

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Інженерно-енергетичний факультет

Кафедра вищої та прикладної математики

ВИЩА МАТЕМАТИКА:

завдання та методичні рекомендації
для самостійної роботи
здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
ОПП «Професійна освіта (Аграрне виробництво, переробка
сільськогосподарської продукції та харчові технології)»
спеціальності А 5 «Професійна освіта (Аграрне виробництво,
переробка сільськогосподарської продукції та харчові технології)»
денної та заочної форм здобуття вищої освіти

УДК 51
В55

Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету МНАУ (протокол № 4 від 08.12.2025р.)

Укладач:

О.В. Бойчук – к.ф.-м.н., доцентка кафедри вищої та прикладної математики
Миколаївського національного аграрного університету

Рецензенти:

Махровська Н.А. – к.ф.-м.н., доцент кафедри теорії й методики
природничо-математичної освіти та інформаційних
технологій Миколаївського обласного інституту
післядипломної педагогічної освіти.

Пархоменко О.Ю. – к.ф.-м.н., доцент кафедри економічної кібернетики,
комп'ютерних наук та технологій Миколаївського
національного аграрного університету.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
Модуль 1 «ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ».....	5
МАТРИЦІ. ДІЇ НАД МАТРИЦЯМИ	5
ВИЗНАЧНИКИ, МІНОРИ, ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ	10
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ.....	18
ВЕКТОРИ. ДІЇ НАД ВЕКТОРАМИ	26
Модуль 2 «АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ»	33
ЗАСТОСУВАННЯ КООРДИНАТ.....	33
ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ.....	35
ПЛОЩИНА ЯК ПОВЕРХНЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ	43
ПРЯМА У ПРОСТОРІ.....	49
ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ У ПРОСТОРІ..	52
Модуль 3 «ГРАНИЦІ ТА ПОХІДНІ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ»	57
ГРАНИЦІ ФУНКЦІЙ НА БЕЗМЕЖНОСТІ І В ТОЧЦІ.....	57
ПОХІДНІ ФУНКЦІЙ. ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ	63
ПОХІДНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ. ПРАВИЛО ЛОПІТАЛЯ	69
ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ.....	72
Модуль 4 «ІНТЕГРАЛИ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ»	77
НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ. БЕЗПОСЕРЕДНЄ ІНТЕГРУВАННЯ.....	77
МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ	82
ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ	87
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	91

ВСТУП

Методичні рекомендації створено відповідно до програми курсу «Вища математика» для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю А5 Професійна освіта (Аграрне виробництво, переробка сільськогосподарської продукції та харчові технології) галузі знань А Освіта.

У методичних рекомендаціях для кожної окремої теми наводяться стисло необхідні теоретичні відомості, розглядаються приклади розв'язування завдань з короткими поясненнями, приводяться завдання для самостійного виконання. Розглядаються також окремі питання, які винесені на обов'язкове самостійне вивчення. Матеріал викладено таким чином, щоб максимально допомогти здобувачам вищої освіти оволодіти знаннями та набути основні навички розв'язування завдань з дисципліни «Вища математика».

Методичні рекомендації можуть бути корисними при підготовці до занять та під час самостійної роботи здобувачів вищої освіти, особливо при дистанційній формі навчання.

Модуль 1 «ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ»

МАТРИЦІ. ДІЇ НАД МАТРИЦЯМИ

1. Основні поняття та теореми

Прямокутна таблиця чисел, складена з m рядків і n стовпців, називається *матрицею* розмірності $m \times n$. Позначають матриці великими латинськими літерами $A, B, C \dots$

Наприклад: $A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}; \quad B_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}; \quad C_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \\ 3 & 7 \end{pmatrix};$

$D_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}$ – матриці. Але $\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ не є матрицею.

Матриця в загальному випадку має вигляд $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Числа a_{ij} ($i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,n$) є елементами матриці, перший індекс вказує номер рядка, а другий індекс – номер стовпця, в яких знаходиться елемент матриці.

Наприклад: для матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ елементами є $a_{11} = 3, a_{12} = 2,$

$a_{21} = -2, a_{22} = 0, a_{31} = 1, a_{32} = 7$.

Якщо матриця має однакову кількість рядків та стовпців ($m = n$), то вона називається *квадратною* (порядку n).

Діагональ квадратної матриці $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ називається *головною*.

Якщо в квадратній матриці всі елементи, що стоять поза головною діагоналлю, дорівнюють нулю, то матриця називається *діагональною*.

Діагональна матриця називається *одиничною*, якщо всі елементи її головної діагоналі рівні одиниці. Одинична матриця позначається E .

Матриця, яка має один рядок, називається *матрицею-рядком*.

Матриця, яка має один стовпець, називається *матрицею-стовпцем*.

Транспонування матриці. Якщо в матриці A , що має розмірність $m \times n$, поміняти місцями рядки із стовпцями, не змінюючи їх нумерації, то дістанемо транспоновану матрицю A^T розмірності $n \times m$.

Наприклад: для $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \\ 12 & 1 & -9 \\ -6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ маємо $A^T = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 12 & -6 \\ 2 & 0 & 1 & 7 \\ -2 & 4 & -9 & 8 \end{pmatrix}$.

Розглянемо дії над матрицями.

Множення матриці на число. Добутком матриці A на число λ називається матриця $B = \lambda A$, елементи якої визначаються як $b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$.

$$\text{Наприклад: } 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ -10 & 0 \\ 5 & 35 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ -6 & 0 \\ 3 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Властивості операції множення матриці на число: $\lambda A = A\lambda$; $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$.

Додавання матриць. Сумою двох матриць $A = (a_{ij})$ та $B = (b_{ij})$ однакових розмірностей називається матриця $S = (s_{ij})$ такої ж розмірності з елементами, що дорівнюють сумам відповідних елементів матриць A та B : $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

$$\text{Наприклад: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -7 & 6 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 8 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Властивості операції додавання матриць: $A + B = B + A$; $(A + B) + C = A + (B + C)$.

Віднімання матриць. Різницею матриць $A = (a_{ij})$ та $B = (b_{ij})$ однакових розмірностей називається матриця $D = (d_{ij})$ такої ж розмірності з елементами, що дорівнюють різницям відповідних елементів матриць A та B : $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

$$\text{Наприклад: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -7 & 6 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -9 & 9 & -1 \end{pmatrix}.$$

Властивості операцій матриць: $\lambda(A \pm B) = \lambda A \pm \lambda B$; $(\lambda \pm \mu)A = \lambda A \pm \mu A$.

Множення матриць. Матрицю A можна помножити на матрицю B , якщо кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B ; добутком матриць $A_{m \times n}$ та $B_{n \times k}$ є матриця M розмірності $m \times k$ (кількість рядків першої матриці на кількість стовпчиків другої матриці), тобто $(\)_{m \times n} \cdot (\)_{n \times k} = (\)_{m \times k}$.

Елемент матриці-добутку, що розташований в i -ому рядку та j -ому стовпці, є сумою добутків відповідних елементів i -ого рядка першої матриці та j -ого стовпця другої матриці, тобто $m_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ik} \cdot b_{kj}$.

$$\text{Наприклад: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -7 & 6 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 25 \\ -33 & -28 \end{pmatrix}_{2 \times 2}, \text{ оскільки маємо}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 7 \\ -7 \cdot 3 + 6 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 & -7 \cdot 4 + 6 \cdot 0 + 0 \cdot 7 \end{pmatrix}.$$

Властивості операції множення матриць: 1) $A \cdot E = E \cdot A = A$; 2) $\lambda(A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B)$; 3) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$; 4) $A \cdot (B \pm C) = A \cdot B \pm A \cdot C$; 5) в загальному випадку операція множення матриць некомутативна, тобто $A \cdot B \neq B \cdot A$ (обидва добутки мають зміст, якщо матриці A, B є квадратними).

Справедлива формула $B^T \cdot A^T = (A \cdot B)^T$.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайдіть матрицю $C = 3 \cdot A + B$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

$$3 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 6 & -9 & -3 \\ 9 & 3 & 6 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 6 & -9 & -3 \\ 9 & 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 8 & -12 & -4 \\ 12 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $C = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 8 & -12 & -4 \\ 12 & 5 & 8 \end{pmatrix}$.

2. Знайдіть матрицю $D = A - 2 \cdot B$, де $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

$$2 \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 5 \\ -1 & -8 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $D = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 5 \\ -1 & -8 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Знайдіть матрицю $C = A \cdot B$, де $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

$$A_{2 \times 4} \cdot B_{4 \times 3} = C_{2 \times 3}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix},$$

$$c_{11} = 4 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) = 11,$$

$$c_{12} = 4 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 8,$$

$$c_{13} = 4 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 3 = -8 + 4 + 0 + 6 = 2,$$

$$c_{21} = -2 \cdot 3 + 0 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) = -6 + 0 + 6 - 2 = -2,$$

$$c_{22} = -2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = -4 + 0 + 3 + 0 = -1,$$

$$c_{23} = -2 \cdot (-2) + 0 \cdot 4 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 3 = 4 + 0 + 0 + 3 = 7.$$

Відповідь: $C = \begin{pmatrix} 11 & 8 & 2 \\ -2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$.

4. Знайдіть матрицю $C = A \cdot B$, де $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

$$A_{3 \times 3} \cdot B_{3 \times 1} = C_{3 \times 1}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 + 0 \cdot (-2) + 5 \cdot (-3) \\ 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-3) \\ 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) + 0 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $C = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$.

5. Знайдіть матриці $C = A \cdot B$ та $D = B \cdot A$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 6 & 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-8) \\ -3 \cdot 4 + 7 \cdot 6 & -3 \cdot 5 + 7 \cdot (-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -11 \\ 30 & -71 \end{pmatrix}.$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 + 5 \cdot (-3) & 4 \cdot 2 + 5 \cdot 7 \\ 6 \cdot 1 + (-8) \cdot (-3) & 6 \cdot 2 + (-8) \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 43 \\ 30 & -44 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $C = \begin{pmatrix} 16 & -11 \\ 30 & -71 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -11 & 43 \\ 30 & -44 \end{pmatrix}$. В загальному випадку

матриця-добуток залежить від порядку матриць-множників.

6. Знайдіть матриці $C = A \cdot E$, $D = E \cdot A$, де а) $A = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

а) $\begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$

б) $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$

Відповідь: а) $C = D = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$; б) $C = D = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

7. Дано матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Знайдіть $C = A \cdot B$ та

$D = B^T \cdot A^T$. Порівняйте отримані матриці.

Розв'язання:

$$A_{3 \times 3} \cdot B_{3 \times 3} = C_{3 \times 3}, C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}.$$

$$c_{11} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + (-4) \cdot (-2) = 2 + 1 + 8 = 11,$$

$$c_{12} = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 4 + (-4) \cdot 0 = 6 - 4 + 0 = 2,$$

$$c_{13} = 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 + (-4) \cdot 1 = 0 - 2 - 4 = -6,$$

$$c_{21} = 1 \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) + 0 \cdot (-2) = 1 + 3 + 0 = 4,$$

$$c_{22} = 1 \cdot 3 + (-3) \cdot 4 + 0 \cdot 0 = 3 - 12 + 0 = -9,$$

$$c_{23} = 1 \cdot 0 + (-3) \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 0 - 6 + 0 = -6,$$

$$c_{31} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-2) = 1 - 2 + 4 = 3,$$

$$c_{32} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + (-2) \cdot 0 = 3 + 8 + 0 = 11,$$

$$c_{33} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 = 0 + 4 - 2 = 2.$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$B^T_{3 \times 3} \cdot A^T_{3 \times 3} = D_{3 \times 3}, B^T \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$d_{11} = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + (-2) \cdot (-4) = 2 + 1 + 8 = 11,$$

$$d_{12} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-3) + (-2) \cdot 0 = 1 + 3 + 0 = 4,$$

$$d_{13} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + (-2) \cdot (-2) = 1 - 2 + 4 = 3,$$

$$d_{21} = 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + 0 \cdot (-4) = 6 - 4 + 0 = 2,$$

$$d_{22} = 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-3) + 0 \cdot 0 = 3 - 12 + 0 = -9,$$

$$d_{23} = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 0 \cdot (-2) = 3 + 8 + 0 = 11,$$

$$d_{31} = 0 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-4) = 0 - 2 - 4 = -6,$$

$$d_{32} = 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 0 = 0 - 6 + 0 = -6,$$

$$d_{33} = 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) = 0 + 4 - 2 = 2.$$

$$\text{Відповідь: } C = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -6 \\ 4 & -9 & -6 \\ 3 & 11 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 11 & 4 & 3 \\ 2 & -9 & 11 \\ -6 & -6 & 2 \end{pmatrix}, C^T = D.$$

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайдіть матрицю $D = 3A + B - 2C$, де $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ та

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ \alpha & 4 + \alpha \end{pmatrix}.$$

2. Знайдіть матрицю $C = A \cdot B$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ \alpha & 2 & -1 \\ -2 & 7 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 + \alpha \\ -2 \end{pmatrix}$.

3. Знайдіть матриці $C = A \cdot B$ та $D = B \cdot A$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -\alpha & -7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -6 & \alpha \end{pmatrix}$.

4. Знайдіть матриці $C = A \cdot B$, $D = B^T \cdot A^T$, де $A = \begin{pmatrix} 3 + \alpha & \alpha \\ 8 + \alpha & -4 + \alpha \\ 9 + \alpha & -1 + \alpha \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} -2 + \alpha & 2 + \alpha & 5 + \alpha \\ \alpha & 1 + \alpha & 3 + \alpha \end{pmatrix}$. Знайдіть матриці $C = B \cdot A$, $D = A^T \cdot B^T$.

ВИЗНАЧНИКИ, МІНОРИ, ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ

1. Основні поняття та теореми

Визначник матриці другого порядку позначається $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ і дорівнює

$a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$. Схема знаходження $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Визначник матриці третього порядку позначається $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ і рівний

$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$.

Схеми знаходження $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Для кожної квадратної матриці існує визначник.

Визначник ще називається детермінантом і позначається або Δ , або $\det$.

Якщо визначник матриці дорівнює нулю, то матриця є *особливою* (виродженою).

Найважливіші властивості визначників:

1) Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) матриці рівні нулю, то визначник цієї матриці дорівнює нулю.

2) Якщо елементи двох рядків (стовпців) матриці однакові, то визначник цієї матриці рівний нулю.

3) Якщо елементи двох рядків (стовпців) матриці пропорційні, то визначник цієї матриці дорівнює нулю.

4) Величина визначника не змінюється при транспонуванні матриці.

5) Якщо у визначнику поміняти місцями будь-які два рядки (стовпці), то визначник змінить знак на протилежний (властивість антисиметрії).

6) Якщо помножити всі елементи деякого рядка (стовпця) матриці на будь-яке число λ , то значення визначника цієї матриці також помножиться на число λ (властивість однорідності).

Наслідок: якщо елементи деякого рядка (стовпця) визначника мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника.

7) Величина визначника не зміниться, якщо до елементів одного рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на деяке число (властивість лінійності).

8) Якщо елементи деякого рядка (стовпця) визначника є лінійними комбінаціями відповідних елементів інших рядів (стовпців), то цей визначник рівний нулю.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} матриці порядку n є визначник порядку $(n-1)$ матриці без i -ого рядка та j -ого стовпця.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} матриці є мінор цього елемента, помножений на $(-1)^{i+j}$, тобто $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Якщо сума індексів елемента є числом парним, то $A_{ij} = M_{ij}$; якщо сума індексів елемента є числом непарним, то $A_{ij} = -M_{ij}$.

Визначник квадратної матриці дорівнює сумі добутків усіх елементів будь-якого рядка (стовпця) на їхні відповідні алгебраїчні доповнення, тобто $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$, $\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$.

Отже, визначник n -ого порядку виражається через n визначників $(n-1)$ -ого порядку.

Доцільно розкласти визначник за елементами такого рядка (стовпця), що має більше нульових елементів. Нульові елементи у визначнику можна отримати штучно, застосувавши властивості визначників. Якщо у деякому рядку (стовпці) визначника всі елементи, крім одного, рівні нулю, то, розклавши цей визначник за елементами такого рядка (стовпця), отримаємо лише добуток ненульового елемента на його алгебраїчне доповнення.

Матриця A^{-1} називається *оберненою* до квадратної матриці A , якщо виконується умова $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$. Формула оберненої матриці

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}^T, \text{ де } \tilde{A}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} - \text{транспонована матриця з алгебраїчних}$$

доповнень усіх елементів матриці A .

Алгоритм знаходження оберненої матриці до матриці A :

- 1) знайти визначник матриці A ;
- 2) визначити алгебраїчні доповнення до всіх елементів матриці A ;
- 3) скласти матрицю з алгебраїчних доповнень $\tilde{A}$ і транспонувати її.
- 4) записати обернену матрицю як $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}^T$.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайдіть визначник другого порядку $\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$.

Розв'язання: $\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -1 \cdot 6 - 5 \cdot 3 = -6 - 15 = -21$.

Відповідь: $\Delta = -21$.

2. Знайдіть визначник третього порядку $\begin{vmatrix} 5 & 7 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$.

Розв'язання: $\begin{vmatrix} 5 & 7 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot (-2) + 7 \cdot (-1) \cdot 3 + (-4) \cdot 2 \cdot 4 - (-4) \cdot 1 \cdot 3 -$
 $-5 \cdot (-1) \cdot 4 - 7 \cdot 2 \cdot (-2) = -10 - 21 - 32 + 12 + 20 + 28 = -3$.

Відповідь: $\Delta = -3$.

3. Знайдіть визначник третього порядку $\begin{vmatrix} 5 & 7 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$, спочатку перетворивши

на 0 елементи, що розташовані нижче головної діагоналі.

Розв'язання:

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{I+III} \begin{vmatrix} 5 & 7 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{II-I} \begin{vmatrix} 5 & 7 & -4 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{III-2II} \begin{vmatrix} 5 & 7 & -4 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

Відповідь: $\Delta = -3$.

4. Знайдіть мінори та алгебраїчні доповнення елементів матриці $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

$$M_{11} = 4, A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = M_{11} = 4; \quad M_{12} = -3, A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -M_{12} = 3;$$

$$M_{21} = 2, A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -M_{21} = -2; \quad M_{22} = -1, A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = M_{22} = -1.$$

5. Знайдіть мінори, алгебраїчні доповнення всіх елементів матриці $\begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 18 = 22, \quad A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = M_{11} = 22;$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 18 = -2, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -M_{12} = 2;$$

$$\begin{aligned}
M_{13} &= \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 7 - 30 = -23, & A_{13} &= (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = M_{13} = -23; \\
M_{21} &= \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 72 - 4 = 68, & A_{21} &= (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -M_{21} = -68; \\
M_{22} &= \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 24 = -8, & A_{22} &= (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = M_{22} = -8; \\
M_{23} &= \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 54 = -52, & A_{23} &= (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = -M_{23} = 52; \\
M_{31} &= \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 27 - 20 = 7, & A_{31} &= (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = M_{31} = 7; \\
M_{32} &= \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 28 = -22, & A_{32} &= (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = -M_{32} = 22; \\
M_{33} &= \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 63 = -53, & A_{33} &= (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = M_{33} = -53.
\end{aligned}$$

6. Знайдіть алгебраїчні доповнення A_{31} та A_{43} відповідних елементів матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 5 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 24 + 9 + 0 + 16 - 6 - 0 = 43; \quad A_{31} = M_{31} = 43.$$

$$M_{43} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 12 + 20 - 0 - 3 + 50 = 79; \quad A_{43} = -M_{43} = -79.$$

Відповідь: $A_{31} = 43$; $A_{43} = -79$.

7. Знайдіть визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix}$ за елементами другого стовпця.

Розв'язання:

Маємо $\Delta = a_{12}A_{12} + \underbrace{a_{22}}_{=0}A_{22} + a_{32}A_{32} = a_{12}A_{12} + a_{32}A_{32}$. Оскільки алгебраїчні

доповнення $A_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -(-25 - 6) = 31$, $A_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -(3 - 20) = 17$,

то отримаємо $\Delta = 2 \cdot 31 + 1 \cdot 17 = 62 + 17 = 79$.

Відповідь: $\Delta = 79$.

8. Знайдіть визначник
$$\begin{vmatrix} 1 & 13 & -4 \\ 0 & -9 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання:

В першому стовпці всі елементи, крім одного, є нулями, тому розкладемо цей визначник за елементами цього стовпця $\Delta = a_{11}A_{11} + \underbrace{a_{21}}_{=0}A_{21} + \underbrace{a_{31}}_{=0}A_{31} = a_{11}A_{11}$.

Так як $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} -9 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -63 - 4 = -67$, то $\Delta = 1 \cdot (-67) = -67$.

Відповідь: $\Delta = -67$.

9. Знайдіть визначник
$$\begin{vmatrix} 1 & -18 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 19 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання:

Віднімемо від другого рядка перший
$$\begin{vmatrix} 1 & -18 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 19 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{II-I} \begin{vmatrix} 1 & -18 & 3 \\ 0 & 22 & -1 \\ 0 & 19 & 1 \end{vmatrix}.$$
 Тоді

визначник $\Delta = a_{11}A_{11} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 22 & -1 \\ 19 & 1 \end{vmatrix} = 22 + 19 = 41$.

Відповідь: $\Delta = 41$.

10. Знайдіть визначник
$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 9 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання:

Віднімемо від другого рядка двічі третій:
$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 9 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{II-2III} \begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Тоді визначник $\Delta = a_{21}A_{21} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(-1 - 6) = 7$.

Відповідь: $\Delta = 7$.

11. Знайдіть визначник четвертого порядку
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання:

Виконаємо перетворення, щоб у першому стовпі були всі нулі, крім a_{11} :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} II-I \\ III-3I \\ IV-2I \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & -7 & -11 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -4 & -7 & -11 \\ 1 & -5 & -7 \end{vmatrix}.$$

Знову виконаємо перетворення, щоб у першому стовпі були всі нулі, крім

$$a_{11}: \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -4 & -7 & -11 \\ 1 & -5 & -7 \end{vmatrix} \begin{matrix} II+4I \\ III-I \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & -27 \\ 0 & -6 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = \begin{vmatrix} -3 & -27 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} = 9 - 162 = -153.$$

Відповідь: $\Delta = -153$.

12. Знайдіть визначник четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 2 & -6 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання:

Виконаємо перетворення, щоб у першому рядку були всі нулі, крім a_{11} :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 2 & -6 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} II-I \\ III-3I \\ IV-2I \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 1 & -4 \\ 3 & -7 & -7 & -11 \\ 2 & -8 & -5 & -7 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = \begin{vmatrix} -5 & 1 & -4 \\ -7 & -7 & -11 \\ -8 & -5 & -7 \end{vmatrix}.$$

Знову виконаємо перетворення, щоб у першому рядку були всі нулі, крім

$$a_{21}: \begin{vmatrix} -5 & 1 & -4 \\ -7 & -7 & -11 \\ -8 & -5 & -7 \end{vmatrix} \begin{matrix} I+5II \\ III+4II \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -42 & -7 & -39 \\ -33 & -5 & -27 \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} = 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = - \begin{vmatrix} -42 & -39 \\ -33 & -27 \end{vmatrix} =$$

$$= -(1134 - 1287) = 153.$$

Відповідь: $\Delta = -153$.

13. Знайдіть матрицю обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 3 & 14 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

$$1) \text{ Визначник матриці } |A| = \begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 3 & 14 \end{vmatrix} = 9 \cdot 14 - 2 \cdot 3 = 120;$$

$$2) \text{ знайдемо алгебраїчні доповнення } A_{11} = M_{11} = 14, \quad A_{12} = -M_{12} = -3, \\ A_{21} = -M_{21} = -2, \quad A_{22} = M_{22} = 9;$$

$$3) \tilde{A} = \begin{pmatrix} 14 & -3 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}, \text{ тоді } \tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ -3 & 9 \end{pmatrix};$$

4) обернена матриця $A^{-1} = \frac{1}{120} \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$.

Перевірка $A^{-1} \cdot A = \frac{1}{120} \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 3 & 14 \end{pmatrix} = \frac{1}{120} \begin{pmatrix} 120 & 0 \\ 0 & 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$.

$$c_{11} = 14 \cdot 9 + (-2) \cdot 3 = 126 - 6 = 120,$$

$$c_{12} = 14 \cdot 2 + (-2) \cdot 14 = 28 - 28 = 0,$$

$$c_{21} = -3 \cdot 9 + 9 \cdot 3 = -27 + 27 = 0,$$

$$c_{22} = -3 \cdot 2 + 9 \cdot 14 = -6 + 126 = 120.$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 3 & 14 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{120} \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{120} \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 3 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{120} \begin{pmatrix} 120 & 0 \\ 0 & 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$d_{11} = 9 \cdot 14 + 2 \cdot (-3) = 126 - 6 = 120,$$

$$d_{12} = 9 \cdot (-2) + 2 \cdot 9 = -18 + 18 = 0,$$

$$d_{21} = 3 \cdot 14 + 14 \cdot (-3) = 42 - 42 = 0,$$

$$d_{22} = 3 \cdot (-2) + 14 \cdot 9 = -6 + 126 = 120.$$

Відповідь: $A^{-1} = \frac{1}{120} \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$.

14. Знайдіть матрицю обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \\ 8 & -3 & 6 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} 1) |A| &= \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \\ 8 & -3 & 6 \end{vmatrix} \stackrel{III-2II}{=} \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & 9 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = a_{32} A_{32} = 5 \cdot (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = -5M_{32} = \\ &= -5 \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5 \cdot (-6 + 4) = 10. \end{aligned}$$

2) Знайдемо алгебраїчні доповнення до всіх елементів:

$$A_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = -24 + 9 = -15, \quad A_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = -(24 - 24) = 0,$$

$$A_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} = -12 + 32 = 20, \quad A_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = -(6 - 3) = -3,$$

$$A_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = -12 + 8 = -4, \quad A_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} = -(6 - 8) = 2,$$

$$A_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1, \quad A_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -(-6 + 4) = 2,$$

$$A_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 4 = 4;$$

3) $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -15 & 0 & 20 \\ -3 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}^T = \begin{pmatrix} -15 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 20 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$

$$4) A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -15 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 20 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Виконаємо перевірку: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \\ 8 & -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -15 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 20 & 2 & 4 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \\ 8 & -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -15 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 20 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} c_{11} &= -2 \cdot (-15) + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 20 = 10, & c_{12} &= -2 \cdot (-3) + 1 \cdot (-4) + (-1) \cdot 2 = 0, \\ c_{13} &= -2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 = 0, & c_{21} &= 4 \cdot (-15) + (-4) \cdot 0 + 3 \cdot 20 = 0, \\ c_{22} &= 4 \cdot (-3) + (-4) \cdot (-4) + 3 \cdot 2 = 10, & c_{23} &= 4 \cdot (-1) + (-4) \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 0, \\ c_{31} &= 8 \cdot (-15) + (-3) \cdot 0 + 6 \cdot 20 = 0, & c_{32} &= 8 \cdot (-3) + (-3) \cdot (-4) + 6 \cdot 2 = 0, \\ c_{33} &= 8 \cdot (-1) + (-3) \cdot 2 + 6 \cdot 4 = 10. \end{aligned}$$

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -15 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 20 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \\ 8 & -3 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} d_{11} &= -15 \cdot (-2) + (-3) \cdot 4 + (-1) \cdot 8 = 10, & d_{12} &= -15 \cdot 1 + (-3) \cdot (-4) + (-1) \cdot (-3) = 0, \\ d_{13} &= -15 \cdot (-1) + (-3) \cdot 3 + (-1) \cdot 6 = 0, & d_{21} &= 0 \cdot (-2) + (-4) \cdot 4 + 2 \cdot 8 = 0, \\ d_{22} &= 0 \cdot 1 + (-4) \cdot (-4) + 2 \cdot (-3) = 10, & d_{23} &= 0 \cdot (-1) + (-4) \cdot 3 + 2 \cdot 6 = 0, \\ d_{31} &= 20 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 8 = 0, & d_{32} &= 20 \cdot 1 + 2 \cdot (-4) + 4 \cdot (-3) = 0, \\ d_{33} &= 20 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 6 = 10. \end{aligned}$$

Відповідь: $A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -15 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 20 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайдіть визначник другого порядку $\Delta = \begin{vmatrix} 3 + \alpha & 6 \\ 5 & 10 - \alpha \end{vmatrix}.$

2. Знайдіть визначник третього порядку $\begin{vmatrix} 1 + \alpha & 2 & 4 \\ -2 & 1 - \alpha & 3 \\ 3 & -4 & 2 - \alpha \end{vmatrix}.$

3. Знайдіть визначник третього порядку $\begin{vmatrix} 1 & 2 + \alpha & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 - \alpha & 1 \end{vmatrix}.$

4. Знайдіть матрицю обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 8 - \alpha & 10 \\ 12 & 7 \end{pmatrix}.$

5. Знайдіть матрицю обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} \alpha - 10 & 1 & 3 \\ 2 & \alpha & 2 \\ \alpha & 2 & \alpha - 7 \end{pmatrix}$.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

1. Основні поняття та теореми

Розв'язком системи $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$, $\in \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

Тобто матриця-стовпець з невідомих знаходиться як добуток оберненої матриці до матриці A з коефіцієнтів a_{ij} при невідомих і матриці-стовпця з вільних елементів. Це матричний метод розв'язування системи лінійних рівнянь (метод оберненої матриці). Метод застосовний, якщо існує A^{-1} .

