ПРАКТИКУМ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ.
Комп'ютерна система
для дистанційного навчання.
Частина І

Навчальний посібник

Миколаїв
МНАУ
2016

УДК 512:514:517
ББК 22.11
П69

Авторський колектив
В.С. Шебанін, О.В. Шебаніна, І.П. Атаманюк,
В.Г. Богза, О.В. Цепуріт, С.І. Богданов,
О.В. Шептилевський, С.В. Євстрат'єв

Рекомендовано до друку рішенням вченої ради Миколаївського національного аграрного університету від 23.06.2015, протокол № 10

Рецензенти

В. О. Поздєєв - д-р фіз-мат. наук, професор, зав. кафедри математики Миколаївського національного університету імені В. О. Сухомлинського

Ю. П. Кондратенко - д-р техн. наук, професор, Заслужений винахідник України, професор кафедри інтелектуальних інформаційних систем Чорноморського державного університету імені Петра Могили

П69 **Практикум** з вищої математики. Комп'ютерна система для дистанційного навчання. – в 2-х ч. – ч. 1 / [В.С. Шебанін, О.В. Шебаніна, І.П. Атаманюк та ін.] – Миколаїв : МНАУ, 2016. – 229 с.

ISBN 978-617-7149-13-1

У даному навчальному посібнику наведено теоретичний і практичний матеріал з тем курсу вищої математики „Елементи лінійної алгебри", „Елементи аналітичної геометрії на площині", „Елементи вищої алгебри та аналітичної геометрії", „Вступ до аналізу функції однієї змінної". Відповідає вимогам нормативних програм вищої школи України.

Це видання призначено для студентів технічних і економічних спеціальностей, денної та заочної форм навчання вищих навчальних закладів ІІІ-IV рівня акредитації.

УДК 512:514:517
ББК 22.11

ISBN 978-617-7149-13-1

Зміст

ВСТУП

Враховуючи тенденції розвитку науки і техніки, економіки й виробництва, практично не можливо визначити галузь діяльності людини, яка б не потребувала певної математичної підготовки. Праця все далі стає висококваліфікованою, потребує безперервної розумової діяльності, аналізу складних процесів, правильних логічних висновків. Суспільство потребує спеціалістів з чітким мисленням, глибокими математичними знаннями й уміннями бачити й реалізовувати можливості застосування математики в різних конкретних ситуаціях. Останнім часом математика перетворилася на повсякденний інструмент досліджень у всіх галузях науки і техніки. Тому вдосконалення процесу навчання математики в вищих навчальних закладах є актуальною задачею сьогодення.

Навчальний «Практикум з вищої математики: комп'ютерна система для дистанційного навчання», включає розділи: «Елементи лінійної алгебри», «Елементи аналітичної геометрії на площині», «Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії», «Вступ до аналізу функцій однієї змінної», що є обов'язковими для вивчення в курсі «Вища математика» в першому семестрі для переважної більшості технічних та економічних спеціальностей вищих навчальних закладів III та IV рівнів акредитації.

Підвищення ефективності практичних занять можливе за рахунок вдосконалення методики їх проведення, збільшення часу самостійної роботи та підвищення ефективності контролю за виконанням завдань. Тому надзвичайно важливою складовою розробленого практикуму з вищої математики є комп'ютерна система, яка дозволяє студентам дистанційно отримувати допуск до практичного заняття та вирішувати завдання достроково або після проведення аудиторного заняття, якщо студент не встиг повністю виконати запланований обсяг роботи. Для кожного студента за допомогою комп'ютерних датчиків випадкових чисел генерується параметр α, на його основі формується індивідуальне завдання, контролюється час його виконання і в разі перевищення часу поточне завдання блокується і формується нове. Всі спроби студента фіксуються на сервері бази даних в електронному журналі викладача.

Процес автоматизації контролю та перевірки завдань дозволяє значно оптимізувати навчальний процес.

