

ВИГІННІ КОЛИВАННЯ ТОНКОЇ КРУГЛОЇ ЕЛАСТИЧНОЇ ВКЛЮЧИНИ В НЕОБМЕЖЕНОМУ ТІЛІ ПІД ДІЄЮ ПЛОСКОЇ ГАРМОНІЙНОЇ ХВИЛІ

Лариса Вахоніна

канд. фіз.-мат. Наук, доцент кафедри електроенергетики, електротехніки та електромеханіка

Миколаївський національний аграрний університет
м. Миколаїв, Україна

Анотація. У роботі досліджено взаємодію плоскої гармонічної поздовжньої хвилі з тонкою круглою еластичною включиною, розташованою в необмеженому пружному середовищі. Використано підхід, заснований на розв'язанні рівнянь Ламе із застосуванням дискретних (розривних) рішень. Ураховано гнучкість включини та розглянуто випадок її ідеального зчеплення з матрицею. Виведено інтегральне рівняння другого роду для визначення стрибка нормальних напружень на поверхні включини, яке розв'язано чисельно методом механічних квадратур. Отримано наближені співвідношення для коефіцієнтів інтенсивності напружень (SIF) та проведено числовий аналіз впливу хвильового числа та жорсткості включини на концентрацію напружень.

Ключові слова: пружна включина, гармонічна хвиля, згинальні коливання, коефіцієнт інтенсивності напружень, метод квадратур, хвильова взаємодія

У класичних дослідженнях динамічних задач теорії пружності часто припускається, що тонкі включини в тілі є абсолютно жорсткими. Таке спрощення дозволяє отримати аналітичні розв'язки, однак не враховує впливу власних пружних властивостей включини на розподіл напружень у навколишньому середовищі. У реальних конструкційних матеріалах ця взаємодія може бути суттєвою, особливо за наявності коливних навантажень. Метою роботи є побудова математичної моделі вигинних коливань тонкої круглої еластичної включини в необмеженому середовищі та аналіз впливу її жорсткості на концентрацію напружень при дії гармонічної хвилі.

Розглянуто необмежене пружне тіло (матрицю), що містить тонку круглу еластичну включину у вигляді пластини товщиною h і радіусом a , розташовану в площині $z=0$. На матрицю діє плоска поздовжня хвиля, фронт якої паралельний площині включини. Завдяки малій товщині включини умови ідеального зчеплення формулюються на її середній площині [1].

Коливання включини описуються рівнянням вигину тонкої пластини, де циліндрична жорсткість D визначається через модуль пружності E_0 , товщину h та коефіцієнт Пуассона ν_0 . На межі включини враховано вільні крайові умови, що відображають відсутність зовнішнього зчеплення по периферії. Вплив матриці на краї включини знехтувано.

Для визначення переміщень у матриці використано розривні розв'язки рівнянь Ламе для осесиметричних гармонічних коливань. Стрибок нормальних

напружень між матрицею і включиною є невідомою функцією, для якої побудовано інтегральне рівняння Фредгольма другого роду. Це рівняння чисельно розв'язується методом механічних квадратур із застосуванням формул Гауса. Отримано систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення функції, що описує напружений стан поблизу межі включини [2].

Для оцінки концентрації напружень введено коефіцієнт інтенсивності напружень (SIF), який виражає границю відношення напружень поблизу краю включини до відстані від її межі. Формули для SIF отримано у безрозмірній формі, що дозволило виконати узагальнений аналіз впливу відносної жорсткості включини та хвильового числа.

Результати числових розрахунків показали, що зі зменшенням модуля пружності включини порівняно з матрицею графік залежності коефіцієнта інтенсивності напружень від хвильового числа ускладнюється та набуває численних мінімумів і максимумів. Навіть при відносно високій жорсткості включини значення SIF суттєво перевищують аналогічні для випадку абсолютно жорсткої включини. Це свідчить, що пружні властивості тонких елементів не можна ігнорувати при моделюванні коливальних процесів.