Розв'язання квадратної системи можна подати безпосередньо через визначники. Для системи з трьох лінійних алгебраїчних рівнянь маємо *формули Крамера* для знаходження невідомих

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

де Δ – визначник матриці A з коефіцієнтів a_{ij} при невідомих, Δ_j – визначник матриці A із заміненним j -им стовпцем на стовпець B вільних елементів.

Якщо визначник $\Delta = 0$, а хоча б один визначник Δ_j не дорівнює нулю, то система лінійних рівнянь розв'язків не має (несумісна).

Якщо $\Delta = 0$, а також $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, то система має нескінчену множину розв'язків (невизначена).

Якщо $\Delta \neq 0$, то система лінійних рівнянь має єдиний розв'язок (сумісна визначена).

Система називається однорідною, якщо всі її вільні елементи дорівнюють нулю. Однорідні системи завжди сумісні – бо мають нульовий розв'язок. Якщо визначник $\Delta \neq 0$, то нульовий розв'язок єдиний (система визначена). Якщо визначник $\Delta = 0$, то однорідна система рівнянь має ще й ненульові розв'язки (система невизначена).

Метод Гаусса (метод послідовного виключення невідомих) полягає у зведенні системи лінійних рівнянь до східчастого (верхньотрикутного) вигляду.

Зводити до східчастого вигляду зручніше розширену матрицю $\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right)$, що відповідає системі лінійних рівнянь $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases}$

При цьому застосовні такі перетворення (додавання-віднімання рядків матриці, множення-ділення рядків матриці на число, перестановки місцями рядків матриці), що дають рівноцінну систему рівнянь.

Невідомі визначаються із східчастої (верхньотрикутної) системи поступовим розв'язанням рівнянь від нижнього до верхнього з підстановкою вже знайдених невідомих.

2. Приклади виконання завдань

1. Розв'яжіть матричним методом систему рівнянь
$$\begin{cases} 3x + 5y - 2z = 5, \\ -x + 6y - z = -3, \\ 2x - y + z = 2. \end{cases}$$

Розв'язання:

Значення невідомих знайдемо за формулою
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -1 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

I. Знайдемо обернену матрицю

1) визначник
$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -1 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - (-1) \cdot 2 - 10 = 18 - 10 - 2 = 6 \neq 0,$$

обернена матриця A^{-1} існує;

2) обчислимо алгебраїчні доповнення $A_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5,$

$A_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(-1 + 2) = -1,$ $A_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 12 = -11,$

$A_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(5 - 2) = -3,$ $A_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 4 = 7,$

$A_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-3 - 10) = 13,$ $A_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = -5 + 12 = 7,$

$A_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -(-3 - 2) = 5,$ $A_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 18 + 5 = 23;$

3)
$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -11 \\ -3 & 7 & 13 \\ 7 & 5 & 23 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 7 \\ -1 & 7 & 5 \\ -11 & 13 & 23 \end{pmatrix};$$

4) обернена матриця
$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A}^T = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} 5 & -3 & 7 \\ -1 & 7 & 5 \\ -11 & 13 & 23 \end{pmatrix}.$$

II. Виконаємо множення матриць:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} 5 & -3 & 7 \\ -1 & 7 & 5 \\ -11 & 13 & 23 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} c_{11} &= 5 \cdot 5 + (-3) \cdot (-3) + 7 \cdot 2 = 25 + 9 + 14 = 48, \\ c_{21} &= -1 \cdot 5 + 7 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 = -5 - 21 + 10 = -16, \\ c_{31} &= -11 \cdot 5 + 13 \cdot (-3) + 23 \cdot 2 = -55 - 39 + 46 = -48, \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} 48 \\ -16 \\ -48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ -0,5 \\ -1,5 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $x = 1,5$, $y = -0,5$, $z = -1,5$.

2. Розв'яжіть матричним методом систему рівнянь
$$\begin{cases} x + y + 2z = 1, \\ 2x - 2y - z = 2, \\ y + z = -3. \end{cases}$$

Розв'язання:

Значення невідомих знайдемо за формулою
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

I. Знайдемо обернену матрицю:

1) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 0 + 4 - 0 + 1 - 2 = 1 \neq 0$, A^{-1} існує;

2) обчислимо алгебраїчні доповнення $A_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 1 = -1$,

$$A_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(2 - 0) = -2,$$

$$A_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2,$$

$$A_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 2) = 1,$$

$$A_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1,$$

$$A_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 0) = -1,$$

$$A_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 4 = 3,$$

$$A_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 - 4) = 5,$$

$$A_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4;$$

3) $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}$, $\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$;

4) в даному прикладі обернена матриця має вигляд $A^{-1} = \tilde{A}^T$.

II. Виконаємо множення матриць:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix},$$

$$c_{11} = -1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) = -1 + 2 - 9 = -8,$$

$$c_{21} = -2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 5 \cdot (-3) = -2 + 2 - 15 = -15,$$

$$c_{31} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 - 4 \cdot (-3) = 2 - 2 + 12 = 12,$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -15 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $x = -8, y = -15, z = 12$.

3. За допомогою формул Крамера розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 1, \\ 2x - z = 0, \\ 3x - y + z = -3. \end{cases}$$

Розв'язання:

Обчислимо визначник матриці, складеної з коефіцієнтів при невідомих:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 0 - 6 + 4 = -2,$$

замінивши перший стовпець визначника Δ на стовпець вільних коефіцієнтів,

$$\text{знайдемо } \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot A_{23} = M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7,$$

замінивши другий стовпець визначника Δ на стовпець вільних коефіцієнтів,

$$\text{знайдемо } \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 0 - 6 + 6 = 0,$$

замінивши третій стовпець визначника Δ на стовпець вільних коефіцієнтів,

$$\text{знайдемо } \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 6 + 1 \cdot 6 = 0 - 6 + 6 = 0.$$

$$\text{Тоді } x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-7}{-2} = 3.5, y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{-2} = 0, z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{-2} = 0.$$

Перевірка: $-1,4 + 8 - 5,6 = 1$; $-2,8 + 2,8 = 0$; $-4,2 + 4 - 2,8 = -3$. Невідомі знайдені правильно.

Відповідь: $x = -1,4, y = -4, z = -2,8$.

4. За допомогою формул Крамера розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 0, \\ -x - 2y - z = 1, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

Розв'язання:

Обчислимо визначник матриці, складеної з коефіцієнтів при невідомих:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 0 - 3 + 2 = -1,$$

замінивши перший стовпець визначника Δ на стовпець вільних коефіцієнтів,

$$\text{знайдемо } \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 0 - 6 + 4 = -2,$$

замінивши другий стовпець визначника Δ на стовпець вільних коефіцієнтів,

$$\text{знайдемо } \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 4 + 2 + 2 - 0 = 8,$$

замінивши третій стовпець визначника Δ на стовпець вільних коефіцієнтів,

$$\text{знайдемо } \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 3 + 0 - 0 + 1 + 6 = 6.$$

$$\text{Тоді } x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-12}{-10} = 1,2, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{8}{-10} = -0,8, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{6}{-10} = -0,6.$$

Перевірка: $1,2 - 2,4 + 1,2 = 0$; $-1,2 + 1,6 + 0,6 = 1$; $1,2 + 0,8 = 2$. Невідомі знайдені правильно.

Відповідь: $x = 1,2$, $y = -0,8$, $z = -0,6$.

$$5. \text{ За допомогою формул Крамера розв'яжіть систему рівнянь } \begin{cases} 2x - y - 2z = 7, \\ 7x - 2y - z = 2, \\ x - y + 4z = -3. \end{cases}$$

Розв'язання:

Обчислимо визначник матриці, складеної з коефіцієнтів при невідомих:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 7 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -16 + 1 + 14 - 4 - 2 + 28 = 21,$$

замінивши перший стовпець визначника Δ на стовпець вільних коефіцієнтів,

$$\text{знайдемо } \Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -56 - 3 + 4 + 12 - 7 + 8 = -42,$$

замінивши другий стовпець визначника Δ на стовпець вільних коефіцієнтів,

$$\text{знайдемо } \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 & -2 \\ 7 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 16 - 7 + 42 + 4 - 6 - 196 = -147,$$

замінивши третій стовпець визначника Δ на стовпець вільних коефіцієнтів,

$$\text{знайдемо } \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 7 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 12 - 2 - 49 + 14 + 4 - 21 = -42.$$

$$\text{Тоді } x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-42}{21} = -2, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-147}{21} = -7, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-42}{21} = -2.$$

Перевірка: $-4 + 7 + 4 = 7$; $-14 + 14 + 2 = 2$; $-2 + 7 - 8 = -3$. Невідомі знайдені правильно.

Відповідь: $x = -2$, $y = -7$, $z = -2$.

6. Розв'яжіть систему лінійних рівнянь
$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 3, \\ -y + 21z = -3, \\ 2z = -64. \end{cases}$$

Розв'язання:

Система лінійних рівнянь східчаста.

З третього рівняння маємо $z = -32$,

з другого рівняння одержимо $-y - 672 = -3$, $y = -669$,

з першого рівняння отримаємо $x - 1338 + 128 = 3$, $x = 1213$.

Відповідь: $x = 1213$, $y = -669$, $z = -32$.

7. Знайдіть методом Гаусса розв'язок системи рівнянь
$$\begin{cases} x - y + z = -1, \\ x + 2y - z = 2, \\ -x - y + 3z = 7. \end{cases}$$

Розв'язання:

Складемо розширену матрицю
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 7 \end{array} \right).$$

Перетворимо на нулі елементи першого стовпця в двох останніх рядках. Для цього від другого рядка віднімемо перший рядок, до третього рядка додамо

перший рядок:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{II-I} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{III+I} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right).$$

Перетворимо на нуль елемент другого стовпця в останньому рядку. Для цього помножимо третій рядок на 3 і додамо до нього другий рядок, маємо

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{3III+II} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{array} \right) \xrightarrow{\div 4} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

Східчастій матриці відповідає східчаста система рівнянь
$$\begin{cases} x - y + z = -1, \\ 3y - 2z = 3, \\ z = 3, \end{cases}$$

звідки $z = 3$; з другого рівняння маємо $3y - 6 = 3$, $3y = 9$, $y = 3$; з першого рівняння маємо $x - 3 + 3 = -1$, $x = -1$.

Відповідь: $x = -1$, $y = 3$, $z = 3$.

8. Знайдіть методом Гаусса розв'язок системи рівнянь
$$\begin{cases} x - y - 2z = -1, \\ x + 2y + z = -1, \\ x - 2y - z = 4. \end{cases}$$

Розв'язання:

Складемо розширену матрицю $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{array} \right).$

Помножимо другий рядок на 2 і додамо до нього перший рядок, до третього рядка додамо другий рядок, отримаємо східчасту матрицю

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{2II+I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{III-II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \div 3 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right).$$

Маємо східчасту систему рівнянь
$$\begin{cases} x - y - 2z = -1, \\ x + y = -1, \\ 2x = 3. \end{cases}$$
 3 останнього рівняння

маємо $x = 1,5$; з другого рівняння одержимо $1,5 + y = -1$, $y = -2,5$; з першого рівняння отримаємо $1,5 + 2,5 - 2z = -1$, $-2z = -5$, $z = 2,5$.

Відповідь: $x = 1,5$; $y = -2,5$; $z = 2,5$.

Методом Гаусса зручно розв'язувати несумісні та невизначені системи лінійних рівнянь.

9. Розв'яжіть систему лінійних рівнянь
$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 1, \\ 2x + y - 5z = -1, \\ x - y - z = 2. \end{cases}$$

Розв'язання:

Складемо розширену матрицю і зведемо її до східчастого вигляду

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{II-2I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{III-I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{III-II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right).$$
 Останньому

ряду східчастої матриці відповідає протиріччя $0 = 4$, система рівнянь несумісна.

Відповідь: розв'язків нема.

10. Розв'яжіть систему лінійних рівнянь
$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 1, \\ 2x + y - 5z = -1, \\ x - y - z = -2. \end{cases}$$

Розв'язання:

Складемо розширену матрицю і зведемо її до східчастого вигляду

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{II-2I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{III-I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{III-II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$
 Останньому

ряду східчастої матриці відповідає тотожність $0 = 0$, маємо систему двох

незалежних рівнянь з трьома невідомими
$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 1, \\ y - z = 1. \end{cases}$$

Позначимо $z=t$, де t – будь-яке дійсне число, тоді з другого рівняння одержимо $y-t=1$, $y=1+t$, а з першого рівняння отримаємо $x+2\cdot(1+t)-4t=1$, $x+2+2t-4t=1$, $x=2t-1$.

Відповідь: $x=2t-1$, $y=1+t$, $z=t$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайдіть розв'язки системи лінійних рівнянь матричним способом.

2. Розв'яжіть цю ж систему за формулами Крамера.

3. Розв'яжіть цю ж систему методом Гаусса.

1. $\begin{cases} x+2y+2z=3, \\ 4x-2y-5z=5, \\ 6x-y+3z=1. \end{cases}$	2. $\begin{cases} 3x+2y-z=3, \\ x-y+2z=-4, \\ 2x+2y+z=4. \end{cases}$	3. $\begin{cases} 3x+3y+2z=-1, \\ 2x+y-z=3, \\ x-2y-3z=4. \end{cases}$	4. $\begin{cases} 5x-2y+z=-1, \\ 2x+y+2z=6, \\ x-3y-z=-5. \end{cases}$
5. $\begin{cases} 3x-2y+2z=3, \\ 2x+y-z=-5, \\ 5x-y+3z=4. \end{cases}$	6. $\begin{cases} x+y-2z=1, \\ 2x+3y+z=0, \\ x-2y-z=7. \end{cases}$	7. $\begin{cases} 2x-3y+z=3, \\ x+y-2z=4, \\ 3x-2y+6z=0. \end{cases}$	8. $\begin{cases} 2x+3y-z=2, \\ x-y+3z=-4, \\ 3x+5y+z=4. \end{cases}$
9. $\begin{cases} 4x+3y-2z=-1, \\ 3x+y+z=3, \\ x-2y-3z=8. \end{cases}$	10. $\begin{cases} 2x-y+3z=1, \\ x+2y+z=8, \\ 4x-3y-2z=-1. \end{cases}$	11. $\begin{cases} 2x+3y-z=2, \\ x+2y+3z=0, \\ x-y-2z=6. \end{cases}$	12. $\begin{cases} 2x-3y+3z=0, \\ x+y-2z=-7, \\ x-2y+3z=3. \end{cases}$
13. $\begin{cases} x-3y+z=2, \\ 2x+y+3z=3, \\ 2x-y-2z=8. \end{cases}$	14. $\begin{cases} x+5y-z=-1, \\ 2x+y-2z=7, \\ x-4y+z=0. \end{cases}$	15. $\begin{cases} 2x-3y-5z=1, \\ 3x+y-2z=-4, \\ x-2y+z=5. \end{cases}$	16. $\begin{cases} x-3y-z=1, \\ 2x+y+z=-7, \\ 2x-y-3z=5. \end{cases}$
17. $\begin{cases} x-2y+z=4, \\ 2x+y+3z=5, \\ 3x+4y+z=-2. \end{cases}$	18. $\begin{cases} 3x+y-2z=1, \\ x-2y+3z=5, \\ 2x+3y-z=-4. \end{cases}$	19. $\begin{cases} 3x+y+2z=-4, \\ x-2y-z=-1, \\ 2x+3y+2z=0. \end{cases}$	20. $\begin{cases} 2x-y+3z=3, \\ x+2y+z=2, \\ x-3y+4z=-1. \end{cases}$
21. $\begin{cases} 2x+y-2z=5, \\ 3x+y+5z=7, \\ -x+3y+3z=1. \end{cases}$	22. $\begin{cases} 7x-3y-5z=2, \\ 5x+2y-2z=2, \\ 2x-y+z=8. \end{cases}$	23. $\begin{cases} 5x+y+z=4, \\ x-2y-z=-5, \\ 3x+4y+z=7. \end{cases}$	24. $\begin{cases} 3x+4y+z=1, \\ 2x+2y+3z=6, \\ 7x-6y-z=11. \end{cases}$
25. $\begin{cases} x+2y-3z=-3, \\ 2x-3y+4z=7, \\ 5x+y+z=8. \end{cases}$	26. $\begin{cases} 2x+3y+5z=5, \\ x+3y+z=-2, \\ 4x-y-4z=10. \end{cases}$	27. $\begin{cases} x-y+3z=-3, \\ 2x+2y+z=3, \\ x+4y-5z=10. \end{cases}$	28. $\begin{cases} 3x-2y-z=5, \\ 4x-5y+2z=0, \\ x+3y+z=-1. \end{cases}$
29. $\begin{cases} -2x+y+z=6, \\ 3x-4y+5z=-5, \\ 4x+3y+2z=-3. \end{cases}$	30. $\begin{cases} 3x-y-4z=-3, \\ 2x+2y-3z=1, \\ 5x+3y-7z=0. \end{cases}$	31. $\begin{cases} 2x+3y+3z=1, \\ 4x-y-2z=-6, \\ 5x+y+z=-4. \end{cases}$	32. $\begin{cases} 2x-3y+2z=2, \\ 4x+y-2z=0, \\ 6x-y+3z=13. \end{cases}$
33. $\begin{cases} 2x+2y+z=5, \\ 4x-y-5z=7, \\ 6x-y+2z=2. \end{cases}$	34. $\begin{cases} 2x+2y-z=4, \\ x-y+z=-4, \\ 2x+y+z=1. \end{cases}$	35. $\begin{cases} 2x+y+z=-1, \\ 3x+y+z=1, \\ 2x+y+2z=0. \end{cases}$	36. $\begin{cases} x-y+3z=0, \\ x+y+z=2, \\ 2x-3y+4z=2. \end{cases}$

37. $\begin{cases} 2x+4y+z=1, \\ 2x+2y+3z=-7, \\ 3x-4y-z=-1. \end{cases}$	38. $\begin{cases} 2x-3y+4z=-11 \\ x-2y-z=0, \\ 3x+y+z=-1. \end{cases}$	39. $\begin{cases} x+2y-3z=2, \\ x+5y-z=-1, \\ 2x+5y-2z=3. \end{cases}$	40. $\begin{cases} x-2y+z=3, \\ 2x+3y-z=3, \\ 3x-y-2z=4. \end{cases}$
---	---	---	---

ВЕКТОРИ. ДІЇ НАД ВЕКТОРАМИ

1. Основні поняття та теореми

Вектор – напрямлений відрізок. Вектор з початком в точці $A(x_A; y_A)$ та кінцем у точці $B(x_B; y_B)$ позначається $\overrightarrow{AB}$ і має *координати* $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$.

Вектор можна позначити $\vec{a}(a_x; a_y)$. Координати вектора – проекції вектора на координатні осі. Вектор $\vec{a}(a_x; a_y)$ можна представити як $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$.

Відстань між початком і кінцем вектора називається довжиною (або *модулем*) вектора, позначається $|\vec{a}|$ і визначається як $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

Напрямок вектора задається напрямними кутами α, β (кутами, які вектор утворює з координатними осями), косинуси яких рівні $\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}$, $\cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}$.

Лінійні операції над векторами виконуються покомпонентно:

- при додаванні векторів $\vec{a}(a_x; a_y)$, $\vec{b}(b_x; b_y)$ їхні відповідні координати додаються, тобто $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}(a_x + b_x; a_y + b_y)$;
- при відніманні векторів $\vec{a}(a_x; a_y)$, $\vec{b}(b_x; b_y)$ їхні відповідні координати віднімаються, тобто $\vec{a} - \vec{b} = \vec{d}(a_x - b_x; a_y - b_y)$;
- при множенні вектора $\vec{a}(a_x; a_y)$ на число λ кожна координата множиться на це число, тобто $\lambda \vec{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y)$.

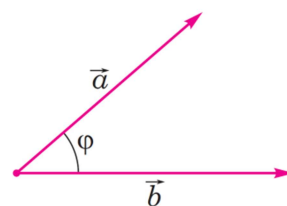
Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається добуток довжин цих векторів на косинус кута φ між ними $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$.

Умова перпендикулярності (ортогональності) двох векторів: два ненульові вектори перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли скалярний добуток їх дорівнює нулю.

Якщо два вектори задані координатами $\vec{a}(a_x; a_y)$, $\vec{b}(b_x; b_y)$, то скалярним добутком цих векторів є число, що рівне $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$.

Скалярний добуток двох векторів застосовують для визначення кута між ними (або між прямими, на яких вектора розташовані). Косинус цього кута рівний

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$



Для векторів у просторі у формулах додається ще одна координата.

Вектор $\vec{a}$ з початком в точці $(x_A; y_A; z_A)$ та кінцем у точці $(x_B; y_B; z_B)$ має координати $\vec{a}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

Для вектора $\vec{a}(a_x; a_y; a_z) = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ модуль $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$;

напрямні косинуси: $\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}$, $\cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}$, $\cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$; добуток $\vec{a}$ і скаляра λ :

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z).$$

Для векторів в просторі $\vec{a}(a_x; a_y; a_z)$ та $\vec{b}(b_x; b_y; b_z)$ сума $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}(a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z)$, різниця $\vec{a} - \vec{b} = \vec{d}(a_x - b_x; a_y - b_y; a_z - b_z)$, скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, який позначається $\vec{a} \times \vec{b}$, називається вектор, що задовольняє таким трьома умовам:

1. Модуль вектора $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta$, де θ – кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

2. Вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ перпендикулярний площині, де розташовані вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

3. Упорядкована трійка векторів $\vec{a}; \vec{b}; \vec{a} \times \vec{b}$, відкладених від однієї точки, утворює правий базис (напрямок вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ визначається за правилом буравчика).

Векторний добуток залежить від порядку множників: $\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$.

Два вектори, які лежать на паралельних прямих або на одній прямій, називаються *колінеарними* (паралельними).

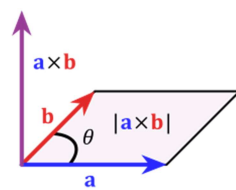
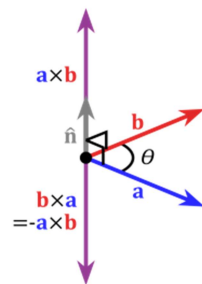
Умова *колінеарності* (паралельності) двох векторів: два ненульові вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли їхні відповідні координати пропорційні $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$. В цьому випадку модуль векторного добутку дорівнює нулю.

Векторний добуток векторів $\vec{a}(a_x; a_y; a_z)$ та $\vec{b}(b_x; b_y; b_z)$ визначається

$$\text{формулою } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Модуль векторного добутку двох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ застосовують для визначення площ паралелограма і трикутника, побудованих на цих векторах. Площі визначають за формулами: $S_{\text{паралелограма}} = |\vec{a} \times \vec{b}|$, $S_{\text{трикутника}} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$.

Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називається число рівне скалярному добутку вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ на вектор $\vec{c}$, тобто $(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.



Мішаний добуток векторів $\vec{a}(a_x; a_y; a_z)$, $\vec{b}(b_x; b_y; b_z)$, $\vec{c}(c_x; c_y; c_z)$

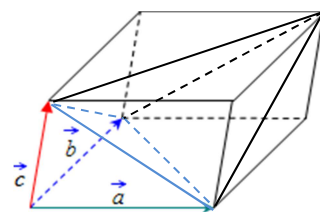
визначають як $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$.

Мішаний добуток не змінюється при круговій перестановці векторів $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = (\vec{c}\vec{a}\vec{b}) = (\vec{b}\vec{c}\vec{a})$ і змінює знак при перестановці двох векторів місцями $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = -(\vec{b}\vec{a}\vec{c})$, $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = -(\vec{a}\vec{c}\vec{b})$, $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = -(\vec{c}\vec{b}\vec{a})$.

Три вектори називаються *компланарними*, якщо вони лежать в одній площині або в паралельних площинах.

Умова компланарності трьох векторів: три вектори компланарні тоді і тільки тоді, коли їх мішаний добуток дорівнює нулю.

Мішаний добуток трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ застосовують для визначення об'єму паралелепіпеда та піраміди, побудованих на цих векторах. Об'єми визначають за формулами: $\pm V_{\text{паралелепіпеда}} = (\vec{a}\vec{b}\vec{c})$, $\pm V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{6}(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$.



2. Приклади виконання завдань

1. Дано точки на площині $A(15;-5)$, $B(3;0)$, $C(10;5)$, $D(4;-3)$. Знайдіть координати та довжини векторів $\vec{AB}$, $\vec{CD}$; вектори $2 \cdot \vec{AB}$, $-0,5 \cdot \vec{CD}$; суму, різницю, скалярний добуток векторів $\vec{AB}$, $\vec{CD}$; кут між векторами $\vec{AB}$, $\vec{CD}$.

Розв'язання:

координати векторів:

$$\vec{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A) = \vec{AB}(3 - 15; 0 + 5) = \vec{AB}(-12; 5),$$

$$\vec{CD}(x_D - x_C; y_D - y_C) = \vec{CD}(4 - 10; -3 - 5) = \vec{CD}(-6; -8);$$

довжини векторів:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{AB_x^2 + AB_y^2} = \sqrt{(-12)^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13,$$

$$|\vec{CD}| = \sqrt{CD_x^2 + CD_y^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10;$$

добутки векторів на числа:

$$2 \cdot \vec{AB} = 2 \cdot (-12; 5) = (-24; 10),$$

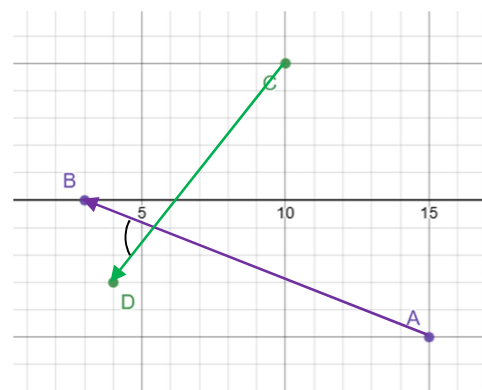
$$-0,5 \cdot \vec{CD} = -0,5 \cdot (-6; -8) = (3; 4);$$

сума і різниця векторів:

$$\vec{AB} + \vec{CD} = (-12 - 6; 5 - 8) = (-18; -3), \quad \vec{AB} - \vec{CD} = (-12 + 6; 5 + 8) = (-6; 13);$$

скалярний добуток векторів: $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = -12 \cdot (-6) + 5 \cdot (-8) = 72 - 40 = 32$;

косинус кута між векторами: $\cos \varphi = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{CD}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{CD}|} = \frac{32}{13 \cdot 10} \approx 0,246$, тоді $\varphi \approx 76^\circ$.



Відповідь: $\vec{AB}(-12; 5)$, $\vec{CD}(-6; -8)$; $|\vec{AB}| = 13$, $|\vec{CD}| = 10$; $2 \cdot \vec{AB} = (-24; 10)$,

$-0,5 \cdot \vec{CD} = (3; 4)$; сума $(-18; -3)$, різниця $(-6; 13)$; скалярний добуток 32, кут 76° .

2. Дано точки в просторі $A(-2;2;1)$, $B(2;-2;3)$ та $C(0;4;2)$. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, їхні довжини; суму, різницю, скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$; кут між векторами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Розв'язання:

координати векторів:

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = \overrightarrow{AB}(2 + 2; -2 - 2; 3 - 1) = \overrightarrow{AB}(4; -4; 2),$$

$$\overrightarrow{AC}(x_C - x_A; y_C - y_A; z_C - z_A) = \overrightarrow{AC}(0 + 2; 4 - 2; 2 - 1) = \overrightarrow{AC}(2; 2; 1);$$

довжини векторів:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{AB_x^2 + AB_y^2 + AB_z^2} = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{36} = 6,$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{AC_x^2 + AC_y^2 + AC_z^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3;$$

сума і різниця векторів:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (4 + 2; -4 + 2; 2 + 1) = \overrightarrow{(6; -2; 3)}, \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = (4 - 2; -4 - 2; 2 - 1) = \overrightarrow{(2; -6; 1)};$$

скалярний добуток: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \cdot 2 + (-4) \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 8 - 8 + 2 = 2$;

косинус кута між векторами: $\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{2}{6 \cdot 3} \approx 0,111$, тоді $\varphi \approx 84^\circ$.

Відповідь: $\overrightarrow{AB}(4; -4; 2)$, $\overrightarrow{AC}(2; 2; 1)$; $|\overrightarrow{AB}| = 6$, $|\overrightarrow{AC}| = 3$; сума $\overrightarrow{(6; -2; 3)}$, різниця $\overrightarrow{(2; -6; 1)}$; скалярний добуток 2; кут 84° .

3. Дано вектор $\vec{a}(1; -1; \sqrt{2})$. Знайдіть модуль та напрямні кути вектора.