Для використання навчального посібника без комп'ютерної системи студент отримує значення параметра α у викладача.

Посібник та комп'ютерна система забезпечені необхідним теоретичним матеріалом та прикладами виконання практичних завдань.

Для роботи з комп'ютерною системою необхідно звернутися до відповідального за електронними адресами ha42007@ukr.net, atamanyuk_igor@mail.ru

Розділ I
ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Практична робота 1. Матриці. Дії з матрицями.

1. Основні поняття та теореми

Означення: *Прямокутна таблиця*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}\ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

складена з $m\times n$ *чисел* a_{ij} *називається матрицею з* m *рядків і* n *стовпців або матрицею розміру* $m\times n$.

Числа a_{ij} $(i=1,2...,m,\quad j=1,2...,n)$ називаються елементами матриці, перший індекс i вказує номер рядка, в якому стоїть елемент матриці, а другий індекс j – номер стовпця.

Матриця може позначатися також :

$$\left[a_{ij}\right], i=1,2,...,m;\quad j=1,2,...,n.$$

Основними математичними операціями з матрицями є множення матриці на число, додавання матриць і множення матриць.

Множення матриці на число. Добутком числа λ і матриці $A=\left[a_{ij}\right]$ називається матриця $B=\left[b_{ij}\right]$ елементи якої підраховують згідно з правилом $b_{ij}=\lambda a_{ij}$, тобто кожний елемент матриці b_{ij} являє собою добуток числа λ і елемента матриці a_{ij}.

$$\lambda\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{bmatrix}.$$

Властивості операції множення матриці на число :

1) комутативність – $\lambda A = A\lambda$;
2) асоціативність – $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$.

Додавання матриць. Сумою двох матриць $A=\left[a_{ij}\right]$ і $B=\left[b_{ij}\right]$, що мають відповідно рівні кількості рядків і стовпців, називається матриця $S=\left[s_{ij}\right]$ розміру $m\times n$ з елементами, що дорівнюють сумам відповідних елементів матриць A і B: $s_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

Наприклад, сумою матриць

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

є матриця

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Властивості операції додавання матриць:
1) комутативність – $A + B = B + A$;
2) асоціативність – $(A + B) + C = A + (B + C)$;
3) дистрибутивність відносно суми матриць –

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B;$$

4) дистрибутивність відносно суми чисел –

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A.$$

Операція додавання матриць має обернену операцію – віднімання. Різницею матриць $A = \left[a_{ij}\right]$ і $B = \left[b_{ij}\right]$ називається матриця $C = \left[c_{ij}\right]$, складена з різниці відповідних елементів заданих матриць.

Множення матриць. Нехай матриці $\left[a_{ij}\right]$ і $\left[b_{ij}\right]$ – мають вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad i \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} \dots & b_{nk} \end{bmatrix},$$

тобто кількість n – стовпців матриці A збігається з кількістю n – рядків матриці B.

Добутком матриць $A = \left[a_{ij}\right]$ і $B = \left[b_{ij}\right]$ називається матриця C розміру $m \times k$, елементи якої підраховуються за правилом

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj},$$

$$(i = 1,2,\dots,m; \quad j = 1,2,\dots,k).$$

Елемент, що стоїть в i – рядку і j – стовпця добутку двох матриць одержується в результаті множення першого елемента i – рядка матриці A на перший елемент j – стовпця матриці B, другого елемента i – рядка матриці A на другий елемент j – стовпця матриці B і т.д., і наступної суми таких добутків пар елементів матриць A і B.

Властивості операції множення матриць:

1) операція множення некомутативна $AB \neq BA$;

2) операція множення асоціативна $(AB)C = A(BC)$.

