

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ



Інженерно-енергетичний
факультет
Кафедра загальнотехнічних дисциплін

МЕХАНІКА МАТЕРІАЛІВ І КОНСТРУКЦІЙ.

Модуль "Складний опір":

методичні рекомендації для виконання лабораторних робіт
здобувачами першого (бакалаврського) рівня вищої освіти ОПП
"Агроінженерія" спеціальності 208 "Агроінженерія" денної та
заочної форм здобуття вищої освіти

Миколаїв
2025

УДК 539.3/.6
М55

Рекомендовано до друку рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету від 08.12.25, протокол №4.

Укладачі:

Н. А. Доценко – д-р. пед. наук, професор, професор кафедри загальнотехнічних дисциплін, Миколаївський національний аграрний університет

Д. В. Бабенко – канд. техн. наук, професор, перший проректор, Миколаївський національний аграрний університет

Рецензенти:

О. А. Горбенко – канд. техн. наук, доцент кафедри агроінженерії, Миколаївський національний аграрний університет

Г. О. Іванов – канд. техн. наук, доцент кафедри загальнотехнічних дисциплін, Миколаївський національний аграрний університет

© Миколаївський національний аграрний університет, 2025

© Доценко Н. А., 2025

Зміст

1. Складний опір. Теоретичні відомості	4
1.1. Загальне поняття про складний опір	4
1.2. Позацентрова дія поздовжньої сили	11
1.3. Складний опір. Розв'язання задач	18
2. Завдання для самостійного розв'язання задач	26
2.1. Приклад 1.	26
2.2. Приклад 2.	29
2.3. Контрольні питання	31
2.4. Завдання для самостійного виконання	32
2.5. Тестові завдання	35
3. Визначення ударної в'язкості сталі при ударному згині та розтягу	37
3.1. Визначення ударної в'язкості матеріалу при комбінованому навантаженні	46
Література	49

1. Складний опір. Теоретичні відомості

1.1. Загальне поняття про складний опір

Залежно від характеру прикладання зовнішнього навантаження та умов закріплення кінців стрижня в загальному випадку в його поперечному перерізі може виникати **шість зусиль**. Якщо в поперечному перерізі виникає одне зусилля, то стрижень знаходиться в умовах простої деформації. При виникненні двох і більше зусиль – стрижень знаходиться в умовах складного опору.

Знайдемо внутрішні зусилля в поперечному перерізі стрижня, що знаходиться під дією сили P (рис. 1.1). Сила P напрямлена під кутом α до осі z , під кутом β до осі x і під кутом γ до осі y .

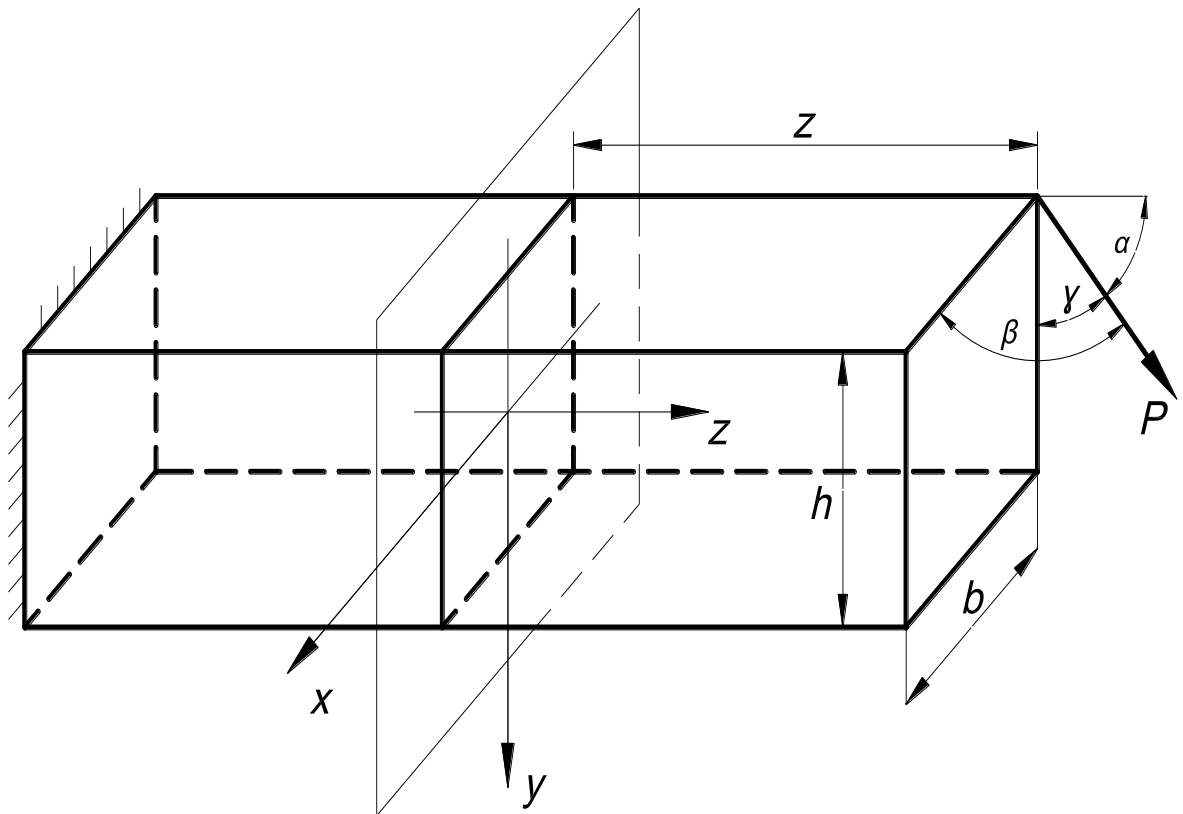


Рисунок 1.1. Завантаження стрижня.

$$N_z = P \cos \alpha - \text{поздовжня сила}$$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -(P \cos \alpha) \frac{h}{2} - (P \cos \gamma) \cdot z \\ M_y &= -(P \cos \alpha) \frac{b}{2} - (P \cos \beta) \cdot z \end{aligned} \right\} \text{згинальні моменти}$$

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= P \cos \beta \\ Q_y &= P \cos \gamma \end{aligned} \right\} \text{поперечні сили}$$

$$M_z = -(P \cos \beta) \frac{h}{2} + (P \cos \gamma) \frac{b}{2} - \text{крутний момент}$$

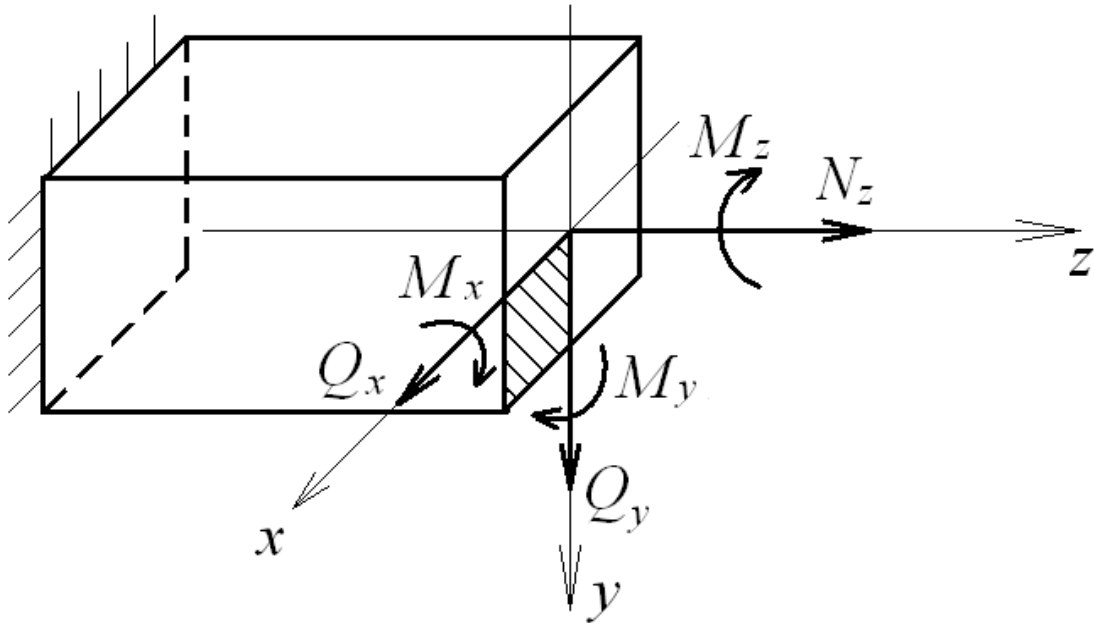


Рисунок 1.2 Внутрішні зусилля в поперечному перерізі стрижня.

Три зусилля N_z , M_x , M_y призводять до виникнення нормальних напружень σ .

Q_x , Q_y та M_z – до появи дотичних напружень τ .

Для того, щоб визначити сумарне значення напруження, застосовують принцип суперпозиції, тобто визначають значення напруження від кожного компонента внутрішніх зусиль окремо, а потім їх векторно складають, враховуючи знаки.

Згинальні моменти вважають додатними, якщо вони викликають розтяг у точках, що лежать у додатній чверті перерізу (заштриховано на рис. 1.2). Для точок у додатній чверті маємо:

$$\sigma = \frac{N_z}{F} \pm \frac{M_x}{I_x} y \pm \frac{M_y}{I_y} x$$

Дотичні напруження складаються геометрично:

$$\tau_x = \frac{Q_x \cdot S_y}{I_y \cdot h}; \quad \tau_y = \frac{Q_y \cdot S_x}{I_x \cdot b}; \quad \tau = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}.$$

При крученні дотичні напруження визначаються:

$$\tau = \frac{M_z}{I_\rho} \rho = \frac{M_z}{W_\rho}.$$

Залежно від виникнення внутрішніх зусиль виділяють такі основні види складного опору стрижня:

- а) косий згин;
- б) позацентровий розтяг-стиск;
- в) одночасна дія згину і поздовжньої сили;
- г) згин з крученням.

1.1.1. Косий згин

а) Напруження при косому згині

Косий згин є тоді, коли в поперечному перерізі стрижня виникає два згинальні моменти: M_x та M_y .

Завантажимо консольну балку силою P під кутом α до осі y та розглянемо переріз $n-m$ (рис.1.3).

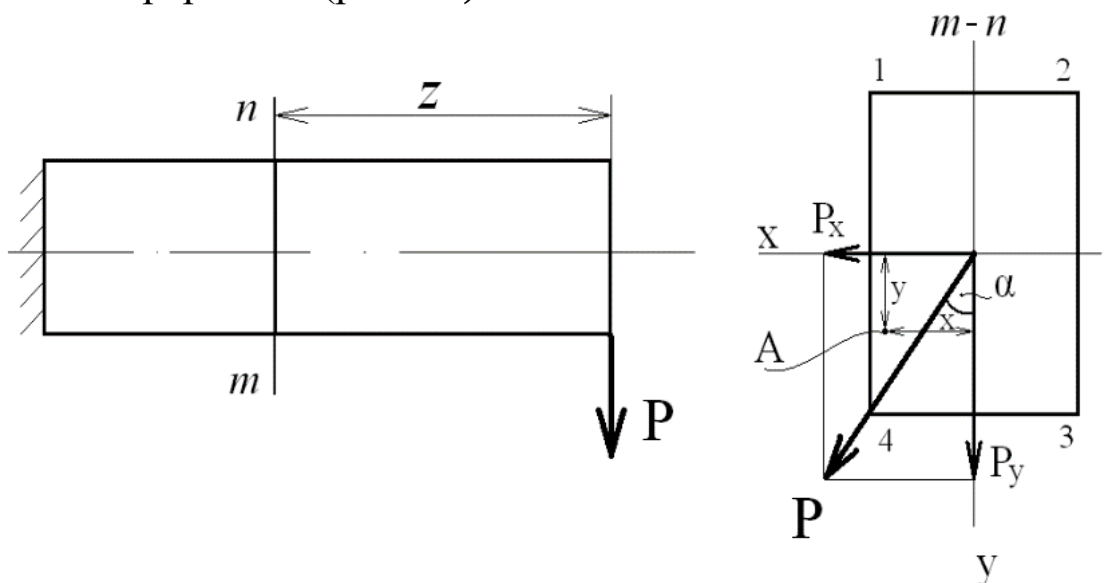


Рисунок 1.3. Косе згинання.

Спроектувавши силу на координатні осі, маємо:

$$P_x = P \sin \alpha;$$

$$P_y = P \cos \alpha; \tag{1.1}$$

Згинальні моменти в перерізі $n-m$ визначаються:

$$\begin{aligned} M_x &= P_y \cdot z = -P \cdot z \cdot \cos \alpha; \\ M_y &= -P_x \cdot z = -P \cdot z \cdot \sin \alpha. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Формула для визначення нормальних напружень в точці A додатної чверті поперечного перерізу має вигляд:

$$\sigma_A = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x. \quad (1.3)$$

Максимальні напруження для прямокутного поперечного перерізу виникають у контурних точках (1, 2, 3, 4) (рис.1.4).

$$\begin{aligned} \sigma_{(1)} &= \frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y}; & \sigma_{(3)} &= -\frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}; \\ \sigma_{(2)} &= \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}; & \sigma_{(4)} &= -\frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y}; \end{aligned}$$

де: $W_x; W_y$ – момент опору поперечного перерізу відносно осей x і y .

Побудуємо епюру σ в перерізі (рис.1.4).

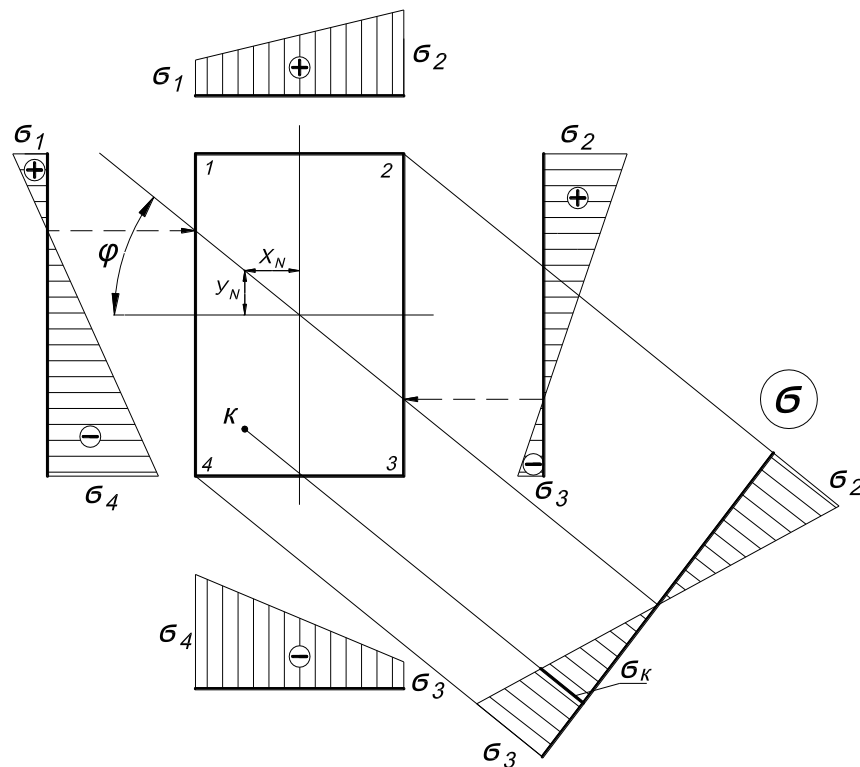


Рисунок 1.4. Епюра нормальних напружень при косому згині.