Розв'язання:

$$\text{Модуль вектора } |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2.$$

$$\text{Направляючі косинуси: } \cos \alpha = \frac{a_x}{|a|} = \frac{1}{2}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|a|} = -\frac{1}{2}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|a|} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Направляючі кути: } \alpha = \arccos \frac{1}{2} = 60^\circ, \quad \beta = \arccos \left(-\frac{1}{2}\right) = 120^\circ, \quad \gamma = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ.$$

Відповідь: $|\vec{a}| = 2$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 45^\circ$.

4. Дано вектори $\vec{a}(7; -4; 4)$, $\vec{b}(-3; 2; 6)$, $\vec{c}(-4; 4; 2)$. Знайдіть скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$, векторний добуток $\vec{a} \times \vec{b}$, мішаний добуток $(\vec{a} \vec{b} \vec{c})$.

Розв'язання:

$$\text{Скалярний добуток } \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 7 \cdot (-3) - 4 \cdot 2 + 4 \cdot 6 = -5.$$

$$\begin{aligned} \text{Векторний добуток } \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 7 & -4 & 4 \\ -3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 7 & -4 & 4 \\ -3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 7 & -4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \underline{-24\vec{i}} - \underline{12\vec{j}} + 14\vec{k} - 12\vec{k} - \underline{8\vec{i}} - \underline{42\vec{j}} = -32\vec{i} - 54\vec{j} + 2\vec{k} = \underline{\underline{\vec{(-32; -54; 2)}}}. \end{aligned}$$

Мішаний добуток:

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \overline{(-32; -54; 2)} \cdot \overline{(-4; 4; 2)} = -32 \cdot (-4) - 54 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = -84;$$

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & -4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 28 + 96 - 48 + 32 - 168 - 24 = -84.$$

Відповідь: $\vec{a} \cdot \vec{b} = -5$; $\vec{a} \times \vec{b} = \overline{(-32; -54; 2)}$; $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = -84$.

5. Знайдіть площу паралелограма і трикутника, побудованих на векторах $\vec{a}(-2; 3; 4)$, $\vec{b}(2; 2; 1)$.

Розв'язування:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ -2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k} - 6\vec{k} - 8\vec{i} + 2\vec{j} = \overline{(-5; 10; -10)}.$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{5^2 + 10^2 + 10^2} = \sqrt{225} = 15, S_{\square} = 15 \text{ кв.од.}, S_{\Delta} = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ кв.од.}$$

Відповідь: 15; 7,5.

6. Знайдіть об'єм паралелепіпеда та об'єм піраміди, побудованих на векторах $\vec{a}(4; 1; 1)$, $\vec{b}(1; 1; 0)$, $\vec{c}(0; 0; 58)$.

Розв'язання:

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 58 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot 58 = 232 - 58 = 174, V_{\square} = 174 \text{ куб.од.}, V_{\Delta} = \frac{174}{6} = 29 \text{ куб.од.}$$

Відповідь: 174; 29.

7. Дано вершини піраміди $A(1; 2; 3)$, $B(-3; 10; 4)$, $C(8; 6; -1)$, $D(-2; 4; 9)$.

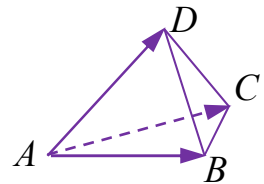
Знайдіть: 1) координати і модулі векторів $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$; 2) кут між векторами $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ (ребрами) у градусах; 3) площу грані ABC ; 4) об'єм піраміди $ABCD$.

Розв'язання:

1) $\vec{AB}(-4; 8; 1)$, $|\vec{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 8^2 + 1^2} = \sqrt{81} = 9 \text{ од.};$

$\vec{AC}(7; 4; -4)$; $|\vec{AC}| = \sqrt{7^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{81} = 9 \text{ од.};$

$\vec{AD}(-3; 2; 6)$, $|\vec{AD}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7 \text{ од.}.$



2) $\cos \varphi = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|}$, $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -4 \cdot 7 + 8 \cdot 4 + 1 \cdot (-4) = -28 + 32 - 4 = 0$, $\varphi = 90^\circ$.

3) $\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 8 & 1 \\ 7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ -4 & 8 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = -32\vec{i} + 7\vec{j} - 16\vec{k} - 56\vec{k} - 4\vec{i} - 16\vec{j} = \overline{(-36; -9; -72)}.$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-36)^2 + (-9)^2 + (-72)^2} = 9\sqrt{4^2 + 1 + 8^2} = 81, S_{ABC} = 40,5 \text{ кв.од.}$$

$$4) (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -4 & 8 & 1 \\ 7 & 4 & -4 \\ -3 & 2 & 6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -4 & 8 \\ 7 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -96 + 96 + 14 + 12 - 32 - 336 = -342,$$

$$V_{ABCD} = 57 \text{ куб.од.}$$

Відповідь: 1) $\overrightarrow{AB}(-4;8;1)$, $|\overrightarrow{AB}| = 9 \text{ од.}$; $\overrightarrow{AC}(7;4;-4)$, $|\overrightarrow{AC}| = 9 \text{ од.}$; $\overrightarrow{AD}(-3;2;6)$, $|\overrightarrow{AD}| = 7 \text{ од.}$; 2) $\varphi = 90^\circ$; 3) $S_{ABC} = 40,5 \text{ кв.од.}$; 4) $V_{ABCD} = 57 \text{ куб.од.}$

3. Завдання для самостійного виконання

1. Дано точки на площині $A(\alpha - 5; -5)$, $B(\alpha + 7; 0)$, $C(7; 5 - \alpha)$, $D(4; 1 - \alpha)$. Знайдіть координати та довжини векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$; вектори $2 \cdot \overrightarrow{AB}$, $-0,5 \cdot \overrightarrow{CD}$; суму, різницю, скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$; кут між векторами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$.

2. Дано точки в просторі $A(2; 1 + \alpha; -7)$, $B(1; 3 + \alpha; -9)$, $C(-9; \alpha - 1; 3)$. Знайдіть координати та довжини векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$; суму, різницю, скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$; кут між векторами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

3. Дано вектор $\vec{a}(-1; 0; \sqrt{3})$. Знайдіть модуль та напрямні кути вектора.

4. Дано вектори $\vec{a}(\alpha - 3; -\alpha; \alpha)$, $\vec{b}(\alpha - 7; \alpha + 2; \alpha + 6)$, $\vec{c}(-2\alpha; 2\alpha; \alpha)$. Знайдіть скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$, векторний добуток $\vec{a} \times \vec{b}$, мішаний добуток $(\vec{a} \vec{b} \vec{c})$.

5. Знайдіть площу паралелограма і трикутника, побудованих на векторах $\vec{a}(-2; -3; 4)$, $\vec{b}(2\alpha; -2\alpha; \alpha)$.

6. Знайдіть об'єм паралелепіпеда та об'єм піраміди, побудованих на векторах $\vec{a}(5; \alpha; 36)$, $\vec{b}(1; 1; 0)$, $\vec{c}(0; 0; 36)$.

7. Дано вершини піраміди A , B , C , D . Знайдіть: 1) координати і модулі векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$; 2) кут між векторами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ (ребрами) у градусах; 3) площу грані ABC ; 4) об'єм піраміди $ABCD$.

B.1. $A(-5; 0; 1)$, $B(-4; -2; 3)$, $C(6; 2; 11)$, $D(3; 4; 9)$.

B.2. $A(1; -4; 0)$, $B(2; -6; 2)$, $C(12; -2; 10)$, $D(9; 0; 8)$.

B.3. $A(-1; -2; -8)$, $B(0; -4; -6)$, $C(10; 0; 2)$, $D(7; 2; 0)$.

B.4. $A(0; 2; -10)$, $B(1; 0; -8)$, $C(11; 4; 0)$, $D(8; 6; -2)$.

B.5. $A(3; 1; -2)$, $B(4; -1; 0)$, $C(14; 3; 8)$, $D(11; 5; 6)$.

B.6. $A(-8; 3; -1)$, $B(-7; 1; 1)$, $C(3; 5; 9)$, $D(0; 7; 7)$.

B.7. $A(2; -1; -4)$, $B(3; -3; -2)$, $C(13; 1; 6)$, $D(10; 3; 4)$.

B.8. $A(-4; 5; -5)$, $B(-3; 3; -3)$, $C(7; 7; 5)$, $D(4; 9; 3)$.

B.9. $A(-2; -3; 2)$, $B(-1; -5; 4)$, $C(9; -1; 12)$, $D(6; 1; 10)$.

B.10. $A(-3; 4; -3)$, $B(-2; 2; -1)$, $C(8; 6; 7)$, $D(5; 8; 5)$.

B.11. $A(2; -3; 1)$, $B(6; 1; -1)$, $C(4; 8; -9)$, $D(2; -1; 2)$.

B.12. $A(5; -1; -4)$, $B(9; 3; -6)$, $C(7; 10; -14)$, $D(5; 1; -3)$.

B.13. $A(1; -4; 0)$, $B(5; 0; -2)$, $C(3; 7; -10)$, $D(1; -2; 1)$.

B.14. $A(-3; -6; 2)$, $B(1; -2; 0)$, $C(-1; 5; -8)$, $D(-3; -4; 3)$.

- B.15.** $A(-4;2;-1)$, $B(0;6;-3)$, $C(-2;13;-11)$, $D(-4;4;0)$.
B.16. $A(-2;5;-2)$, $B(-1;3;0)$, $C(9;7;8)$, $D(6;9;6)$.
B.17. $A(0;4;3)$, $B(4;8;1)$, $C(2;15;-7)$, $D(0;6;4)$.
B.18. $A(-2;0;-2)$, $B(2;4;-4)$, $C(0;11;-12)$, $D(-2;2;-1)$.
B.19. $A(3;3;-3)$, $B(7;7;-5)$, $C(5;14;-13)$, $D(3;5;-2)$.
B.20. $A(4;-2;5)$, $B(8;2;3)$, $C(6;9;-5)$, $D(4;0;6)$.
B.21. $A(-4;1;2)$, $B(-3;-1;4)$, $C(7;3;12)$, $D(4;5;10)$.
B.22. $A(2;-3;1)$, $B(3;-5;3)$, $C(13;-1;11)$, $D(10;1;9)$.
B.23. $A(0;-1;-7)$, $B(1;-3;-5)$, $C(11;1;3)$, $D(8;3;1)$.
B.24. $A(1;3;-9)$, $B(2;1;-7)$, $C(12;5;1)$, $D(9;7;-1)$.
B.25. $A(4;2;-1)$, $B(5;0;1)$, $C(15;4;9)$, $D(12;6;7)$.
B.26. $A(-7;4;0)$, $B(-6;2;2)$, $C(4;6;10)$, $D(1;8;8)$.
B.27. $A(3;0;-3)$, $B(4;-2;-1)$, $C(14;2;7)$, $D(11;4;5)$.
B.28. $A(-3;6;-4)$, $B(-2;4;-2)$, $C(8;8;6)$, $D(5;10;4)$.
B.29. $A(-1;-2;3)$, $B(0;-4;5)$, $C(10;0;13)$, $D(7;2;11)$.
B.30. $A(-1;1;-5)$, $B(3;5;-7)$, $C(1;12;-15)$, $D(-1;3;-4)$.

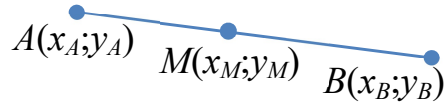
Модуль 2 «АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ» ЗАСТОСУВАННЯ КООРДИНАТ

1. Основні поняття та теореми

Відстань між точками $A(x_A; y_A)$ та $B(x_B; y_B)$ на площині визначається за формулою $d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Координати точки M , яка поділяє відрізок AB на частини у заданому відношенні $\lambda = \frac{AM}{MB}$, обчислюються за формулами $x_M = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}$, $y_M = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda}$.

Примітка: Якщо точка M – середина відрізка AB , то формули її координат мають вигляд $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$, $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$.



Приклади застосувань поділу відрізка у заданому відношенні:

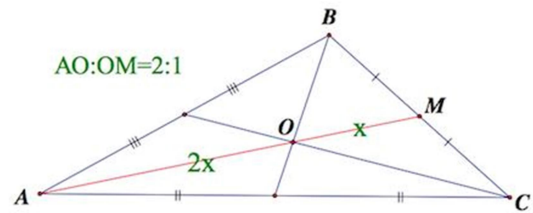
- медіана трикутника поділяє протилежну сторону навпіл;
- бісектриса трикутника поділяє протилежну сторону на два відрізки, які відносяться один до одного як відповідні бічні сторони трикутника;
- центр трикутника – точка перетину його медіан, в цій точці медіани діляться у відношенні $2 \div 1$, починаючи від вершин.

Для координат центра трикутника

$$x_O = \frac{x_A + 2x_M}{1 + 2}, \quad y_O = \frac{y_A + 2y_M}{1 + 2} \quad \text{при}$$

підстановці виразів для координат точки M як середини відрізка BC маємо формули

$$x_O = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \quad y_O = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$



Площа трикутника з вершинами $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ визначається

$$\text{за формулами } \pm S_{\Delta} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \text{ або } \pm S_{\Delta} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Приклади виконання завдань

1. Знайдіть відстань між точками $A(15; -5)$ та $B(3; 0)$; координати точок M_1 , M_2 , що поділяють відрізок AB у відношенні $3 \div 1$ та $1 \div 3$ відповідно.

Розв'язання:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(3 - 15)^2 + (0 + 5)^2} = \sqrt{(-12)^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13;$$

$$x_{M_1} = \frac{x_A + \lambda_1 x_B}{1 + \lambda_1} = \frac{15 + 3 \cdot 3}{1 + 3} = \frac{24}{4} = 6, \quad y_{M_1} = \frac{y_A + \lambda_1 y_B}{1 + \lambda_1} = \frac{-5 + 3 \cdot 0}{1 + 3} = \frac{-5}{4} = -1,25;$$

$$x_{M_2} = \frac{x_A + \lambda_2 x_B}{1 + \lambda_2} = \frac{15 + \frac{1}{3} \cdot 3}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{16}{\frac{4}{3}} = 12, \quad y_{M_2} = \frac{y_A + \lambda_2 y_B}{1 + \lambda_2} = \frac{-5 + \frac{1}{3} \cdot 0}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{-5}{\frac{4}{3}} = \frac{-15}{4}.$$

Відповідь: $d_{AB} = 13$, $M_1(6; -1,25)$, $M_2(12; -3,75)$.

2. Дано точки $A(-7;2)$, $B(3;-4)$, $C(3;8)$. Знайдіть площу і координати центра трикутника ABC .

Розв'язання:

$$\text{Площа трикутника дорівнює } \pm S_{\Delta} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3+7 & -4-2 \\ 3+7 & 8-2 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 10 & -6 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} = \frac{60+60}{2} = 60 \text{ кв.од.}$$

Координати центра трикутника становлять

$$x_O = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{-7+3+3}{3} = -\frac{1}{3}, \quad y_O = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{2-4+8}{3} = 2.$$

Відповідь: 60 кв.од. , $x_O = -\frac{1}{3}$, $y_O = 2$.

3. На координатній площині задано вершини трикутника $A(4;1)$, $B(-1;3)$, $C(2;-1)$. Знайдіть довжини медіани BM і висоти AN трикутника.

Розв'язання:

Координати точки M як середини AC : $x_M = \frac{4+2}{2} = 3$, $y_M = \frac{1-1}{2} = 0$. Тоді довжина медіани $BM = \sqrt{(3+1)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{16+9} = 5$.

Оскільки $S_{\Delta} = \frac{1}{2} BC \cdot AN$, то $AN = \frac{2S_{\Delta}}{BC}$. Площа трикутника ABC дорівнює

$$\pm S_{\Delta} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1-4 & 3-1 \\ 2-4 & -1-1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (10+4) = 7 \text{ кв.од.}$$

Довжина сторони BC :

$$BC = \sqrt{(2+1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{9+16} = 5.$$

Тоді довжина висоти: $AN = \frac{2 \cdot 7}{5} = 2,8$.

Відповідь: $BM = 5$; $AN = 2,8$.

4. На координатній площині задано вершини трикутника $A(-4;0)$, $B(-1;4)$, $C(2;-8)$. Знайдіть довжину бісектриси AD трикутника.

Розв'язання:

Бісектриса AD поділяє сторону BC у відношенні $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$. Так як

$$AB = \sqrt{(-1+4)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{9+16} = 5, \quad AC = \sqrt{(2+4)^2 + (-8-0)^2} = \sqrt{36+64} = 10,$$

то $\frac{BD}{DC} = \frac{5}{10} = 0,5 = \lambda$. Тоді $x_D = \frac{x_B + \lambda \cdot x_C}{1 + \lambda} = \frac{-1 + 0,5 \cdot 2}{1 + 0,5} = \frac{0}{1,5} = 0$,

$$y_D = \frac{y_B + \lambda \cdot y_C}{1 + \lambda} = \frac{4 + 0,5 \cdot (-8)}{1 + 0,5} = \frac{0}{1,5} = 0, \quad AD = \sqrt{(0+4)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{16+0} = 4.$$

Відповідь: $AD = 4$.

5. Вершини трикутника – точки $A(30;-25)$, $B(-28;10)$, третя вершина C лежить на осі ординат. Точка M – точка перетину медіан трикутника – лежить на осі абсцис. Знайдіть абсцису точки M і ординату точки C .

Розв'язання:

Оскільки $C \in Oy$, $M \in Ox$, то $C(0; y_C)$, $M(x_M; 0)$. Так як M – центр трикутника, то $x_M = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{30 - 28 + 0}{3} = \frac{2}{3}$; $y_M = 0 = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$, звідки $y_C = -y_A - y_B = 25 - 10 = 15$.

Відповідь: $x_M = \frac{2}{3}$; $y_C = 15$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайдіть відстань між точками $A(\alpha + 5; 2\alpha + 1)$ та $B(-2\alpha + 2; -2\alpha - 3)$; координати точок M_1, M_2 , що поділяють відрізок AB у відношенні $4 \div 1$ та $1 \div 4$ відповідно.

2. Дано точки $A(9; \alpha + 1)$, $B(2; 4 + \alpha)$, $C(4; \alpha - 2)$. Знайдіть площу і координати центра трикутника ABC .

3. На координатній площині задано вершини трикутника ABC . Знайдіть довжини медіани BM , висоти CN та бісектриси AD трикутника.

Варіант	A	B	C	Варіант	A	B	C
1.	(-3;1)	(0;5)	(6;-11)	2.	(-2;2)	(1;6)	(7;-10)
3.	(-1;3)	(2;7)	(8;-9)	4.	(0;4)	(3;8)	(9;-8)
5.	(1;5)	(4;9)	(10;-7)	6.	(2;6)	(5;10)	(11;-6)
7.	(3;7)	(6;11)	(12;-5)	8.	(4;8)	(7;12)	(13;-4)
9.	(5;9)	(8;13)	(14;-3)	10.	(-3;1)	(6;-11)	(0;5)
11.	(-2;2)	(7;-10)	(1;6)	12.	(-1;3)	(8;-9)	(2;7)
13.	(0;4)	(9;-8)	(3;8)	14.	(1;5)	(10;-7)	(4;9)
15.	(2;6)	(11;-6)	(5;10)	16.	(3;7)	(12;-5)	(6;11)
17.	(4;8)	(13;-4)	(7;12)	18.	(5;9)	(14;-3)	(8;13)
19.	(-4;0)	(2;-8)	(-1;4)	20.	(-3;1)	(3;-7)	(0;5)
21.	(-2;2)	(4;-6)	(1;6)	22.	(-1;3)	(5;-5)	(2;7)
23.	(0;4)	(6;-4)	(3;8)	24.	(1;5)	(7;-3)	(4;9)
25.	(2;6)	(8;-2)	(5;10)	26.	(3;7)	(9;-1)	(6;11)
27.	(4;8)	(10;0)	(7;12)	28.	(5;9)	(11;1)	(8;13)
29.	(6;10)	(12;2)	(9;14)	30.	(7;11)	(13;3)	(10;15)

ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ

1. Основні поняття та теореми

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом має вигляд $y = kx + b$, де $k = \operatorname{tg} \alpha$ – кутовий коефіцієнт прямої, тобто тангенс кута, який утворює пряма з додатним напрямком осі Ox , причому цей кут відраховується від осі Ox до прямої проти руху годинникової стрілки; b – початкова ордината прямої, тобто ордината точки, в якій пряма перетинає вісь Oy .

Рівняння прямої, що проходить через задану точку $(x_0; y_0)$ в заданому напрямі, який визначається кутовим коефіцієнтом k , має вигляд $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Кутовий коефіцієнт прямої, якщо відомі дві її точки $(x_1; y_1)$ та $(x_2; y_2)$, можна знайти за формулою $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Рівняння прямої, що проходить через дві

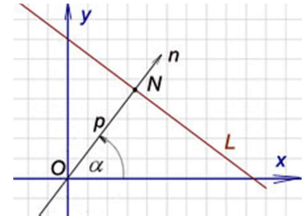
точки, має вигляд $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, звідки канонічне рівняння $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m}$, де $\overrightarrow{(l; m)}$ – спрямовуючий вектор прямої.

Рівняння прямої у відрізках на осях $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, де a, b – відрізки, які пряма відтинає від початку координат відповідно на осі абсцис та осі ординат.

Всі наведені рівняння прямої можна звести до загального рівняння прямої $Ax + By + C = 0$, вектор $\vec{n}(A; B)$ – є нормаллю (перпендикуляром) до прямої.

Із загального рівняння прямої можна визначити кутовий коефіцієнт прямої $k = -\frac{A}{B}$ та початкову ординату прямої $b = -\frac{C}{B}$.

Нормальне рівняння прямої зарисується у вигляді $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$, де p – довжина перпендикуляра, який проведено з початку координат до прямої, α – кут, який цей перпендикуляр утворює з додатнім напрямком осі Ox і відлічується від осі проти годинникової стрілки.



Для приведення загального рівняння до нормального вигляду його множать на нормуючий множник $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ із знаком протилежним знаку C .

Координати точки перетину двох прямих є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$ Прямі перетинаються, якщо $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$, оскільки тоді система має єдиний розв'язок. Якщо система не має розв'язків, то прямі паралельні. Якщо система має безліч розв'язків, то прямі збігаються.

Кут φ між прямими визначається за формулою $\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$ (це формула

кута, що вимірюється від першої прямої до другої проти ходу годинникової стрілки). Якщо прямі задані загальними рівняннями, то кут між прямими можна

знайти як $\cos \varphi = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$.

Дві прямі паралельні на площині, якщо $k_2 = k_1$ або $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.

Дві прямі перпендикулярні на площині, якщо $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ або $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$.

Відстань від точки $(x_0; y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ рівна $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

2. Приклади виконання завдань

1. Дано точки $A(8;-3)$, $B(-4;6)$. Знайдіть канонічне і загальне рівняння прямої AB , кутовий коефіцієнт прямої, точки перетину прямої з осями координат, відстань від прямої до початку координат.

Розв'язання:

З $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ отримаємо рівняння прямої AB через дві точки

$$\frac{x-8}{-4-8} = \frac{y+3}{6+3}, \text{ звідки канонічне рівняння } \frac{x-8}{-12} = \frac{y+3}{9} \text{ або } \frac{x-8}{-4} = \frac{y+3}{3}.$$

Помножимо обидві частини на -12 , маємо $3(x-8) = -4(y+3)$, $3x-24 = -4y-12$, звідки загальне рівняння прямої $3x+4y-12=0$.

Виразимо y , отримаємо рівняння з кутовим коефіцієнтом: $4y = -3x+12$, $y = -\frac{3}{4}x+3$; отже, кутовий коефіцієнт прямої $k_{AB} = -\frac{3}{4}$.

Точки перетину з осями можна визначити з рівняння прямої у відрізках на осях $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Із загального рівняння маємо $3x+4y=12$, $\frac{3x}{12} + \frac{4y}{12} = 1$, $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$. Звідки координати точок перетину прямої з осями: $(4;0)$, $(0;3)$.

Координати точок перетину з осями можна визначити, наприклад, з рівняння $3x+4y-12=0$:

$x=0$, тоді $4y=12$, $y=3$, точка перетину з віссю ординат $(0;3)$;

$y=0$, тоді $3x=12$, $x=4$, точка перетину з віссю абсцис $(4;0)$.

Для отримання нормального рівняння помножимо загальне рівняння $3x+4y-12=0$ на нормуючий множник $\mu = +\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{1}{5}$, бо $\underbrace{3x}_A + \underbrace{4y}_B - \underbrace{12}_C = 0$, маємо $\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{12}{5} = 0$. Відстань від прямої до початку координат становить

$$d = p = 2,4.$$

Відповідь: $\frac{x-8}{-12} = \frac{y+3}{9}$; $3x+4y-12=0$; $k_{AB} = -\frac{3}{4}$; $(4;0)$; $(0;3)$; $d = 2,4$.

2. Для чотирикутника з вершинами $A(-2;14)$, $B(4;-2)$, $C(6;-2)$, $D(6;10)$ знайдіть точку перетину діагоналей.

Розв'язання:

Рівняння AC : $\frac{x-x_A}{x_C-x_A} = \frac{y-y_A}{y_C-y_A}$; $\frac{x+2}{6+2} = \frac{y-14}{-2-14}$; $\frac{x+2}{8} = \frac{y-14}{-16}$ $\cdot 16$;
 $2(x+2) = -(y-14)$; $2x+4 = -y+14$; $2x+4+y-14=0$; $2x+y-10=0$.

Рівняння BD : $\frac{x-x_B}{x_D-x_B} = \frac{y-y_B}{y_D-y_B}$; $\frac{x-4}{6-4} = \frac{y+2}{10+2}$; $\frac{x-4}{2} = \frac{y+2}{12}$ $\cdot 12$;
 $6(x-4) = y+2$; $6x-24 = y+2$; $6x-24-y-2=0$; $6x-y-26=0$.

Точка перетину прямих є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} 2x + y - 10 = 0, \\ 6x - y - 26 = 0; \end{cases} | +$

звідки $8x - 36 = 0$, $x_{\times} = \frac{36}{8} = \frac{9}{2} = 4,5$; тоді $2 \cdot 4,5 + y - 10 = 0$, $9 + y - 10 = 0$, $y_{\times} = 1$.

Відповідь: (4,5; 1).

3. Знайдіть кут між прямими а) $5x - y + 7 = 0$ і $3x + 2y = 0$; б) $\sqrt{3}x + y + 7 = 0$ і $x + \sqrt{3}y = 0$; в) $\sqrt{3}x - y + 7 = 0$ і $\sqrt{3}x + y = 0$.

Розв'язання:

а) I метод: застосуємо формулу $\cos \varphi = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$. Оскільки

$$\underbrace{5x}_{A_1} - \underbrace{1y}_{B_1} + 7 = 0, \quad \underbrace{3x}_{A_2} + \underbrace{2y}_{B_2} = 0, \quad \text{то} \quad \cos \varphi = \frac{|5 \cdot 3 + (-1) \cdot 2|}{\sqrt{5^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{13}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

звідки $\varphi = 45^\circ$.

II метод: застосуємо формулу $\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$. Оскільки кутові коефіцієнти

$$\text{прямих } k_1 = -\frac{A_1}{B_1} = 5, \quad k_2 = -\frac{A_2}{B_2} = -\frac{3}{2}, \quad \text{то} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{-1,5 - 5}{1 + 5 \cdot (-1,5)} = \frac{-6,5}{-6,5} = 1, \quad \text{звідки } \varphi = 45^\circ.$$

б) Із загальних рівнянь прямих маємо $\underbrace{\sqrt{3}x}_{A_1} + \underbrace{1y}_{B_1} + 7 = 0$, $\underbrace{1x}_{A_2} + \underbrace{\sqrt{3}y}_{B_2} = 0$, тоді

$$\cos \varphi = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = \frac{|\sqrt{3} \cdot 3 + 1 \cdot \sqrt{3}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \varphi = 30^\circ.$$

в) Оскільки кутові коефіцієнти прямих $k_1 = -\frac{A_1}{B_1} = \sqrt{3}$, $k_2 = -\frac{A_2}{B_2} = -\sqrt{3}$, то

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{-\sqrt{3} - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3} \cdot (-\sqrt{3})} = \frac{-2\sqrt{3}}{1 - 3} = \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3}, \quad \text{звідки } \varphi = 60^\circ.$$

Відповідь: а) 45° ; б) 30° ; в) 60° .

4. Дано вершини $A(5;0)$, $B(0;1)$, $C(3;3)$ трикутника. Знайдіть рівняння сторін та кути трикутника.

$$AB: \frac{x-5}{0-5} = \frac{y-0}{1-0}; \frac{x-5}{-5} = \frac{y}{1}; x-5 = -5y; x+5y-5=0; k_{AB} = -\frac{1}{5}.$$

$$BC: \frac{x-0}{3-0} = \frac{y-1}{3-1}; \frac{x}{3} = \frac{y-1}{2}; 2x = 3(y-1); 2x-3y+3=0; k_{BC} = \frac{2}{3}.$$

$$AC: \frac{x-5}{3-5} = \frac{y-0}{3-0}; \frac{x-5}{-2} = \frac{y}{3}; 3(x-5) = -2y; 3x+2y-15=0; k_{AC} = -\frac{3}{2}.$$

$$\text{Для } \angle A \text{ маємо } \operatorname{tg} A = \frac{k_{AB} - k_{AC}}{1 + k_{AC} k_{AB}} = \frac{-0,2 - (-1,5)}{1 + (-1,5)(-0,2)} = \frac{-0,2 + 1,5}{1 + 0,3} = \frac{1,3}{1,3} = 1,$$

$\angle A = 45^\circ$.