2. Порядок виконання допуску до практичної роботи

a) Запустити систему за допомогою файла «КВМ.exe»;

b) Перейти у розділ «Практичні роботи»;

c) Обрати практичну роботу натиснувши на гіперпосилання «Матриці. Дії з матрицями»;

d) Після ознайомлення з теоретичним матеріалом натиснути кнопку «Розпочати тестування» і при готовності кнопку «Почати»;

e) Виконати запропоновані завдання з урахуванням автоматично згенерованого параметра α і ввести отримані відповіді у відповідні поля (рис. 1). Якщо практична робота виконана не в комп’ютерній системі параметр α призначається викладачем (наприклад номер у списку або дві останні цифри залікової книжки).

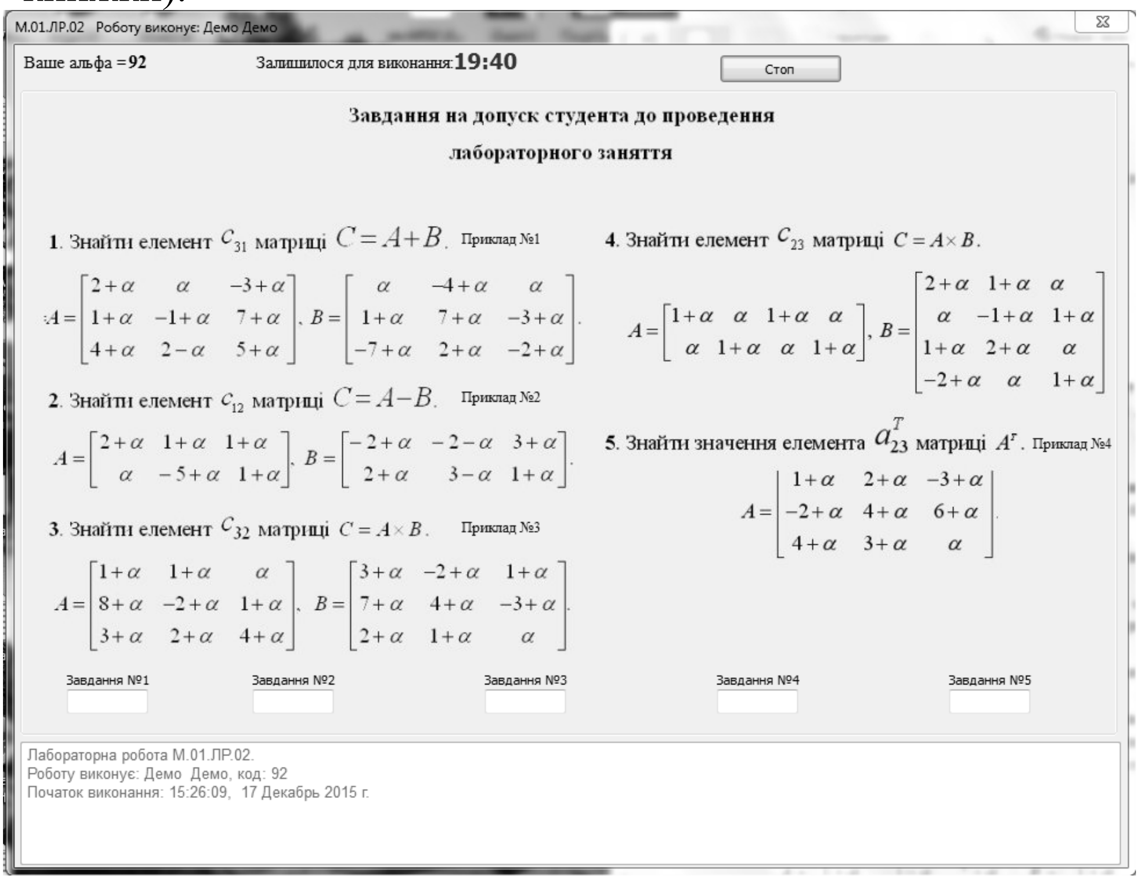


Рис.1 Вікно для проходження допуску до практичної роботи.