Додаткові розрахунки для конкретних матеріалів (сталева включина у свинцевій або бетонній матриці) підтвердили, що навіть для металевих включин коефіцієнти напружень істотно більші, ніж у випадку жорсткої моделі. Лише за дуже великих відношень модулів пружності (порядку 10^4 – 10^5) можна вважати включину абсолютно твердою, що рідко зустрічається у технічних матеріалах [3].

Розроблено математичну модель вигинних коливань тонкої круглої еластичної включини в необмеженому тілі під дією плоскої гармонічної хвилі з урахуванням її пружних властивостей. Отримано інтегральне рівняння для визначення стрибка нормальних напружень, яке зведено до системи алгебраїчних рівнянь та розв'язано чисельно методом квадратур. Проведено аналіз впливу жорсткості включини та хвильового числа на коефіцієнт інтенсивності напружень, при цьому встановлено, що пружна включина спричиняє більшу концентрацію напружень, ніж абсолютно жорстка. Доведено, що припущення про ідеальну жорсткість включини є справедливим лише за надзвичайно великої різниці модулів пружності, тому при моделюванні коливних процесів у композитних і багатошарових структурах необхідно враховувати реальні механічні характеристики матеріалів.

Список використаних джерел

1. Investigation of the stress intensity factor in heterogeneous materials based on the postprocessing routine of commercial finite element software / F. Guo et al. *Application of finite element analysis in fracture mechanics*. 2025. P. 5827.
2. Moussavian S. H., Jafari M., Hajimohammadi M. Analytical calculation of stress intensity factors for orthotropic plates containing cracks emanating from a circular hole using Schwarz integration. *ZAMM - journal of applied mathematics and mechanics* / *zeitschrift für angewandte mathematik und mechanik*. 2023. URL: <https://doi.org/10.1002/zamm.202300429> (date of access: 10.11.2025).

3. Vakhonina L. V., Popov V. G. Flexural vibrations of a thin circular elastic inclusion in an unbounded body under the action of a plane harmonic wave. *International applied mechanics*. 2008. Vol. 44, no. 493-497.

Abstract. *The paper investigates the interaction of a plane harmonic longitudinal wave with a thin circular elastic inclusion located in an unbounded elastic medium. An approach based on solving the Lamé equations using discrete (discontinuous) solutions is used. The flexibility of the inclusion is taken into account and the case of its ideal adhesion to the matrix is considered. An integral equation of the second kind is derived to determine the jump in normal stresses on the surface of the inclusion, which is solved numerically by the method of mechanical quadratures. Approximate relations for the stress intensity coefficients (SIF) are obtained and a numerical analysis of the influence of the wave number and stiffness of the inclusion on the stress concentration is performed.*

Keywords: *elastic inclusion, harmonic wave, bending vibrations, stress intensity factor, quadrature method, wave interaction.*

УДК. 631

ІЄРАРХІЧНА СТРУКТУРНА СХЕМА НЕЧІТКОГО ЛОГІЧНОГО ВИСНОВКУ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ СТАНУ АСИНХРОННОГО ДВИГУНА

Ракитянський Владислав

здобувач вищої освіти спеціальності 141 Електроенергетики,
електротехніки та електромеханіки

Харківський національний університет міського господарства ім. О.М.
Бекетова

м. Харків, Україна

Анотація: *У роботі обґрунтовано метод визначення залишкового ресурсу асинхронного електродвигуна на основі використання нечіткої логіки, наведено структуру розробленої системи нечіткої логіки.*

Ключові слова: *асинхронний, електродвигун, фактор, нечітка, експлуатація, логіка, ізоляція, залишковий ресурс, діагностика.*

При виготовленні та експлуатації асинхронних двигунів (АД) виникають відхилення параметрів двигуна від номінальних значень. Ці відхилення можуть бути викликані як технологічними помилками виготовлення двигуна, неправильними режимами експлуатації, так і розміром під час експлуатації. Вихід із строю АД призводить до важких аварій і великому матеріальному збитку, пов'язаному з простою технологічного обладнання, усуненням останньої аварії та ремонтом виниклого із строю електродвигуна. Отже, ефективний контроль параметрів АД в процесі виробництва і після їх виготовлення, одночасна їх діагностика в процесі експлуатації є актуальними задачами.