$\angle C = 90^\circ$, бо k_{BC} і k_{AC} взаємно обернені та з протилежними знаками.

Так як $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$, то $\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C = 45^\circ$.

Відповідь: $x + 5y - 5 = 0$; $2x - 3y + 3 = 0$; $3x + 2y - 15 = 0$; $\angle A = 45^\circ$; $\angle B = 45^\circ$; $\angle C = 90^\circ$.

5. Напишіть рівняння прямої, що проходить а) через точку $(-1; 4)$ паралельно прямій $3x + 2y - 7 = 0$; б) через точку $(-2; 3)$ перпендикулярно прямій $4x - 5y + 6 = 0$.

Розв'язання:

Застосуємо рівняння прямої, що проходить через дану точку в даному напрямі $y - y_0 = k(x - x_0)$.

а) З рівняння $\underbrace{3x}_A + \underbrace{2y}_B - 7 = 0$ маємо кутовий коефіцієнт $k = -\frac{A}{B} = -\frac{3}{2}$.

Шукана пряма паралельна даній, тому $k_{\parallel} = k = -\frac{3}{2}$. Маємо $y - 4 = -\frac{3}{2}(x + 1)$; $2(y - 4) = -3(x + 1)$; $2y - 8 = -3x - 3$; $3x + 2y - 5 = 0$.

б) З рівняння $\underbrace{4x}_A - \underbrace{5y}_B + 6 = 0$ маємо кутовий коефіцієнт $k = -\frac{A}{B} = \frac{4}{5}$.

Шукана пряма перпендикулярна даній, тому $k_{\perp} = -\frac{1}{k} = -\frac{5}{4}$. Маємо $y - 3 = -\frac{5}{4}(x + 2)$; $4(y - 3) = -5(x + 2)$; $4y - 12 = -5x - 10$; $5x + 4y - 2 = 0$.

Відповідь: а) $3x + 2y - 5 = 0$; б) $5x + 4y - 2 = 0$.

6. Знайдіть відстань а) від прямої $3x - 4y + 6 = 0$ до точки $(-1; 2)$; б) від прямої $3x - y = 0$ до точки $(-4; -2)$.

Розв'язання:

$$\text{а) } d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3x_0 - 4y_0 + 6|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|3 \cdot (-1) - 4 \cdot 2 + 6|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|-3 - 8 + 6|}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1;$$

$$\text{б) } d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3x_0 - y_0|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{|3 \cdot (-4) - (-2)|}{\sqrt{9 + 1}} = \frac{|-12 + 2|}{\sqrt{10}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}.$$

Відповідь: а) 1; б) $\sqrt{10}$.

7. Точки $A(1; -3)$, $B(3; 1)$, $C(-4; 7)$ – вершини трикутника ABC . Складіть рівняння висоти CD та знайдіть її довжину.

Розв'язання:

Висота CD перпендикулярна стороні AB .

Знайдемо рівняння прямої AB : $\frac{x-1}{3-1} = \frac{y+3}{1+3}$; $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4}$; $2(x-1) = y+3$;

$2x - 2 = y + 3$; $2x - y - 5 = 0$; $y = 2x - 5$. Оскільки $k_{AB} = 2$, то кутовий коефіцієнт висоти $k_{CD} = -\frac{1}{2}$.

Висота CD проходить через точку $C(-4;7)$. Застосуємо рівняння прямої у вигляді $y - y_0 = k(x - x_0)$, тоді рівняння висоти $y - 7 = -\frac{1}{2}(x + 4)$, $2(y - 7) = -(x + 4)$, $2y - 14 = -x - 4$, $x + 2y - 10 = 0$.

Довжина висоти CD – це відстань від точки $C(-4;7)$ до прямої $2x - y - 5 = 0$, отже маємо $d = \frac{|2x_0 - y_0 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|2(-4) - 7 - 5|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|-8 - 7 - 5|}{\sqrt{5}} = \frac{20}{\sqrt{5}} = \frac{20\sqrt{5}}{5} = 4\sqrt{5}$.

Відповідь: $x + 2y - 10 = 0$; $4\sqrt{5}$.

8. Задано координати вершин трикутника $A(-7;7)$, $B(8;-7)$, $C(9;18)$. Знайдіть: 1) довжини та рівняння сторін трикутника, їхні кутові коефіцієнти; 2) величину кута B ; 3) рівняння висоти CD та її довжину; 4) рівняння медіани AE та координати точки P перетину медіани з висотою CD ; 5) рівняння прямої p , що проходить через точку P паралельно до сторони AB .

Розв'язання:

1) Довжини сторін трикутника:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(8 - (-7))^2 + ((-7) - 7)^2} = \sqrt{15^2 + (-14)^2} = \sqrt{421} \approx 20,52,$$

$$d_{BC} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(9 - 8)^2 + (18 - (-7))^2} = \sqrt{1^2 + 25^2} = \sqrt{626} \approx 25,02,$$

$$d_{CA} = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(9 + 7)^2 + (18 - 7)^2} = \sqrt{16^2 + 11^2} = \sqrt{377} \approx 19,42.$$

Рівняння сторін знайдемо як рівняння прямих через дві точки:

$$AB: \frac{x+7}{8+7} = \frac{y-7}{-7-7}, \quad \frac{x+7}{15} = \frac{y-7}{-14}, \quad 14(x+7) = -15(y-7), \quad 14x+98 = -15y+105,$$

$$14x+15y-7=0, \quad k_{AB} = -\frac{14}{15};$$

$$BC: \frac{x-8}{9-8} = \frac{y+7}{18+7}; \quad \frac{x-8}{1} = \frac{y+7}{25}; \quad 25(x-8) = y+7, \quad 25x-200 = y+7,$$

$$25x-y-207=0, \quad k_{BC} = 25;$$

$$AC: \frac{x+7}{9+7} = \frac{y-7}{18-7}, \quad \frac{x+7}{16} = \frac{y-7}{11}, \quad 11(x+7) = 16(y-7), \quad 11x+77 = 16y-112,$$

$$11x-16y+189=0, \quad k_{AC} = \frac{11}{16}.$$

2) Шукаємо кут B . Це кут між прямими AB та BC . Так як $k_{AB} = -\frac{14}{15}$,

$$k_{BC} = 25, \text{ то } \operatorname{tg} B = \frac{k_{AB} - k_{BC}}{1 + k_{BC}k_{AB}} = \frac{-\frac{14}{15} - 25}{1 + \left(-\frac{14}{15}\right) \cdot 25} = \frac{-14 - 25 \cdot 15}{15 - 14 \cdot 25} = \frac{-389}{-335} \approx 1,16, \quad \angle B \approx 49^\circ.$$

3) Висота CD перпендикулярна стороні AB , тоді $k_{CD} = -\frac{1}{k_{AB}} = \frac{15}{14}$.

Підставимо в рівняння $y - y_0 = k(x - x_0)$ координати точки C та кутовий коефіцієнт висоти, дістанемо $y - 18 = \frac{15}{14}(x - 9)$, $14(y - 18) = 15(x - 9)$, $14y - 252 = 15x - 135$, $15x - 14y + 117 = 0$.

Довжина висоти CD – це відстань від точки $C(9;18)$ до прямої AB із загальним рівнянням $14x + 15y - 7 = 0$: $d_{CD} = \frac{|14 \cdot 9 + 15 \cdot 18 - 7|}{\sqrt{14^2 + 15^2}} = \frac{389}{\sqrt{421}} \approx 18,96$.

4) Медіана AE проведена до сторони BC . Точка E є серединою BC . Координати точки E : $x_E = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{8 + 9}{2} = 8,5$; $y_E = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-7 + 18}{2} = 5,5$.

Рівняння медіани AE , що проходить через точки $A(-7;7)$ і $E(8,5;5,5)$: $\frac{x+7}{8,5+7} = \frac{y-7}{5,5-7}$, $\frac{x+7}{15,5} = \frac{y-7}{-1,5}$, $\frac{x+7}{-31} = \frac{y-7}{3}$, $3x + 21 = -31y + 217$, $3x + 31y - 196 = 0$.

Щоб знайти координати точки P перетину висоти CD та медіани AE , розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} 15x - 14y + 117 = 0, \\ 3x + 31y - 196 = 0; \end{cases} \cdot 5 \quad \begin{cases} 15x - 14y + 117 = 0, \\ 15x + 155y - 980 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -169y + 1097 = 0, \\ y_P = \frac{1097}{169} \approx 6,49, \end{cases}$ тоді з $3x + 31y - 196 = 0$ маємо $3x + 31 \cdot 6,49 - 196 \approx 0$, звідки $3x \approx -5,19$, $x_P \approx -1,73$, $P(-1,73;6,49)$.

5) Пряма p паралельна до сторони AB , тому $k_{PL} = k_{AB} = -\frac{14}{15}$. Підставляючи в рівняння $y - y_0 = k(x - x_0)$ координати точки P та кутовий коефіцієнт прямої p , маємо $y - 6,49 = -\frac{14}{15}(x + 1,73)$ або $14x + 15y - 73,13 = 0$.

Відповідь: 1) $d_{AB} \approx 20,52$, $14x + 15y - 7 = 0$, $k_{AB} = -\frac{14}{15}$; $d_{BC} \approx 25,02$, $25x - y - 207 = 0$, $k_{BC} = 25$; $d_{AC} \approx 19,42$, $11x - 16y + 189 = 0$, $k_{AC} = \frac{11}{16}$; 2) $\angle B \approx 49^\circ$; 3) $15x - 14y + 117 = 0$, $d_{CD} \approx 18,96$; 4) $3x + 31y - 196 = 0$, $P(-1,73;6,49)$; 5) $14x + 15y - 73,13 = 0$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайдіть кут між прямими а) $5x + y - 7 = 0$ та $2x + 3y = 0$; б) $\sqrt{3}x + y + 7 = 0$ та $\sqrt{3}x - y = 0$; в) $\sqrt{3}x - y + 7 = 0$ та $x - \sqrt{3}y = 0$.

2. Напишіть рівняння прямої, що проходить через точку $(2;1)$ а) паралельно прямій $3x - 5y + 1 = 0$; б) перпендикулярно прямій $3x - 5y + 1 = 0$.

3. Знайдіть відстань а) від прямої $3x - 4y + 6 = 0$ до точки $(4;2)$; б) від прямої $7x - y - 6 = 0$ до точки $(-3;-2)$.

4. Дано вершини A , B , C трикутника. Знайдіть рівняння висоти CD та її довжину.

Підставимо в рівняння $y - y_0 = k(x - x_0)$ координати точки C та кутовий коефіцієнт висоти, дістанемо $y - 18 = \frac{15}{14}(x - 9)$, $14(y - 18) = 15(x - 9)$, $14y - 252 = 15x - 135$, $15x - 14y + 117 = 0$.

Довжина висоти CD – це відстань від точки $C(9;18)$ до прямої AB із загальним рівнянням $14x + 15y - 7 = 0$: $d_{CD} = \frac{|14 \cdot 9 + 15 \cdot 18 - 7|}{\sqrt{14^2 + 15^2}} = \frac{389}{\sqrt{421}} \approx 18,96$.

4) Медіана AE проведена до сторони BC . Точка E є серединою BC . Координати точки E : $x_E = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{8 + 9}{2} = 8,5$; $y_E = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-7 + 18}{2} = 5,5$.

Рівняння медіани AE , що проходить через точки $A(-7;7)$ і $E(8,5;5,5)$: $\frac{x+7}{8,5+7} = \frac{y-7}{5,5-7}$, $\frac{x+7}{15,5} = \frac{y-7}{-1,5}$, $\frac{x+7}{-31} = \frac{y-7}{3}$, $3x + 21 = -31y + 217$, $3x + 31y - 196 = 0$.

Щоб знайти координати точки P перетину висоти CD та медіани AE , розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} 15x - 14y + 117 = 0, \\ 3x + 31y - 196 = 0; \end{cases} \cdot 5 \quad \begin{cases} 15x - 14y + 117 = 0, \\ 15x + 155y - 980 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -169y + 1097 = 0, \\ y_P = \frac{1097}{169} \approx 6,49, \end{cases}$ тоді з $3x + 31y - 196 = 0$ маємо $3x + 31 \cdot 6,49 - 196 \approx 0$, звідки $3x \approx -5,19$, $x_P \approx -1,73$, $P(-1,73;6,49)$.

5) Пряма p паралельна до сторони AB , тому $k_{PL} = k_{AB} = -\frac{14}{15}$. Підставляючи в рівняння $y - y_0 = k(x - x_0)$ координати точки P та кутовий коефіцієнт прямої p , маємо $y - 6,49 = -\frac{14}{15}(x + 1,73)$ або $14x + 15y - 73,13 = 0$.

Відповідь: 1) $d_{AB} \approx 20,52$, $14x + 15y - 7 = 0$, $k_{AB} = -\frac{14}{15}$; $d_{BC} \approx 25,02$, $25x - y - 207 = 0$, $k_{BC} = 25$; $d_{AC} \approx 19,42$, $11x - 16y + 189 = 0$, $k_{AC} = \frac{11}{16}$; 2) $\angle B \approx 49^\circ$; 3) $15x - 14y + 117 = 0$, $d_{CD} \approx 18,96$; 4) $3x + 31y - 196 = 0$, $P(-1,73;6,49)$; 5) $14x + 15y - 73,13 = 0$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайдіть кут між прямими а) $5x + y - 7 = 0$ та $2x + 3y = 0$; б) $\sqrt{3}x + y + 7 = 0$ та $\sqrt{3}x - y = 0$; в) $\sqrt{3}x - y + 7 = 0$ та $x - \sqrt{3}y = 0$.

2. Напишіть рівняння прямої, що проходить через точку $(2;1)$ а) паралельно прямій $3x - 5y + 1 = 0$; б) перпендикулярно прямій $3x - 5y + 1 = 0$.

3. Знайдіть відстань а) від прямої $3x - 4y + 6 = 0$ до точки $(4;2)$; б) від прямої $7x - y - 6 = 0$ до точки $(-3;-2)$.

4. Дано вершини A , B , C трикутника. Знайдіть рівняння висоти CD та її довжину.

5. Дано вершини трикутника ABC . Знайдіть: 1) довжини та рівняння сторін трикутника, їхні кутові коефіцієнти; 2) величину кута B ; 3) рівняння висоти CD та її довжину; 4) рівняння медіани AE та координати точки P перетину медіани з висотою CD ; 5) рівняння прямої PL , що паралельна до сторони AB .

Варіант	A	B	C	Варіант	A	B	C
1	(-3;1)	(0;5)	(6;-11)	2	(-2;2)	(1;6)	(7;-10)
3	(-1;3)	(2;7)	(8;-9)	4	(0;4)	(3;8)	(9;-8)
5	(1;5)	(4;9)	(10;-7)	6	(2;6)	(5;10)	(11;-6)
7	(3;7)	(6;11)	(12;-5)	8	(4;8)	(7;12)	(13;-4)
9	(5;9)	(8;13)	(14;-3)	10	(-3;1)	(6;-11)	(0;5)
11	(-2;2)	(7;-10)	(1;6)	12	(-1;3)	(8;-9)	(2;7)
13	(0;4)	(9;-8)	(3;8)	14	(1;5)	(10;-7)	(4;9)
15	(2;6)	(11;-6)	(5;10)	16	(3;7)	(12;-5)	(6;11)
17	(4;8)	(13;-4)	(7;12)	18	(5;9)	(14;-3)	(8;13)
19	(-4;0)	(2;-8)	(-1;4)	20	(-3;1)	(3;-7)	(0;5)
21	(-2;2)	(4;-6)	(1;6)	22	(-1;3)	(5;-5)	(2;7)
23	(0;4)	(6;-4)	(3;8)	24	(1;5)	(7;-3)	(4;9)
25	(2;6)	(8;-2)	(5;10)	26	(3;7)	(9;-1)	(6;11)
27	(4;8)	(10;0)	(7;12)	28	(5;9)	(11;1)	(8;13)
29	(6;10)	(12;2)	(9;14)	30	(7;11)	(13;3)	(10;15)

ПЛОЩИНА ЯК ПОВЕРХНЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

1. Основні поняття та теореми

Площина – найпростіша поверхня. Рівняння площини – рівняння першого порядку. Рівняння площини можна записати у різних виглядах.

Загальне рівняння площини $Ax + By + Cz + D = 0$, де A, B, C – координати вектора нормалі $\vec{n}$. Нормаль – перпендикуляр до поверхні. Нормаль визначає орієнтацію площини в просторі.

Рівняння площини, яка проходить через дану точку $(x_0; y_0; z_0)$ в даному напрямі (напрямок визначає нормаль до площини $\vec{n}$), записується як $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Рівняння площини, яка проходить через три задані точки $(x_1; y_1; z_1)$,

$$(x_2; y_2; z_2), (x_3; y_3; z_3) \text{ має вигляд } \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Рівняння площини у відрізках на координатних осях $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ вказує, що площина відтинає на координатних осях такі відрізки: a – на осі Ox , b – на осі Oy , а c – на осі Oz .

Нормальне рівняння площини має вигляд $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$, де α, β, γ – кути, що перпендикуляр, проведений з початку відліку на площину, утворює з координатними осями, p – довжина цього перпендикуляра.

Для приведення загального рівняння до нормального вигляду його потрібно помножити на нормуючий множник $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ (знак множника протилежний знаку коефіцієнта D у загальному рівнянні).

Кут між площинами $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ рівний куту між нормальними цим площинам і визначається формулою

$$\cos \varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Умова паралельності двох площин має вигляд $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Умова перпендикулярності площин має вигляд $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Відстань від точки $(x_0; y_0; z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ визначається за формулою $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

2. Приклади виконання завдань

1. Складіть рівняння площини, що проходить через точку $(2; 1; -1)$ і має нормаль $(1; -2; 3)$. Які відрізки відтинає площина на координатних осях?

Розв'язання:

Застосуємо рівняння площини, яка проходить через точку $(x_0; y_0; z_0)$ і має вектор нормалі $\vec{n}(A; B; C)$, тобто $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Маємо $1(x - 2) - 2(y - 1) + 3(z + 1) = 0$. Розкриємо дужки $x - 2 - 2y + 2 + 3z + 3 = 0$, зведемо подібні доданки $x - 2y + 3z + 3 = 0$. Це загальне рівняння площини.

Перетворимо рівняння до вигляду $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Для цього перенесемо 3 вправо, маємо $x - 2y + 3z = -3$; поділимо на -3 обидві частини рівняння, отримаємо $\frac{x}{-3} - \frac{2y}{-3} + \frac{3z}{-3} = \frac{-3}{-3}$, виконаємо скорочення в межах кожного дробу $\frac{x}{-3} + \frac{y}{1,5} + \frac{z}{-1} = 1$. Звідки видно, що площина відтинає відрізок $a = -3$ на осі абсцис, відрізок $b = 1,5$ на осі ординат, відрізок $c = -1$ на осі аплікат.

Відповідь: $x - 2y + 3z + 3 = 0$; $a = -3$, $b = 1,5$, $c = -1$.

2. Яка відстань від площини $10x + 15y - 6z - 380 = 0$ до початку відліку?

Розв'язання:

Перетворимо загальне рівняння площини в нормальне. Оскільки $A = 10$, $B = 15$, $C = -6$, $D < 0$, то нормуючий множник $\mu = + \frac{1}{\sqrt{10^2 + 15^2 + (-6)^2}} = \frac{1}{19}$,

нормальне рівняння площини $\frac{10}{19}x + \frac{15}{19}y - \frac{6}{19}z - 20 = 0$, звідки $p = 20$.

Відповідь: 20.

3. Які кути з координатними осями утворює перпендикуляр до площини $x - y + \sqrt{2}z - 2 = 0$, проведений з початку відліку?

Розв'язання:

Перетворимо загальне рівняння площини в нормальне. Оскільки $A=1$, $B=-1$, $C=\sqrt{2}$, $D<0$, то нормуючий множник $\mu = +\frac{1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (\sqrt{2})^2}} = \frac{1}{2}$,

нормальне рівняння площини має вигляд $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z - 1 = 0$, де $\cos \alpha = \frac{1}{2}$,

$\cos \beta = -\frac{1}{2}$, $\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$, звідки отримаємо кути, які перпендикуляр до площини утворює з координатними осями: $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 45^\circ$.

Відповідь: $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 45^\circ$.

4. Складіть рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(2;2;-4)$, $M_2(1;1;2)$, $M_3(3;0;-1)$.

Розв'язання:

Застосуємо рівняння площини, що проходить через три точки, тобто

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad \text{Підставимо координати точок, отримаємо}$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z+4 \\ 1-2 & 1-2 & 2+4 \\ 3-2 & 0-2 & -1+4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{або} \quad \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z+4 \\ -1 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриємо визначник будь-яким способом $\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z+4 \\ -1 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x-2 & y-2 \\ -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$

Отримаємо $-3(x-2) + 6(y-2) + 2(z+4) + 1(z+4) + 12(x-2) + 3(y-2) = 0$ або $9(x-2) + 9(y-2) + 3(z+4) = 0$, поділимо на спільний дільник коефіцієнтів дужок $3(x-2) + 3(y-2) + (z+4) = 0$, розкриємо дужки $3x - 6 + 3y - 6 + z + 4 = 0$, зведемо подібні доданки $3x + 3y + z - 8 = 0$. Отримали загальне рівняння площини.

Підставивши координати заданих точок у знайдене рівняння площини $3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + (-4) - 8 \equiv 0$, $3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2 - 8 \equiv 0$, $3 \cdot 3 + 3 \cdot 0 + (-1) - 8 \equiv 0$, переконаємось, що загальне рівняння площини знайдено вірно.

Відповідь: $3x + 3y + z - 8 = 0$.

5. Задано точки $M_1(-1;1;-2)$, $M_2(1;0;4)$, $M_3(3;2;1)$. Знайдіть загальне та нормальне рівняння площини, що проходить через ці точки; запишіть вектор нормалі до площини.

Розв'язання:

Підставивши координати заданих точок у рівняння площини, що проходить

через три точки, маємо $\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z+2 \\ 1+1 & 0-1 & 4+2 \\ 3+1 & 2-1 & 1+2 \end{vmatrix} = 0$ або $\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z+2 \\ 2 & -1 & 6 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$.

Для отримання загального рівняння розкриємо визначник

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z+2 \\ 2 & -1 & 6 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x+1 & y-1 \\ 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -3(x+1) + 24(y-1) + 2(z+2) + 4(z+2) - 6(x+1) - 6(y-1) = 0;$$

перетворимо $-9(x+1) + 18(y-1) + 6(z+2) = 0$, $3(x+1) - 6(y-1) - 2(z+2) = 0$,
 $3x + 3 - 6y + 6 - 2z - 4 = 0$, $3x - 6y - 2z + 5 = 0$.

Підставивши координати заданих точок у знайдене рівняння площини $3 \cdot (-1) - 6 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) + 5 \equiv 0$, $3 \cdot 1 - 6 \cdot 0 - 2 \cdot 4 + 5 \equiv 0$, $3 \cdot 3 - 6 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 5 \equiv 0$, переконаємось, що загальне рівняння площини знайдено вірно.

Для отримання нормального рівняння площини помножимо загальне рівняння площини на нормуючий множник. Оскільки $A = 3$, $B = -6$, $C = -2$, $D > 0$, то маємо $\mu = -\frac{1}{\sqrt{3^2 + (-6)^2 + (-2)^2}} = -\frac{1}{7}$. Тоді нормальне рівняння

площини має вигляд $-\frac{3}{7}x + \frac{6}{7}y + \frac{2}{7}z - \frac{5}{7} = 0$.

Координати вектора нормалі до площини знайдемо із загального рівняння площини $\underbrace{3x}_A - \underbrace{6y}_B - \underbrace{2z}_C + 10 = 0$, тобто маємо $\vec{n}(3; -6; -2)$.

Відповідь: $3x - 6y - 2z + 5 = 0$, $-\frac{3}{7}x + \frac{6}{7}y + \frac{2}{7}z - \frac{5}{7} = 0$, $\vec{n}(3; -6; -2)$.

6. Знайдіть кут між площинами $x + 2y + 2z - 3 = 0$ та $16x + 12y - 15z - 1 = 0$.

Розв'язання:

Оскільки $A_1 = 1$, $B_1 = 2$, $C_1 = 2$, $A_2 = 16$, $B_2 = 12$, $C_2 = -15$, то з формули

кута між площинами маємо $\cos \varphi = \frac{|1 \cdot 16 + 2 \cdot 12 + 2 \cdot (-15)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{16^2 + 12^2 + (-15)^2}} = \frac{10}{3 \cdot 25} = \frac{2}{15}$,

$\varphi \approx 82^\circ$.

Відповідь: $\varphi \approx 82^\circ$.

7. При яких значеннях параметрів k_1 і k_2 площина $k_1x + 52y - 4k_2z + 5 = 0$ паралельна площині $2x + y - 2z - 1 = 0$?

Розв'язання:

Використаємо умову паралельності площин $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, тоді маємо

$$\frac{k_1}{2} = \frac{52}{1} = \frac{-4k_2}{-2}, \text{ звідки } \frac{k_1}{2} = \frac{52}{1}, k_1 = 52 \cdot 2 = 104 \text{ і } \frac{52}{1} = \frac{-4k_2}{-2}, k_2 = \frac{52 \cdot 2}{4} = 26.$$

Відповідь: $k_1 = 104$, $k_2 = 26$.

8. При якому значенні параметра k площина $104x + 52y - 4kz + 5 = 0$ перпендикулярна площині $2x + y - 2z - 1 = 0$?

Розв'язання:

Використаємо умову перпендикулярності площин $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$, маємо $104 \cdot 2 + 52 \cdot 1 + (-4k) \cdot (-2) = 0$, $208 + 52 + 8k = 0$, $8k = -260$, $k = -32,5$.

Відповідь: $k = -32,5$.

9. Знайдіть рівняння площини, яка проходить через точку $(1; -2; -3)$ і паралельна до площини $2x - 3y + 5z + 2 = 0$.

Розв'язання:

Застосуємо рівняння площини, яка проходить через дану точку і має дану нормаль, тобто $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Нормаллю заданої площини є $\vec{n}(2; -3; 5)$. Цю нормаль візьмемо в якості нормалі шуканої площини. Отже, маємо $2(x - 1) - 3(y + 2) + 5(z + 3) = 0$, $2x - 2 - 3y - 6 + 5z + 15 = 0$, $2x - 3y + 5z + 7 = 0$.

Відповідь: $2x - 3y + 5z + 7 = 0$.

10. Знайдіть відстань від точки $(-15; 4; 6)$ до площини $2x - y + 2z + 10 = 0$.

Розв'язання:

Скористаємось формулою відстані від площини до точки $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|2x_0 - y_0 + 2z_0 + 10|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}}$, підставимо координати точки $d = \frac{|2 \cdot (-15) - 4 + 2 \cdot 6 + 10|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{|-30 - 4 + 12 + 10|}{\sqrt{9}} = \frac{12}{3} = 4$ од.

Відповідь: 4 од.

11. Знайдіть рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(1; -1; -2)$ і $M_2(3; 1; 1)$ перпендикулярно до площини $x - 2y + 3z - 5 = 0$.

Розв'язання:

Рівняння площини, що проходить через дану точку у заданому напрямі, має вигляд $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

В якості точки $(x_0; y_0; z_0)$ візьмемо, наприклад, точку $M_1(1; -1; -2)$.

Нормаль даної площини $\vec{n}(1; -2; 3)$, нормаль шуканої площини позначимо $\vec{n}^*$. Площини перпендикулярні, тому $\vec{n}^* \perp \vec{n}$. Вектор $\overrightarrow{M_1M_2}(2; 2; 3)$ належить шуканій площині, отже $\vec{n}^* \perp \overrightarrow{M_1M_2}$. Напрямок $\vec{n}^*$ визначимо за $\overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{n}$. Оскільки

$$\overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k} - 2\vec{k} + 6\vec{i} - 6\vec{j} = 12\vec{i} - 3\vec{j} - 6\vec{k}, \text{ то } \vec{n}^*(4; -1; -2).$$

Тоді рівняння шуканої площини має вигляд $4(x - 1) - (y + 1) - 2(z + 2) = 0$ або $4x - 4 - y - 1 - 2z - 4 = 0$, $4x - y - 2z - 9 = 0$.

Відповідь: $4x - y - 2z - 9 = 0$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Задано точки M_1, M_2, M_3, M_0 . Знайдіть: 1) рівняння площини α , що проходить через точки M_1, M_2, M_3 ; 2) загальне рівняння площини α ; 3) вектор нормалі до площини α ; 4) рівняння площини α у відрізках на осях; 5) нормальне рівняння площини α ; 6) рівняння площини, що проходить через точку M_0 до площини α ; 7) відстань від точки M_0 до площини α .

