувати 15%, а площа соняшника або картоплі – не більше 10%. Площа озимих повинна бути не більше 50% від максимальної площі зернових. Площа ярої пшениці співвідноситься до площі озимої пшениці як 1:10.

Підприємство повинно виробити не менше:

- 15600ц зерна (в тому числі 7050ц пшениці);
- 10500ц цукрового буряку;
- 1050ц соняшника або 8720ц картоплі;
- 530ц проса або гречки.

Крім цього для галузі тваринництва необхідно:

- соломи – 17400ц;
- кукурудзи на силос (зелений корм) – 15570ц

В якості критерію оптимальності виступає прибуток від товарної продукції рослинництва.

Культури для розробки економіко-математичної моделі наведено в таблиці 7, вихідні дані взяти довільно з заданого діапазону (таблиця 6).

Розробити економіко-математичну модель, змінними в якій будуть площі під кожен культуру (X_1, X_2, \dots, X_8), валові збори культур ($X_9, X_{10}, \dots, X_{16}$), загальні витрати на виробництво продукції (X_{17}), витрати на виробництво товарної продукції (X_{18}), виручка від реалізації товарної продукції рослинництва (X_{19}).

Таблиця 6.

Вихідні дані для розробки економіко-математичної моделі

Культура	Урожайність, ц/га		Затрати на 1 га, грн.	Ціна реалізації 1ц, грн.
	основна продукція	побічна продукція		
Озима пшениця	від 32 до 49	від 40 до 60	470-620	40
Яра пшениця	від 27 до 36	від 27 до 36	320-500	40
Ячмінь	від 22 до 37	від 22 до 37	320-450	38
Овес	від 19 до 32	від 19 до 32	320-450	30
Гречка	від 7 до 15		320-490	44
Просо	від 16 до 26	від 16 до 26	320-480	29
Жито	від 25 до 35	від 25 до 35	320-480	28
Горох	від 16 до 24	від 16 до 24	320-520	45
Цукровий буряк	від 131 до 300		985-2650	16
Соняшник	від 17 до 24		520-750	90
Картопля	від 140 до 300		1200-2980	50
Кукурудза на з/к	від 160 до 260		300-400	
Кукурудза на силос	від 165 до 260		300-400	

Таблиця 7.

Культури, що будуть висіватися в господарстві.

Варіант	Зернові					Просапні		
	озима пшениця	яра пшениця	горох	гречка	овес	цукровий буряк	соняшник	кукурудза на з/к
1	озима пшениця	яра пшениця	горох	гречка	овес	цукровий буряк	соняшник	кукурудза на з/к
2	озима пшениця	яра пшениця	горох	просо	овес	цукровий буряк	кукурудза на силос	картопля
3	озима пшениця	яра пшениця	ячмінь	гречка	просо	цукровий буряк	соняшник	кукурудза на з/к
4	озима пшениця	яра пшениця	горох	гречка	овес	цукровий буряк	кукурудза на силос	картопля
5	озима пшениця	яра пшениця	горох	просо	ячмінь	цукровий буряк	кукурудза на з/к	картопля
6	озима пшениця	яра пшениця	горох	просо	жито	цукровий буряк	кукурудза на з/к	картопля
7	озима пшениця	яра пшениця	ячмінь	жито	просо	цукровий буряк	соняшник	кукурудза на з/к
8	озима пшениця	яра пшениця	горох	гречка	овес	цукровий буряк	кукурудза на силос	картопля