б) Визначення положення нульової лінії при косому згині

Провівши із нульового значення епюри σ до перерізу пунктирну лінію, отримаємо положення нульової лінії (н.л.), яка поділяє переріз на дві зони: стиснуту і розтягнуту. Прирівнюючи вираз (1.3) до нуля, отримаємо координати будь-якої точки нульової лінії:

$$\sigma = \frac{M_x \cdot y_N}{I_x} + \frac{M_y \cdot x_N}{I_y} = 0; \quad -\frac{y_N}{x_N} = \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{I_x}{I_y}. \quad (1.4)$$

Знак «—» показує, що нульова лінія не проходить через першу чверть, де діє сила P .

Якщо врахувати вираз (1.2), можна отримати:

$$\frac{y_N}{x_N} = \operatorname{tg} \varphi; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg} \alpha \quad (1.5)$$

Це означає, що силова лінія не є перпендикуляром до нульової лінії, як при прямому згині.

Тільки для симетричних поперечних перерізів (квадрат, коло, кільце) для яких $I_x = I_y$ косий згин неможливий, оскільки $\varphi = \alpha$.

в) Прогини при косому згині

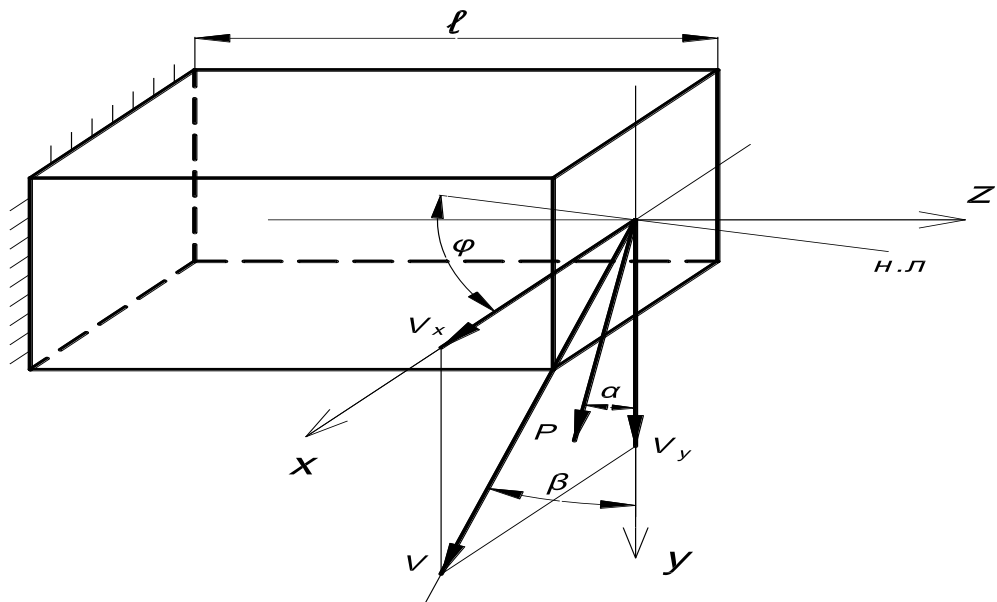


Рисунок 1.5. Прогини при косому згині.

Розкладемо силу P на дві складові P_x і P_y і знайдемо окремо прогини від цих складових (рис.1.5):

$$V_x = \frac{P_x \cdot l^3}{3EI_y}; \quad V_y = \frac{P_y \cdot l^3}{3EI_x}$$

Загальний прогин визначається як геометрична сума:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

Знайдемо $\operatorname{tg} \beta$:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{V_x}{V_y} = \frac{I_x \cdot P_x}{I_y \cdot P_y};$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg} \alpha \quad (1.6)$$

Порівнюючи вираз (1.5) з виразом (1.6), маємо, що $\varphi = \beta$. Це означає, що площина прогину перпендикулярна нульовій лінії і не збігається з силовою площиною ($\beta \neq \alpha$). Звідси пішла назва **косе згинання**.

1.1.2. Одночасна дія згину і поздовжньої сили

Якщо на стрижень діє вертикальна сила P та горизонтальна сила H (рис. 1.6.а), то він знаходиться в умовах одночасної дії згину і поздовжньої сили, які визначаються:

$$\begin{aligned} N_z &= -P, \\ M_x &= H \cdot z; \end{aligned} \quad (1.7)$$

Напруження в точці A :

$$\sigma_A = -\frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{I_x} y \quad (1.8)$$

Для іншого випадку завантаження (рис.1.6.б) напруження в точці A дорівнюють:

$$\sigma_A = \frac{N}{F} + \frac{M_x}{I_x} y_A + \frac{M_y}{I_y} x_A. \quad (1.9)$$

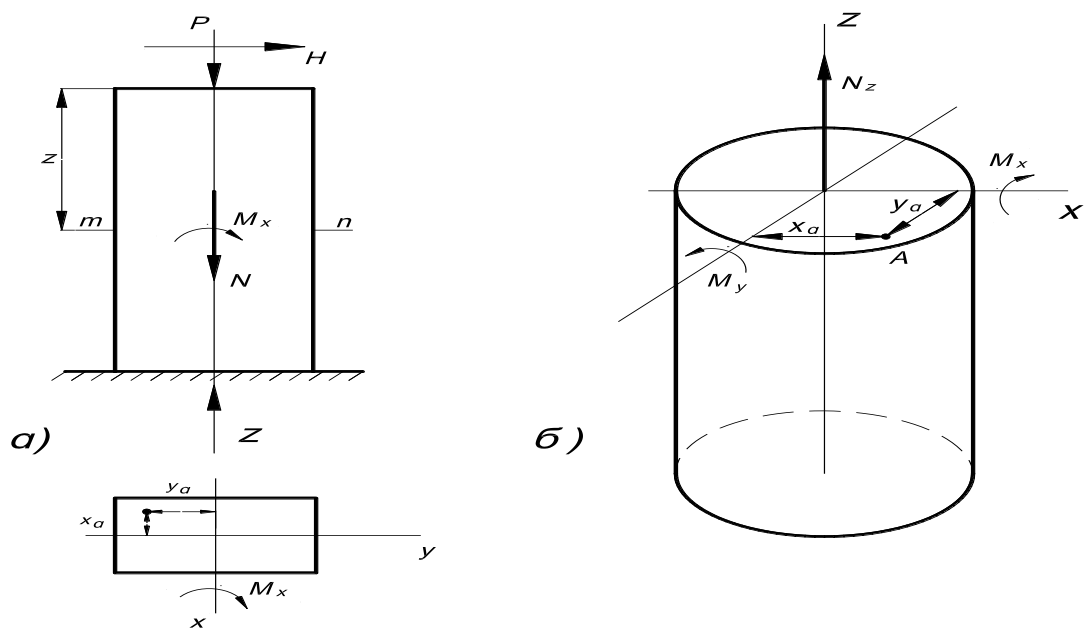


Рисунок 1.6. Дія згину і поздовжньої сили.

1.1.3. Згин з крученням

Одночасна дія згину і кручення досить часто зустрічається в машинобудуванні. Розглянемо на прикладі колінчатих валів (рис. 1.7).

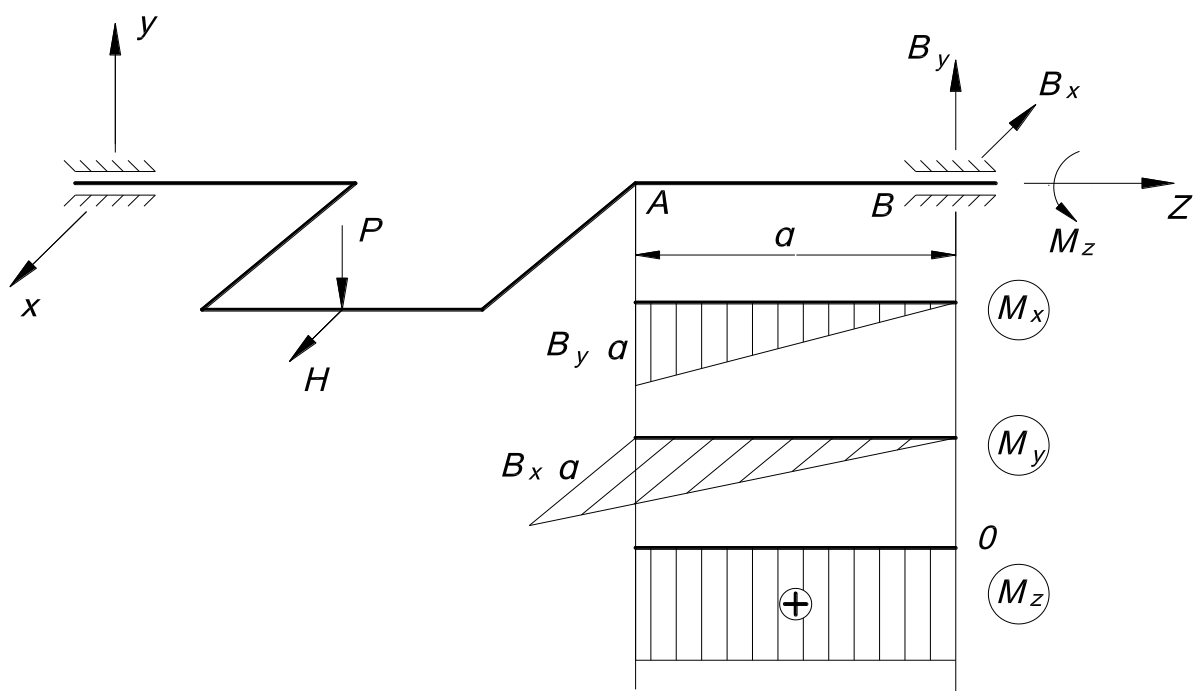


Рисунок 1.7. Одночасна дія згину і кручення.

Від дії двох сил P і H в правому підшипнику виникають реакції B_y та B_x та реактивний крутний момент M_z .

Побудуємо епюри згинальних моментів M_x і M_y та крутного моменту M_z (рис.1.7).

Сумарний згинальний момент визначиться:

$$M_{заг} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}. \quad (1.10)$$

Умови міцності при цьому мають вигляд:

– за нормальними напруженнями:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{заг}}{W} \leq [\sigma]. \quad (1.11)$$

– дотичними напруженнями:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_\rho} \leq [\tau]. \quad (1.12)$$

1.2. Позацентрова дія поздовжньої сили

1.2.1. Визначення напружень при позацентровому розтягу-стиску

У тому разі, коли точка прикладання поздовжньої сили не збігається з центром ваги поперечного перерізу стрижня, а напрям дії сили паралельний осі, то такий стрижень знаходиться в умовах позацентрового стиску або розтягу (рис. 1.8). Використовуючи принцип Пуансо (перенесення сил P з точки A в точку B) (рис. 1.9) з'ясовуємо, що в будь-якому поперечному перерізі стрижня виникає три внутрішні зусилля, які дорівнюють (рис. 1.9):

$$\left\{ \begin{array}{l} Nz = -P \\ Mx = -P \cdot y_p \\ My = -P \cdot x_p \end{array} \right\} \quad (1.13)$$

де: x_p, y_p – координати прикладання сили, які називаються ексцентриситетами. Знак «-» при моментах означає, що в точках додатної чверті виникає стиск.

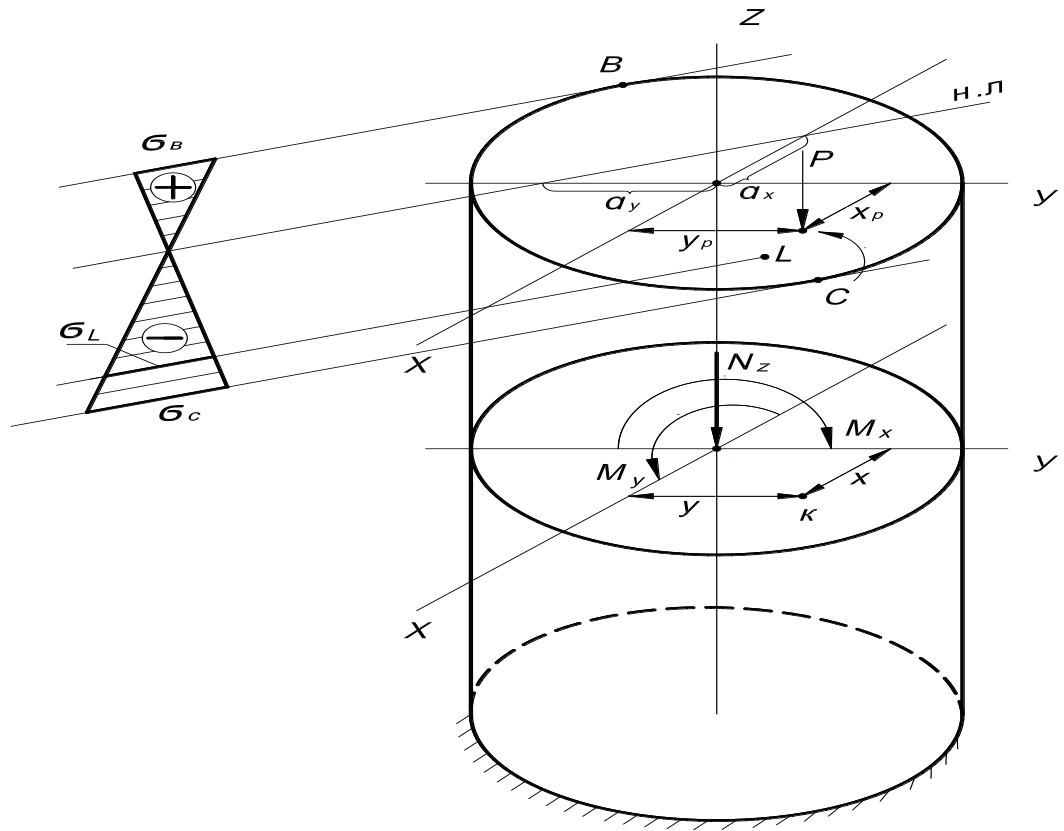


Рисунок 1.8. Позацентрова дія поздовжньої сили.

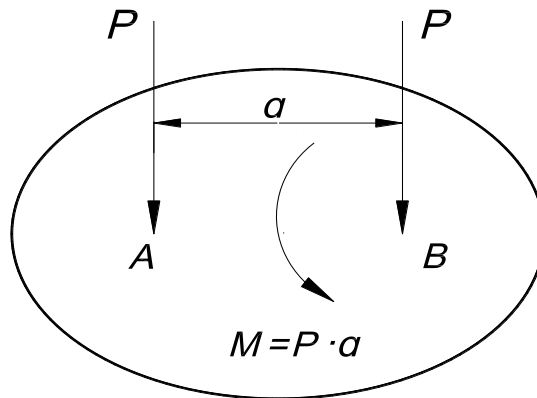


Рисунок 1.9. Принцип Пуансо.

У будь-якій точці K додатної чверті можна визначити нормальні напруження за формулою:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_x}{I_x} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot x.$$

Використовуючи (1.13), маємо:

$$\sigma = -\frac{P}{F} - \frac{P \cdot y_p}{I_x} \cdot y - \frac{P \cdot x_p}{I_y} \cdot x;$$

$$\sigma = -\frac{P}{F} \left(1 + \underbrace{\frac{y \cdot y_p}{I_x}}_{i_x^2} + \underbrace{\frac{x \cdot x_p}{I_y}}_{i_y^2} \right);$$

враховуючи, що $\frac{I_x}{F} = i_x^2 = \frac{I_y}{F} = i_y^2$.