Варіант	Точки у просторі
1.	$M_1(-3;-2;-4), M_2(-4;2;-7), M_3(5;0;3), M_0(-9;7;8)$
2.	$M_1(-2;4;-6), M_2(0;-6;1), M_3(4;2;1), M_0(-2;13;12)$
3.	$M_1(3;-2;3), M_2(6;6;2), M_3(1;4;-2), M_0(-12;3;5)$
4.	$M_1(-4;-2;-5), M_2(1;8;-5), M_3(0;4;-4), M_0(-8;12;11)$
5.	$M_1(2;8;-3), M_2(10;4;7), M_3(4;8;-1), M_0(-8;10;13)$
6.	$M_1(3;9;-2), M_2(11;5;8), M_3(5;9;0), M_0(-7;12;12)$
7.	$M_1(-2;0;-3), M_2(3;10;-3), M_3(2;6;-2), M_0(-5;13;16)$
8.	$M_1(3;6;-2), M_2(0;2;-3), M_3(1;-2;0), M_0(-12;13;14)$
9.	$M_1(7;9;2), M_2(10;5;7), M_3(1;3;-1), M_0(-10;9;12)$
10.	$M_1(2;-2;1), M_2(-3;0;-5), M_3(0;-2;-1), M_0(-12;7;8)$
11.	$M_1(0;1;-1), M_2(-1;5;-4), M_3(8;3;6), M_0(-2;13;18)$
12.	$M_1(6;8;1), M_2(9;4;6), M_3(0;2;-2), M_0(-4;13;14)$
13.	$M_1(-1;0;-2), M_2(-2;4;-5), M_3(7;2;5), M_0(-6;6;8)$
14.	$M_1(0;6;-4), M_2(2;-4;3), M_3(6;4;3), M_0(-9;3;5)$
15.	$M_1(5;8;0), M_2(2;4;-1), M_3(3;0;2), M_0(-7;10;11)$
16.	$M_1(-1;1;-2), M_2(4;11;-2), M_3(3;7;-1), M_0(-12;9;10)$
17.	$M_1(3;4;-1), M_2(2;-4;2), M_3(5;6;0), M_0(-5;15;14)$
18.	$M_1(6;7;2), M_2(5;-1;5), M_3(8;9;3), M_0(-11;11;19)$
19.	$M_1(5;4;1), M_2(-1;-2;-2), M_3(3;-2;2), M_0(-9;8;9)$
20.	$M_1(0;6;-5), M_2(8;2;5), M_3(2;6;-3), M_0(-8;7;12)$
21.	$M_1(5;6;1), M_2(4;-2;4), M_3(7;8;2), M_0(-6;9;11)$
22.	$M_1(4;6;-1), M_2(7;2;4), M_3(-2;0;-4), M_0(-5;10;12)$
23.	$M_1(4;0;3), M_2(-1;2;-3), M_3(2;0;1), M_0(-12;3;2)$
24.	$M_1(5;1;4), M_2(0;3;-2), M_3(3;1;2), M_0(-7;9;15)$
25.	$M_1(0;-2;-1), M_2(2;4;-2), M_3(3;2;0), M_0(-11;8;10)$
26.	$M_1(4;-1;4), M_2(7;7;3), M_3(2;5;-1), M_0(-9;16;14)$
27.	$M_1(8;7;4), M_2(2;1;1), M_3(6;1;5), M_0(-10;8;8)$
28.	$M_1(1;-4;1), M_2(4;4;0), M_3(-1;2;-4), M_0(-3;13;14)$
29.	$M_1(1;7;-3), M_2(3;-3;4), M_3(7;5;4), M_0(-6;14;18)$
30.	$M_1(6;9;1), M_2(3;5;0), M_3(4;1;3), M_0(-4;12;15)$

2. Визначте, при яких значеннях параметрів k_1, k_2 площина $k_1x + (2 + \alpha)y - 4k_2z + 5 = 0$ паралельна площині $2x + y - 2z - 1 = 0$.

3. Визначте, при якому значенні параметра k площина $(4 + 2\alpha)x + (2 + \alpha)y - 4kz + 5 = 0$ перпендикулярна площині $2x + y - 2z - 1 = 0$.

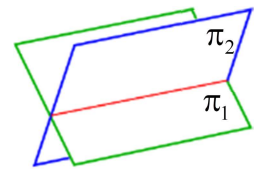
4. Знайдіть кут між площиною $2x + y - 2z - 1 = 0$ і площиною $6x + 2y - 3z + \alpha = 0$.

5. Знайдіть рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(1 + \alpha; -1; -2)$ і $M_2(3; 1; 1)$ перпендикулярно до площини $x - 2y + 3z - 5 = 0$.

ПРЯМА У ПРОСТОРИ

1. Основні поняття та теореми

Пряму в просторі можна задати як перетин двох площин, тобто $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 & (\pi_1), \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & (\pi_2). \end{cases}$ Це загальне рівняння прямої у просторі.



Пряма у просторі, яка проходить через дві задані точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ та $M_2(x_2; y_2; z_2)$, визначається рівнянням $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$.

Канонічне рівняння прямої в просторі, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ в напрямі напрямного вектора $\vec{a}(l; m; p)$, має вигляд $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{p}$.



У параметричному вигляді рівняння прямої в просторі записуються таким чином $\begin{cases} x = x_0 + l \cdot t, \\ y = y_0 + m \cdot t, \\ z = z_0 + p \cdot t, \end{cases}$ де t – параметр.

Кут між прямими у просторі визначається як кут між їхніми напрямними векторами, тобто $\cos \varphi = \frac{|l_1 l_2 + m_1 m_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + p_2^2}}$.

Умова паралельності двох прямих у просторі має вигляд $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1}{p_2}$.

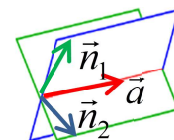
Умова перпендикулярності двох прямих у просторі має вигляд $l_1 l_2 + m_1 m_2 + p_1 p_2 = 0$.

Відстань від точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ до прямої $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{p}$

визначається формулою $d = \frac{|\overrightarrow{M_0 M_1} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}$.

2. Приклади виконання завдань

1. Запишіть рівняння прямої, представлені як лінія перетину двох площин $\begin{cases} 2x + y + z - 2 = 0 \\ 2x - y - 3z + 6 = 0, \end{cases}$ у канонічному вигляді.



Розв'язання:

Щоб записати рівняння прямої у просторі в канонічному вигляді, треба знайти напрямний вектор прямої та координати точки, що належить прямій.

Напрямний вектор прямої перпендикулярний нормалям обох площин, тому визначимо напрямний вектор за допомогою векторного добутку нормалей площин. Оскільки нормалі площин $\vec{n}_1(2;1;1)$, $\vec{n}_2(2;-1;-3)$, то векторний добуток

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k} - 2\vec{k} + 1\vec{i} + 6\vec{j} = -2\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k}, \quad \text{тоді}$$

маємо напрямний вектор прямої $\vec{a}(-2;8;-4)$ або $\vec{a}(1;-4;2)$.

В якості точки M_0 можна вибрати довільну точку прямої, просто треба підібрати такі координати точки, що задовольняють рівняння обох площин. Оскільки таких точок безліч, то зафіксуємо довільно одну з координат (наприклад, $z = 0$), а дві інші визначимо з системи рівнянь $\begin{cases} 2x + y + z - 2 = 0 \\ 2x - y - 3z + 6 = 0, \end{cases}$

що при $z = 0$ має вигляд $\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ 2x - y + 6 = 0. \end{cases}$ Додамо рівняння, маємо $4x + 4 = 0$,

звідки $4x = -4$, $x = -1$. Віднімемо рівняння, отримаємо $2y - 8 = 0$, звідки $2y = 8$, $y = 4$. Маємо точку прямої $M_0(-1;4;0)$.

Отже, канонічне рівняння прямої у просторі має вигляд $\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z}{2}$.

Відповідь: $\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z}{2}$.

2. Запишіть рівняння прямої, представлені як лінія перетину двох площин $\begin{cases} 2x - y + 3z - 4 = 0, \\ x + 3y + 5z - 2 = 0, \end{cases}$ у канонічному вигляді.

Розв'язання:

Напрямний вектор прямої перпендикулярний нормалям обох площин, тому визначимо напрямний вектор за допомогою векторного добутку нормалей площин. Оскільки нормалі площин $\vec{n}_1(2;-1;3)$, $\vec{n}_2(1;3;5)$, то векторний добуток

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k} + 1\vec{k} - 9\vec{i} - 10\vec{j} = -14\vec{i} - 7\vec{j} + 7\vec{k}, \quad \text{тоді}$$

маємо напрямний вектор прямої $\vec{a}(-14;-7;7)$ або $\vec{a}(2;1;-1)$.

В якості точки M_0 прямої виберемо точку з $z=0$. Тоді одержимо $\begin{cases} 2x - y - 4 = 0, \\ x + 3y - 2 = 0. \end{cases}$ Маємо з першого рівняння системи $y = 2x - 4$, тоді друге рівняння системи набуде вигляду $x + 3(2x - 4) = 2$, звідки $x + 6x - 12 = 2$, $7x = 14$, $x = 2$, тоді $y = 2 \cdot 2 - 4 = 0$. Маємо точку прямої $M_0(2;0;0)$.

Отже, канонічне рівняння прямої у просторі має вигляд $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$.

Відповідь: $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$.

3. Знайдіть канонічне рівняння та напрямний вектор прямої, що проходить через дві точки $M_1(2;3;5)$ та $M_2(4;8;9)$. Запишіть рівняння прямої у параметричному вигляді.

Розв'язання:

Знайдемо рівняння прямої, яка проходить через дві точки, за формулою $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$. Маємо $\frac{x-2}{4-2} = \frac{y-3}{8-3} = \frac{z-5}{9-5}$, $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-5}{4}$. Це канонічне рівняння прямої у просторі. Направний вектор прямої $\vec{a}(2;5;4)$.

Прирівняємо всі частини канонічного рівняння прямої до параметра t ,

$$\text{тобто } \begin{cases} \frac{x-2}{2} = t, \\ \frac{y-3}{5} = t, \\ \frac{z-5}{4} = t, \end{cases} \quad \text{звідки } \begin{cases} x-2=2t, \\ y-3=5t, \\ z-5=4t, \end{cases} \quad \begin{cases} x=2t+2, \\ y=5t+3, \\ z=4t+5. \end{cases} \quad \text{Це параметричні рівняння}$$

прямої у просторі.

$$\text{Відповідь: } \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-5}{4}, \quad \vec{a}(2;5;4), \quad \begin{cases} x=2t+2, \\ y=5t+3, \\ z=4t+5. \end{cases}$$

4. Знайдіть кут між прямими у просторі $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-2}$ та $\frac{x}{-4} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{7}$.

Розв'язання:

Застосуємо формулу кута між прямими в просторі, отримаємо $\cos \varphi = \frac{|l_1 l_2 + m_1 m_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + p_2^2}} = \frac{|2 \cdot (-4) + 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 7|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 7^2}} = \frac{18}{3 \cdot 9} = \frac{2}{3}$, $\varphi \approx 48^\circ$.

Відповідь: 48° .

5. Знайдіть рівняння прямої, що проходить через точку $(4;-1;5)$ паралельно прямій $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+1}{2}$.

Розв'язання:

В якості напрямного вектора шуканої прямої візьмемо напрямний вектор даної прямої $\vec{a}(1;3;2)$. Підставивши координати напрямного вектора і координати заданої точки у $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{p}$, маємо рівняння шуканої

прямої $\frac{x-4}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-5}{2}$.

Відповідь: $\frac{x-4}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-5}{2}$.

6. Знайдіть відстань від точки $M_1(1;-1;-2)$ до прямої $\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2}$.

Розв'язання:

Застосуємо формулу відстані від точки до прямої, тобто $d = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}$.

З рівняння прямої маємо $\vec{a}(3;2;-2)$, $M_0(-3;-2;8)$, тоді $\overrightarrow{M_0M_1}(4;1;-10)$,

$$\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 1 & -10 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 30\vec{j} + 8\vec{k} - 3\vec{k} + 20\vec{i} + 8\vec{j} = 18\vec{i} - 22\vec{j} + 5\vec{k}.$$

Отже, маємо $d = \frac{\sqrt{18^2 + (-22)^2 + 5^2}}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{324 + 484 + 25}}{\sqrt{9 + 4 + 4}} = \frac{\sqrt{833}}{\sqrt{17}} = \sqrt{49} = 7 \text{ од.}$

Відповідь: 7 од.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайдіть канонічне рівняння та напрямний вектор прямої, що проходить через точки $M_1(3-\alpha; \alpha; \alpha+3)$ та $M_2(30-\alpha; \alpha+5; \alpha+30)$. Запишіть рівняння прямої у параметричному вигляді.

2. Запишіть рівняння прямої, що проходить через точку $(2\alpha; 0; -\alpha)$ паралельно прямій $\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z}{2}$.

3. Знайдіть кут між прямими: $\frac{x-4}{10} = \frac{y+5}{11} = \frac{z}{2}$ та $\frac{x}{-4} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-\alpha}{7}$.

4. Запишіть канонічне рівняння прямої, представленій як лінія перетину двох площин $2x - 3(\alpha+1)y + 4z - 10 = 0$ і $x - 2(\alpha+1)y + 3z - 6 = 0$. В якості довільної точки прямої візьміть точку з ординатою $y = 0$.

5. Знайдіть відстань від точки $M_1(\alpha; 2; 1-\alpha)$ до прямої $\frac{x-\alpha}{6} = \frac{y}{-2} = \frac{z+\alpha}{-3}$.

ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ У ПРОСТОРІ

1. Основні поняття та теореми

Пряма або перетинає площину, або паралельна до неї, або належить їй.

Гострий кут між прямою $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{p}$ та площиною

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ визначається як } \sin \varphi = \frac{|Al + Bm + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + p^2}}.$$

Умова перпендикулярності прямої і площини має вигляд $\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{p}$ і

виражає умову паралельності векторів $\vec{a}(l; m; p)$ та $\vec{n}(A; B; C)$.

Умова паралельності прямої та площини має вигляд $Al + Bm + Cp = 0$ і виражає умову перпендикулярності векторів $\vec{a}(l; m; p)$ та $\vec{n}(A; B; C)$.

Умова належності площині $Ax + By + Cz + D = 0$ прямої $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{p}$ має вигляд $\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \\ Al + Bm + Cp = 0. \end{cases}$

Алгоритм знаходження точки перетину прямої і площини: 1) записати параметричні рівняння прямої; 2) підставити їх у рівняння площини, вийде рівняння відносно параметра t ; 3) розв'язавши одержане рівняння, отримати значення параметра t_x ; 4) підставивши t_x у параметричні рівняння прямої, визначити координати точки перетину.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайдіть кут між прямою $\frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+4}{6}$ та площиною $4x + 4y + 7z - 3 = 0$.

Розв'язання:

Маємо $l = 2$, $m = 2$, $p = 6$ з рівняння прямої, $A = 4$, $B = 4$, $C = 7$ з рівняння площини. Застосуємо формулу кута між прямою і площиною $\sin \varphi = \frac{|Al + Bm + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + p^2}} = \frac{|4 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 7 \cdot 6|}{\sqrt{4^2 + 4^2 + 7^2} \cdot \sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2}} = \frac{62}{63}$, тоді $\varphi \approx 80^\circ$.

Відповідь: 80° .

2. При якому значенні l пряма $\frac{x+30}{l} = \frac{y-60}{3} = \frac{z-5}{2}$ паралельна площині $4x - 6y - z + 7 = 0$?

Розв'язання:

Використаємо умову паралельності прямої та площини $Al + Bm + Cp = 0$, тоді отримаємо $4l + (-6) \cdot 3 + (-1) \cdot 2 = 0$, звідки $4l - 18 - 2 = 0$, $4l = 20$, $l = 5$.

Відповідь: 5.

3. Знайдіть рівняння площини, що проходить через точку $(-5; 4; 6)$ перпендикулярно прямій $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+7}{3}$.

Розв'язання:

Застосуємо рівняння площини, що проходить через задану точку і має дану нормаль, $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. В якості нормалі шуканої площини візьмемо напрямний вектор прямої $\vec{n}(A; B; C) = \vec{a}(1; -2; 3)$. Тоді рівняння шуканої площини має вигляд $1(x + 5) - 2(y - 4) + 3(z - 6) = 0$, $x + 5 - 2y + 8 + 3z - 18 = 0$ або $x - 2y + 3z - 5 = 0$.

Відповідь: $x - 2y + 3z - 5 = 0$.

4. Знайдіть рівняння прямої, що проходить через точку $(2; -3; -5)$ перпендикулярно площині $6x - 3y - 5z + 2 = 0$.

Розв'язання:

Застосуємо рівняння прямої, яка проходить через дану точку в заданому напрямним вектором напрямі, $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{p}$. В якості напрямного вектора шуканої прямої візьмемо нормаль даної площини $\vec{a}(l; m; p) = \vec{n}(6; -3; -5)$.

Тоді рівняння шуканої прямої $\frac{x - 2}{6} = \frac{y + 3}{-3} = \frac{z + 5}{-5}$.

Відповідь: $\frac{x - 2}{6} = \frac{y + 3}{-3} = \frac{z + 5}{-5}$.

5. Знайдіть рівняння площини, що проходить через точку $(1; 2; 3)$ паралельно прямим $\frac{x - 2}{4} = \frac{y - 3}{5} = \frac{z + 1}{-4}$ та $\frac{x + 1}{3} = \frac{y - 2}{4} = \frac{z + 6}{-5}$.

Розв'язання:

Застосуємо рівняння площини у вигляді $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Точка $(x_0; y_0; z_0)$ задана. Вектор нормалі площини перпендикулярний напрямним векторам обох прямих, тому визначимо вектор нормалі площини за допомогою векторного добутку напрямних векторів прямих $\vec{a}_1(4; 5; -4)$, $\vec{a}_2(3; 4; -5)$. Оскільки

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 5 & -4 \\ 3 & 4 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \underline{-25\vec{i}} - \underline{12\vec{j}} + \underline{16\vec{k}} - \underline{15\vec{k}} + \underline{16\vec{i}} + \underline{20\vec{j}} = -9\vec{i} + 8\vec{j} + \vec{k}, \text{ то}$$

маємо $\vec{n}(9; -8; -1)$.

Тоді рівняння шуканої площини має вигляд $9(x - 1) - 8(y - 2) - 1(z - 3) = 0$ або $9x - 9 - 8y + 16 - z + 3 = 0$, звідки $9x - 8y - z + 10 = 0$.

Відповідь: $9x - 8y - z + 10 = 0$.

6. Знайдіть точку перетину площини $2x + 3y + z - 1 = 0$ з прямою $\frac{x - 1}{1} = \frac{y + 1}{-2} = \frac{z}{6}$.

Розв'язання:

Щоб записати параметричні рівняння прямої прирівняємо всі частини канонічного рівняння прямої до параметра t , тобто $\frac{x - 1}{1} = t$, $\frac{y + 1}{-2} = t$, $\frac{z}{6} = t$.

Звідки маємо
$$\begin{cases} x-1=1 \cdot t, \\ y+1=-2 \cdot t, \\ z=6 \cdot t, \end{cases} \begin{cases} x=t+1, \\ y=-2t-1, \\ z=6t. \end{cases}$$

Підставляючи ці вирази для x , y та z в рівняння площини, одержимо $2(t+1)+3(-2t-1)+6t-1=0$.

Розв'яжемо отримане рівняння: $2t+2-6t-3+6t-1=0$, $2t=2$, $t_x=1$.

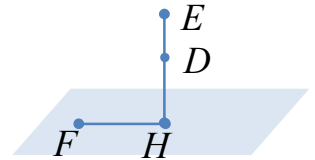
Це значення параметра t_x відповідає точці перетину прямої і площини

$$\begin{cases} x_x = 1+1=2, \\ y_x = -2 \cdot 1-1=-3, \\ z_x = 6 \cdot 1=6. \end{cases}$$

Відповідь: $(2;-3;6)$.

7. Дано три точки $D(-3;-2;8)$, $E(0;0;6)$, $F(1;-1;-2)$.

Знайдіть параметричні рівняння прямої DE ; рівняння площини, що проходить через точку F перпендикулярно прямій DE ; точку H – точку перетину цієї площини з прямою DE ; відстань від точки F до прямої DE .



Розв'язання:

Застосуємо рівняння прямої в просторі через дві точки, підставимо координати точок D і E , одержимо $\frac{x+3}{0+3} = \frac{y+2}{0+2} = \frac{z-8}{6-8}$, $\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2}$.

Це канонічне рівняння прямої DE .

Прирівняємо всі частини канонічного рівняння прямої до параметра t :

$$\frac{x+3}{3}=t, \quad \frac{y+2}{2}=t, \quad \frac{z-8}{-2}=t. \quad \text{Звідки маємо} \quad \begin{cases} x+3=3t, \\ y+2=2t, \\ z-8=-2t, \end{cases} \begin{cases} x=3t-3, \\ y=2t-2, \\ z=-2t+8. \end{cases} \quad \text{Це}$$

параметричні рівняння прямої DE .

Застосуємо рівняння площини, що проходить через задану точку і має задану нормаль. Точка $F(1;-1;-2)$ задана. В якості нормалі шуканої площини візьмемо напрямний вектор прямої DE , тобто $\vec{n} = \vec{a}(3;2;-2)$. Тоді рівняння площини має вигляд $3(x-1)+2(y+1)-2(z+2)=0$, звідки $3x+2y-2z-5=0$.

Підставимо параметричні рівняння прямої в рівняння площини, маємо $3(3t-3)+2(2t-2)-2(-2t+8)-5=0$, звідки $9t-9+4t-4+4t-16-5=0$, $17t-34=0$, $t_x=2$. Це значення параметра t_x відповідає точці перетину прямої

і площини
$$\begin{cases} x_H = 3 \cdot 2-3=3, \\ y_H = 2 \cdot 2-2=2, \\ z_H = -2 \cdot 2+8=4. \end{cases}$$

Відстань від точки F до прямої DE рівна відстані між точками $F(1;-1;-2)$ і $H(3;2;4)$, тоді отримаємо $d = \sqrt{(3-1)^2 + (2+1)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{4+9+36} = 7$.

$$\text{Відповідь: } \begin{cases} x = 3t - 3, \\ y_H = 2t - 2, \quad 3x + 2y - 2z - 5 = 0, \quad H(3; 2; 4), \quad d = 7. \\ z_H = -2t + 8, \end{cases}$$

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайдіть кут між прямою $\frac{x - \alpha}{12} = \frac{y + \alpha}{4} = \frac{z - 1}{3}$ і площиною $6x - 2y - 3z + \alpha = 0$.

2. Знайдіть рівняння площини, що проходить через точку $(3; -1; 1)$ паралельно прямим $\frac{x - 2}{2 - \alpha} = \frac{y - 3}{2} = \frac{z + 1}{3}$ та $\frac{x - 4}{1} = \frac{y + 4}{-2} = \frac{z - 1}{3}$.

3. Знайдіть точку перетину площини $2x + 3y + \alpha z - \alpha + 1 = 0$ з прямою $\frac{x - 1}{\alpha} = \frac{y + 1}{-2\alpha} = \frac{z}{6}$.

4. Дано три точки D , E , F . Знайдіть параметричні рівняння прямої DE ; рівняння площини, що проходить через точку F перпендикулярно прямій DE ; точку H – точку перетину цієї площини з прямою DE ; відстань від точки F до прямої DE .

Варіант	D	E	F	Варіант	D	E	F
1.	(5;1;7)	(9;3;3)	(6;0;3)	2.	(2;-3;7)	(6;-1;3)	(3;-4;3)
3.	(1;4;5)	(5;6;1)	(2;3;1)	4.	(2;-6;7)	(6;-4;3)	(3;-7;3)
5.	(5;5;4)	(9;7;0)	(6;4;0)	6.	(-1;4;2)	(3;6;-2)	(0;3;-2)
7.	(5;1;0)	(1;-1;4)	(4;2;4)	8.	(-2;2;10)	(2;4;6)	(-1;1;6)
9.	(2;0;8)	(6;2;4)	(3;-1;4)	10.	(1;-1;3)	(5;1;-1)	(2;-2;-1)
11.	(3;-1;5)	(7;1;1)	(4;-2;1)	12.	(1;-4;6)	(5;-2;2)	(2;-5;2)
13.	(1;-1;7)	(5;1;3)	(2;-2;3)	14.	(-5;4;3)	(-1;6;-1)	(-1;3;2)
15.	(4;-1;9)	(8;1;5)	(5;-2;5)	16.	(-1;2;-2)	(3;4;-6)	(0;1;-6)
17.	(-3;1;9)	(1;3;5)	(-2;0;5)	18.	(6;-2;11)	(10;0;7)	(7;-3;7)
19.	(1;4;0)	(5;6;-4)	(2;3;-4)	20.	(-4;0;8)	(0;2;4)	(-3;-1;4)
21.	(0;-2;6)	(4;0;2)	(1;-3;2)	22.	(-2;3;1)	(2;5;-3)	(-1;2;-3)
23.	(3;6;2)	(7;8;-2)	(4;5;-2)	24.	(-3;1;2)	(1;3;-2)	(-2;0;-2)
25.	(3;3;2)	(7;5;-2)	(4;2;-2)	26.	(-2;2;3)	(2;4;-1)	(-1;1;-1)
27.	(-1;2;3)	(3;4;-1)	(0;1;-1)	28.	(-3;2;0)	(1;4;-4)	(-2;1;-4)
29.	(4;-4;9)	(8;-2;5)	(5;-5;5)	30.	(-3;0;1)	(1;2;-3)	(-2;-1;-3)

Модуль 3 «ГРАНИЦІ ТА ПОХІДНІ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ»

ГРАНИЦІ ФУНКЦІЙ НА БЕЗМЕЖНОСТІ І В ТОЧЦІ

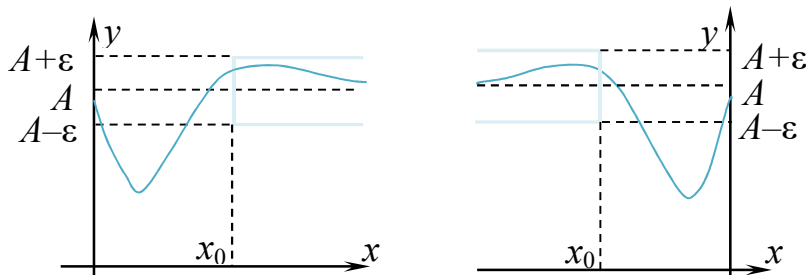
1. Основні поняття та теореми

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі $(a; +\infty)$. Число A називається *границею функції при $x \rightarrow +\infty$* , якщо для будь-якого достатньо малого числа $\varepsilon > 0$ можна вказати таке значення $x_0 > a$, що для всіх $x > x_0$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Позначається $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

Геометрично це означає, що при $x > x_0$ всі значення функції попадають в ε -трубку значення A , тобто в інтервал $(A - \varepsilon; A + \varepsilon)$.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі $(-\infty; a)$. Число A називається *границею функції при $x \rightarrow -\infty$* , якщо для будь-якого достатньо малого числа $\varepsilon > 0$ можна вказати таке значення $x_0 < a$, що для всіх $x < x_0$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Позначається $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$.

Геометрично це означає, що всі значення функції при $x < x_0$ попадають в ε -трубку значення A , тобто в інтервал $(A - \varepsilon; A + \varepsilon)$.



Наприклад: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg x = -\frac{\pi}{2}$.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалах $(-\infty; -a)$ і $(a; +\infty)$. Число A є *границею функції при $x \rightarrow \infty$* , якщо для будь-якого достатньо малого числа $\varepsilon > 0$ можна вказати таке значення $x_0 > a$, що для всіх $|x| > x_0$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Позначається $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

Наприклад: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$.

Функція є *безмежно малою при $x \rightarrow \infty$* , якщо її границя при $x \rightarrow \infty$ дорівнює нулю.

Якщо функція має границю при $x \rightarrow \infty$, то вона є *збіжною при $x \rightarrow \infty$* .

Функція є *безмежно великою при $x \rightarrow \infty$* , якщо для будь-якого наперед заданого достатньо великого числа $M > 0$ можна вказати таке значення x_0 , що для всіх $|x| > x_0$ виконується нерівність $|f(x)| > M$.

В цьому випадку $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

Безмежно велика функція при $x \rightarrow \infty$ є *розбіжною при $x \rightarrow \infty$* .

Границя функції на безмежності характеризує поведінку функції на безмежності.

Число A називають *границею функції* $y = f(x)$ у точці x_0 , якщо для будь-якої послідовності $\{x_n\}$, що збігається до x_0 , відповідна послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$ збігається до числа A .

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 , за винятком, можливо, самої точки x_0 . Число A називається *границею функції* $y = f(x)$ у точці x_0 , якщо для будь-якого скільки завгодно малого $\varepsilon > 0$ можна вказати таке $\delta > 0$, що для всіх x з нерівності $0 < |x - x_0| < \delta$ (з проколотої околу точки x_0) виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Ці два означення границі функції в точці еквівалентні.