Варіант	Зернові					Просапні		
9	озима пшениця	яра пшениця	жито	горох	гречка	цукровий буряк	кукурудза на силос	картопля
10	озима пшениця	яра пшениця	ячмінь	горох	просо	цукровий буряк	соняшник	кукурудза на з/к
11	озима пшениця	яра пшениця	жито	просо	ячмінь	цукровий буряк	кукурудза на з/к	картопля
12	озима пшениця	яра пшениця	жито	горох	гречка	цукровий буряк	соняшник	кукурудза на силос
13	озима пшениця	яра пшениця	ячмінь	горох	гречка	цукровий буряк	соняшник	кукурудза на силос
14	озима пшениця	яра пшениця	жито	просо	овес	цукровий буряк	соняшник	кукурудза на з/к
15	озима пшениця	яра пшениця	жито	просо	гречка	цукровий буряк	кукурудза на силос	картопля
16	озима пшениця	яра пшениця	горох	ячмінь	просо	цукровий буряк	кукурудза на з/к	картопля
17	озима пшениця	яра пшениця	жито	просо	гречка	цукровий буряк	кукурудза на з/к	картопля
18	озима пшениця	яра пшениця	жито	горох	гречка	цукровий буряк	соняшник	кукурудза на силос
19	озима пшениця	яра пшениця	овес	горох	просо	цукровий буряк	соняшник	кукурудза на силос
20	озима пшениця	яра пшениця	жито	горох	гречка	цукровий буряк	кукурудза на з/к	картопля
21	озима пшениця	яра пшениця	овес	горох	просо	цукровий буряк	кукурудза на з/к	картопля
22	озима пшениця	яра пшениця	овес	гречка	просо	цукровий буряк	соняшник	кукурудза на силос
23	озима пшениця	яра пшениця	овес	ячмінь	просо	цукровий буряк	кукурудза на силос	картопля
24	озима пшениця	яра пшениця	овес	горох	гречка	цукровий буряк	соняшник	кукурудза на силос
25	озима пшениця	яра пшениця	ячмінь	горох	просо	цукровий буряк	кукурудза на силос	картопля
26	озима пшениця	яра пшениця	жито	ячмінь	просо	цукровий буряк	соняшник	кукурудза на силос
27	озима пшениця	яра пшениця	ячмінь	горох	гречка	цукровий буряк	кукурудза на силос	картопля
28	озима пшениця	яра пшениця	жито	просо	горох	цукровий буряк	кукурудза на з/к	картопля
29	озима пшениця	яра пшениця	просо	ячмінь	жито	цукровий буряк	соняшник	кукурудза на силос
30	озима пшениця	яра пшениця	гречка	горох	овес	цукровий буряк	соняшник	кукурудза на силос

Приклад розв'язування.

Умова задачі.

Господарство має 1200 га оранки, на яких може вирощувати зернові та просапні культури.

Площа зернових у структурі посівних площ повинна бути від 40 до 60 %, площа цукрових буряків не повинна перевищувати 15%, а площа соняшника або картоплі – не більше 10%. Площа озимих повинна бути не більше 50% від максимальної площі зернових. Площа ярої пшениці співвідноситься до площі озимої пшениці як 1:10.

Підприємство повинно виробити не менше:

- 15600ц зерна (в тому числі 7050ц пшениці);
- 10500ц цукрового буряку;
- 1050ц соняшника або 8720ц картоплі;
- 530ц проса або гречки.

Крім цього для потреб тваринництва необхідно:

- соломи – 17400ц;
- кукурудзи на силос (зелений корм) – 15570ц

В якості критерію оптимальності виступає прибуток від товарної продукції рослинництва.

Розробити економіко-математичну модель, змінними в якій будуть площі посіву кожної культури (X_1, X_2, \dots, X_8), валові збори культур ($X_9, X_{10}, \dots, X_{16}$), загальні витрати на виробництво продукції (X_{17}), витрати на виробництво товарної продукції (X_{18}), виручка від реалізації товарної продукції рослинництва (X_{19}).

Культури, які будуть вирощуватися в господарстві

Зернові					Просапні		
озима пшениця	яра пшениця	горох	гречка	жито	цукровий буряк	картопля	кукурудза на силос

Числові дані для розробки економіко-математичної моделі.

Культура	Урожайність, ц/га		Затрати на 1 га, грн.	Ціна реалізації 1ц, грн.
	основної продукції	Побічної продукції		
Озима пшениця	32	40	540	40
Яра пшениця	30	30	320	40
Гречка	9		380	44
Жито	25	25	356	28
Горох	16	16	397	45
Цукровий буряк	226		1865	16
Картопля	190		1921	50
Кукурудза на силос	178		302	

Рішення.

На 19-ть змінних задачі накладено 25 обмежень:

1-ше обмеження стосується використання наявної площі:

$$1X_1+1X_2+1X_3+1X_4+1X_5+1X_6+1X_7+1X_8 \leq 1200, \text{ де:}$$

X_1, X_2, \dots, X_8 – площі сільськогосподарських культур.

2-ге та 3-тє обмеження задають верхню та нижню межу насиченості сівозміни зерновими культурами, питома вага яких повинна бути від 40% до 60%.

$$1X_1+1X_2+1X_3+1X_4+1X_5 \leq 20 \quad (60\%)$$

$$1X_1+1X_2+1X_3+1X_4+1X_5 \geq 480 \quad (40\%), \text{ де}$$

X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 – площі зернових культур.