Отримаємо формулу для визначення нормальних напружень при позацентровому розтягу-стиску:

$$\sigma = -\frac{P}{F} \left(1 + \frac{y \cdot y_p}{i_x^2} + \frac{x \cdot x_p}{i_y^2} \right); \quad (1.14)$$

1.2.2. Рівняння нульової лінії

Лінію, що поділяє переріз на дві частини – стиск і розтяг, називають нульовою лінією. Для визначення положення нульової лінії у вираз (1.14) підставимо координати будь-якої її точки н.л. і прирівняємо до нуля:

$$\sigma = -\frac{P}{F} \left(1 + \frac{y_p \cdot y_N}{i_x^2} + \frac{x_p \cdot x_N}{i_y^2} \right) = 0.$$

де y_N, x_N – координати точки нульової лінії.

Оскільки $\frac{P}{F} \neq 0$, то:

$$1 + \frac{y_p \cdot y_N}{i_x^2} + \frac{x_p \cdot x_N}{i_y^2} = 0 \quad (1.15)$$

Вираз (1.15) є **рівняння нульової лінії**.

Положення нульової лінії зручно визначати за тими відрізками, які вона відсікає на осях координат (рис. 1.10)

$$y_N = 0; \quad x_N = a_x; \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{x_p \cdot a_x}{i_y^2} = 0.$$

$$x_N = 0; \quad y_N = a_y; \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{y_p \cdot a_y}{i_x^2} = 0.$$

Звідки можна знайти відрізки, що відсікає нульова лінія на осях координат? Провівши через ці точки перетину пряму, отримуємо положення нульової лінії:

$$\left. \begin{aligned} a_x &= -\frac{i_y^2}{x_p}; \\ a_y &= -\frac{i_x^2}{y_p}. \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

Часто вирішується зворотна задача, тобто за відомим положення нульової лінії, визначають полюс прикладання зовнішньої сили:

$$\left. \begin{aligned} x_p &= -\frac{i_y^2}{a_x}; \\ y_p &= -\frac{i_x^2}{a_y}. \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

Знаючи положення нульової лінії та переносючи її паралельно початковому розташуванню, знаходимо найбільш напружені точки. Це ті точки перерізу, які будуть останніми торкатися нульової лінії при паралельному її переносі (на рис. 1.9 В і С).

1.2.3. Визначення ядра перерізу

Розглянемо довільний поперечний переріз стрижня і будемо переміщувати полюс прикладання сили по прямій OA від центру ваги.

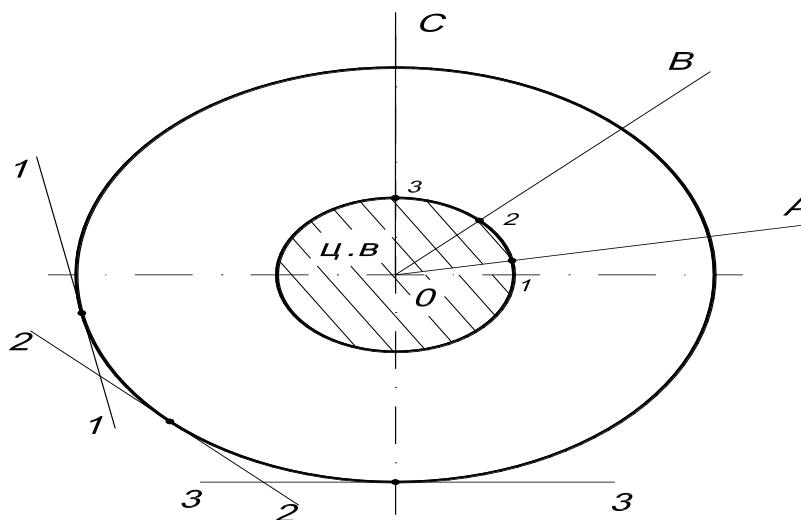


Рисунок 1.10. Визначення ядра перерізу.

Якщо полюс прикладання сили в точці O , то нульова лінія знаходиться в нескінченності. При віддаленні полюса сили від центру ваги нульова лінія буде переміщуватись з нескінченності до перерізу, залишаючись паралельною сама собі. У деякому положенні нульова лінія торкнеться контуру перерізу, а точка 1, яка утвориться у результаті цього переміщення і є граничною, тобто за межі цієї точки виходити не потрібно з метою забезпечення напружень одного знаку в перерізі.

Аналогічно все відбувається і для прямих OB , OC . Якщо провести нескінченну кількість прямих, то граничні точки утворюють навколо центра ваги область (ядро перерізу).

Ядро перерізу – це область навколо центра ваги, що має таку властивість: якщо прикласти зовнішні сили у цій області, то у всьому поперечному перерізі виникнуть напруження одного знаку.

Стиснуті елементи конструкцій виготовляють із крихких матеріалів, тому небажаним є виникнення зусиль розтягу у них. Є два методи побудови ядра перерізу:

- 1) коли нульовою лінією обходять контури перерізу, а полюс сили викреслює ядро перерізу (вираз 1.16);
- 2) коли полюс сили суміщають з контурними точками поперечного перерізу, а нульова лінія викреслює ядро перерізу (вираз 8.17).

1.2.4. Побудова ядра для різних видів поперечного перерізу.

а) Прямокутний переріз.

Розглянемо чотири положення дотичної до сторін перерізу (рис. 1.11).

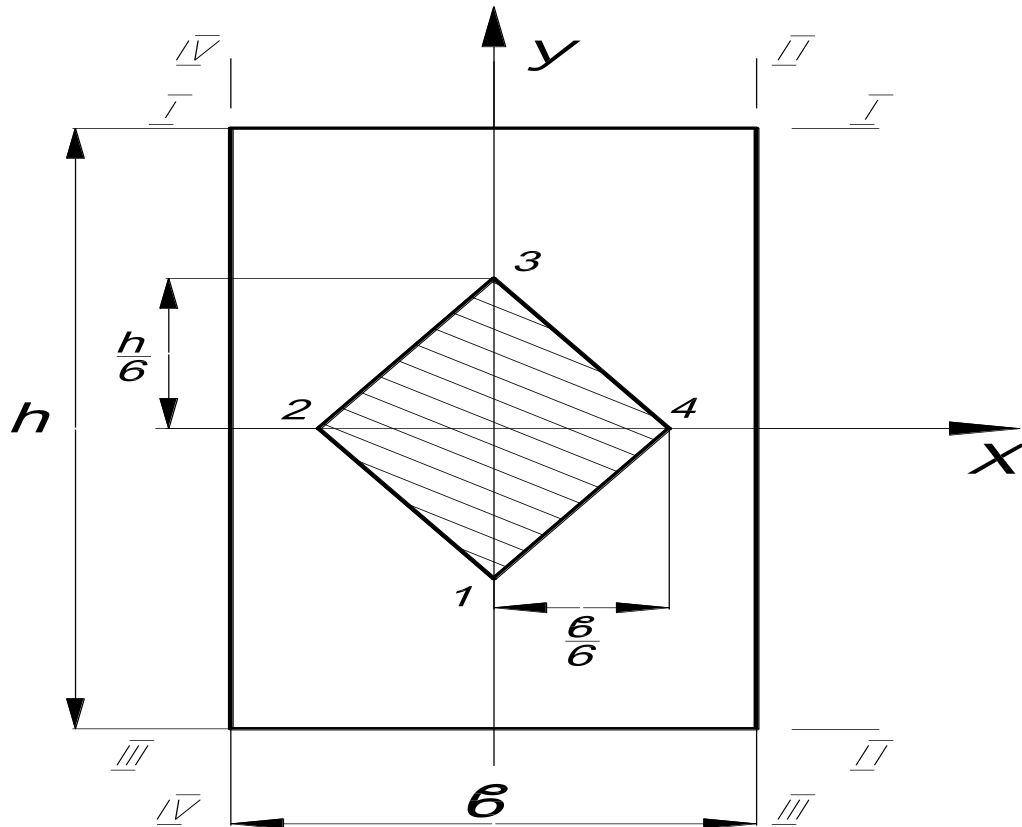


Рисунок 1.11. Прямокутний переріз.

Для дотичної *I-I* маємо $a_x = \infty$; $a_y = \frac{h}{2}$.

Координати точки 1 ядра перерізу визначаються:

$$a_x = -\frac{ix^2}{\infty} = 0; \quad y_p = -\frac{ix^2}{a_y} = -\frac{2I_K}{hF} = -\frac{2bh^3}{12bh^2} = -\frac{h}{6}$$

Покажемо точку 1 з координатами $(0; -\frac{h}{6})$ на поперечному перерізі.

Для дотичної *III-III* отримаємо точку 3 з координатами $(0; \frac{h}{6})$.

Для дотичних *II-II* та *IV-IV* отримуємо відповідні точки 2 і 4 з координатами $(-\frac{b}{6}; 0)$; $(\frac{b}{6}; 0)$.

З'єднавши точки 1,2,3,4 отримуємо ядро для прямокутного перерізу, яке має форму ромба.

б) *Двотавровий переріз.*

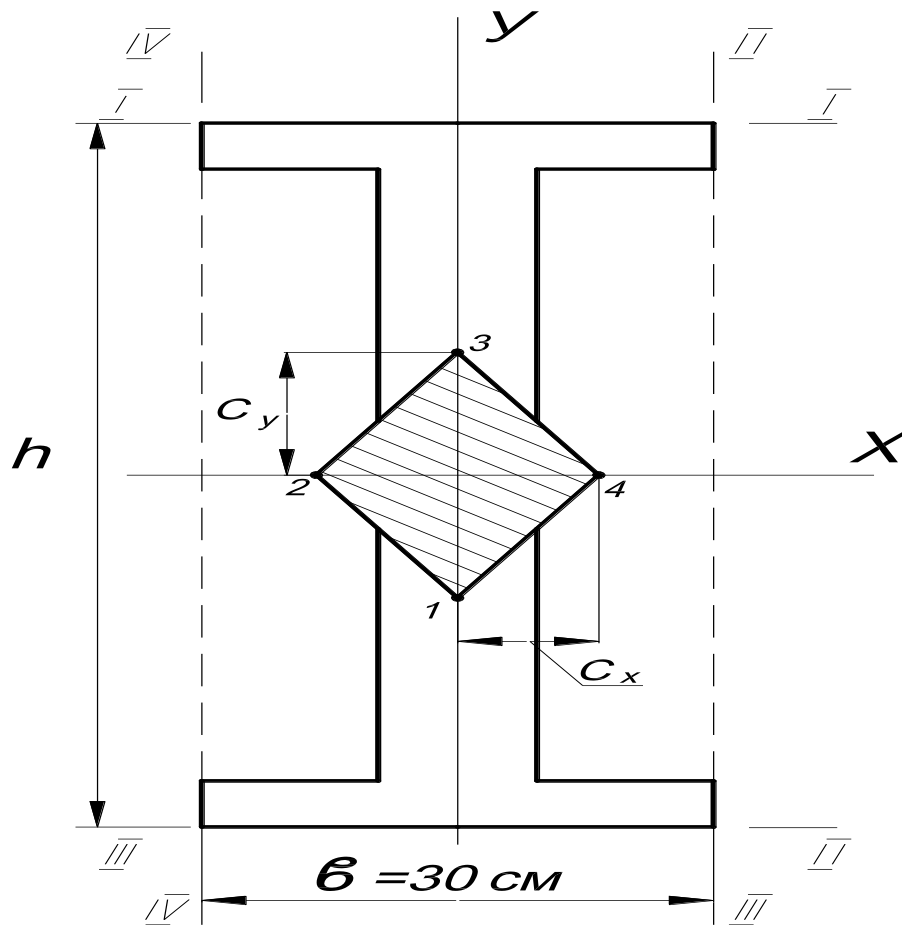


Рисунок 1.12 Двотавровий переріз.

Враховуючи симетрію достатньо знайти дві величини ядра перерізу.

Для точок, що лежать на вісі у:

$$C_y = \pm \frac{i_x^2}{h/2} \quad (1.18)$$

а для двох інших точок на вісі х отримуємо:

$$C_x = \pm \frac{i_y^2}{b/2} \quad (1.19)$$

Числове значення відрізків, виражених (1.18; 1.19) залежить від співвідношення двотавра, але ядро перерізу завжди буде мати вид ромба.

в) **Суцільний круглий переріз.**

Враховуючи, що круглий переріз симетричний відносно центру, (полярна симетрія), достатньо розглянути одне довільне положення дотичної.

$$r = \pm \frac{ix^2}{R} = \pm \frac{I_x}{FR} = \frac{\pi R^4}{4\pi R^2 R} = \pm \frac{R}{4} \quad (1.20)$$

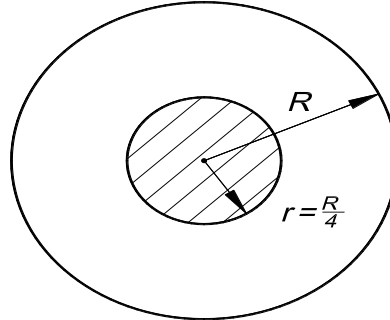


Рисунок 1.13. Круглий переріз

Таким чином, ядро для круглого перерізу радіуса R окреслено також колом з радіусом r.

1.3. Складний опір. Розв'язання задач

1.3.1. Приклади розрахунку на міцність та жорсткість при позацентровому стиску і косому згині

Приклад 1.

Для стрижня прямокутного поперечного перерізу з розмірами $a=60$ см, $b=30$ см завантаженого силою $P=90$ кН, прикладеною в точці А з координатами $x_p=15$ см; $y_p=15$ см; (рис.8.14) необхідно: побудувати плоску і просторову епюри нормальних напружень; перевірити умови міцності, прийнявши $[\sigma_{ст}]=10$ МПа; $[\sigma_p]=10$ МПа; знайти значення допустимого навантаження із умов міцності на стиск і розтяг; побудувати ядро перерізу.

Розв'язання:

1. Визначаємо відрізки, які відсікає нульова лінія на осях координат:

$$a_x = -\frac{i_y^2}{x_P},$$

$$a_y = -\frac{i_x^2}{y_P},$$

$$i_y^2 = -\frac{I_y}{F} = -\frac{b \cdot a^3}{12 \cdot b \cdot a} = -\frac{a^2}{12} = 300 \text{ см}^2,$$

$$i_x^2 = \frac{I_x}{F} = \frac{a \cdot b^3}{12 \cdot a \cdot b} = -\frac{b^2}{12} = 75 \text{ см}^2,$$

$$a_x = -\frac{300}{15} = -20 \text{ см},$$

$$a_y = -\frac{75}{10} = -7,5 \text{ см}.$$

2. Визначаємо значення нормальних напружень у кутових (контурних) точках і будуємо плоску і просторову епюри нормальних напружень (рис. 1.14).