Границя функції в точці позначається $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

Знайти границю функції в точці x_0 — означає встановити до чого прямує значення функції при аргументу, що прямує до x_0 . Спочатку просто підставляють x_0 у функцію, що стоїть під знаком границі, у випадках визначеностей відразу отримують відповідь.

$$\text{Наприклад: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1} = \frac{2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 5}{1 + 1} = \frac{-6}{2} = -3.$$

Функція називається *безмежно малою в точці* x_0 , якщо її границя в цій точці дорівнює нулю.

$$\text{Наприклад: } \lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0.$$

Якщо функція має границю в точці x_0 , то вона є *збіжною* в точці x_0 .

Функція називається *безмежно великою в точці* x_0 , якщо для будь-якого наперед заданого достатньо великого числа $M > 0$ можна вказати таке значення δ , що для всіх x з нерівності $0 < |x - x_0| < \delta$ (з проколотої околу точки x_0) виконується нерівність $|f(x)| > M$.

$$\text{В цьому випадку } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty.$$

$$\text{Наприклад: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty.$$

Безмежно велика функція в точці є *розбіжною* в цій точці.

Якщо є дві функції $f(x)$, $g(x)$, границі яких рівні $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = A$,

$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x) = B$, то мають місце такі *арифметичні властивості границь* функцій:

- границя суми двох функцій рівна сумі границь цих функцій

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} [f(x) + g(x)] = A + B;$$

- границя різниці двох функцій рівна різниці границь цих функцій

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} [f(x) - g(x)] = A - B;$$

- границя добутку двох функцій рівна добутку границь цих функцій

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B;$$

- границя частки двох функцій рівна частці границь цих функцій

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad (g(x) \neq 0, B \neq 0);$$

- крім того, сталий множник можна виносити за знак границі функції

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} (x);$$

- границя степеня функції дорівнює тому ж степеню границі функції

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} [f(x)]^k = \left[\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) \right]^k;$$

- границя кореня функції дорівнює тому ж кореню границі функції

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x)}.$$

Можна легко визначити значення більшості виразів з арифметичними діями границь, крім випадків Невизначеностей $\{\infty - \infty\}$, $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, $\{\infty \cdot 0\}$, $\{1^\infty\}$, які треба розкривати.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайдіть границі функцій на безмежності:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + x - 1}{4 + 3x - 8x^2}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - x^2 + 1}{5x^2 + 6 - x^4}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - x^2 + 6}{5x^2 - 3x + 2}$.

Розв'язання:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + x - 1}{4 + 3x - 8x^2} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = -\frac{7}{8}$ (якщо степені многочленів чисельника і

знаменника рівні, то границя частки рівна відношенню коефіцієнтів при x у найвищому степені чисельника і знаменника).

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - x^2 + 1}{5x^2 + 6 - x^4} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = 0$ (якщо степінь многочлена чисельника менше

степеня многочлена знаменника, то границя частки рівна нулю).

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - x^2 + 6}{5x^2 - 3x + 2} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \infty$ (якщо степінь многочлена чисельника

більше степеня многочлена знаменника, то границя частки є нескінченністю).

Відповідь: $-\frac{7}{8}$; 0; ∞ .

2. Знайдіть границі: а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{2x^2 - 1} + \frac{x^2}{2x + 1} \right)$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x + 1} \right)$.

Розв'язання:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{2x^2 - 1} + \frac{x^2}{2x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2x^2 - 1} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x + 1} = \{\infty + \infty\} = \infty.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x + 1} \right) = \{\infty - \infty\}. \text{ Невизначеність виду } \{\infty - \infty\} \text{ можна}$$

звести до невизначеності виду $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$, якщо звести дробу до спільного

$$\begin{aligned} \text{знаменника, тоді маємо } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x + 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3(2x + 1) - x^2(2x^2 - 1)}{(2x^2 - 1)(2x + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + x^3 - 2x^4 + x^2}{4x^3 + 2x^2 - 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2}{4x^3 + 2x^2 - 2x - 1} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь: } \infty; \frac{1}{4}.$$

$$\text{3. Знайдіть границі функцій: а) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x); \text{ б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{x^3 + 4x^2});$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2 + 4x} - 3x).$$

Розв'язання:

Маємо невизначеності виду $\{\infty - \infty\}$ з коренями. Щоб позбутися різниці коренів помножимо і поділимо на спряжений вираз і застосуємо формулу різниці квадратів.

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) &= \{\infty - \infty\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \left\{ \frac{1}{\infty} \right\} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{x^3 + 4x^2}) &= \{\infty - \infty\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x - \sqrt{x^3 + 4x^2})(2x + \sqrt{x^3 + 4x^2})}{2x + \sqrt{x^3 + 4x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - (x^3 + 4x^2)}{2x + \sqrt{x^3 + 4x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - x^3 - 4x^2}{2x + \sqrt{x^3 + 4x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3}{2x + \sqrt{x^3 + 4x^2}} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = -\infty; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2 + 4x} - 3x) &= \{\infty - \infty\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{9x^2 + 4x} - 3x)(\sqrt{9x^2 + 4x} + 3x)}{\sqrt{9x^2 + 4x} + 3x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 + 4x - 9x^2}{\sqrt{9x^2 + 4x} + 3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{\sqrt{9x^2 + 4x} + 3x} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}. \end{aligned}$$

Встановимо степінь

$$\begin{aligned} \text{знаменника } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{\sqrt{9x^2 + 4x} + 3x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{3x \sqrt{\left(1 + \frac{4}{9x}\right)} + 3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{3x + 3x} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Відповідь: $0; -\infty; \frac{2}{3}$.

4. Знайдіть границі функцій в точці: а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{6x^2 + x - 1}{x + 2}$; б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{6x^2 + x - 1}{x + 2}$;

в) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{6x^2 + x - 1}{x + 2}$.

Розв'язання:

а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{6x^2 + x - 1}{x + 2} = \frac{6 \cdot (-1)^2 + (-1) - 1}{-1 + 2} = \frac{6 - 1 - 1}{1} = 4$;

б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{6x^2 + x - 1}{x + 2} = \frac{6 \cdot (-2)^2 + (-2) - 1}{-2 + 2} = \frac{24 - 2 - 1}{0} = \frac{21}{0} = \infty$;

в) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{6x^2 + x - 1}{x + 2} = \frac{6 \cdot (-0,5)^2 + (-0,5) - 1}{-0,5 + 2} = \frac{1,5 - 0,5 - 1}{1,5} = \frac{0}{1,5} = 0$.

Відповідь: $4; \infty; 0$.

5. Знайдіть границі функцій: а) $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{1}{x-4} + \frac{1}{x^2-16} \right)$; б) $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x^2-16} \right)$.

Розв'язання:

а) $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{1}{x-4} + \frac{1}{x^2-16} \right) = \infty + \infty = \infty$.

б) $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x^2-16} \right) = \{\infty - \infty\}$. Невизначеність виду $\{\infty - \infty\}$ можна звести

до невизначеності виду $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$, якщо звести дробу до спільного знаменника, тоді

отримаємо $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x+4}{x-4} - \frac{1}{(x-4)(x+4)} \right) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+4-1}{x^2-16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+3}{x^2-16} = \frac{7}{0} = \infty$.

Відповідь: $\infty; \infty$.

6. Знайдіть границі функцій: а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{8 - 2x^2}{x^2 + 4x - 12}$;

в) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - x - 2}$.

Розв'язання:

Це приклади з невизначеністю виду $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$, для розкриття якої розкладають чисельник і / або знаменник на множники; після скорочення дужок, що давали нулі, матимемо визначеність.

а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1} = \frac{2 + 3 - 5}{-1 + 1} = \frac{0}{0} = \left\{ \frac{0}{0} \right\}$.

Для розкриття невизначеності $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ розкладемо чисельник на множники за формулою квадратного тричлена $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, де x_1 і x_2 – корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Так як для $\frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1} = 0$ дискримінант $D = b^2 - 4ac$ становить

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 9 + 40 = 49, \quad \text{корені} \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm 7}{2 \cdot 2} \quad \text{рівні}$$

$$x_1 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}, \quad x_2 = \frac{-4}{4} = -1, \quad \text{то} \quad 2x^2 - 3x - 5 = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)(x + 1) = (2x - 5)(x + 1).$$

Тоді маємо $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(2x - 5)(x + 1)}{x + 1}$. Скорочення усуває невизначеність $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, далі границя легко знаходиться $\lim_{x \rightarrow -1} (2x - 5) = 2 \cdot (-1) - 5 = -7$.

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8 - 2x^2}{x^2 + 4x - 12} = \frac{8 - 2 \cdot 2^2}{2^2 + 4 \cdot 2 - 12} = \left\{\frac{0}{0}\right\}.$$

Для розкриття невизначеності $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ розкладемо чисельник і знаменник на множники.

Так як для $x^2 + 4x - 12 = 0$ один із коренів це $x_1 = 2$ (оскільки при $x_1 = 2$ знаменник перетворюється в нуль, то другий корінь $x_2 = -6$ легко знаходиться за теоремою, оберненою до теореми Вієта. Тоді знаменник запишеться у вигляді $x^2 + 4x - 12 = (x - 2)(x + 6)$). Чисельник можна розкласти на множники за

формулою скороченого множення $8 - 2x^2 = 2(4 - x^2) = 2(2 - x)(2 + x)$, тоді маємо $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(2 - x)(2 + x)}{(x - 2)(x + 6)} = -\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x - 2)(2 + x)}{(x - 2)(x + 6)} = -\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(2 + x)}{x + 6} = -\frac{2 \cdot 4}{8} = -1$.

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - x - 2} = \frac{(-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 1}{(-1)^2 - (-1) - 2} = \frac{1 - 2 + 1}{1 + 1 - 2} = \left\{\frac{0}{0}\right\}.$$

Розкладемо чисельник і знаменник на множники.

Так як для $x^2 - x - 2 = 0$ корені за теоремою, оберненою до теореми Вієта, рівні $x_1 = -1$ і $x_2 = 2$, то знаменник можна записати у вигляді $x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$, для чисельника застосуємо формулу скороченого

множення $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$, тоді $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)^2}{(x + 1)(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{x - 2} = \frac{0}{-3} = 0$.

Відповідь: -7 ; -1 ; 0 .

3. Завдання для самостійного виконання

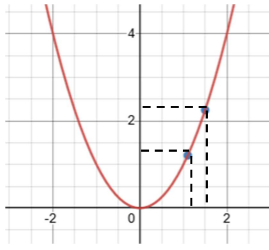
1. Знайдіть границі функцій

Варіант	
1, 16	a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x - 5}{x^2 - 3x + 2}$, б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 5}{x^2 - 3x + 2}$, в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 2x - 5}{x^2 - 3x + 2}$.
2, 17	a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + 7x - 8}$, б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + 7x - 8}$, в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + 7x - 8}$.
3, 18	a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 2}{x^2 + x - 2}$, б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 5x + 2}{x^2 + x - 2}$, в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 5x + 2}{x^2 + x - 2}$.
4, 19	a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 5x - 6}$, б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 5x - 6}$, в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 5x - 6}$.
5, 20	a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x - x^2 - 4}{x^2 - 2x - 8}$, б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x - x^2 - 4}{x^2 - 2x - 8}$, в) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5x - x^2 - 4}{x^2 - 2x - 8}$.
6, 21	a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 9x + 9}{x^2 - 5x + 6}$, б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 9x + 9}{x^2 - 5x + 6}$, в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 9x + 9}{x^2 - 2x - 3}$.
7, 22	a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 7x + 12}{3x^2 + 11x + 6}$, б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 7x + 12}{3x^2 + 11x + 6}$, в) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 7x + 12}{3x^2 + 11x + 6}$.
8, 23	a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x - 10}{x^2 - 3x - 10}$, б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 10}{x^2 - 3x - 10}$, в) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - x - 10}{x^2 - 3x - 10}$.
9, 24	a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - 4x + 3}$, б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - 4x + 3}$, в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - 4x + 3}$.
10, 25	a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 - x - 12}$, б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 - x - 12}$, в) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 - x - 12}$.
11, 26	a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 15x + 25}{5 - 4x - x^2}$, б) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 15x + 25}{5 - 4x - x^2}$, в) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 + 15x + 25}{5 - 4x - x^2}$.
12, 27	a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 7x + 10}{2x^2 + 5x + 2}$, б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 7x + 10}{2x^2 + 5x + 2}$, в) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 7x + 10}{2x^2 + 5x + 2}$.
13, 28	a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 - x - x^2}{3x^2 + 8x - 3}$, б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6 - x - x^2}{3x^2 + 8x - 3}$, в) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{6 - x - x^2}{3x^2 + 8x - 3}$.
14, 29	a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 8x + 7}{6x^2 + x - 5}$, б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 8x + 7}{6x^2 + x - 5}$, в) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 8x + 7}{6x^2 + x - 5}$.
15, 30	a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 6x - 7}{4x^2 - x - 3}$, б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 6x - 7}{4x^2 - x - 3}$, в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{4x^2 - x - 3}$.

ПОХІДНІ ФУНКЦІЙ. ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

1. Основні поняття та теореми

Похідна функції рівна границі відношення приросту функції до приросту аргументу функції за умови, що приріст аргументу прямує до нуля, тобто похідні обчислюють за формулою $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.



Наприклад, розглянемо функцію $y = x^2$.

Візьмемо два близькі значення аргументу x і $x + \Delta x$, $\Delta x \rightarrow 0$. Їм відповідають значення функції $y(x) = x^2$ та $y(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2$. Тоді приріст функції рівний $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2$.

Підставимо вираз Δy у формулу похідної $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\}$.

Розкриємо невизначеність $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2x + \Delta x)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x$.

Тобто для функції $y = x^2$ похідна $y' = 2x$ або $(x^2)' = 2x$.

Похідні всіх елементарних функцій виведені і записані в таблицю похідних

$(C)' = 0$	$(x)' = 1$	<i>таблиця похідних</i>	
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(x^2)' = 2x$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(e^x)' = e^x$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Операція диференціювання – це знаходження похідної.

Нехай задано диференційовані функції $u = u(x)$ та $v = v(x)$. Мають місце такі *правила диференціювання*.

Похідна суми функцій рівна сумі похідних цих функцій $(u + v)' = u' + v'$.

Похідна різниці функцій рівна різниці похідних цих функцій $(u - v)' = u' - v'$.

Похідна добутку двох диференційованих функцій дорівнює сумі добутку похідної першої функції на другу та добутку похідної другої функції на першу:

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'.$$

Наслідок: Сталий множник можна винести за знак похідної $(C \cdot u)' = Cu'$.

Похідна частки двох диференційованих функцій дорівнює різниці добутку похідної функції в чисельнику на функцію в знаменнику та добутку похідної функції в знаменнику на функцію в чисельнику, поділений на квадрат функції в

знаменнику: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$

Наслідок: $\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2}.$

Нехай змінна y є функцією від змінної u : $y = F(u)$, а змінна u є функцією від незалежної змінної x : $u = f(x)$. Функція $y = F(f(x))$ є складеною функцією – функція від функції.

Похідна складеної функції рівна похідній даної функції за проміжним аргументом, помноженій на похідну проміжного аргументу за незалежною змінною x , тобто $y' = F'(u) \cdot u' = F'(f(x)) \cdot f'(x)$.

Диференціалом функції $y = f(x)$ називається добуток похідної функції $f'(x)$ на приріст змінної Δx . Диференціал функції позначається dy : $dy = f'(x)\Delta x$.

Диференціал незалежної змінної x – це її приріст $\Delta x = x - x_0$, тобто $dx = \Delta x$. Тоді диференціал функції записується у вигляді $dy = f'(x)dx$, звідки маємо ще одне позначення похідної $\frac{d}{dx}y$.

Наприклад: $d(x^5) = 5x^4 dx$, $d(\sin x) = \cos x dx$.

Геометрично похідна в точці $y' = f'(x_0)$ являє собою кутовий коефіцієнт дотичної лінії до графіка функції $y = f(x)$ у точці x_0 . Тобто $y' = \operatorname{tg} \alpha$, де α – кут нахилу дотичної лінії до осі x .

Так як нормаль до графіка в точці перпендикулярна дотичній лінії до графіка функції в цій же точці, то кутовий коефіцієнт нормалі $k_n = -\frac{1}{f'(x_0)}$.

Рівняння дотичної у точці $(x_0; y_0)$ до графіка функції $y = f(x)$: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Рівняння нормалі у точці $(x_0; y_0)$ до графіка функції $y = f(x)$: $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайдіть похідні функцій: а) $y = \frac{1}{x^4}$, б) $y = \sqrt[3]{x^2}$, в) $y = \sqrt[3]{x^4}$.

Розв'язання:

а) Спочатку запишемо функцію у вигляді $y = x^{-4}$. Застосуємо $(x^n)' = nx^{n-1}$, отримаємо $y' = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$.

б) Спочатку запишемо функцію у вигляді $y = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$. Застосуємо $(x^n)' = nx^{n-1}$, отримаємо $y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

в) Спочатку запишемо функцію у вигляді $y = \sqrt[3]{x^4} = x^{\frac{4}{3}}$. Застосуємо $(x^n)' = nx^{n-1}$, отримаємо $y' = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$.

Відповідь: а) $y' = -\frac{4}{x^5}$, б) $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, в) $y' = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$.

2. Знайдіть похідні функцій: а) $y = 3\sin x$, б) $y = 5\ln x$.

Розв'язання:

$$\text{а) } y' = 3(\sin x)' = 3\cos x, \text{ б) } y' = 5(\ln x)' = 5\frac{1}{x} = \frac{5}{x}.$$

Відповідь: а) $y' = 3\cos x$, б) $y' = \frac{5}{x}$.

3. Знайдіть похідні функції $y = x^5 - \frac{1}{x} + 5^x + 3\cos x - 5\operatorname{tg}x + \sqrt{x} - 8\log_3 x + 1$.

Розв'язання:

$$y' = 5x^4 - \left(-\frac{1}{x^2}\right) + 5^x \ln 5 + 3 \cdot (-\sin x) - 5 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - 8 \cdot \frac{1}{x \ln 3} + 0.$$

Відповідь: $y' = 5x^4 + \frac{1}{x^2} + 5^x \ln 5 - 3\sin x - \frac{5}{\cos^2 x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{8}{x \ln 3}$.

4. Знайдіть похідні функцій: а) $y = x^5 \cdot \operatorname{arctg}x$, б) $y = \operatorname{tg}x \cdot \arcsin x$.

Розв'язання:

$$\text{а) } y' = (x^5)' \cdot \operatorname{arctg}x + x^5 \cdot (\operatorname{arctg}x)' = 5x^4 \cdot \operatorname{arctg}x + x^5 \cdot \frac{1}{1+x^2},$$

$$\text{б) } y' = (\operatorname{tg}x)' \cdot \arcsin x + \operatorname{tg}x \cdot (\arcsin x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \arcsin x + \operatorname{tg}x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Відповідь: а) $y' = 5x^4 \operatorname{arctg}x + \frac{x^5}{1+x^2}$, б) $y' = \frac{\arcsin x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

5. Знайдіть похідні функцій: а) $y = \frac{\cos x}{\ln x}$, б) $y = \frac{x^2}{5^x}$.

Розв'язання:

$$\text{а) } y' = \frac{(\cos x)' \cdot \ln x - \cos x \cdot (\ln x)'}{\ln^2 x} = \frac{-\sin x \cdot \ln x - \cos x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x},$$

$$\text{б) } y' = \frac{(x^2)' \cdot 5^x - x^2 \cdot (5^x)'}{(5^x)^2} = \frac{2x \cdot 5^x - x^2 \cdot 5^x \ln 5}{25^x}.$$

Відповідь: а) $y' = -\frac{x \sin x \ln x + \cos x}{x \ln^2 x}$, б) $y' = \frac{2x \cdot 5^x - x^2 \cdot 5^x \ln 5}{25^x}$.

6. Знайдіть похідні функцій: а) $y = (\cos x + \sqrt{x}) \cdot e^x$, б) $y = \frac{x}{2^x - \ln x}$.

Розв'язання:

$$\text{а) } y' = (\cos x + \sqrt{x})' \cdot e^x + (\cos x + \sqrt{x}) \cdot (e^x)' = \left(-\sin x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \cdot e^x + (\cos x + \sqrt{x}) \cdot e^x,$$

$$\text{б) } y' = \frac{(x)' \cdot (2^x - \ln x) - x \cdot (2^x - \ln x)'}{(2^x - \ln x)^2} = \frac{1 \cdot (2^x - \ln x) - x \cdot (2^x \ln 2 - x^{-1})}{(2^x - \ln x)^2}.$$

$$\text{Відповідь: а) } y' = \left(\cos x - \sin x + \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) e^x, \text{ б) } y' = \frac{2^x - \ln x - 2^x x \ln 2 + 1}{(2^x - \ln x)^2}.$$

7. Знайдіть похідні функцій: а) $y = \operatorname{tg} 5x$, б) $y = e^{-2x}$.

Розв'язання:

$$\text{а) } y' = \frac{1}{\cos^2 5x} \cdot (5x)' = \frac{1}{\cos^2 5x} \cdot 5 = \frac{5}{\cos^2 5x},$$

$$\text{б) } y' = e^{-2x} \cdot (-2x)' = e^{-2x} \cdot (-2) = -2e^{-2x},$$

$$\text{Відповідь: а) } y' = \frac{5}{\cos^2 5x}, \text{ б) } y' = -2e^{-2x}.$$

8. Знайдіть похідні функцій $y = \ln \operatorname{tg} x$ та $y = \operatorname{tg} \ln x$.

Розв'язання:

$$(\ln(\operatorname{tg} x))' = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x \cos x}, \quad (\operatorname{ctg}(\ln x))' = \frac{1}{\cos^2(\ln x)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cos^2(\ln x)}.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{1}{\sin x \cos x} \text{ і } \frac{1}{x \cos^2(\ln x)}.$$

9. Знайдіть похідні функцій $y = \arcsin \sqrt{x}$ та $y = \sqrt{\arcsin x}$.

Розв'язання:

$$(\arcsin(\sqrt{x}))' = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt{x})^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad (\sqrt{\arcsin x})' = \frac{1}{2\sqrt{\arcsin x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{1}{2\sqrt{x - x^2}} \text{ і } \frac{1}{2\sqrt{(1 - x^2)\arcsin x}}.$$

10. Знайдіть похідні функцій $y = \cos x^3$ та $y = \cos^3 x$.

Розв'язання:

$$(\cos(x^3))' = -\sin(x^3) \cdot 3x^2, \quad ((\cos x)^3)' = 3(\cos x)^2 \cdot (-\sin x).$$

$$\text{Відповідь: } -3x^2 \sin x^3 \text{ і } -3\cos^2 x \sin x.$$

11. Знайдіть похідну функції $y = \ln \operatorname{tge}^{\sin 3x}$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} y' &= (\ln \operatorname{tge}^{\sin 3x})' = \frac{1}{\operatorname{tge}^{\sin 3x}} \cdot (\operatorname{tge}^{\sin 3x})' = \frac{1}{\operatorname{tge}^{\sin 3x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 e^{\sin 3x}} \cdot (e^{\sin 3x})' = \\ &= \frac{1}{\operatorname{tge}^{\sin 3x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 e^{\sin 3x}} \cdot e^{\sin 3x} \cdot (\sin 3x)' = \frac{1}{\operatorname{tge}^{\sin 3x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 e^{\sin 3x}} \cdot e^{\sin 3x} \cdot 3 \cos 3x. \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь: } y' = \frac{3e^{\sin 3x} \cos 3x}{\sin e^{\sin 3x} \cos e^{\sin 3x}}.$$

12. Обчисліть диференціал функції $y = \cos e^{3x}$.

Розв'язання:

$$y' = -\sin e^{3x} \cdot e^{3x} \cdot 3, \quad dy = -3e^{3x} \sin e^{3x} dx.$$

$$\text{Відповідь: } -3e^{3x} \sin e^{3x} dx.$$

13. Обчисліть приріст та диференціал функції $y = 3x^2 + 2x - 9$ в точці $x_0 = 1$, якщо $\Delta x = 0,1$.

Розв'язання:

Приріст функції визначається формулою $\Delta y(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. В точці $x_0 = 1$ обчислюємо $f(x_0 + \Delta x) = f(1 + 0,1) = f(1,1) = 3 \cdot 1,1^2 + 2 \cdot 1,1 - 9 = -3,17$, $f(x_0) = f(1) = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 9 = -4$, тоді $\Delta y(1) = f(1,1) - f(1) = -3,17 + 4 = 0,83$.

Диференціал функції в точці визначається формулою $dy(x_0) = f'(x_0)dx$. Оскільки маємо $y' = f'(x) = 6x + 2$, $f'(x_0) = f'(1) = 6 \cdot 1 + 2 = 8$, $dx = \Delta x = 0,1$, то $dy(x_0) = 8 \cdot 0,1 = 0,8$.

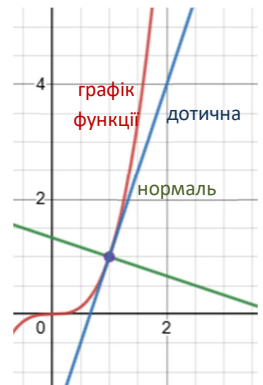
$$\text{Відповідь: } \Delta y(1) = 0,83; \quad dy(1) = 0,8.$$

14. Складіть рівняння дотичної та рівняння нормалі до графіка функції $y = x^3$ в точці $x_0 = 1$.

Розв'язання:

Оскільки $y(1) = 1^3 = 1$, то $y_0 = 1$. Оскільки $y' = 3x^2$, $y'(1) = 3$, то рівняння дотичної у точці $(1;1)$ до графіка функції: $y = 1 + 3(x - 1)$ або $y = 3x - 2$, рівняння нормалі у точці $(1;1)$ до графіка функції: $y = 1 - \frac{1}{3}(x - 1)$ або $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$

$$\text{Відповідь: } y = 3x - 2, \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}.$$



3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайдіть похідні функцій з рядка таблиці згідно з номером варіанта.

1.	$y = \cos x^{10} + \sin 100x$	$y = (4x + 1)^3 \cdot 7^x$	$y = \ln \arccos e^{-x}$	$y = 5^{\lg \sqrt{x}}$
2.	$y = \sin x^{100} + \cos 10x$	$y = (2x + 1)^7 \cdot 5^x$	$y = \ln \arctg e^{-x}$	$y = 3^{\sin \sqrt{x}}$
3.	$y = 3 \operatorname{tg}^6 x + 7^{\sqrt{x}}$	$y = 5x \cdot \arcsin 2x$	$y = (\operatorname{ctg} 3x + x^2)^5$	$y = \sqrt{\ln \cos x}$
4.	$y = 7 \operatorname{ctg}^3 x + 6^{\sqrt{x}}$	$y = 2x \cdot \arccos 5x$	$y = (\operatorname{tg} 5x + x^2)^3$	$y = \sqrt{\ln \sin x}$
5.	$y = \arcsin^3 x + \cos \sqrt{x}$	$y = e^{x^2} \cdot \arccos 7x$	$y = \sqrt{\operatorname{arctg} x^2}$	$y = \ln \operatorname{tg} 5^x$
6.	$y = \arccos \sqrt{x} + \sin^3 x$	$y = e^{x^3} \cdot \arcsin 5x$	$y = \sqrt{\operatorname{arctg} x^2}$	$y = \ln \operatorname{ctg} 7^x$
7.	$y = 2^{-\operatorname{tg} x} + \arccos^2 x$	$y = \sqrt{3x - 4} \cdot \sin 7x$	$y = \ln \operatorname{arsin} x^2$	$y = e^{\operatorname{arctg} 4x}$
8.	$y = 2^{-\operatorname{ctg} x} + \arcsin^2 x$	$y = \sqrt{4x - 7} \cdot \cos 3x$	$y = \ln \operatorname{arctg} x^2$	$y = e^{\arccos 3x}$
9.	$y = \operatorname{tg} \ln x + \sqrt{\operatorname{arctg} x}$	$y = x^7 \cdot \ln \cos 5x$	$y = (4^{\cos x} - e^{x^2})^3$	$y = \ln \cos \frac{1}{x}$
10.	$y = \sin \ln x + \sqrt{\arccos x}$	$y = x^5 \cdot \ln \sin 7x$	$y = (4^{\sin x} - e^{x^3})^2$	$y = \ln \sin \frac{1}{x}$

ПОХІДНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ. ПРАВИЛО ЛОПІТАЛЯ

1. Основні поняття та теореми

Похідною n -ого порядку функції $y = f(x)$ називається похідна похідної $(n-1)$ -ого порядку функції. Позначається $y^{(n)}$ або $f^{(n)}(x)$, використовуються також позначення y'' , y''' , y^{IV} ...

Для функції $y = f(x)$ похідна першого порядку y' або $\frac{dy}{dx}$; похідна другого порядку $y'' = (y')'$ або $\frac{d^2 y}{dx^2}$; похідна третього порядку $y''' = (y'')'$ або $\frac{d^3 y}{dx^3}$...