4-те, 5-те та 6-те обмеження описують максимальну площу цукрових буряків, озимих та картоплі відповідно, так 4-те стосується площі цукрових буряків:

$$1X_6 \leq 180 \quad (15\%), \text{ де:}$$

X_6 – площа цукрових буряків.

7-ме обмеження характеризує співвідношення між площею посіву озимої пшениці та ярої пшениці:

$$1X_1 - 10X_2 = 0, \text{ де:}$$

X_1 – площа озимої пшениці;

X_2 – площа ярої пшениці.

Група обмежень з 8-го по 12-те задають нижню межу виробництва певної продукції, так 8-ме обмеження характеризується валового збору зерна, який повинен бути на менше 15600 ц:

$$1X_9+1X_{10}+1X_{11}+1X_{12}+1X_{13} \geq 15600; \text{ де:}$$

$X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12}, X_{13}$ – валові збори озимої пшениці, ярої пшениці, гречки, жита, гороху відповідно.

13-те та 14-те обмеження забезпечать задоволення потреб тваринництва в соломі та силосі відповідно, так 13-те має вигляд:

$$40X_1+30X_2+25X_4+16X_5 \geq 17400; \text{ де:}$$

X_1, X_2, X_4, X_5 – площі зернових культур: озимої пшениці, ярої пшениці, жита та гороху відповідно (коефіцієнти при цих змінних - урожайність соломи відповідних культур).

Обмеження з 15-го по 22-ге забезпечують зв'язок між площею посіву та валовим збором по кожній сільськогосподарській культурі, 15-те обмеження стосується озимої пшениці:

$$32X_1 - X_9 = 0; \text{ де:}$$

X_1 – площа озимої пшениці (32 – урожайність озимої пшениці);

X_9 – валовий збір озимої пшениці.

23-те обмеження акумулює затрати на виробництво продукції:

$$540X_1 + 320X_2 + 380X_3 + 356X_4 + 397X_5 + 1865X_6 + 1921X_7 + 302X_8 - X_{17} = 0; \text{ де:}$$

X_1, X_2, \dots, X_8 – площі сільськогосподарських культур (коефіцієнти при змінних – затрати на 1 га, грн.);

X_{17} – загальні затрати на виробництво продукції, грн.

24-те обмеження характеризує затрати на виробництво товарної продукції:

$$540X_1 + 320X_2 + 380X_3 + 356X_4 + 397X_5 + 1865X_6 + 1921X_7 - X_{18} = 0; \text{ де:}$$

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7$ – площі товарних сільськогосподарських культур (коефіцієнти при змінних – затрати на 1 га, грн.);

X_{18} – загальні затрати на виробництво товарної продукції, грн.

25-те обмеження стосується виручки від реалізації товарної продукції:

$$40X_9 + 40X_{10} + 44X_{11} + 28X_{12} + 45X_{13} + 16X_{14} + 50X_{15} - X_{19} = 0; \text{ де:}$$

$X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{15}$ – валові збори с/г культур (коефіцієнти при змінних – ціна реалізації 1 ц продукції, грн.);

X_{19} – виручка від реалізації товарної продукції рослинництва, грн.

В якості критерію оптимальності виступає прибуток від виробництва товарної продукції рослинництва:

$$1X_{19} - 1X_{18} \rightarrow \max.$$

Економіко-математичну модель оптимізації посівних площ можна представити в табличному вигляді.

Економіко-математична модель оптимізації структури посівних площ

№		Площі с/г культур, га							Валовий збір, ц							Затрати на виробництво продукції, грн.	Затрати на виробництво товарної продукції, грн.	Виручка від реалізації товарної продукції, грн.	Тип та розмір обмежень	№				
		Озимої пшениці	Ярої пшениці	Гречки	Жита	Гороху	Цукрового буряку	Картоплі	Кукурудзи на силос	Озимої пшениці	Ярої пшениці	Гречки	Жита	Гороху	Цукрового буряку						Картоплі	Кукурудзи на силос		
	Змінні	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	x14	x15	x16	x17	x18	x19				
	Обмеження																							
1.	Площа ріллі	1	1	1	1	1	1	1	1													<= 1200	1	
2.	Площа зернових max	1	1	1	1	1																	<= 720	2
3.	Площа зернових min	1	1	1	1	1																	>= 480	3
4.	Площа цукрових буряків						1																<= 180	4
5.	Площа озимих	1																					<= 360	5
6.	Площа картоплі							1															<= 120	6
7.	Співвідношення площі ярої пшениці до площі озимої	1	-10																				= 0	7
8.	Збір зерна									1	1	1	1	1									>= 15600	8
9.	Збір пшениці									1	1												>= 7050	9
10.	Збір цукрового буряку													1									>= 10500	10