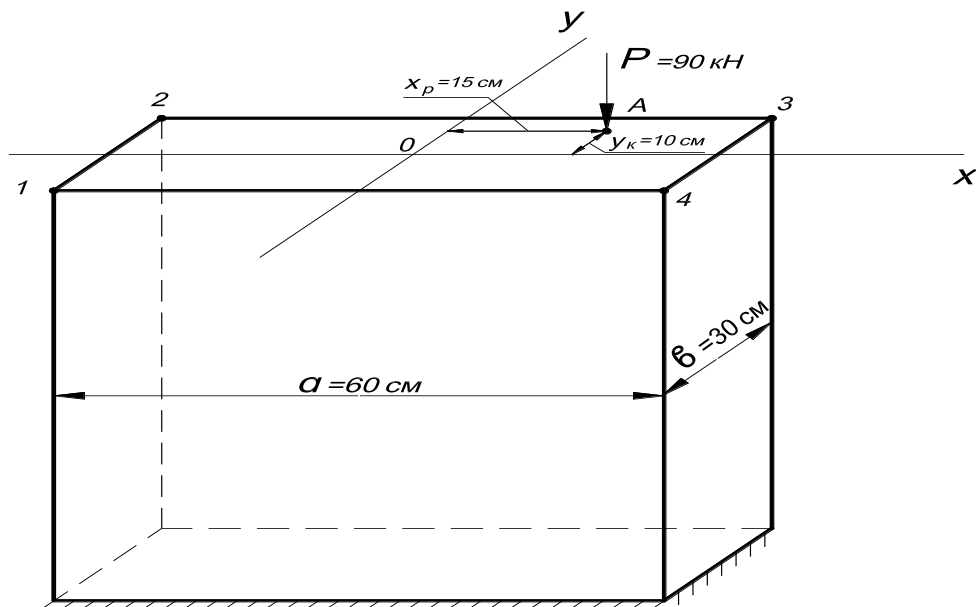
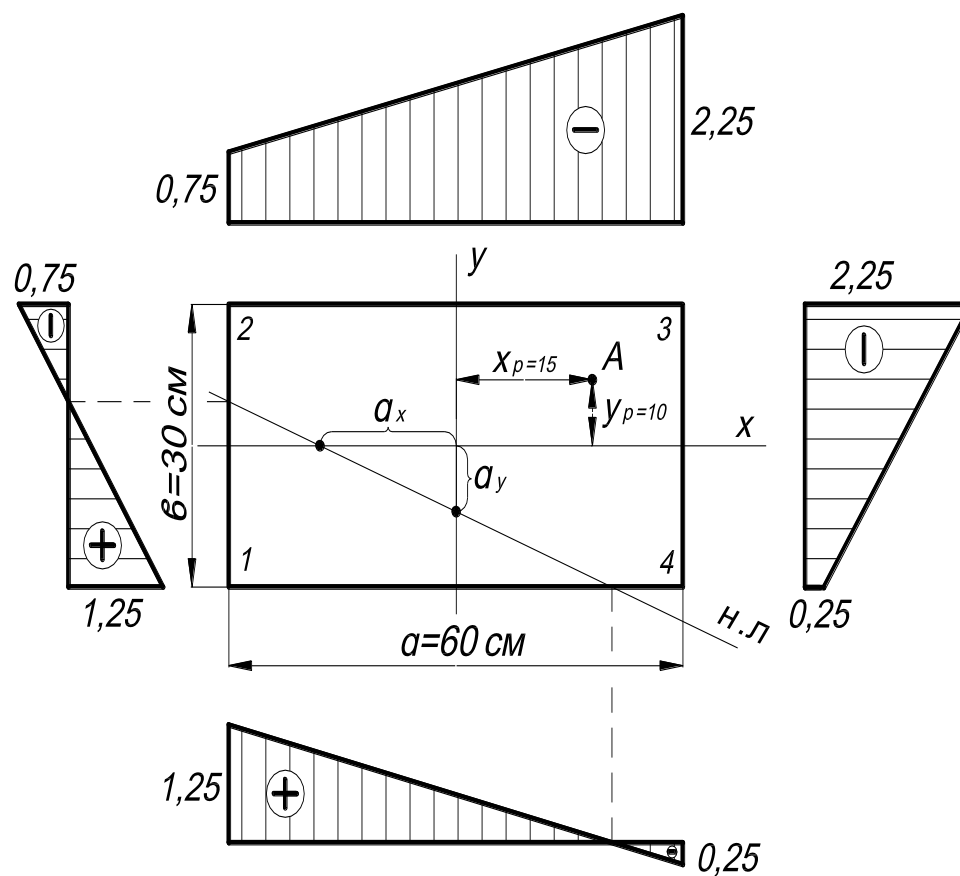
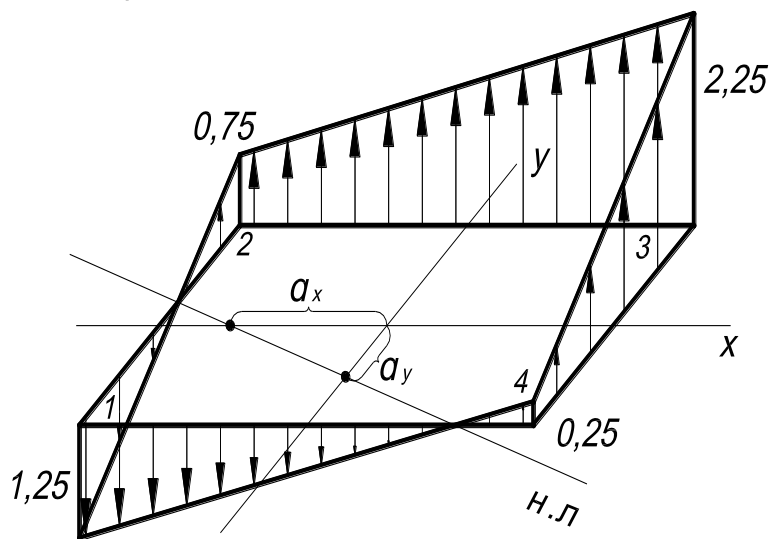


Рисунок 1.14. Схема завантаження стрижня при позацентровому стиску.



а)



б)

Рисунок 1.15. Епюри нормальних напружень:
а – плоска; б – просторова.

Нормальні напруження визначаються за формулою :

$$\sigma = -\frac{P}{F} \cdot \left(1 + \frac{y_p \cdot y}{i_x^2} + \frac{x_p \cdot x}{i_y^2} \right)$$

точка 1

$$y = -15 \text{ см};$$

$$x = -30 \text{ см}.$$

$$\sigma_{(1)} = -\frac{90 \cdot 10^3}{(60 \cdot 30) \cdot 10^{-4}} \cdot \left(1 + \frac{(10 \cdot (-15)) \cdot 10^{-4}}{75 \cdot 10^{-4}} + \frac{(15 \cdot (-30)) \cdot 10^{-4}}{300 \cdot 10^{-4}} \right) = 1,25 \text{ МПа};$$

точка 2

$$y = 15 \text{ см};$$

$$x = -30 \text{ см}.$$

$$\sigma_2 = -\frac{90 \cdot 10^3}{(60 \cdot 30) \cdot 10^{-4}} \left(1 + \frac{(10 \cdot 15) \cdot 10^{-4}}{75 \cdot 10^{-4}} + \frac{(15 \cdot (-30)) \cdot 10^{-4}}{300 \cdot 10^{-4}} \right) = 0,75 \text{ МПа};$$

точка 3

$$y = 15 \text{ см};$$

$$x = 30 \text{ см}.$$

$$\sigma = -\frac{90 \cdot 10^3}{(60 \cdot 30) \cdot 10^{-4}} \left(1 + \frac{(10 \cdot 15) \cdot 10^{-4}}{75 \cdot 10^{-4}} + \frac{(15 \cdot 30) \cdot 10^{-4}}{300 \cdot 10^{-4}} \right) = -2,25 \text{ МПа}$$

точка 4

$$y = -15 \text{ см};$$

$$x = 30 \text{ см}.$$

$$\sigma = -\frac{90 \cdot 10^3}{(60 \cdot 30) \cdot 10^{-4}} \left(\frac{(10 \cdot (-15)) \cdot 10^{-4}}{75 \cdot 10^{-4}} + \frac{(15 \cdot 30) \cdot 10^{-4}}{300 \cdot 10^{-4}} \right) = -0,25 \text{ МПа}.$$

3. Перевіряємо умови міцності:

На розтяг (точка 1):

$$\sigma_{(1)} = 1,25 \text{ МПа} < [\sigma]_p = 2,0 \text{ МПа}$$

На стиск (точка 3):

$$\sigma_{(3)} = 2,25 \text{ МПа} < [\sigma]_c = 10,0 \text{ МПа}$$

Умови на стиск і розтяг виконуються.

4. Визначаємо величину допустимого навантаження стрижня із умов міцності:

На стиск (точка 3):

$$\sigma = -\frac{P}{F} \cdot \left(1 + \frac{y_p \cdot y}{i_x^2} + \frac{x_p \cdot x}{i_y^2} \right)$$

$$[P]_c = \frac{[\sigma]_c \cdot F}{1 + \frac{y_p \cdot y_3}{i_x^2} + \frac{x_p \cdot x_3}{i_y^2}} = \frac{-10,0 \cdot 10^6 \cdot (60 \cdot 30) \cdot 10^{-4}}{1 + \frac{(10 \cdot 15) \cdot 10^{-4}}{75 \cdot 10^{-4}} + \frac{(15 \cdot 30) \cdot 10^{-4}}{300 \cdot 10^{-4}}} = -400 \text{ кН}$$

Перевіряємо умови міцності на розтяг точки 1:

$$\sigma_{(1)} = \frac{400 \cdot 10^3}{(60 \cdot 30) \cdot 10^{-4}} \left(1 + \frac{(10 \cdot (-15)) \cdot 10^{-4}}{75 \cdot 10^{-4}} + \frac{(10 \cdot (-30)) \cdot 10^{-4}}{300 \cdot 10^{-4}} \right) = 3,8 \text{ МПа} > [\sigma] = 2,0 \text{ МПа}$$

Відбудеться руйнування в точці 1.

Визначаємо величину допустимого навантаження із умов міцності на розтяг (точка 1):

$$[P]_p = -\frac{[\sigma]_p \cdot F}{1 + \frac{y_p \cdot y}{i_x^2} + \frac{x_p \cdot x}{i_y^2}} = \frac{2,0 \cdot 10^6 \cdot (30 \cdot 60) \cdot 10^{-4}}{1 + \frac{(10 \cdot (-15)) \cdot 10^{-4}}{75 \cdot 10^{-4}} + \frac{(15 \cdot (-30)) \cdot 10^{-4}}{300 \cdot 10^{-4}}} = -144 \text{ кН}$$

Визначаємо величину напружень в точці 3:

$$\sigma_{(3)} = -\frac{144 \cdot 10^3}{(60 \cdot 30) \cdot 10^{-4}} \left(1 + \frac{(10 \cdot 15) \cdot 10^{-4}}{75 \cdot 10^{-4}} + \frac{(15 \cdot 30) \cdot 10^{-4}}{300 \cdot 10^{-4}} \right) = -3,6 \text{ МПа} < [\sigma]_c = -10,0 \text{ МПа}$$

Умова міцності виконується.

Таким чином, приймаємо величину допустимого навантаження із умов міцності на розтяг, яке дорівнює 144 кН.

Будуємо епюру нормальних напружень від допустимого значення навантаження (рис. 8.16).

5. Побудуємо ядро перерізу (рис. 8.17). Для цього використовуємо метод, коли нульовою лінією «обходимо» контур поперечного перерізу, а полюс прикладеної сили викреслює ядро.

$$x_p = -\frac{i_y^2}{a_x} ; \quad y_p = -\frac{i_x^2}{a_y} .$$

Положення нульової лінії I-I

$$I - I : a_x = \infty; \quad x_p = -\frac{300}{\infty} = 0$$

$$a_y = \frac{b}{2} = 15 \text{ см.} \quad y_p = -\frac{75}{15} = -5 \text{ см}$$

– точка 1.

Положення нульової лінії II-II

$$a_y = \infty; a_x = 30 \text{ см}; y_p = -\frac{75}{\infty} = 0; x_p = -\frac{300}{30} = -10 \text{ см.}$$

Положення нульової лінії III-III

$$a_y = 15 \text{ см}; a_x = 0; y_p = -\frac{75}{15} = 5 \text{ см}; x_p = -\frac{300}{\infty} = 0.$$

Положення нульової лінії IV-IV

$$a_y = \infty \text{ см}; a_x = -30 \text{ см}; y_p = -\frac{75}{\infty} = 0; x_p = -\frac{300}{-30} = 10 \text{ см.}$$

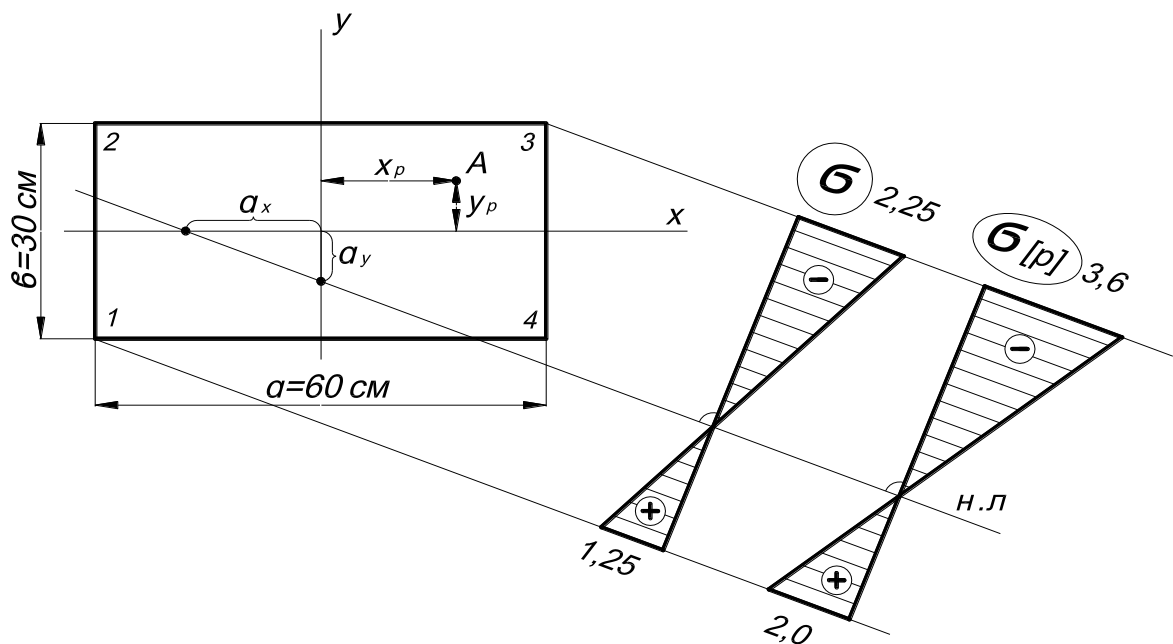


Рисунок 1.16. Плоска епюра нормальних напружень від допустимого значення навантаження із умов міцності на розтяг.