Наприклад: для функції $y = x^3 + 4x^2 + 8x + 1$ маємо $y' = 3x^2 + 8x + 8$, $y'' = 6x + 8$, $y''' = 6$, $y^{(4)} = 0$.

Наприклад: для функції $y = \sin x$ маємо $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$, $y''' = -\cos x$, $y^{(4)} = \sin x$, $y^{(5)} = \cos x$.

Правило Лопіталя – метод знаходження границь функцій, що розкриває невизначеності виду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ і $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$: границя відношення функцій дорівнює границі відношення їхніх похідних $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайдіть похідну другого порядку функції $y = (x^3 + 5)^2$.

Розв'язання:

$$y' = 2(x^3 + 5) \cdot 3x^2 = 6x^5 + 30x^2;$$

$$y'' = 6 \cdot 5x^4 + 30 \cdot 2x = 30x^4 + 60x.$$

Відповідь: $y'' = 30x^4 + 60x$.

2. Знайдіть похідну другого порядку функції $y = (x^2 + 2)e^{2x}$.

Розв'язання:

$$y' = (x^2 + 2)' e^{2x} + (e^{2x})' (x^2 + 2) = 2xe^{2x} + e^{2x} \cdot 2 \cdot (x^2 + 2) = 2e^{2x} \cdot (x + x^2 + 2);$$

$$y'' = (2e^{2x})' \cdot (x + x^2 + 2) + (x + x^2 + 2)' \cdot 2e^{2x} = 2e^{2x} \cdot 2 \cdot (x + x^2 + 2) + (1 + 2x) \cdot 2e^{2x} = 2e^{2x} \cdot (2x + 2x^2 + 4) + (1 + 2x) \cdot 2e^{2x} = 2e^{2x} \cdot (2x + 2x^2 + 4 + 1 + 2x) = 2e^{2x} (2x^2 + 4x + 5).$$

Відповідь: $y'' = 4x^2 e^{2x} + 8x e^{2x} + 10e^{2x}$.

3. Знайдіть похідну третього порядку функції $y = \arcsin x$.

Розв'язання:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}; \quad y'' = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2x) = x \cdot (1-x^2)^{-\frac{3}{2}};$$

$$y''' = x' \cdot (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + x \cdot \left[(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \right]' = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + x \cdot \left(-\frac{3}{2} \right) (1-x^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot (-2x) =$$

$$= (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2 (1-x^2)^{-\frac{5}{2}}.$$

Відповідь: $y''' = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}} + \frac{3x^2}{\sqrt{(1-x^2)^5}}.$

4. Знайдіть похідну другого порядку $y = \frac{\sin x}{1 - \cos x}.$

Розв'язання:

$$y' = \frac{(\sin x)' \cdot (1 - \cos x) - (1 - \cos x)' \cdot \sin x}{(1 - \cos x)^2} = \frac{\cos x \cdot (1 - \cos x) - \sin x \cdot \sin x}{(1 - \cos x)^2} =$$

$$= \frac{\cos x - \cos^2 x - \sin^2 x}{(1 - \cos x)^2} = \frac{\cos x - 1}{(1 - \cos x)^2} = -\frac{1}{1 - \cos x},$$

$$y'' = +\frac{1}{(1 - \cos x)^2} \cdot (1 - \cos x)' = \frac{1}{(1 - \cos x)^2} \cdot \sin x = \frac{\sin x}{(1 - \cos x)^2}.$$

Відповідь: $\frac{\sin x}{(1 - \cos x)^2}.$

5. Знайдіть границю функції $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 1}{x^3 + x^2 - x - 1}.$

Розв'язання:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 1}{x^3 + x^2 - x - 1} = \left\{ \frac{0}{0} \right\}. \text{ Застосуємо правило Лопіталю } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^5}{3x^2 + 2x - 1} = \frac{6}{4}.$$

Відповідь: 1,5.

6. Знайдіть границю функції $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}.$

Розв'язання:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1.$$

Відповідь: 1.

7. Знайдіть границю функції $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{tg} x}{\cos 2x}.$

Розв'язання:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{tg} x}{\cos 2x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-\frac{1}{\cos^2 x}}{-2 \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{2 \sin 2x} = \frac{2}{2} = 1.$$

Відповідь: 1.

8. Знайдіть границю функції $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

Розв'язання:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2.$$

Відповідь: 2.

9. Знайдіть границю функції $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 1}{e^{2x}}$.

Розв'язання:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 1}{e^{2x}} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{2e^{2x}} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{4e^{2x}} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{8e^{2x}} = \left\{ \frac{6}{\infty} \right\} = 0.$$

Відповідь: 0.

10. Знайдіть границю функції $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$.

Розв'язання:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \{ \infty - \infty \}. \text{ Зведемо дроби до спільного знаменника}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} = \frac{1}{2}.$$

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

11. Знайдіть границю функції $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \left(5^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \right)$.

Розв'язання:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \left(5^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \right) = \{ 0 \cdot \infty \} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5^{\frac{1}{x}} \ln 5 \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{\left(-\frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} 5^{\frac{1}{x}} \ln 5 = \ln 5.$$

Відповідь: $\ln 5$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайдіть другі похідні функцій згідно з номером варіанта.

1.	$y = (2x^2 - 3) \cdot \ln(x - 1)$	$y = x \cdot \cos x^2$	2.	$y = (x^2 + 1) \cdot \arctg x$	$y = x^2 \cdot \sin 5x$
3.	$y = (2x + 1) \cdot \ln^2 x$	$y = x^3 \cdot \operatorname{tg} 2x$	4.	$y = (2x^3 + 1) \cdot \cos x$	$y = x \cdot \ln(3x - 1)$
5.	$y = (4x^3 + 1) \cdot e^{2x}$	$y = x \cdot \sin x^3$	6.	$y = (x^2 + 3) \cdot \ln^2 x$	$y = 2^x \cdot (3x + 1)$
7.	$y = (x^3 + x) \cdot \arctg x$	$y = x^3 \cdot \sin 2x$	8.	$y = (3x^2 + 1) \cdot \sin x$	$y = x \cdot \ln^3 x$
9.	$y = (x + 1) \cdot \ln(x + 1)$	$y = x^2 \cdot \operatorname{tg} 3x$	10.	$y = (3x + 1) \cdot \sin 2x$	$y = (5x - 1) \cdot e^{3x}$

2. Знайдіть границі функцій, застосовуючи правило Лопіталю:

1.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3}$	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{\pi - 2x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2 \cos x + e^{-x}}{x \sin x}$
2.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + 3x - 5}{x^3 - 6x^2 + 5}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} + x - 1}{x^2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot e^x - 5x}{4x^2 + 7x}$
3.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 3x^2 + 7x - 5}{x^4 - 5x + 4}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{e^{4x}}$	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2}$
4.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{40} - 40x + 39}{x^{78} - 78x + 77}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3}{e^x + x}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x^2 - x - 4}}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$
5.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{ctg} x}{\cos 2x}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x^2 - 2x - 1}}{\sqrt[3]{x} - 1}$
6.	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \cos x)}{\ln \operatorname{tg} x}$
7.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{\sin^3 x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$
8.	$\lim_{x \rightarrow b} \frac{\sin x - \sin b}{x - b}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x - 1}{\ln(1 + x)}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 x}{e^{x^2} - x^2 - 1}$
9.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^n - 1}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x - \sin x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin^2 x}{x \cos x - \sin x}$
10.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x}$	$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\varphi - \arcsin \varphi}{\sin^3 \varphi}$

ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

1. Основні поняття та теореми

Функція *зростає* на проміжках, де похідна функції додатна; функція *спадає* на проміжках, де похідна функції від'ємна.

Точки, де похідна функції рівна нулю або не існує, є критичними першого роду для функції, в них можуть бути *екстремуми* (максимуми або мінімуми). Якщо при переході через критичну точку першого роду похідна функції змінює знак з плюс на мінус, то в цій точці функція має максимум; якщо при переході через критичну точку першого роду похідна функції змінює знак з мінуса на плюс, то в цій точці функція має мінімум.

Графік функції *опуклий* вниз на проміжках, де друга похідна функції додатна; графік функції *опуклий* вгору на проміжках, де друга похідна функції від'ємна. В точках, де друга похідна функції рівна нулю або не існує, є критичними другого роду для функції, в них можуть бути перегини графіка функції. Якщо при переході через критичну точку другого роду друга похідна функції змінює знак, то в цій точці графік функції має перегин.

Схема простого дослідження функції.

I. Знайти область визначення та область значень функції.

II. Знайти інтервали монотонності (зростання та спадання) функції, точки локальних екстремумів та значення функції в цих точках.

III. Знайти інтервали опуклості і вгнутості функції, точки перегину графіка та значення функції в цих точках.

IV. Використовуючи всі отримані результати, побудувати графік функції.

Пряма називається *асимптотою* функції, якщо графік функції необмежено наближається до неї при зростанні абсциси чи ординати.

Асимптоти бувають вертикальні та похилі (горизонтальні).

Графік функції $y = f(x)$ при змінній, що прямує до деякої точки $x \rightarrow a$, має *вертикальну* асимптоту, якщо границя функції в цій точці рівна безмежності $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$. Точка $x = a$ є точкою розриву графіка функції, а рівняння вертикальної асимптоти має вигляд $x = a$.

Вертикальні асимптоти слід шукати в тих точках, де функція невизначена.

Рівняння *похилої* асимптоти графіка функції $y = f(x)$ задається рівнянням прямої на площині $y = kx + b$, де кутовий коефіцієнт k та вільний коефіцієнт b обчислюються за формулами $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$. Якщо обидві границі існують і скінченні, то функція має похилу асимптоту, інакше – не має.

Іноді слід окремо розглядати випадки $x \rightarrow -\infty$ та $x \rightarrow +\infty$.

Графік функції $y = f(x)$ має *горизонтальну* асимптоту $y = b$, якщо $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ та $b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайдіть асимптоти графіка функції $y = \frac{2x^2 + x}{x + 6}$.

Розв'язання:

В точці $x = -6$ функція невизначена, в цій точці може існувати вертикальна асимптота.

Оскільки $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{2x^2 + x}{x + 6} = \frac{66}{0} = \infty$, то $x = -6$ – вертикальна асимптота.

Розглянемо поведінку функції зліва і справа від точки $x = -6$, маємо

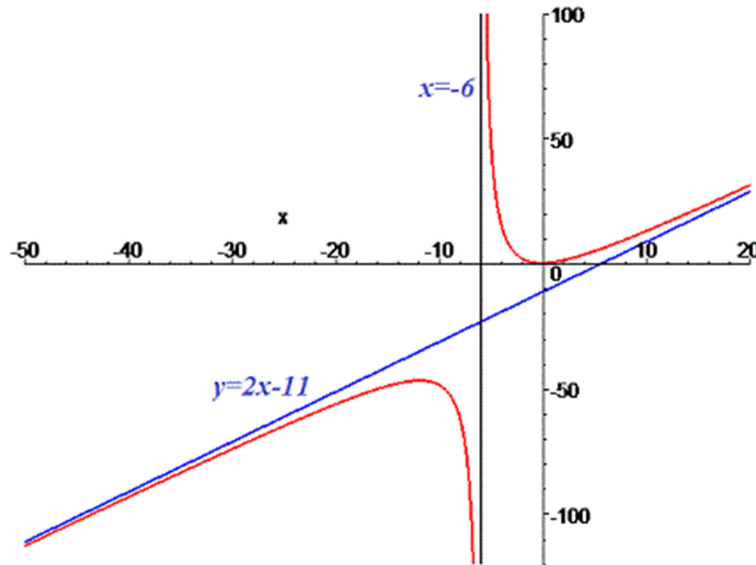
$$\lim_{x \rightarrow -6-0} \frac{2x^2 + x}{x + 6} = \frac{66}{-0} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -6+0} \frac{2x^2 + x}{x + 6} = \frac{66}{0} = +\infty.$$

Перевіримо наявність похилих асимптот.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x}{(x + 6)x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x}{x^2 + 6x} = 2,$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + x}{x + 6} - 2 \cdot x \right) = \{\infty - \infty\} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + x - 2x^2 - 12x}{x + 6} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-11x}{x + 6} \right) = -11. \end{aligned}$$

Отже, похила асимптота $y = kx + b = 2x - 11$.



Відповідь: вертикальна асимптота $x = -6$; похила асимптота $y = 2x - 11$.

2. Дослідіть функцію $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2$ та побудуйте її графік.

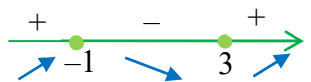
Розв'язання:

I. Область визначення функції $x \in (-\infty; +\infty)$. Область значень функції $y \in (-\infty; +\infty)$.

II. Знайдемо першу похідну функції $y' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 2x - 3$ або $y' = x^2 - 2x - 3$

і прирівняємо її до нуля: $x^2 - 2x - 3 = 0$. Розв'язками цього рівняння є $x_1 = -1$ та $x_2 = 3$. Це критичні точки першого роду.

Критичні точки розбивають числову пряму на три інтервали. При $x \in (-\infty; -1)$ і $x \in (3; +\infty)$ похідна функції додатна, функція зростає; при $x \in (-1; 3)$ похідна функції від'ємна, функція спадає. Тоді $x_{\max} = -1$, $x_{\min} = 3$.



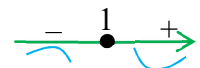
Визначимо значення функції в точках мінімуму та максимуму:

$$y_{\max} = y(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 2 = -\frac{1}{3} - 1 + 3 + 2 = 3\frac{2}{3}, A\left(-1; 3\frac{2}{3}\right);$$

$$y_{\min} = y(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 3^2 - 3 \cdot 3 + 2 = 9 - 9 - 9 + 2 = -7, B(3; -7).$$

III. Знайдемо другу похідну функції $y'' = (x^2 - 2x - 3)' = 2x - 2$ і прирівняємо її до нуля: $2x - 2 = 0$, звідки маємо $x = 1$. Це критична точка другого роду.

Критична точка розбиває числову пряму на два інтервали. При $x \in (-\infty; 1)$ друга похідна функції від'ємна, графік функції опуклий вгору; при $x \in (1; +\infty)$ друга похідна функції додатна, графік функції опуклий вниз; $x = 1$ є абсцисою точки перегину.

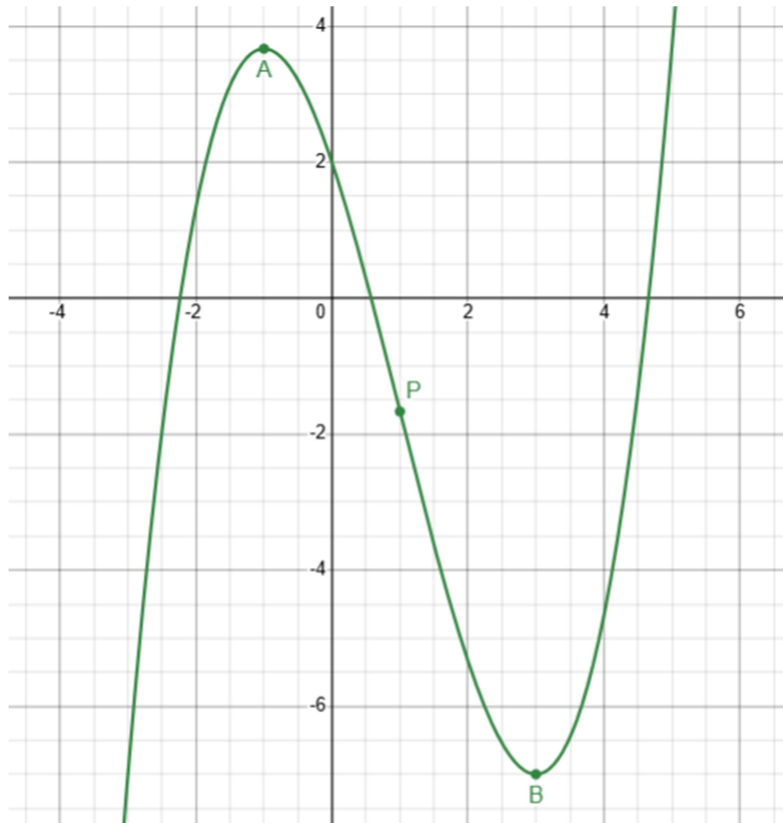


Знайдемо значення функції в цій точці.

$$y(1) = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = \frac{1}{3} - 1 - 3 + 2 = -2 + \frac{1}{3} = -1\frac{2}{3}, P\left(1; -1\frac{2}{3}\right).$$

IV. Скориставшись отриманими результатами, складемо таблицю значень функції і побудуємо графік.

x	$x \in (-\infty; -1)$	-1	$x \in (-1; 1)$	1	$x \in (1; 3)$	3	$x \in (3; +\infty)$
y	зростає опуклий	$3\frac{2}{3}$	спадає опуклий	$-1\frac{2}{3}$	спадає вгнутий	-7	зростає вгнутий



3. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $y = x^3 - 3x^2 + 2$ на відрізьку $[-1; 1]$.

Розв'язання:

Знайдемо критичні точки. Оскільки $y' = 3x^2 - 3 \cdot 2x = 3x^2 - 6x$, $3x^2 - 6x = 0$, $3x(x - 2) = 0$, то критичні точки $x = 0$ або $x = 2$. Відрізьку $[-1; 1]$ належить точка $x = 0$.

Знайдемо значення функції у критичній точці відрізька $y(0) = 2$, а також на кінцях відрізька $y(-1) = -1 - 3 + 2 = -2$, $y(1) = 1 - 3 + 2 = 0$.

Порівнявши ці значення функції, виберемо найбільше $\max_{[-1; 1]} y = y(0) = 2$ і найменше $\min_{[-1; 1]} y = y(-1) = -2$.

Відповідь: 2 ; -2 .

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайдіть асимптоти графіка функції згідно з номером варіанта.

1. $y = \frac{4x}{(x+1)^2}$

2. $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

3. $y = \frac{2}{x^2 + 2x}$

4. $y = \frac{4}{x^2 + 2x - 3}$

5. $y = \frac{12x}{9 - x^2}$

6. $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$

7. $y = \frac{4(x+1)^2}{x^2 + x - 2}$

8. $y = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}$

9. $y = \frac{x^2 - 6x + 9}{(x-1)^2}$

10. $y = \frac{8(x-1)}{(x+1)^2}$

11. $y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$

12. $y = \frac{4}{3 + 2x - x^2}$

13. $y = \frac{12 - 3x^2}{x^2 + x}$

14. $y = \frac{9 + 6x - 3x^2}{x^2 - 2x - 3}$

15. $y = -\frac{8x}{x^2 - 4}$

2. Проведіть дослідження функції та побудуйте її графік.

1. $y = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 5$

2. $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3$

3. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$

4. $y = \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 5$

5. $y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2$

6. $y = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 9$

7. $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$

8. $y = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 1$

9. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1$

10. $y = -\frac{1}{5}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4$

11. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x$

12. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4$

13. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2$

14. $y = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{4}x^2 - 5$

15. $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$

16. $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9$

17. $y = \frac{1}{5}x^3 - 3x^2 + 9$

18. $y = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + 5$

19. $y = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 9x$

20. $y = \frac{1}{5}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 9$

21. $y = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3$

22. $y = -\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 2$

23. $y = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - 2x$

24. $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 5$

25. $y = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 9$

26. $y = -\frac{1}{9}x^3 + 3x - 5$

27. $y = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - 2x$

28. $y = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 2$

29. $y = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - 1$

30. $y = \frac{1}{9}x^3 - x^2 + 3$

Модуль 4 «ІНТЕГРАЛИ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ» НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ. БЕЗПОСЕРЕДНЄ ІНТЕГРУВАННЯ

1. Основні поняття та теореми

Операція обернена до операції диференціювання називається *інтегруванням*.

Якщо відомо похідну деякої функції $y' = f(x)$, то функція $y = F(x)$, для якої справджується рівність $F'(x) = f(x)$, називається *первісною* для $f(x)$.

Приклад: для $y' = x^5$; первісна $y = \frac{1}{6}x^6$, бо $\frac{1}{6}(x^6)' = \frac{1}{6}6x^5$.

Також первісними є функції, що відрізняються на сталу величину.

Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то вираз $F(x) + C$ називається *невизначеним інтегралом* і позначається символом $\int f(x)dx = F(x) + C$. Функція $f(x)$ називається *підінтегральною функцією*, вираз $f(x)dx$ – *підінтегральним виразом*, $\int$ – знак інтеграла.

На основі таблиці похідних та похідних деяких виразів складемо таблицю інтегралів.

$\int 0 dx = C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int 1 dx = \int dx = x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$\int \frac{dx}{x^n} = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C, n \neq 1$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$
$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a-x}{a+x} \right + C, x \neq a$	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} x + C$
$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C, x \neq a$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C, x < 1$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C, x < a $

При інтегруванні використовують такі властивості:

- невизначений інтеграл від суми (різниці) будь-якого скінченного числа функцій дорівнює сумі (різниці) невизначених інтегралів від цих функцій $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

- сталий множник можна винести за знак інтеграла $\int k \cdot f(x)dx = k \int f(x)dx$.

Можна застосувати формулу з таблиці інтегралів, якщо аргумент функції і змінна під знаком диференціала однакові. Але можна застосовувати табличні формули і у випадках, коли до змінної додається чи віднімається число або коли змінна множиться чи ділиться на число:

$$\int f(x \pm k)dx = F(x \pm k) + C, \text{ оскільки } d(x \pm k) = dk \pm dk = dx;$$

$$\int f(kx)dx = \frac{1}{k} F(kx) + C, \text{ оскільки } d(kx) = xdk + kdx = kdx.$$

2. Приклади виконання завдань

1. Знайдіть інтеграл $\int (5 - x^3)^2 dx$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \int (5 - x^3)^2 dx &= \int (25 - 10x^3 + x^6) dx = \int 25 dx - \int 10x^3 dx + \int x^6 dx = 25 \int dx - 10 \int x^3 dx + \\ &+ \int x^6 dx = 25x - 10 \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} + C. \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь: } 25x - \frac{5}{2}x^4 + \frac{x^7}{7} + C.$$

2. Знайдіть інтеграли $\int \sqrt{x} dx$, $\int \sqrt[3]{x} dx$.

Розв'язання:

Представимо корені у вигляді степеня і застосуємо табличний інтеграл

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ маємо } \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C, \int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C, \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} + C.$$

3. Знайдіть інтеграл $\int \left(\frac{17}{\sqrt{x^3}} + \frac{1}{x^{12}} - x^{20} \right) dx$.

Розв'язання:

Представимо корінь у вигляді степеня і застосуємо табличні інтеграли

$$\begin{aligned} \int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \text{ та } \int \frac{dx}{x^n} = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C, \text{ отримаємо } \int \left(\frac{17}{\sqrt{x^3}} + \frac{1}{x^{12}} - x^{20} \right) dx = \\ &= \int \left(\frac{17}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{x^{12}} - x^{20} \right) dx = \int \frac{17}{x^{\frac{3}{2}}} dx + \int \frac{1}{x^{12}} dx + \int x^{20} dx = -17 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{11x^{11}} + \frac{x^{21}}{21} + C. \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь: } -\frac{34}{\sqrt{x}} - \frac{1}{11x^{11}} - \frac{x^{21}}{21} + C.$$

4. Знайдіть інтеграли $\int (2 \sin x - 3 \cos x) dx$, $\int (2 \cos x - 4e^x + 3) dx$.

Розв'язання:

$$\int (2 \sin x - 3 \cos x) dx = 2 \int \sin x dx - 3 \int \cos x dx = -2 \cos x - 3 \sin x + C,$$

$$\int (2 \cos x - 4e^x + 3) dx = 2 \int \cos x dx - 4 \int e^x dx + 3 \int dx = 2 \sin x - 4e^x + 3x + C.$$

Відповідь: $-2 \cos x - 3 \sin x + C$, $2 \sin x - 4e^x + 3x + C$.

5. Знайдіть інтеграли $\int \left(\frac{3}{x} + 2^x - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx$, $\int \left(7x + \frac{2}{x} - 5^x \right) dx$.

Розв'язання:

$$\int \left(\frac{3}{x} + 2^x - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = 3 \int \frac{dx}{x} + \int 2^x dx - \int \frac{dx}{\cos^2 x} = 3 \ln|x| + \frac{2^x}{\ln 2} - \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \left(7x + \frac{2}{x} - 5^x \right) dx = 7 \int x dx + 2 \int \frac{dx}{x} - \int 5^x dx = 7 \frac{x^2}{2} + 2 \ln|x| - \frac{5^x}{\ln 5} + C.$$

Відповідь: $3 \ln|x| + \frac{2^x}{\ln 2} - \operatorname{tg} x + C$, $7 \frac{x^2}{2} + 2 \ln|x| - \frac{5^x}{\ln 5} + C$.

6. Знайдіть інтеграли $\int \frac{dx}{x^2 + 3}$, $\int \frac{dx}{x^2 - 3}$.

Розв'язання:

Застосуємо формули $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$ і $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$:

$$\int \frac{dx}{3 + x^2} = \int \frac{dx}{(\sqrt{3})^2 + x^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 3} = \int \frac{dx}{x^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{3}}{x + \sqrt{3}} \right| + C.$$

Відповідь: $\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C$, $\frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{3}}{x + \sqrt{3}} \right| + C$.

7. Знайдіть інтеграли $\int \frac{dx}{\sqrt{25 - x^2}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{25 + x^2}}$.

Розв'язання:

Застосуємо $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$ і $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25 - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{5} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 25}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + 25} \right| + C.$$

Відповідь: $\arcsin \frac{x}{5} + C$, $\ln \left| x + \sqrt{x^2 + 25} \right| + C$.

8. Знайдіть інтеграли $\int e^{x+7} dx$, $\int \cos(x-3) dx$, $\int \frac{dx}{x-5}$, $\int \frac{dx}{(x+9)^2}$.

Розв'язання:

$$\int e^{x+7} dx = e^{x+7} + C, \quad \int \cos(x-3) dx = \sin(x-3) + C, \quad \int \frac{dx}{x-5} = \ln|x-5| + C,$$

$$\int \frac{dx}{(x+9)^2} = -\frac{1}{1 \cdot (x+9)^1} + C = -\frac{1}{x+9} + C.$$

Відповідь: $e^{x+7} + C$, $\sin(x-3) + C$, $\ln|x-5| + C$, $-\frac{1}{x+9} + C$.

9. Знайдіть інтеграли $\int e^{3x} dx$, $\int \cos 2x dx$, $\int 5^{-x} dx$, $\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{3}}$.

Розв'язання:

$$\int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} + C, \quad \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C, \quad \int 5^{-x} dx = -\frac{5^{-x}}{\ln 5} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{3}} = 3 \operatorname{tg} \frac{x}{3} + C.$$

Відповідь: $\frac{1}{3} e^{3x} + C$, $\frac{1}{2} \sin 2x + C$, $-\frac{5^{-x}}{\ln 5} + C$, $3 \operatorname{tg} \frac{x}{3} + C$.

10. Знайдіть інтеграли $\int \cos(2x+3) dx$, $\int \sin(4x-5) dx$, $\int \frac{dx}{\sin^2 \left(\frac{x}{3} - 1 \right)}$.

Розв'язання:

$$\int \cos(2x+3) dx = \frac{1}{2} \sin(2x+3) + C, \quad \int \sin(4x-5) dx = -\frac{1}{4} \cos(4x-5) + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 \left(\frac{x}{3} - 1 \right)} = -3 \operatorname{ctg} \left(\frac{x}{3} - 1 \right) + C.$$

Відповідь: $\frac{1}{2} \sin(2x+3) + C$, $-\frac{1}{4} \cos(4x-5) + C$, $-3 \operatorname{ctg} \left(\frac{x}{3} - 1 \right) + C$.

11. Знайдіть інтеграл $\int \frac{dx}{x^2 - 8x + 25}$, $\int \frac{9dx}{x^2 + 6x + 13}$.

Розв'язання:

Виділимо повні квадрати у знаменниках

$$\int \frac{dx}{x^2 - 8x + 25} = \int \frac{dx}{x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 16 + 9} = \int \frac{dx}{(x-4)^2 + 3^2} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x-4}{3} + C,$$

$$\int \frac{9dx}{x^2 + 6x + 13} = \int \frac{9dx}{x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 9 + 4} = \int \frac{9dx}{(x+3)^2 + 2^2} = \frac{9}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+3}{2} + C.$$

Відповідь: $\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x-4}{3} + C$, $\frac{9}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+3}{2} + C$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайдіть інтеграли з рядка таблиці згідно з номером варіанта.