САМОСТІЙНА РОБОТА

Самостійна робота аспірантів у обсязі 34 годин складається з вивчення матеріалу за допомогою конспектів лекцій, підручників, допоміжної літератури, а також підготовки до практичних занять та виконання індивідуальних завдань.

Теми, які виносяться для самостійного відпрацювання, аспіранти вивчають у вільний від занять час. В методичних рекомендаціях для практичних занять виділяються теми, які аспірант повинен виконати самостійно.

Теми та завдання обов'язкового самостійного опрацювання

Змістовний модуль	№ теми	Зміст	Кількість годин	Форма контролю
1	1	Особливості використання статистичних методів в агрономії Якісні та кількісні дані в агрономії. Планування та організація наукових досліджень в агрономії. Сучасний стан математичної статистики. Основні поняття теорії імовірності. Математична статистика та різноманітність вирішуваних нею завдань. Статистичне оцінювання. Концепція рандомізації. Репрезентативність вихідного матеріалу. Поняття про помилки. Систематичні та випадкові помилки. Прийняття рішення.	3	ведення конспекту
1	2	Ознаки в агрономії, біології та ґрунтознавстві Поняття про ознаки. Ознаки та властивості об'єктів. Кількісні та якісні ознаки. Ранги та ранжування. Кодування якісних ознак. Особливості збирання інформації про ознаки, які характеризують стан агрономічних об'єктів. Сезонність. Мінливість ознак з часом. Методи раціонального планування експериментів та польових дослідів. Таблиці випадкових чисел. Представлення вихідного матеріалу у формі таблиць. Побудова таблиць та їх	4	ведення конспекту

		роздрукування.		
1	3	Ряди розподілу та їх статистичне оцінювання Робастність в статистиці. Виявлення та вибраковування «вискакуючих» значень. Трансформація статистичних рядів. Визначення статистично достатнього обсягу вибірок.	3	ведення конспекту
1	4	Аналіз тенденцій розвитку Метод згладжування ряду динаміки. Ступінчасті та плинні середні. Аналітичне вирівнювання як основний метод характеристики тенденції розвитку статистичних показників. Поняття та негативні наслідки сезонних коливань в сільському господарстві. Сезонна хвиля. Методи розрахунків індексів сезонності при наявності та відсутності вираженої основної тенденції розвитку.	3	ведення конспекту
1	5	Кореляційний аналіз Кореляційні матриці. Біологічне та агрономічне значення кореляцій. Особливості використання кореляційного аналізу в селекції.	3	ведення конспекту
1	6	Регресійний аналіз Основні ідеї регресійного аналізу. Парний регресійний аналіз. Коефіцієнти та вільні члени регресійних рівнянь. Графічне представлення результатів регресійного аналізу. Множинний регресійний аналіз. Покрокова регресія. Площина регресії. Регресійний аналіз як засіб прогнозування явищ та процесів.	3	ведення конспекту
1	7	Багатовимірний статистичний аналіз в агрономії Q- та R-техніки у кластерному аналізі: аналіз об'єктів та аналіз ознак. Графічне представлення результатів кластерного аналізу. Факторний аналіз. Матриця вихідних даних. Проблема вибору ознак. Інформаційний шум. Метрики схожості і відстаней у факторному аналізі. Q- та R-техніки у факторному аналізі: аналіз об'єктів та аналіз ознак. Графічне	3	ведення конспекту