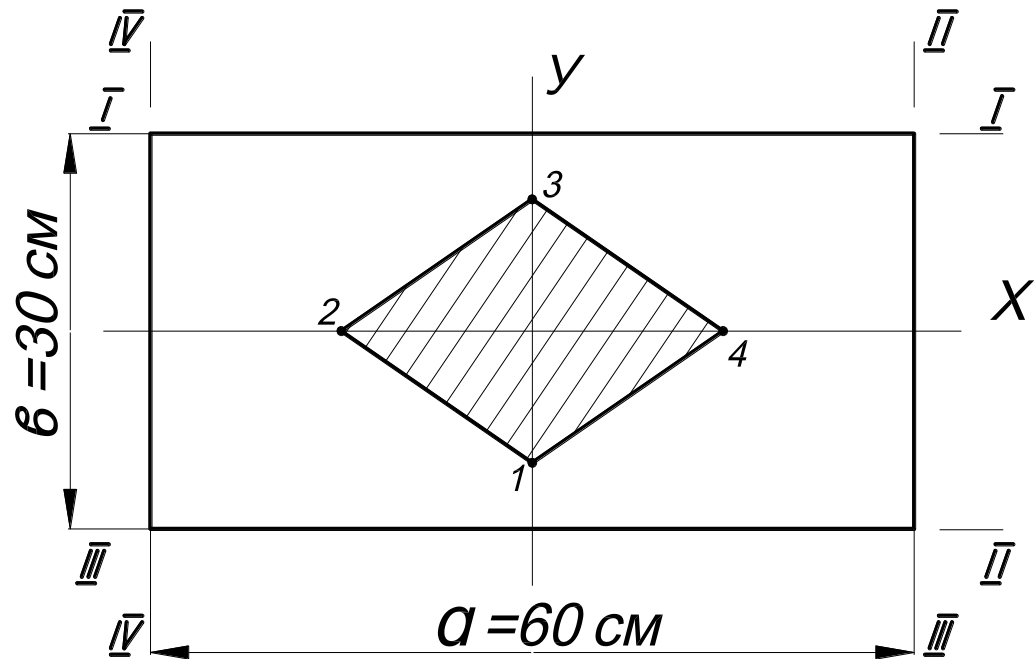


Рисунок 1.17. Побудова ядра перерізу.

З'єднуючи точки 1,2,3,4, отримуємо ядро перерізу, яке має форму ромба.

Приклад 2.

Підібрати номер двотаврового профілю балки, завантаженої силою $P_1 = 60 \text{ кН}$ у вертикальній площині і силою $P_2 = 10 \text{ кН}$ – в горизонтальній площині, прийнявши $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Схему завантаження балки наведена на рисунок 1.18.

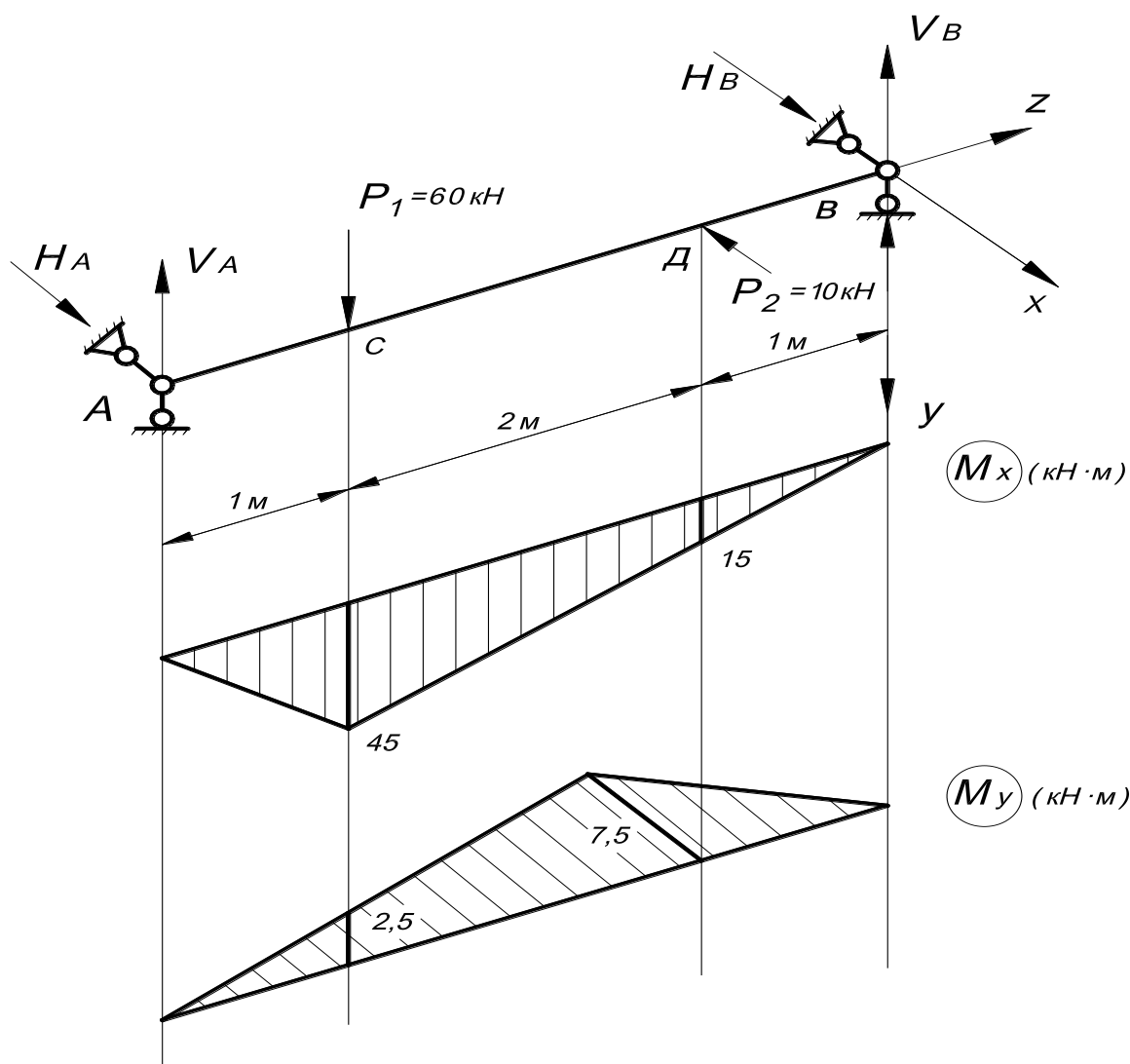


Рисунок 1.18. Схема завантаження балки та епюри згинальних моментів у двох площинах.

- Визначаємо опорні реакції:
 $V_A = 45 \text{ кН}$; $H_A = 2,5 \text{ кН}$; $V_B = 15 \text{ кН}$; $H_B = 7,5 \text{ кН}$.
- Будуємо епюри згинальних моментів у двох площинах:
 M_x ; M_y (рис. 1.18).
- Встановлюємо небезпечний переріз, який може бути в точках С або Д. Припустимо, що небезпечним є переріз С, в якому:
 $M_x = 45 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $M_y = 2,5 \text{ кН}\cdot\text{м}$.
- Для перерізу С визначаємо необхідний момент опору, прийнявши орієнтовно $W_C = \frac{W_x}{W_y} = 8,7$.

При цьому:

$$W_x = \frac{M_x + cM_y}{[\sigma]} = \frac{45 \cdot 10^3 + 8,7 \cdot 2,5 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 417 \text{ см}^3.$$

За таблицями сортаменту приймаємо IN30 для $W_x=472 \text{ см}^3$; $W_y=45,9 \text{ см}^3$.

5. Перевіряємо умови міцності для цього перерізу:

- точка С.

$$\max \sigma_c = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{45 \cdot 10^3}{472 \cdot 10^{-6}} + \frac{2,5 \cdot 10^3}{49,9 \cdot 10^{-6}} = 145,3 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

- точка Д.

$$\max \sigma_d = \frac{15 \cdot 10^3}{472 \cdot 10^{-6}} + \frac{7,5 \cdot 10^3}{49,9 \cdot 10^{-6}} = 182 \text{ МПа} > [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Тобто умова міцності в перерізі Д не виконується.

6. Підбираємо двотавровий переріз із умов міцності перерізу Д.

$$W_x = \frac{15 \cdot 10^3 + 8,7 \cdot 7,5 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 501 \text{ см}^3.$$

За сортаментом приймаємо IN30a, для якого $W_x=518 \text{ см}^3$; $W_y=60,1 \text{ см}^3$.

7. Перевіряємо умови міцності:

- точка Д.

$$\max \sigma_d = \frac{15 \cdot 10^3}{518 \cdot 10^{-6}} + \frac{7,5 \cdot 10^3}{60,1 \cdot 10^{-6}} = 154 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

- точка С.

$$\max \sigma_c = \frac{45 \cdot 10^3}{518 \cdot 10^{-6}} + \frac{2,5 \cdot 10^3}{60,1 \cdot 10^{-6}} = 128,5 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Кінцево приймаємо IN30a.

2. Завдання для самостійного розв'язання задач

2.1. Приклад 1.

Умова задачі: дерев'яна балка прямокутного поперечного перерізу навантажена вертикальною силою Р в точці А і горизонтальною силою в точці В (обидві точки розташовані на осі балки). На опорах балки можуть виникати, як вертикальні, так і горизонтальні реакції, напрямлені перпендикулярно до площини

Необхідно:

- Дано: $P = 20 \text{ кН}$; $l = 2 \text{ м}$; $h/b = 1,5$; $[\sigma] = 10 \text{ МПа}$. Схема зображена на рис.2.1.

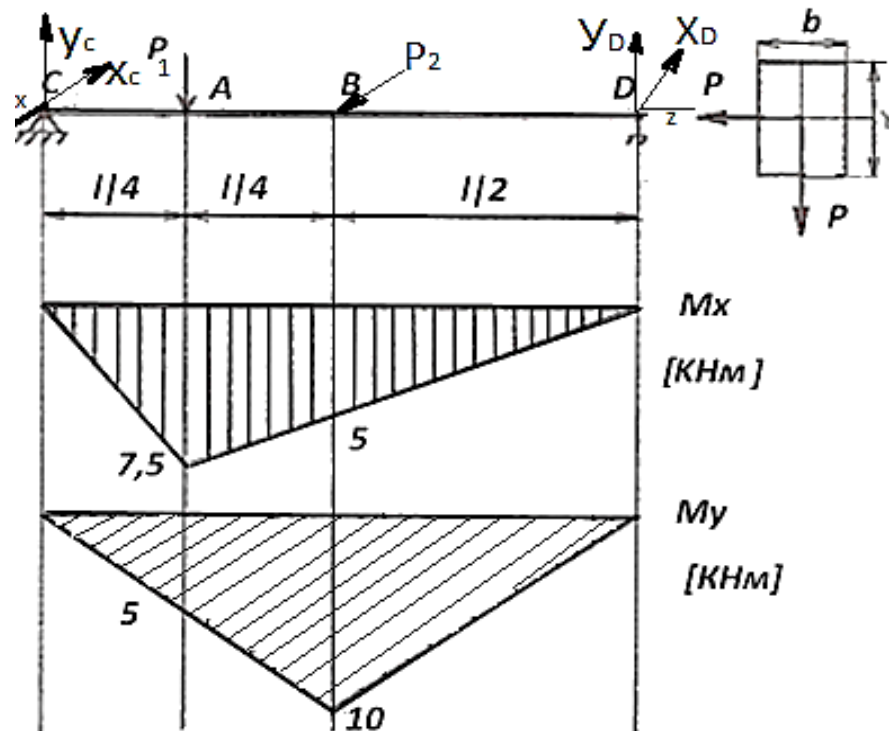


Рисунок 2.1. Схема балки з епюрами моментів згинання

1) На балку CD діє просторова система сил P_1 і P_2 . Реакції опори в точці С X_C та Y_C , а в точці D - X_D та Y_D . Реакція Z_C опори С дорівнює нулю, бо вздовж осі Z сили не діють. З умов рівноваги балки CD знаходимо:

$$X_c=10 \text{ кН}; \quad Y_c=15 \text{ кН}; \quad X_D=10 \text{ кН}; \quad Y_D=5 \text{ кН}.$$

Побудуємо епюри моментів згинання $M_{\text{верт}}$ і $M_{\text{гор}}$ від дії прикладених сил та визначимо положення небезпечного перерізу.

В будь-якому перерізі CD діють внутрішні згинальні моменти M_x у вертикальній площині і M_y в горизонтальній площині. Знайдемо згинальні моменти M_x та M_y у точках А, В, С, D балки.

Точка С: $M_{sx} = 0$; $M_{sy} = 0$.

Точка А: $M_{ax} = Y_c \cdot 1/4l = 15 \cdot 1/4 \cdot 2 = 7,5 \text{ кНм}$;

$M_{ay} = X_c \cdot 1/4l = 10 \cdot 1/4 \cdot 2 = 5 \text{ кНм}$;

Точка В: $M_{bx} = Y_c \cdot 1/2l - P_1 \cdot 1/4l = 15 \cdot 1/2 \cdot 2 - 10 \cdot 1/4 \cdot 2 = 7,5 \text{ кНм}$;

$M_{by} = X_c \cdot 1/2l = 10 \cdot 1 = 10 \text{ кНм}$;

Точка D: $M_{dx} = 0$; $M_{dy} = 0$.

Небезпечний переріз В-В.

$M_x = 5 \text{ кН} \cdot \text{м} = 5000 \text{ Н} \cdot \text{м}$; $M_y = 10 \text{ кН} \cdot \text{м} = 10000 \text{ Н} \cdot \text{м}$

2) Із умов міцності по нормальним напруженням підбираємо розміри прямокутного поперечного перерізу

Необхідний момент опору:

$$W_x = \frac{M_x + \kappa \cdot M_y}{[\sigma]}$$

де $\kappa = \frac{h}{b} = 1,5$ – відношення сторін прямокутника поперечного перерізу.

$$W_x = \frac{5000 + 1,5 \cdot 10000}{10^7} = 0,002 \text{ м}^3$$

$$W_x = 2000 \text{ см}^3$$

Момент опору для прямокутного поперечного перерізу:

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6}; \quad b = \frac{h}{1,5}; \quad W_x = \frac{h^3}{6 \cdot 1,5} = \frac{h^3}{9} = 2000 \text{ см}^3$$

$$h = \sqrt[3]{9 \cdot 2000} = \sqrt[3]{18000} = 26,2 \text{ см};$$

$$b = \frac{h}{1,5} = \frac{26,2}{1,5} = 17,46 \approx 17,5 \text{ см}$$

Визначаємо положення нейтральної лінії в небезпечному перерізі:

$$\text{tg} \beta = \kappa \cdot \frac{M_y}{M_x} = \left(\frac{h}{b}\right)^2 \cdot \frac{M_y}{M_x} = (1,5)^2 \cdot \frac{10000}{5000} = 4,5;$$

$$\beta = \arctg(4,5) = 77,5^\circ$$

Знаходимо напруження:

$$\sigma = \frac{M_x \cdot y}{I_x} + \frac{M_y \cdot x}{I_y}$$

де I_x, I_y - моменти інерції поперечного перерізу.

$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{17,5 \cdot 26,2^3}{12} = 26228 \text{ см}^4;$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{26,2 \cdot 17,5^3}{12} = 11701 \text{ см}^4;$$

Точка 1. $X_1 = 8,75$ см; $Y_1 = -13,1$ см;

$$\sigma_1 = \frac{5000 \cdot (-0,131)}{26228 \cdot 10^{-8}} + \frac{1000 \cdot (0,0875)}{11701 \cdot 10^{-8}} = 5 \text{ МПа};$$

Точка 2. $X_2 = -8,75$ см; $Y_2 = -13,1$ см;

$$\sigma_2 = \frac{5000 \cdot (-0,131)}{26228 \cdot 10^{-8}} + \frac{1000000 \cdot (-0,0875)}{11701 \cdot 10^{-8}} = -10 \text{ МПа};$$

Точка 3. $X_3 = -8,75$ см; $Y_3 = 13,1$ см;

$$\sigma_3 = \frac{5000 \cdot (0,131)}{26228 \cdot 10^{-8}} + \frac{10000 \cdot (-0,0875)}{11701 \cdot 10^{-8}} = -5 \text{ МПа};$$

Точка 4. $X_4 = 8,75$ см; $Y_4 = 13,1$ см;

$$\sigma_4 = \frac{5000 \cdot 13,1}{26228 \cdot 10^{-8}} + \frac{10000 \cdot 0,0875}{11701 \cdot 10^{-8}} = 10 \text{ МПа}.$$

2.2. Приклад 2.