1.	$\int \left(x^4 + \frac{7}{x^4} - 3\sqrt[3]{x^5} \right) dx$	$\int \left(9 - \frac{4}{x} - \frac{3}{\cos^2 x} + 10^x \right) dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$	$\int \frac{dx}{x^2-9}$
2.	$\int \left(x^9 - \frac{5}{x^3} + 2\sqrt[3]{x^4} \right) dx$	$\int \left(10 - \frac{3}{x} + \frac{4}{\sin^2 x} - 9^x \right) dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$	$\int \frac{dx}{x^2+9}$
3.	$\int \left(5x^3 + \frac{4}{x^3} - \sqrt[4]{x^5} \right) dx$	$\int \left(3x + \frac{5}{x} - \frac{\cos x}{2} + 7^x \right) dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{49-x^2}}$	$\int \frac{dx}{x^2-49}$
4.	$\int \left(2x^4 + \frac{1}{x^3} - \frac{3}{\sqrt[5]{x}} \right) dx$	$\int \left(7x + \frac{2}{x} - \frac{\cos x}{5} - 3^x \right) dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{49+x^2}}$	$\int \frac{dx}{x^2+49}$
5.	$\int \left(3x^4 - \frac{10}{x^2} + \sqrt[3]{x^2} \right) dx$	$\int \left(6\sin x - 8e^x + \frac{x}{5} - 3 \right) dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$	$\int \frac{dx}{x^2-4}$
6.	$\int \left(3x^3 - \frac{9}{x^3} + \sqrt{x^7} \right) dx$	$\int \left(3\cos x + 5e^x - \frac{x}{8} - 6 \right) dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$	$\int \frac{dx}{x^2+4}$
7.	$\int \left(2x^3 - \sqrt[4]{x} + \frac{5}{x^4} \right) dx$	$\int \left(2e^x - 7 + \frac{x}{8} - \frac{9}{\cos^2 x} \right) dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{36-x^2}}$	$\int \frac{dx}{x^2-36}$
8.	$\int \left(4x^4 + \frac{7}{x^7} - \sqrt{x^9} \right) dx$	$\int \left(9e^x - 8 + \frac{x}{7} - \frac{2}{\sin^2 x} \right) dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{36+x^2}}$	$\int \frac{dx}{x^2+36}$
9.	$\int \left(x^8 + \frac{10}{x^2} - 3\sqrt[3]{x^3} \right) dx$	$\int \left(4 - \frac{7}{x} - \frac{6}{\cos^2 x} + 8^x \right) dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$	$\int \frac{dx}{x^2-16}$
10.	$\int \left(x^3 + \frac{5}{\sqrt[5]{x^2}} + \frac{1}{4x^3} \right) dx$	$\int \left(8 - \frac{6}{x} + \frac{7}{\cos^2 x} - 4^x \right) dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{16+x^2}}$	$\int \frac{dx}{x^2+16}$

2. Знайдіть інтеграли з рядка таблиці згідно з номером варіанта.

1.	$\int \sin(8+x)dx, \int \sin \frac{x}{5}dx, \int \sqrt{\frac{x}{2}}-3dx$	2.	$\int \sin(x-8)dx, \int \sin 5xdx, \int \sqrt{2-\frac{x}{3}}dx$
3.	$\int \frac{dx}{\sin^2(8+x)}, \int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{5}}, \int \frac{dx}{2x-3}$	4.	$\int \frac{dx}{\sin^2(x-8)}, \int \frac{dx}{\sin^2 5x}, \int \frac{dx}{3-2x}$
5.	$\int \frac{dx}{(8+x)^2+1}, \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{8}\right)^2+1}, \int \frac{dx}{\left(2-\frac{x}{3}\right)^4}$	6.	$\int \frac{dx}{(x-8)^2+1}, \int \frac{dx}{(8x)^2+1}, \int \frac{dx}{\left(3-\frac{x}{2}\right)^4}$
7.	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-(8+x)^2}}, \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{8}\right)^2}}, \int \frac{dx}{\frac{x}{2}-3}$	8.	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-8)^2}}, \int \frac{dx}{\sqrt{1-(8x)^2}}, \int \frac{dx}{3-\frac{x}{2}}$
9.	$\int 2^{\pi+x} dx, \int 2^{\frac{x}{\pi}} dx, \int (2x-3)^9 dx$	10.	$\int 2^{x-\pi} dx, \int 2^{\pi x} dx, \int (3x-2)^9 dx$

МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

1. Основні поняття та теореми

Розглянемо такі методи інтегрування, як внесення під знак диференціала, заміна змінної, частинами.

Так як похідна складеної функції $y = \varphi(\psi(x))$ – це $y' = \varphi'(\psi(x)) \cdot \psi'(x)$, то інтеграл $\int \varphi'(\psi(x)) \cdot \psi'(x) dx$ має дорівнювати $y = \varphi(\psi(x)) + C$.

Знаходять інтеграл від складеної функції $\varphi'(\psi(x)) \cdot \psi'(x)$ методом внесення $\psi'(x)$ під знак диференціала $\int \varphi'(\psi(x)) \cdot \underbrace{\psi'(x) dx}_{d(\psi(x))} = \int \varphi'(\psi(x)) \cdot d(\psi(x)) = \varphi(\psi(x)) + C$.

Застосовують наступні внесення виразів під знак диференціала: $2x dx = d(x^2)$, $3x^2 dx = d(x^3)$, $e^x dx = d(e^x)$, $a^x \ln a dx = d(a^x)$, $\cos x dx = d(\sin x)$, $\sin x dx = -d(\cos x)$, $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x)$, $\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\operatorname{ctg} x)$, $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$, $\frac{dx}{2\sqrt{x}} = d(\sqrt{x})$.

Метод заміни змінної застосовують, наприклад, при інтегруванні ірраціональних функцій. Нову змінну $t = g(x)$ вводять замість виразу, що ускладнює функцію або повторюється, причому замінити треба і dx , виразивши його з $dt = g'(x) dx$. Інтегрування проводиться по новій змінній. В кінці робиться зворотна заміна.

Формула інтегрування частинами має вигляд $\int u dv = uv - \int v du$. Інтегрування частинами застосовують:

1) в інтегралах виду $\int P(x)e^x dx$, $\int P(x)a^x dx$, $\int P(x)\sin x dx$, $\int P(x)\cos x dx$ (де $P(x)$ – многочлен, позначають $u = P(x)$, dv – залишок підінтегральної функції);

2) в інтегралах виду $\int P(x)\log_a x dx$, $\int P(x)\ln x dx$, $\int P(x)\arcsin x dx$; $\int P(x)\arccos x dx$, $\int P(x)\operatorname{arctg} x dx$, $\int P(x)\operatorname{arcctg} x dx$ (де наявність $P(x)$ є необов'язковою, позначають u – логарифмічна або обернена тригонометрична функція, $dv = P(x) dx$).

2. Приклади виконання завдань

1. Знайдіть інтеграли $\int \frac{2x dx}{\sin^2 x^2}$, $\int \frac{x dx}{1+x^2}$, $\int 5^{x^3} \cdot 3x^2 dx$, $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^3}}$.

Розв'язання:

$$\int \frac{2x dx}{\sin^2 x^2} = \int \frac{d(x^2)}{\sin^2 x^2} = -\operatorname{ctg} x^2 + C, \quad \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + C,$$

$$\int 5^{x^3} \cdot 3x^2 dx = \int 5^{x^3} d(x^3) = \frac{5^{x^3}}{\ln 5} + C, \quad \frac{1}{3} \int \frac{3x^2 dx}{(1+x^3)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{3} \int \frac{d(x^3+1)}{(1+x^3)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{3} \frac{1}{(1+x^3)^{\frac{1}{2}}} + C.$$

$$\text{Відповідь: } -\operatorname{ctg} x^2 + C, \quad \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C, \quad \frac{5^{x^3}}{\ln 5} + C, \quad \frac{2}{3} \sqrt{1+x^3} + C.$$

2. Знайдіть інтеграли $\int \cos^{20} x \sin x dx$, $\int \frac{\cos x dx}{\sin^7 x}$, $\int \sin^6 2x \cos 2x dx$.

Розв'язання:

$$\int \cos^{20} x \sin x dx = -\int \cos^{20} x d(\cos x) = -\frac{\cos^{21} x}{21} + C,$$

$$\int \frac{\cos x dx}{\sin^7 x} = \int \frac{d(\sin x)}{\sin^7 x} = -\frac{1}{6 \sin^6 x} + C,$$

$$\frac{1}{2} \int \sin^6 2x \cos 2x d(2x) = \frac{1}{2} \int \sin^6 2x d(\sin 2x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^7 2x}{7} + C,$$

$$\text{Відповідь: } -\frac{\cos^{21} x}{21} + C, -\frac{1}{6 \sin^6 x} + C, \frac{\sin^7 2x}{14} + C.$$

3. Знайдіть інтеграли $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$, $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \operatorname{ctg}^2 x}$.

Розв'язання:

$$\int e^{\operatorname{tg} x} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int e^{\operatorname{tg} x} d(\operatorname{tg} x) = e^{\operatorname{tg} x} + C, \int \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x \sin^2 x} dx = -\int \frac{d(\operatorname{ctg} x)}{\operatorname{ctg}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ctg} x} + C.$$

$$\text{Відповідь: } e^{\operatorname{tg} x} + C, \frac{1}{\operatorname{ctg} x} + C.$$

4. Знайдіть інтеграли $\int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 4}$, $\int \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{2\sqrt{x}}$, $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$, $\int \frac{dx}{x \ln x}$.

Розв'язання:

$$\int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 4} = \int \frac{d(e^x)}{(e^x)^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{e^x}{2} + C, \quad \int e^{\sqrt{x}} \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \int e^{\sqrt{x}} d(\sqrt{x}) = e^{\sqrt{x}} + C,$$

$$\int \ln^2 x \frac{dx}{x} = \int \ln^2 x d(\ln x) = \frac{\ln^3 x}{3} + C, \int \frac{1}{\ln x} \frac{dx}{x} = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x| + C.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{e^x}{2} + C, e^{\sqrt{x}} + C, \frac{\ln^3 x}{3} + C, \ln|\ln x| + C.$$

5. Знайдіть інтеграл $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right] &= \int \frac{2t dt}{1 + t} = 2 \int \frac{t}{1 + t} dt = 2 \int \left(\frac{t+1}{1+t} - \frac{1}{1+t} \right) dt = 2 \int \left(1 - \frac{1}{1+t} \right) dt = \\ &= 2(t - \ln|1+t|) + C. \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь: } 2\sqrt{x} - 2\ln|1 + \sqrt{x}| + C.$$

6. Знайдіть інтеграл $\int \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx$.

Розв'язання:

$$\int \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right] = \int \frac{1-t}{t(t^2+1)} 2t dt = \int \frac{2-2t}{t^2+1} dt = \int \frac{2dt}{t^2+1} - \int \frac{2t}{t^2+1} dt =$$

$$= 2 \operatorname{arctgt} - \int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} = 2 \operatorname{arctgt} - \ln|t^2+1| + C.$$

Відповідь: $2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \ln|x+1| + C$.

7. Знайти інтеграл $\int \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} dx$.

Розв'язання:

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} dx \left[\begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \\ t = \sqrt[6]{x} \end{array} \right] = \int \frac{t^2-1}{t^3+t^2} 6t^5 dt = \int \frac{(t-1)(t+1)}{(t+1)t^2} 6t^5 dt = \int 6t^3(t-1) dt =$$

$$= 6 \int (t^4 - t^3) dt = 6 \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{4} \right) + C.$$

Відповідь: $6 \left(\frac{\sqrt[6]{x^5}}{5} - \frac{\sqrt[6]{x^4}}{4} \right) + C$.

8. Знайдіть інтеграл $\int x \cos \frac{x}{27} dx$.

Розв'язання:

$$\int x \cos \frac{x}{27} dx \left[\begin{array}{l} u = x \\ dv = \cos \frac{x}{27} dx \\ du = u' dx = 1 \cdot dx \\ v = \int \cos \frac{x}{27} dx = 27 \sin \frac{x}{27} \end{array} \right] =$$

$$= 27x \sin \frac{x}{27} - 27 \int \sin \frac{x}{27} dx = 27x \sin \frac{x}{27} + 27^2 \cos \frac{x}{27} + C.$$

Відповідь: $27x \sin \frac{x}{27} + 27^2 \cos \frac{x}{27} + C$.

9. Знайдіть інтеграл $\int (1-4x) \sin 2x dx$.

Розв'язання:

$$\int (1-4x) \sin 2x dx \left[\begin{array}{l} u = 1-4x \\ dv = \sin 2x dx \\ du = u' dx = -4 \cdot dx \\ v = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array} \right] =$$

$$= -(1-4x) \frac{1}{2} \cos 2x - \int \frac{1}{2} \cos 2x \cdot 4 dx = -(1-4x) \frac{1}{2} \cos 2x - \sin 2x + C.$$

Відповідь: $\left(2x - \frac{1}{2} \right) \cos 2x - \sin 2x + C$.

10. Знайдіть інтеграл $\int x e^{-2x} dx$.

Розв'язання:

$$\int x e^{-2x} dx \left[\begin{array}{ll} u = x & du = u' dx = 1 \cdot dx \\ dv = e^{-2x} dx & v = \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} \end{array} \right] = -\frac{1}{2} x e^{-2x} + \int \frac{1}{2} e^{-2x} dx =$$

$$= -\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + C.$$

Відповідь: $-\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) e^{-2x} + C.$

11. Знайдіть інтеграл $\int (2x-1)e^{-3x} dx.$

Розв'язання:

$$\int (2x-1)e^{-3x} dx \left[\begin{array}{ll} u = (2x-1) & du = u' dx = 2 dx \\ dv = e^{-3x} dx & v = \int e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} e^{-3x} \end{array} \right] =$$

$$= -\frac{1}{3} (2x-1)e^{-3x} + \int \frac{2}{3} e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} (2x-1)e^{-3x} - \frac{2}{9} e^{-3x} + C.$$

Відповідь: $\left(\frac{1}{9} - \frac{2x}{3}\right) e^{-3x} + C.$

12. Знайдіть інтеграл $\int \operatorname{arctg} 2x dx.$

Розв'язання:

$$\int \operatorname{arctg} 2x dx \left[\begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} 2x & du = \frac{2 dx}{1+4x^2} \\ dv = dx & v = x \end{array} \right] = x \cdot \operatorname{arctg} 2x - \int \frac{2x}{1+4x^2} dx =$$

$$= x \cdot \operatorname{arctg} 2x - \int \frac{d(x^2)}{1+4x^2} = x \cdot \operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{4} \ln|1+4x^2| + C.$$

Відповідь: $x \cdot \operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{4} \ln|1+4x^2| + C.$

13. Знайдіть інтеграл $\int \arccos x dx.$

Розв'язання:

$$\int \arccos x dx \left[\begin{array}{ll} u = \arccos x & du = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx & v = x \end{array} \right] = x \arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= x \arccos x + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arccos x + \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= x \arccos x + \frac{1}{2} \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}} + C.$$

Відповідь: $x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C.$

14. Знайдіть інтеграл $\int (2x-3) \ln x dx.$

Розв'язання:

$$\int (2x-3)\ln x dx \left[\begin{array}{ll} u = \ln x & du = u' dx = \frac{1}{x} dx \\ dv = (2x-3) dx & v = \int (2x-3) dx = x^2 - 3x \end{array} \right] =$$

$$= (x^2 - 3x)\ln x - \int \frac{x^2 - 3x}{x} dx = (x^2 - 3x)\ln x - \int (x - 3) dx = (x^2 - 3x)\ln x - \frac{x^2}{2} + 3x + C.$$

Відповідь: $(x^2 - 3x)\ln x - \frac{x^2}{2} + 3x + C.$

15. Знайдіть інтеграл $\int \ln(x-8) dx$.

Розв'язання:

$$\int \ln(x-8) dx \left[\begin{array}{ll} u = \ln(x-8) & du = \frac{dx}{x-8} \\ dv = dx & v = x \end{array} \right] = x \ln(x-8) - \int \frac{x}{x-8} dx = x \ln(x-8) -$$

$$- \int \left(\frac{x-8}{x-8} + \frac{8}{x-8} \right) dx = x \ln(x-8) - \int \left(1 + \frac{8}{x-8} \right) dx = x \ln(x-8) - x - 8 \ln|x-8| + C.$$

Відповідь: $x \ln(x-8) - x - 8 \ln|x-8| + C.$

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайдіть інтеграли методом внесенням під знак диференціала.

1.	$\int \cos^3 x \sin x dx$	$\int \frac{\operatorname{tg}^3 x dx}{\cos^2 x}$	$\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$
2.	$\int \sin^6 x \cos x dx$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \operatorname{tg}^3 x}$	$\int \frac{e^x dx}{e^x + 3}$
3.	$\int \frac{\sin x dx}{2\sqrt{\cos x}}$	$\int \frac{\operatorname{ctg}^2 x dx}{\sin^2 x}$	$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx$
4.	$\int \frac{\sin 2x dx}{\cos 2x}$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \operatorname{ctg} x}$	$\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$
5.	$\int \frac{\sin x dx}{5 + \cos x}$	$\int \frac{3x^2 dx}{2x^3 + 1}$	$\int \frac{3^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx$
6.	$\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}$	$\int \frac{2x dx}{x^2 + 10}$	$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$
7.	$\int \operatorname{tg} x dx$	$\int 2x \sin x^2 dx$	$\int e^x \sin e^x dx$
8.	$\int e^{\cos x} \sin x dx$	$\int 2^{x^3} \cdot 3x^2 dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}}$
9.	$\int \sin^2 4x \cos 4x dx$	$\int x e^{-x^2} dx$	$\int \frac{\sqrt{\ln x} dx}{x}$
10.	$\int \sin^5 3x \cos 3x dx$	$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3 - 3}}$	$\int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 9}$

2. Знайдіть інтеграли.

1.	$\int (4x+3)\sin 5x dx$	$\int \arctg \sqrt{4x-1} dx$
2.	$\int (7x-10)\sin 4x dx$	$\int \ln(x^2+4) dx$
3.	$\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$	$\int \arctg \sqrt{2x-1} dx$
4.	$\int (4x+7)\cos 3x dx$	$\int (x^2+1)\ln x dx$
5.	$\int (3x-2)\cos 5x dx$	$\int \arctg \sqrt{3x-1} dx$
6.	$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$	$\int \ln(3x-2) dx$
7.	$\int (4x-3)e^{-2x} dx$	$\int \arctg \sqrt{6x-1} dx$
8.	$\int (5x-2)e^{3x} dx$	$\int \ln(4x^2+1) dx$
9.	$\int (2-9x)e^{-3x} dx$	$\int \arctg \sqrt{5x-1} dx$
10.	$\int (1-6x)e^{2x} dx$	$\int \ln(2x+3) dx$

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

1. Основні поняття та теореми

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ та $F(x)$ – будь-яка первісна для $f(x)$ на $[a; b]$. Тоді *визначений інтеграл* від функції $f(x)$ на $[a; b]$ дорівнює приросту первісної $F(x)$ на цьому відрізку, тобто $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$. Це формула Ньютона – Лейбніца.

Спочатку знаходять первісну $F(x)$ для підінтегральної функції $f(x)$, наприклад ту, що має найпростіший вигляд при $C = 0$. Потім використовують власне формулу Ньютона – Лейбніца, тобто знаходять приріст первісної, що дорівнює різниці значень первісної на кінцях відрізка $[a; b]$.

Формула інтегрування частинами для невизначеного інтеграла має вигляд $\int_a^b u \cdot dv = (u \cdot v) \Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$.

При використанні метода заміни змінної слід також відповідно змінити межі інтегрування, а от зворотну заміну змінної робити не треба.

Геометричний зміст визначеного інтеграла $\int_a^b f(x) dx$ – площа криволінійної

трапеції під функцією $f(x)$ на відрізку $[a; b]$, тобто $S = \int_a^b f(x) dx$.

Площа фігури, обмеженої двома неперервними лініями $y_1 = f_1(x)$ і $y_2 = f_2(x)$, де $y_2 \geq y_1 \geq 0$, та прямими $x = a$ і $x = b$, рівна $S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$.

Довжину дуги графіка функції $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$ обчислюють за формулою $l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$.

2. Приклади виконання завдань

1. Обчисліть інтеграли $\int_1^2 x^{-5} dx$, $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$, $\int_0^\pi \sin \frac{x}{4} dx$, $\int_1^9 \frac{dx}{\sqrt{2x+7}}$.

Розв'язання:

$$\int_1^2 x^{-5} dx = \left. \frac{x^{-4}}{-4} \right|_1^2 = \left. -\frac{1}{4x^4} \right|_1^2 = -\frac{1}{64} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{64} = \frac{15}{64},$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \left. \arcsin \frac{x}{2} \right|_1^2 = \arcsin 1 - \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3},$$

$$\int_0^\pi \sin \frac{x}{4} dx = \left. -4 \cos \frac{x}{4} \right|_0^\pi = 4 \left(\cos \frac{0}{4} - \cos \frac{\pi}{4} \right) = 4 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 4 - 2\sqrt{2},$$

$$\int_1^9 \frac{dx}{\sqrt{2x+7}} = \int_1^9 \frac{dx}{(2x+7)^{\frac{1}{2}}} = \left. \frac{1}{(2x+7)^{\frac{1}{2}}} \right|_1^9 = \sqrt{2x+7} \Big|_1^9 = \sqrt{25} - \sqrt{9} = 2.$$

Відповідь: $\frac{15}{64}$, $\frac{\pi}{3}$, $4 - 2\sqrt{2}$, 2 .

2. Обчисліть інтеграли $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$, $\int_0^1 2x \cdot 7^{x^2} dx$, $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$.

Розв'язання:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} = \left. \frac{1}{\cos x} \right|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3}} - \frac{1}{\cos 0} = 2 - 1 = 1,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) d(\sin x) = \left(\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \frac{\sin^3 \frac{\pi}{2}}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

$$\int_0^1 2x \cdot 7^{x^2} dx = \int_0^1 7^{x^2} d(x^2) = \left. \frac{7^{x^2}}{\ln 7} \right|_0^1 = \frac{7^1 - 7^0}{\ln 7} = \frac{6}{\ln 7},$$

$$\int_1^e \ln^2 x \cdot \frac{1}{x} dx = \int_1^e \ln^2 x d(\ln x) = \left. \frac{\ln^3 x}{3} \right|_1^e = \frac{\ln^3 e}{3} - \frac{\ln^3 1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Відповідь: 1 , $\frac{2}{3}$, $\frac{6}{\ln 7}$, $\frac{1}{3}$.

3. Обчисліть інтеграли $\int_0^{\pi} x \sin x dx$, $\int_0^1 \arcsin x dx$, $\int_1^e \ln(2x) dx$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \sin x dx & \left[\begin{array}{ll} u = x & du = 1 \cdot dx = dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{array} \right] = \\ & = -x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = -x \cos x \Big|_0^{\pi} + \sin x \Big|_0^{\pi} = -\pi \cos \pi = \pi, \\ \int_0^1 \arcsin x dx & \left[\begin{array}{ll} u = \arcsin x & du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ dv = dx & v = x \end{array} \right] = x \arcsin x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ & = x \arcsin x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2x dx}{2\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{d(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x \Big|_0^1 + \sqrt{1-x^2} \Big|_0^1 = \\ & = 1 \cdot \arcsin 1 - 0 + 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1, \\ \int_1^e \ln(2x) dx & \left[\begin{array}{ll} u = \ln(2x) & du = \frac{2dx}{2x} \\ dv = dx & v = x \end{array} \right] = x \ln(2x) \Big|_1^e - \int_1^e dx = x \ln(2x) \Big|_1^e - x \Big|_1^e = \\ & = e \ln(2e) - \ln 2 - (e - 1) = e \ln 2 + e \ln e - \ln 2 - e + 1 = (e - 1) \ln 2 + 1. \end{aligned}$$

Відповідь: π , $\frac{\pi}{2} - 1$, $(e - 1) \ln 2 + 1$.

4. Обчисліть площу фігури, обмеженої кривими $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{x}$ та прямими $x = 1$, $x = 4$.

Розв'язання:

$$S = \int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x} \right) dx = \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \ln|x| \right) \Big|_1^4 = \frac{16}{3} - \frac{2}{3} - \ln 4 + \ln 1 = \frac{14}{3} - \ln 4.$$

Відповідь: $\approx 3,28$ кв.од..

5. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 + 2$ та $2x + y = 5$.

Розв'язання:

Межі інтегрування знайдемо з рівняння $x^2 + 2 = 5 - 2x$ або $x^2 + 2x - 3 = 0$.

Маємо $x_1 = -3$, $x_2 = 1$,

$$\text{Тому } S = \int_{-3}^1 (3 - 2x - x^2) dx = \left(3x - x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-3}^1 = 3 - 1 - \frac{1}{3} - 9 + 9 + 9 = \frac{32}{3}.$$

Відповідь: $\approx 10,67$ кв.од..

6. Обчисліть довжину кривої $y = \frac{(1 - e^x - e^{-x})}{2}$, $0 \leq x \leq 3$.

Розв'язання:

Оскільки $y' = \frac{1}{2}(-e^x + e^{-x})$, то отримаємо $l = \int_0^3 \sqrt{1 + \left(\frac{-e^x + e^{-x}}{2}\right)^2} dx =$
 $\int_0^3 \sqrt{\frac{4 + e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}} dx = \int_0^3 \sqrt{\frac{(e^x + e^{-x})^2}{2}} dx = \int_0^3 \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Big|_0^3 = \frac{e^3 - e^{-3}}{2}.$

Відповідь: $\approx 10,02$ од..

3. Завдання для самостійного виконання

1. Обчисліть інтеграли.

1.	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}, \int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}, \int_0^2 (2x+1)\ln(x+1)dx$
2.	$\int_0^3 \frac{dx}{9+x^2}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx, \int_0^1 x e^{2x} dx$
3.	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}, \int_0^2 x\sqrt{1+2x^2} dx, \int_0^1 \arctg x dx$
4.	$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2 2x}, \int_0^1 x^2 \sqrt{1+8x^3} dx, \int_0^2 \ln(x^2+1)dx$
5.	$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\sin^2 2x}, \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}}, \int_0^1 \ln(x^2+2)dx$
6.	$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(1+5x)^3}, \int_0^e \frac{\ln x dx}{x}, \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin x dx$
7.	$\int_1^2 2^{3x-4} dx, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cos^3 2x dx, \int_1^e x \ln x dx$
8.	$\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{4x+5}}, \int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$

2. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями.

1.	$y = 4 - x^2$ та $x - y + 4 = 0$	2.	$y = -1 + 4x - x^2$ та $y = -x - 1$
3.	$y = x^2 - 6x + 7$ та $y = x + 1$	4.	$y = -x^2 + 6x - 5$ та $y = x - 5$
5.	$y = -x^2 + 5$ та $y = x^2 + 1$	6.	$y = -x^2 + 5$ та $y = x - 1$
7.	$y = -x^2 + 5$ та $y = 2x^2$	8.	$xy = 2$ та $x + y = 3$
9.	$y = -x^2 + 4$ та $y = x - 2$	10.	$y = 16 - x^2$ та $x - y + 8 = 0$

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Вища математика. Алгебра та геометрія : методичні рекомендації для виконання самостійної роботи здобувачами першого (бакалаврського) рівня вищої освіти ОПП «Комп'ютерні науки» спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» денної форми здобуття вищої освіти / уклад. : О. В. Бойчук, С. І. Богданов, Є. Ю. Борчик, В. В. Поживатенко. Миколаїв : МНАУ, 2023. 52 с. URL: <https://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/17436>
2. Вища математика : методичні рекомендації до виконання практичних робіт здобувачами початкового рівня (короткий цикл) вищої освіти ОПП «Біотехнології та біоінженерія» спеціальності 162 «Біотехнології та біоінженерія» денної форми здобуття вищої освіти / уклад. В. С. Шебанін та ін. Миколаїв : МНАУ, 2022. 157 с. URL: <https://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/11585>
3. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної : методичні рекомендації для виконання самостійної роботи здобувачами першого (бакалаврського) рівня вищої освіти ОПП «Комп'ютерні науки» спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» денної форми здобуття вищої освіти / уклад. : О. В. Бойчук, Є. Ю. Борчик, С. І. Богданов, В. В. Поживатенко. Миколаїв : МНАУ, 2023. 56 с. URL: <https://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/17437>
4. Дубовик В. Н., Юрик І. І. Вища математика : навч. посібн. Київ : А.С.К., 2006. 648 с.
5. Коляда Р. В., Мельник І. О., Мельник О. М. Вища математика : навч. посібник. Львів : Магнолія 2006, 2024. 342 с.
6. Практикум з вищої математики. Комп'ютерна система для дистанційного навчання. Частина І : навч. посіб. в 2-х ч. / В. С. Шебанін, О. В. Шебаніна, І. П. Атаманюк та ін. Миколаїв : МНАУ, 2016. 229 с. URL: <https://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/2378>
7. Практикум з вищої математики. Комп'ютерна система для дистанційного навчання : навч. посібник / [В. С. Шебанін, О. В. Шебаніна, І. П. Атаманюк та ін.]. – у 2-х ч. – Ч. 2 – Миколаїв : МНАУ, 2017. – 388 с. URL: <https://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/3221>
8. Лозовий Б. Л., Пушак Я. С., Шабат О. Є. Практикум з вищої математики : навч. посібник. 3-тє вид., доповн. і переробл. Львів : «Магнолія-2006», 2025. 285 с.

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА

завдання та методичні рекомендації

Укладач: Бойчук Олена Володимирівна

Формат 60x84/16 Ум. друк. арк. 5,75

Тираж __ прим. Зам. №

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Г. Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.