		представлення результатів факторного аналізу. Полярна вісконсинська ординація. Матриця вихідних даних. Особливості метода. Представлення результатів. Віталітетний аналіз в агрономії. Ознаки життєздатності рослин в посівах. Реалізація метода на ЕОМ. Представлення і інтерпритація результатів.		
2	8	Математичне формування задачі лінійного програмування Засади лінійного програмування. Постановка задачі лінійного програмування. Симетрична та канонічна постаті задачі. Перетворення однієї постаті до іншої. Множини планів задачі, опорний та оптимальний плани задач лінійного програмування. Теорема про існування розв'язку задач лінійного програмування та принципи його відшукання.	3	ведення конспекту
2	9	Графічна інтерпретація задачі лінійного програмування Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування. Алгоритм графічного методу.	3	ведення конспекту
2	10	Ставлення і розв'язування транспортної задачі та її використання в агрономії Метод потенціалів розв'язання транспортних задач лінійного програмування та його зв'язок з теорією двоїстості. Розподільчий метод. Особливості використання транспортної задачі в агрономії.	3	ведення конспекту
2	11	Математичне моделювання виробничих процесів в агрономії Економіко-математичні моделі (оптимізація структури посівних площ, оптимізація розміщення посівів по полях різної родючості, оптимізація процесу використання мінеральних добрив)	3	ведення конспекту
Всього годин			34	

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Іглін С. П., Зайцев Ю. І., Решетняк Ю. Б. Лінійне програмування : навч. посіб. Харків : НТМТ, 2023. 120 с. URL: <https://repository.kpi.kharkov.ua/server/api/core/bitstreams/384866bb-5028-4546-996c-eb0a5cb346f6/content>
2. Жалдак М. І., Кузьміна Н. М., Михалін Г. О. Теорія ймовірностей і математична статистика : підручник. Київ : НПУ імені М.П. Драгоманова, 2020. 750 с. URI: <http://enpuir.npu.edu.ua/handle/123456789/35207>
3. Касьяненко В.О., Старченко Л.В. Моделювання та прогнозування економічних процесів : конспект лекцій. Суми : Університетська книга, 2023. 185 с.
4. Конверський А. Основи методології та організація наукових досліджень : підруч. Київ : Центр учбової літератури, 2021. 352 с.
5. Кузьменко О. В., Козьменко О. В. Економіко-математичні методи і моделі: економетрика : навчальний посібник. Суми : Університетська книга, 2025. 408 с.
6. Кучма М. І. Математичне програмування: приклади і задачі : навчальний посібник. Львів : Новий світ-2000, 2023. 344 с.
7. Медведєв М. Г. Теорія ймовірності та математична статистика : підручник. Київ : Ліра-К, 2024. 536 с.
8. Найко Д. А. Шевчук О. Ф. Теорія ймовірностей та математична статистика : навч. посіб. Вінниця : ВНАУ, 2020. 382 с. URL: <http://repository.vsau.org/getfile.php/24513.pdf>
9. Новаківський І. І., Войцеховська Ю. В. Основи статистичного прогнозування економічних процесів : навчальний посібник. Львів : Новий світ-2000, 2025. 200 с.
10. Озеранський В. С., Крилик Л. В., Шевчук О. Ф. Теорія ймовірностей та математична статистика : лабораторний практикум. Вінниця : ВНТУ, 2025. 113 с.

11. Пушак Я.С., Лозовий Б.Н. Теорія ймовірностей і елементи математичної статистики : навчальний посібник. Львів : Магнолія 2006, 2024. 276 с.
12. Рабик В. М. Основи теорії ймовірностей : навчальний посібник. Львів : ПП "Магнолія 2006", 2025. 176 с.
13. Рижок З. Р., Поляковська Л. Л., Ступень Р. М., Колодій П. П. Математична обробка геодезичних вимірів : навчальний посібник. Львів : Галицька видавнича спілка, 2020. 179 с. URL: <https://surl.li/vbcoet>
14. Сидоренко Ю. В. Теорія ймовірностей : навч. посібник. Київ : НТУУ «КПІ імені Ігоря Сікорського», 2020. 81 с.
15. Теорія ймовірностей та математична статистика : навчальний посібник. 2-ге видання / Копич І.М., Сороківський В.М., Кісілевич О.В., Пенцак О.В. Львів : Новий світ-2000, 2025. 382 с.

Навчальне видання

СТАТИСТИЧНИЙ АНАЛІЗ І МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ В АГРОНОМІЇ

Методичні рекомендації

Укладачі:

Шебаніна Олена В'ячеславівна
Тищенко Світлана Іванівна
Пархоменко Олександр Юрійович та ін.

Формат 60x84 1/16. Ум. друк. арк. 4,69.

Тираж 50 прим. Зам. № __

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.