Умова задачі: Чавунний короткий стержень, стискається поздовжньою силою P прикладеного в точці А. Необхідно:

1) обчислити найбільше напруження розтягання і стискання в поперечному перерізі, виразивши значення цих напружень через P і розміри перерізу.

2) знайти допустиме навантаження при заданих розмірах перерізу і допустимих напруженнях для чавуну на стискання [Б]ст і розтягання [Б]р.

Дано: $a = 5$ см; $b = 5$ см; $[\sigma]_{\text{ст}} = 150$ МПа; $[\sigma]_{\text{р}} = 25$ МПа. Схема завантаження колони зображена на рис. 2.2.

1) Визначаємо положення головних центральних осей інерції перерізу прийнявши за початок відліку центр ваги першу (нижню) фігуру:

$$Z_c = 0; \quad Y_c = \frac{S_z}{F} = \frac{0 + 5 \cdot 10 \cdot 7,5}{10 \cdot 5 + 10 \cdot 5} = 3 \text{ см}$$

- 2) Визначаємо величини головних центральних моментів інерції і радіусів інерції:

$$I_y = \frac{10 \cdot 5^2}{12} + \frac{5 \cdot 15^2}{12} = 1510,42 \text{ cm}^4;$$
$$i^2_y = \frac{1510,42}{F} = \frac{1510,42}{125} = 12,08 \text{ cm}^2;$$
$$I_z = \frac{5 \cdot 10^3}{12} + (4,5)^2 \cdot 10 \cdot 5 + \frac{15 \cdot 5^3}{12} + (-3)^2 \cdot 15 \cdot 5 =$$
$$2260,42 \text{ cm}^4;$$
$$i^2_z = \frac{I_z}{F} = \frac{2260,42}{125} = 18,08 \text{ cm}^2.$$

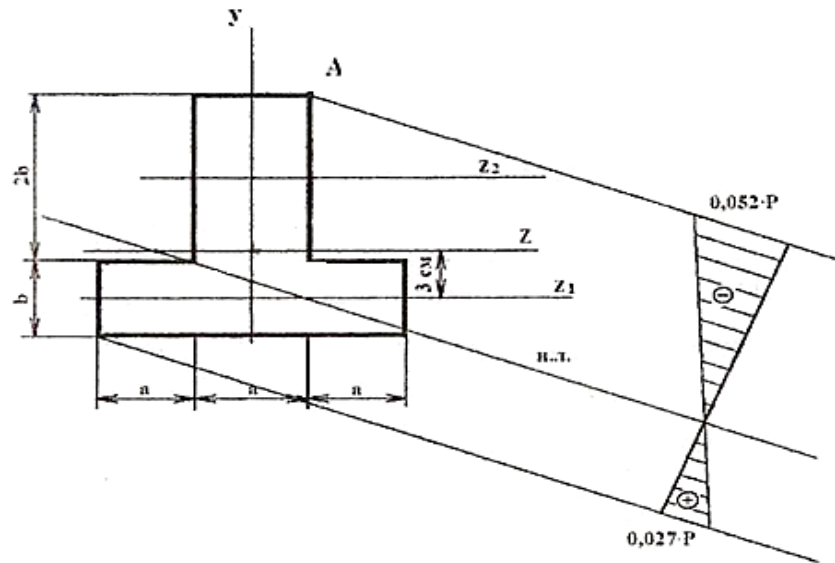


Рисунок 2.2. Схема до задачі із побудовою епюри нормальних напружень

- 3) Визначаємо положення нульової лінії (н.л.) для знайденої точки прикладання сили Р:

$$a_z = -\frac{i^2 y}{Z_p} = -\frac{12,08}{2,5} = -4,83 \text{ cm};$$

$$a_y = -\frac{i^2 z}{Y_p} = -\frac{18,08}{9,5} = -1,98 \text{ cm}$$

- 4) Визначаємо напруження в найбільш напружених точках прикладання сили Р:

Точка А:

$$\sigma_A = -\frac{P}{F} \left(1 + \frac{Y_p \cdot y_A}{i_z^2} + \frac{Z_p \cdot z_A}{i_v^2} \right) = -\frac{P}{125} \left(1 - \frac{9,5 \cdot 9,5}{18,08} + \frac{2,5 \cdot 2,5}{12,08} \right) = -0,052 \cdot P;$$

Точка В:

$$\sigma_B = -\frac{P}{F} \left(1 + \frac{Y_P \cdot Y_B}{i^2_z} + \frac{Z_P \cdot Z_B}{i^2_y} \right) = -\frac{P}{125} \left(1 - \frac{9,5 \cdot (-5,5)}{18,08} + \frac{2,5 \cdot (-7,5)}{12,08} \right) = 0,027 \cdot P.$$

5) Визначаємо допустиме навантаження при заданих розмірах перерізу і допустимих напруженнях:

$$\text{т.А: } [P] = \frac{-[\sigma]_{\text{ст}} \cdot F}{1 + \frac{Y_P \cdot Y_A}{i^2_z} + \frac{Z_P \cdot Z_A}{i^2_y}} = \frac{-150 \cdot 10^6 \cdot 0,0125}{1 + \frac{9,5 \cdot 9,5}{18,08} + \frac{2,5 \cdot 2,5}{12,08}} = -0,288 \cdot 10^6 \text{ Н} \approx 288 \text{ кН}$$

$$\text{т.В: } [P] = \frac{-[\sigma]_{\text{ст}} \cdot F}{1 + \frac{Y_P \cdot Y_A}{i^2_z} + \frac{Z_P \cdot Z_A}{i^2_y}} = \frac{25 \cdot 10^6 \cdot 0,0125}{1 + \frac{9,5 \cdot (-5,5)}{18,08} + \frac{2,5 \cdot (-7,5)}{12,08}} = 0,0908 \cdot 10^6 \text{ Н} \approx 91 \text{ кН}$$

Приймаємо $[P]=91 \text{ кН}$, тобто із умови міцності на розтягання.

При цьому: $\sigma_A = -\frac{91 \cdot 10^3}{0,0125} (1 + 4,99 + 0,55) = 47288640 \text{ Па} \approx 47,3 \text{ МПа}$

2.3. Контрольні питання

1. Який випадок згинання називають косим згинанням?
2. Чи можливе косе згинання при чистому згинанні?
3. В яких точках поперечного перерізу виникають найбільші напруження при косому згинанні?
4. Як знаходиться положення нейтральної лінії при косому згинанні?
5. Як пройде нейтральна лінія, якщо площа дії сил проходить по діагоналі балки прямокутного перерізу?
6. Як визначаються деформації при косому згинанні?
7. Чи може балка круглого поперечного перерізу випробуватися на косе згинання?
8. Як знаходяться напруження в довільній точці поперечного перерізу при позацентровому стисканні чи розтяганні?
9. Чому дорівнює напруження в центрі ваги поперечного перерізу при поза центровому розтяганні чи стисканні?
10. Яке положення займає нейтральна лінія, коли поздовжня сила прикладена в вершині ядра перерізу?
11. Які напруження виникають в поперечному перерізі стрижня при згинанні закрученням?

12. Як знаходяться небезпечні перерізи стрижня при згинанні з крученням?
13. В яких точках круглого поперечного перерізу виникають найбільші напруження при згині з крученням?
14. Чому здебільшого не враховують дотичні напруження від згинання при сумісній дії згинання з крученням?
15. Який вигляд мають умови міцності стержня за всіма чотирьма теоріями, якщо відомі нормальні і дотичні напруження?
16. Як знаходять величину розрахункового моменту при згинанні з крученням стрижня круглого поперечного перерізу?
17. По якій теорії міцності (третій чи четвертій) буде більша величина розрахункового моменту при заданих величинах $M_{зг}$ і M_k ?

2.4.Завдання для самостійного виконання

Задача 1

Дерев'яна балка прямокутного поперечного перерізу навантажена вертикальною силою Q в точці A і горизонтальною силою в точці B (обидві точки розташовані на осі балки).

На опорах балки можуть виникати, як вертикальні, так і горизонтальні реакції, напрямлені перпендикулярно до площини рисунку.

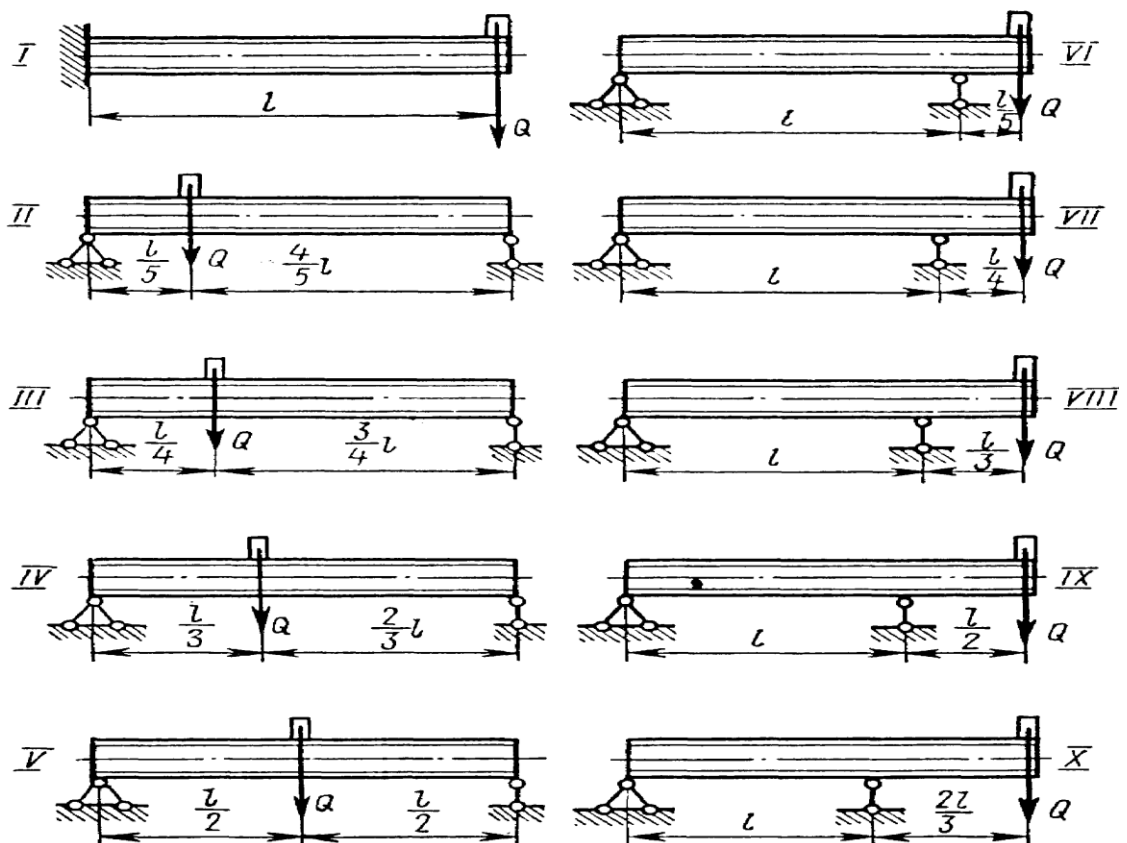
Необхідно:

1. побудувати епюри $M_{верт}$ і $M_{гор}$ і встановити положення небезпечного перерізу;
2. підібрати розміри поперечного перерізу h і b за допустимими напруженнями;
3. визначити положення нейтральної лінії в небезпечному перерізі балки і побудувати для цього перерізу епюру нормальних напружень в аксонометрії.

Таблиця 2.1

Завдання для самостійного виконання (задача 1)

№	$[\sigma]$, МПа	Q , кН	L , м	h/b
1	12	8	1,2	1,2
2	10	9	1,5	1,5
3	11	5	1,8	1,8
4	9	3	1,3	1,3
5	9	5	1,4	1,4
6	8	2	1,9	1,9
7	12	1	1,0	1,0
8	11	8	1,1	1,1
9	8	9	1,5	15
10	8	5	1,3	1,3

**Задача 2**

Чавунний короткий стрижень, стискається поздовжньою силою P , прикладеною в точці А. Необхідно:

1) обчислити найбільше напруження розтягання і стискання в поперечному перерізі, виразивши значення цих напружень через P і

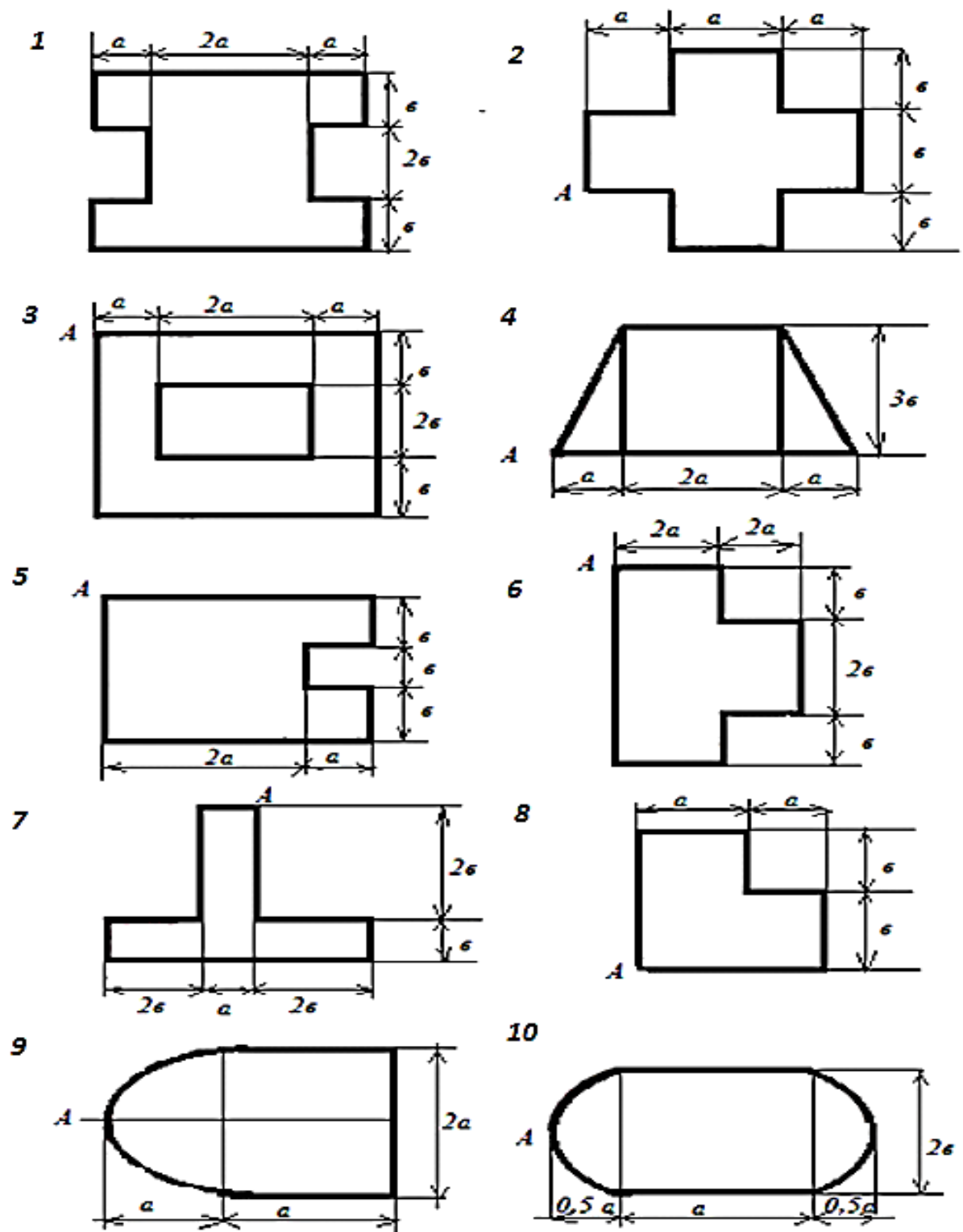
розміри перерізу.

2) знайти допустиме навантаження при заданих розмірах перерізу і допустимих напруженнях для чавуну на стискання $[\sigma]_{\text{ст}}$ і розтягання $[\sigma]_{\text{р}}$.

Таблиця 2.2

Завдання для самостійного виконання (задача 2)

№	а, см	в, см	$[\sigma]_{\text{ст}}$	$[\sigma]_{\text{р}}$
1	5	6	120	30
2	3	5	130	45
3	5	7	100	22
4	7	8	160	27
5	8	8	60	23
6	5	9	90	25
7	7	6	80	28
8	6	4	100	30
9	5	8	70	46
10	9	4	100	23



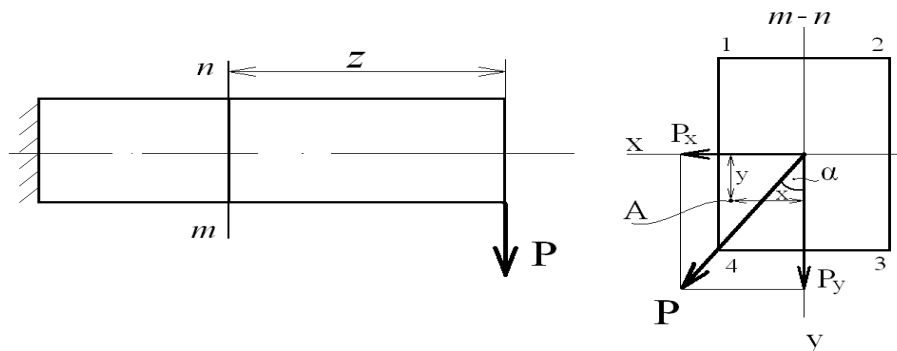
2.5. Тестові завдання

1. Нижче наведено рівняння

$$1 + \frac{y_p \cdot y_N}{i_x^2} + \frac{x_p \cdot x_N}{i_y^2} = 0$$

А) нульової лінії; Б) ядра перерізу; В) граничних допустимих напружень.

2. На рисунку показано



А) косе згинання; Б) розтяг; В) стиск; Г) кручення

3. Залежно від виникнення внутрішніх зусиль виділяють такі основні види складного опору стрижня:

А) косий згин, позацентровий розтяг-стиск, одночасна дія згину і поздовжньої сили, згин з крученням;

Б) кручення, центральний розтяг-стиск;

В) складний опір, зсув.

4. Умови міцності кривого бруса залежать від його

А) кривизни; Б) маси; В) довжини; Г) площі поперечного перерізу.

5. Ядро перерізу –

А) це область навколо центра ваги, що має таку властивість: якщо прикласти зовнішні сили у цій області, то у всьому поперечному перерізі виникнуть напруження одного знаку;

Б) це область навколо центра ваги, що має таку властивість: якщо прикласти зовнішні сили у цій області, то у всьому поперечному перерізі виникнуть напруження різних знаків;

В) це область навколо центра ваги, що має таку властивість: якщо прикласти зовнішні сили у цій області, то у всьому поперечному перерізі виникнуть напруження рівні нулю.

3. Визначення ударної в'язкості сталі при ударному згині та розтягу

Мета: дослідження поведінки сталевих зразків під час ударного згину і розтягу та визначення питомої ударної в'язкості.

Рішення інженерних задач базується на наближеній теорії пружного удару, у якій приймаються такі основні припущення:

1. Кінетична енергія тіла, що вдаряється, цілком переходить у потенційну енергію деформацій, при цьому зневажають енергією, яка йде на деформацію тіла, що вдаряється.

2. Закон розподілу напружень і деформацій по об'єму тіла залишається таким же, як і при статичній дії сил, при цьому не враховується зміна розподілу напружень і деформацій у тому місці, де відбувається співудар тіл, а також за рахунок коливань високої частоти, що супроводжують явище удару у всьому обсязі тіла.

Припустимо, що дуже жорстке тіло А вагою Q , деформацією якого можна зневажати, падаючи з деякої висоти h , ударяє по іншому тілу В, яке опирається на пружну систему С. В окремому випадку це може бути падіння вантажу на кінець призматичного стержня, інший кінець якого закріплений (поздовжній удар), падіння вантажу на балку, що лежить на опорах (згинаючий удар). Матеріал у порівнянні зі статичним навантаженням інакше реагує на удар.

Одержані при статичних випробуваннях, тобто під дією дуже повільно наростаючого навантаження, механічні характеристики не можуть оцінити здатність матеріалу протистояти ударному навантаженню. Випробування на ударну в'язкість відносяться до динамічних видів випробувань, які застосовують, щоб оцінити властивість матеріалів витримувати ударні навантаження. Ці випробування особливо важливі для високоміцних сплавів, які можуть мати задовільні характеристики пластичності при звичайних випробуваннях, але крихко руйнуються у реальних конструкціях при наявності концентраторів. Швидкість деформування і деформація при динамічних випробуваннях на декілька порядків більші, ніж при статичних. При великих швидкостях збільшується небезпека крихкого руйнування. Ця небезпека особливо зростає при наявності

в деталі різного роду надрізів (отвори, виточки, галтелі, канавки і т. п). Зазначені обставини призводять до необхідності введення деякої характеристики, що дає оцінку поведінки матеріалу при динамічних навантаженнях і виявляє небезпеку крихкого руйнування. Для цього призначені спеціальні випробування на ударну в'язкість – ударна проба матеріалу.

Ударна в'язкість – це складна комплексна характеристика, яка залежить від декількох більш простих механічних властивостей. Випробування на удар проводять на спеціальних маятникових копрах із застосуванням стандартних зразків. Щоб можна було порівнювати отримані результати, ДСТУ 9454-78 стандартизує методи визначення ударної в'язкості, форму й розміри зразків, надрізів, а також умови їх механічної обробки, якість обробки поверхні, оскільки всі ці фактори впливають на величину ударної в'язкості.

Необхідність стандартизації викликана тим, що неоднорідність напруженого стану в зоні надрізу і складність явищ, які протікають при ударному руйнуванні, не допускають застосування закону подібності (як, наприклад, в разі розтягу гладких зразків). Це означає, що для геометрично подібних, але різних за розмірами зразків величина ударної в'язкості не буде однаковою, вона залежить від температури зразка при випробуваннях.

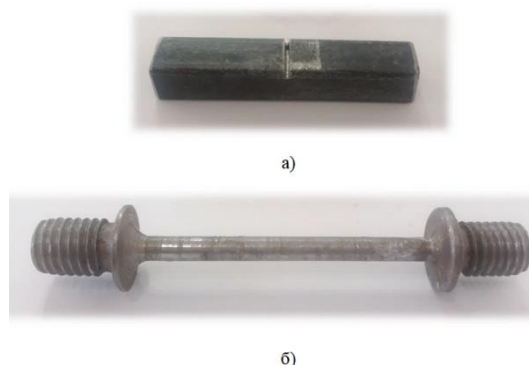


Рисунок 3.1 – Зразки для випробувань на ударну в'язкість:
а) при ударному згині, б) при ударному розтягу.

Ударний згин зразка. Найбільш поширеним видом ударних випробувань є випробування на ударний згин зразка з надрізом. На

рисунку зображено ескіз зразка з надрізом. Надріз роблять для того, щоб створити додаткову умову, що полегшує крихке руйнування зразка.

Поблизу надрізу виникає об'ємний напружений стан (тривісний розтяг), що ускладнює розвиток пластичної деформації і сприяє крихкому руйнуванню. Наявність різкого переходу в розмірах поперечного перерізу виробу, а також перші сліди тріщин сприяють виникненню крихкості та викликають передчасне руйнування матеріалу. Тому випробовувані зразки надрізають з одного боку, щоб викликати в них різку неоднорідність напружень при ударі й ускладнити пластичну деформацію, що полегшує оцінку схильності металу до переходу в крихке становище. Ударна в'язкість при згині a_n визначається як відношення роботи A , необхідної для руйнування ударом спеціального зразка, до площі поперечного

перерізу в місці надрізу:
$$a_n = \frac{A}{S},$$
 де a_n – питома ударна в'язкість, Дж/м²; A – робота, витрачена на руйнування (злом) зразка при ударі, Дж; S – площа перерізу зразка в місці надрізу (рис. 3.2), м².

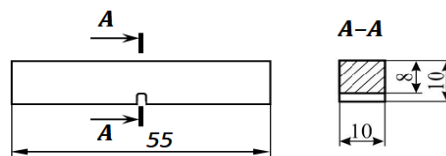


Рисунок 3.2 – Ескіз зразка для випробувань на ударну в'язкість при згині.

Чим більш пластичний матеріал, тим більше величина роботи, що витрачається на його руйнування. Тобто пластичний матеріал краще чинить опір ударним навантаженням. Величина ударної в'язкості залежить від температури зразків при випробуваннях. Для порівняльної оцінки якості матеріалу проводять випробування при кімнатній температурі. Ударна в'язкість сильно залежить також від наявності різного роду дефектів в структурі металу (тріщини, порожнечі, неметалеві включення та ін.). Тому випробування на ударну в'язкість відносяться також до числа поширених

технологічних проб, які виявляють якість матеріалу. При ударному згині пластичний матеріал змінює свої властивості і руйнування набуває крихкого характеру (рис. 3.3, б).

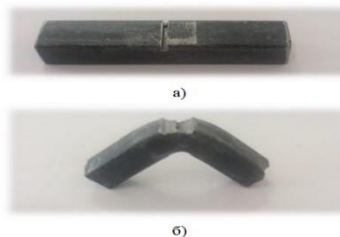


Рисунок 3.3 – Зразок при випробуванні на ударний згин: а) загальний вигляд, б) зруйнований зразок.

Поява крихкого зламу пояснюється тим, що діаграма розтягу волокон, що прилеглі до надрізу, і особливо границя текучості сильно підвищені, як під впливом швидкості, так і під впливом надрізу, що створює різкий градієнт напружень і тим ускладнює деформацію. А істинний опір розриву не залежить від цих чинників і, при досить інтенсивній дії останніх, може виявитися нижче опору пластичної деформації (границі текучості). Завдяки цьому, на появу крихкості впливають: а) температура зразка, при зниженні якої підвищується границя текучості, збільшуючи внутрішнє тертя, що полегшує появу крихкості; б) швидкість удару, збільшення якої також підвищує границю текучості; в) форма зразка, так як широкі зразки з ускладненою поперечною деформацією легше призводять до крихкого зламу, ніж вузькі.

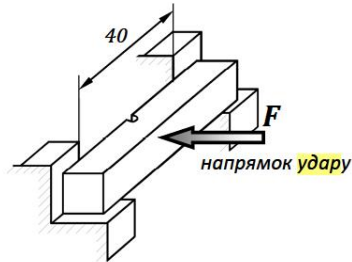
Крихкий злам при кімнатній температурі проявляється у таких матеріалів, що пройшли неналежну термічну і механічну обробку, наприклад, крупнокристалічне залізо (рекристалізація після появи критичного наклепу), зістарене залізо (що отримало деформацію при 200-300°C), хромонікелева сталь, відпущена з малою швидкістю охолодження (крихкість відпустки), інші види випробування, в тому числі ударний розрив. Випробування на удар без надрізу застосовується тільки під час випробувань колій.

Наявність різкого переходу в розмірах поперечного перерізу виробу, а також перші сліди тріщин сприяють виникненню крихкості та викликають передчасне руйнування матеріалу. Тому

випробовувані зразки надрізають з одного боку, щоб викликати в них різку неоднорідність напружень при ударі й ускладнити пластичну деформацію, що полегшує оцінку схильності металу до переходу в крихке становище. Зразок для випробувань встановлюють на опори копра (рис. 3.4, а) і піддають ударній дії масивним маятником, що падає з певної висоти.



а)



б)

Рисунок 3.4 – Установка зразка на опори а) та його ескіз при випробуваннях на ударний згин б).

Біля дна надрізу при ударі, внаслідок різкої зміни площі поперечного перерізу разом з напруженнями, спрямованими уздовж осі зразка, з'являються напруження, перпендикулярні до осі, тобто виникає об'ємний напружений стан із позитивними головними напруженнями. Ці напруження ускладнюють пластичну деформацію в матеріалі зразка. Ще більш суттєве те, що надріз зосереджує всю деформацію, поглинаючи енергію удару, в порівняно невеликому об'ємі матеріалу.

Ударні випробування зразків на ударний згин проводять на маятниковому копрі МК-30 з граничною енергією копра 300 Дж. Швидкість ножа копра змінюється від 4 до 7 м/с, що відповідає підняттю ножа маятника на висоту від 0,8 до 2,6 м. Роботу, що витрачається на руйнування зразка, визначають, як різницю запасів енергії маятника до і після удару: $A = mg \cdot (H - h)$, де H – висота підняття центру ваги маятника до удару, м; h – висота підняття центру ваги маятника після удару, м. Ударний розтяг зразка Для випробувань на ударний розтяг використовують зразок

циліндричної форми (рис. 3.5), на кінцях якого нарізана різьба, довжиною ℓ_2 .

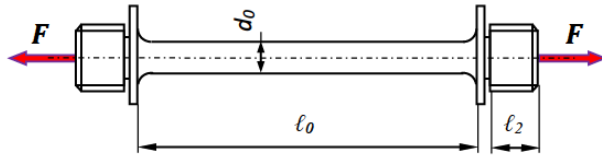


Рисунок 3.5 – Ескіз зразка для випробувань на ударний розтяг.

Один кінець зразка вкручують в спеціальне пристосування в молоті маятника, а на другий накручують «тарілку» (рис. 3.6).



Рисунок 3.6 – Зразок вкручений у маятниковий пристрій.

Розтягуюче навантаження миттєво подається на зразок в момент удару фіксуючого бруска по ковадлах. Цей тип кріплення зразка дає постійний розподіл енергії удару в розрахунку на площу зразка. Після випробування на ударний розрив отримуємо зразок з такими ж наслідками, як і при випробуванні на статичний розтяг. За короткий період часу зразок стає довшим, з'являється слабке місце – «шийка» і відбувається відрив. Характер руйнування зразка – відривання зі зсувом.

При ударному розриві деформації та напруження залежать від довжини стержня ℓ_0 і модуля поздовжньої пружності E . Таким чином, для зниження напружень збільшують довжину зразка. Отже, при поздовжньому ударі величина напружень залежить від об'єму. Таким чином питома ударна в'язкість a_n визначається як відношення роботи, витраченої на руйнування зразка, до його об'єму:

$$a_n = \frac{A}{V},$$

де a_n – питома ударна в'язкість, Дж/м³; A – робота, витрачена на руйнування (розтяг) зразка при ударі, Дж; V – об'єм матеріалу зразка, м³.

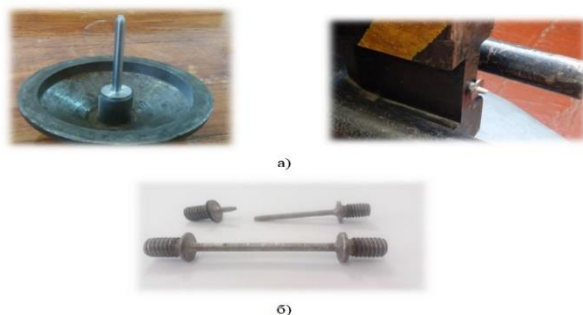


Рисунок 3.7 – Руйнування зразка при ударному розриві: а) зруйнований зразок (частина зразка залишилась у «тарілці», а частина – у маятнику), б) загальний вигляд зразка до та після руйнування.

Роботу руйнування визначають на спеціальному ударному копрі, визначаючи кут підйому маятника після удару. У результаті випробувань завжди виявляється, що динамічний тимчасовий опір вище статичного (перевищення до 100%), границя текучості також підвищена, і до того ж більша ніж тимчасовий опір на 20-60%. Подовження або дорівнює або більше статичного; звуження шийки майже таке ж саме. Характерна ударна крихкість проявляється при цьому випробуванні у дуже небагатьох металів (наприклад у сталі з вмістом фосфору $> 0,10\%$). Вимірювання сил при ударі представляє великі труднощі і у лабораторну практику ще не увійшло. Одним з недоліків традиційного методу випробування на удар є те, що в результаті визначається лише сумарна енергія руйнування. Іноді застосовують інструментальні методи контролю випробування, суть яких полягає в безперервному вимірюванні навантаження в процесі руйнування. Це дає можливість для оцінки крім енергії руйнування ще й максимального зусилля при руйнуванні, що дозволяє оцінити перехід від крихкого до пластичного механізму руйнування при зниженні температури.

Оснащення робочого місця

лабораторні установки – маятниковий копер МК-30А та копер Шарпі;

зразки на ударний розтяг та згин;

калькулятор, олівець, лінійка; журнал лабораторних робіт.

Робота складається з двох етапів: на першому етапі проводимо випробування на ударний згин, на другому етапі – випробування на ударний розтяг.

Лабораторна робота проводиться у такій послідовності:

1. Перед випробуваннями слід обміряти розміри зразків: на ударний згин – у місці надрізу, на ударний розтяг – робочу довжину і діаметр.

2. Для випробувань на ударний згин: встановити відстань між опорами. Якщо поперечний переріз зразка становить $10 \times 10 \text{ мм}^2$, то відстань між опорами 40 мм.

3. Злегка відхиливши маятник в сторону його підйому, покласти зразок на опори так, щоб удар падаючого маятника припадав з боку, протилежного надрізу, відносно опор з похибкою не більше $\pm 0,5$ мм, а надріз знаходився в одній площині з вістрям ножа маятника.

4. Підняти маятник на висоту, відповідну енергії удару, що задається і закріпити заціпку стопором. Не рекомендується встановлювати надмірно велику енергію удару в порівнянні з необхідною для руйнування зразка, так як це знижує точність результату випробування.

5. Звільнити запобіжник, маятник вільно падає, руйнуючи зразок. При цьому показчик шкали покаже величину роботи, витраченої на руйнування зразка. Після руйнування зразка зупинити гойдання маятника гальмом.

6. Знайти енергію, витрачену на руйнування зразка

$$A_n = A_0 - A_1.$$

8. Визначити ударну в'язкість матеріалу зразка a_n . Результати розрахунків занести у таблицю 3.1.

Таблиця 3.1 – Журнал спостережень при ударному згині.

Потенційна енергія маятника до руйнування зразка (робота)	Потенційна енергія маятника після руйнування зразка (робота)	Робота руйнування A , $H \times m$	Питома ударна вязкість a_H , $H \times m / cm^2$
$A_0 =$	$A_1 =$	$A = A_0 - A_1$	$a_H = \frac{A}{S}$

8. Для випробувань на ударний розтяг: накрутити на один кінець зразка спеціальний пристрій «тарілку», а другий вкрутити в молот маятника.

9. Підняти маятник на висоту, що відповідає нульовій відмітці на шкалі силовимірювача і закріпити запобіжником.

10. Звільнити запобіжник. Розтягуюче навантаження миттєво подається на зразок у момент удару фіксуючої «тарілки» бруска по ковадлах. Зупинити маятник при зворотному ході за допомогою стрічкового гальма.

11. Визначити за шкалою копра кут зльоту маятника після удару, та за допомогою спеціальних таблиць перевести його в роботу руйнування.

12. Визначити об'єм робочої частини зразка та розрахувати ударну в'язкість матеріалу. Результати випробувань занести у таблицю 3.2.

Таблиця 3.2 – Журнал спостережень при ударному розтягу.

Кут зльоту маятника до руйнування зразка, град	Кут зльоту маятника після руйнування зразка, град	Робота руйнування A , $H \times m$ (по таблиці)	Питома ударна в'язкість a_H , $H \times m / cm^3$
$\alpha_0 =$	$\alpha_1 =$		$a_H = \frac{A}{V}$

13. Під час проведення випробувань висувають наступні вимоги: при вирізання заготовок метал зразків не повинен піддаватися наклепу та нагріву, які змінюють властивості металу;

якщо в результаті випробування зразок не зруйнувався повністю, то показник якості матеріалу вважається не встановленим.

3.1. Визначення ударної в'язкості матеріалу при комбінованому навантаженні

Мета роботи: оцінити стійкість матеріалу до ударного навантаження при одночасному згині, визначити енергію поглинання та роботу руйнування зразка.

Обладнання:

- маятниковий копер (типу Шарпі або УІБ)
- зразки металу (сталь, алюміній) з вирізами (V-подібні або U-подібні)
- пристрій для фіксації згинного попереднього навантаження
- лінійка, штангенциркуль, мікрометр
- захисні окуляри та рукавички

При ударному випробуванні зразка з вирізом відбувається концентрація напружень у зоні вирізу. Попереднє згинне навантаження збільшує сумарні напруження, що дозволяє дослідити складний опір матеріалу при комбінованому навантаженні.

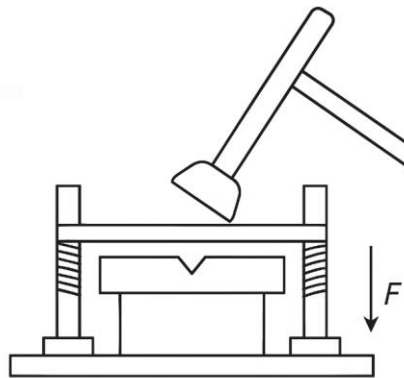


Рисунок 3.8. Закріплення зразка при комбінованому ударі (удар та згин)

Основна формула для розрахунку ударної в'язкості (енергії поглинання):

$$A = mg(h_0 - h_1)$$

де:

A - робота руйнування, Дж;

m - маса маятника, кг;

g - прискорення вільного падіння, $9,81 \text{ м/с}^2$;

h_0 - початкова висота маятника, м;

h_1 - висота після удару, м.

Ударна в'язкість визначається як робота руйнування на поперечний переріз зразка:

$$K = A / S_0$$

де S_0 - площа поперечного перерізу у зоні вирізу.

Порядок виконання роботи.

1. Підготовка зразків:

Виготовити металеві зразки з вирізами стандартних розмірів (зазвичай довжина 55 мм, товщина 10 мм, ширина 10 мм, V-подібний виріз кутом 45°).

Виміряти точні розміри вирізу та товщину зразка.

2. Установка зразка:

Встановити зразок у маятниковий копер так, щоб виріз був звернений до ударного маятника.

За допомогою пристрою прикласти попереднє згинне навантаження (для цього часто використовують важільний механізм або гвинтовий прес).

3. Проведення ударного випробування:

Підняти маятник на фіксовану висоту h_0 .

Відпустити маятник, щоб він ударив зразок у зоні вирізу.

Зафіксувати нову висоту маятника після удару h_1 .

4. Обчислення енергії поглинання та ударної в'язкості:

Розрахувати роботу руйнування

$$A = mg(h_0 - h_1)$$

Визначити ударну в'язкість: $K = A / S_0$

Порівняти отримані результати з еталонними значеннями для даного матеріалу.

Таблиця 3.3. Журнал обчислень

Показник / Зразок	1	2	3
Матеріал			
Ширина зразка b , мм			
Товщина зразка h , мм			
Тип вирізу			
Висота маятника до удару h_0 , м			
Висота маятника після удару h_1 , м			
Маса маятника m , кг			
Робота руйнування A , Дж			
Площа поперечного перерізу S_0 , мм ²			
Ударна в'язкість K , Дж/мм ²			
Попереднє згинне навантаження, Н			

5. Аналіз результатів.

Зробити висновки про вплив попереднього згину на ударну міцність матеріалу. Визначити, чи спостерігається зменшення енергії поглинання при збільшенні попереднього згинного навантаження (характеристика складного опору).

Література

1. Архіпова Т. Ф. Механіка матеріалів та конструкцій : Лабораторний практикум. Вінниця : ВНТУ, 2024. 57 с.
2. Бабенко Д. В., Доценко Н. А., Горбенко О. А. Механіка матеріалів і конструкцій. Частина 1: практикум для навчання на основі інтерактивного графічно-цифрового контенту : навчальний посібник. Миколаїв : МНАУ, 2021. 176 с. URL: <https://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/10563>
3. Бондаренко Л.Ю., Вершков О.О., Антонова Г.О. Лабораторний практикум з механіки матеріалів і конструкцій : навч. посіб. Мелітополь : ТДАТУ, 2017. 183с.
4. Доценко Н.А. Робоча програма навчальної дисципліни «Механіка матеріалів і конструкцій» освітньо-професійна програма для здобувачів вищої освіти першого рівня (2 курс) денної форми здобуття освіти на 2024-2025 навчальний рік. Миколаїв : МНАУ, 2024. 37 с.
5. Курс «Механіка матеріалів і конструкцій». Платформа дистанційного навчання MOODLE МНАУ. URL: <https://moodle.mnau.edu.ua/course/view.php?id=355>
6. Литвинов О. І., Василюк В. І., Федорина Т. П. Механіка матеріалів і конструкцій : методичний посібник. Ніжин : НДУ ім. Гоголя, 2020. 180 с.
7. Механіка матеріалів і конструкцій : методичні рекомендації для виконання лабораторних робіт здобувачами першого (бакалаврського) рівня вищої освіти ОПП «Агроінженерія» спеціальності 208 «Агроінженерія» денної та заочної форми здобуття вищої освіти / уклад. : Н. А. Доценко, Д. В. Бабенко. Миколаїв : МНАУ, 2024. 44 с. URL: <https://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/19253>
8. Механіка матеріалів і конструкцій. Частина 1. Просте навантаження : навчальний посібник / А. Є. Бабенко та ін. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. 203 с. URL: <https://ela.kpi.ua/server/api/core/bitstreams/319cad55-3d27-48f5-9244-34fc1f9477d8/content>
9. Прикладна механіка : навчальний посібник для здобувачів першого «бакалаврського» рівня вищої освіти ОПП «Біотехнології та біоінженерія» спеціальності 162 «Біотехнології та біоінженерія» денної

форми здобуття вищої освіти / Г. О. Іванов, В. С. Шебанін, Д. В. Бабенко та ін. Миколаїв : МНАУ, 2024. 316 с.
<https://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/19190>

10. Прикладна механіка. Практикум : навчальний посібник для здобувачів першого «бакалаврського» рівня вищої освіти ОПІ «Біотехнології та біоінженерія» спеціальності 162 «Біотехнології та біоінженерія» денної форми здобуття вищої освіти / Г. О. Іванов, В. С. Шебанін, Д. В. Бабенко та ін. Миколаїв : МНАУ, 2024. 236 с.
<https://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/19187>

11. Babenko, D., Dotsenko, N., & Gorbenko, O. (2024). Study of structural and kinematic characteristics of an energy-efficient oil press. Ukrainian Black Sea Region Agrarian Science, 28(3), 41-54.
<https://doi.org/10.56407/bs.agrarian/2.2024.41>

12. Babenko, D., Dotsenko, N., & Gorbenko, O. (2025). Justification of the design parameters of improved equipment for tomato processing. Ukrainian Black Sea Region Agrarian Science, 29(3), 9-22.
<https://doi.org/10.56407/bs.agrarian/3.2025.09>

13. Babenko, D., Dotsenko, N., & Gorbenko, O. (2025). Justification of the design parameters of improved equipment for tomato processing. Ukrainian Black Sea Region Agrarian Science, 29(3), 9-22.
<https://doi.org/10.56407/bs.agrarian/3.2025.09>

14. Babenko, D., Dotsenko, N., Batsurosvka, I., & Gorbenko, O. (2022). Determination of the parameters of the use of water-lifting equipment in the conditions of livestock farms. Ukrainian Black Sea Region Agrarian Science, 26(3), 32-46. [https://doi.org/10.56407/2313-092X/2022-26\(3\)-3](https://doi.org/10.56407/2313-092X/2022-26(3)-3)

15. Babenko, D., Dotsenko, N., Gorbenko, O., & Batsurosvka, I. (2023). Study of the nature of the movement of the crushed mass on the surface of the sieves of the vegetable and melon seed separator. Ukrainian Black Sea Region Agrarian Science, 27(4), 18-35.
<https://doi.org/10.56407/bs.agrarian/4.2023.18>

16. Babenko, D., Dotsenko, N., Gorbenko, O., & Kim, N. (2021). Justification of the introduction of a seed separator for vegetable and tomato crops as part of a technological line. Ukrainian Black Sea Region Agrarian Science, 25(2), 80-87. [https://doi.org/10.31521/2313-092X/2021-2\(110\)-10](https://doi.org/10.31521/2313-092X/2021-2(110)-10)

17. Babenko, D., Gorbenko, O., Dotsenko, N., & Kim, N. (2018). Theoretical aspects of oil separation process by pressing. Ukrainian Black Sea

Region Agrarian Science, 22(3), 94-98. DOI: 10.31521/2313-092X/2018-3(99)-16

18. Babenko, D., Gorbenko, O., Dotsenko, N., & Kim, N. (2020). Optimization of structural and kinematic parameters of separator of vegetable and melon crops. Ukrainian Black Sea Region Agrarian Science, 24(3), 105-112. DOI: 10.31521/2313-092X/2020-3(107)-13

19. Shebanin, V., Atamanyuk, I., Gorbenko, O., & Dotsenko, N. (2020). Determining the optimal parameters of machines for processing the seed mass of vegetable and melon crops. Ukrainian Black Sea Region Agrarian Science, 24(2), 95-103. DOI: 10.31521/2313-092X/2020-2(106)-11

Навчальне видання

**МЕХАНІКА МАТЕРІАЛІВ І КОНСТРУКЦІЙ.
Модуль "Складний опір"**

Методичні рекомендації

Укладачі: **Доценко** Наталія Андріївна
Бабенко Дмитро Володимирович

Редактор: Н. А. Доценко

Комп'ютерний набір: Н. А. Доценко

Дизайн і верстка: Н. А. Доценко

Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 3,25

Тираж 20 прим. Зам. №_

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету.
54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК№4490 від 20.02.2013р.