1. Знайти елемент c_{31} матриці $C = A + B$.

$$A = \begin{bmatrix} 2+\alpha & \alpha & -3+\alpha \\ 1+\alpha & -1+\alpha & 7+\alpha \\ 4+\alpha & 2-\alpha & 5+\alpha \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} \alpha & -4+\alpha & \alpha \\ 1+\alpha & 7+\alpha & -3+\alpha \\ -7+\alpha & 2+\alpha & -2+\alpha \end{bmatrix}.$$

2. Знайти елемент c_{12} матриці $C = A - B$.

$$A = \begin{bmatrix} 2+\alpha & 1+\alpha & 1+\alpha \\ \alpha & -5+\alpha & 1+\alpha \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} -2+\alpha & -2-\alpha & 3+\alpha \\ 2+\alpha & 3-\alpha & 1+\alpha \end{bmatrix}.$$

3. Знайти елемент c_{32} матриці $C = A \times B$.

$$A = \begin{bmatrix} 1+\alpha & 1+\alpha & \alpha \\ 8+\alpha & -2+\alpha & 1+\alpha \\ 3+\alpha & 2+\alpha & 4+\alpha \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 3+\alpha & -2+\alpha & 1+\alpha \\ 7+\alpha & 4+\alpha & -3+\alpha \\ 2+\alpha & 1+\alpha & \alpha \end{bmatrix}.$$

4. Знайти елемент c_{23} матриці $C = A \times B$.

$$A = \begin{bmatrix} 1+\alpha & \alpha & 1+\alpha & \alpha \\ \alpha & 1+\alpha & \alpha & 1+\alpha \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 2+\alpha & 1+\alpha & \alpha \\ \alpha & -1+\alpha & 1+\alpha \\ 1+\alpha & 2+\alpha & \alpha \\ -2+\alpha & \alpha & 1+\alpha \end{bmatrix}.$$

5. Знайти значення елемента a_{23}^T матриці A^T.

$$A = \begin{bmatrix} 1+\alpha & 2+\alpha & -3+\alpha \\ -2+\alpha & 4+\alpha & 6+\alpha \\ 4+\alpha & 3+\alpha & \alpha \end{bmatrix}.$$

3. Приклад виконання завдання на допуск студента до практичних занять

1. Знайти елемент c_{31} матриці $C = A + B$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -3 \\ -1 & 5 & 4 \\ 8 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 9 & -11 \\ 3 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Розв'язання:

$$c_{31} = a_{31} + b_{31};$$

$$c_{31} = 8 + 1 = 9.$$

Відповідь: $c_{31} = 9$.

2. Знайти елемент c_{12} матриці $C = A - B$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 9 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 8 \\ 0 & 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

Розв'язання:

$$c_{12} = a_{12} - b_{12};$$
$$c_{12} = 0 - (-2) = 2.$$

Відповідь: $c_{12} = 2$**.**

3. Знайти елемент c_{32} матриці $C = A \times B$.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Розв'язання:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj};$$
$$i = 1,2,...,m;$$
$$j = 1,2,...,k.$$

В нашому випадку $c_{32} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32}$, а отже

$$c_{32} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 5.$$

Відповідь: $c_{32} = 5$**.**

4. Знайти елемент c_{21} матриці $C = A \times B$

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & -2 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язання:

Аналогічно до попередньої задачі

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} + a_{24}b_{41}$$
$$c_{21} = 4 \cdot 2 + 7 \cdot 7 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot (-2) = 55.$$

Відповідь: $c_{21} = 55$**.**

5. Знайти значення елемента a_{23}^T матриці A^T.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -3 \\ 3 & 5 & -2 \\ 1 & 9 & -9 \end{bmatrix}$$

Розв'язання:

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & 9 \\ -3 & -2 & -9 \end{bmatrix};$$

$$a_{23}^T = 9.$$

Відповідь: $a_{23}^T = 9$.

4. Порядок виконання завдань і збереження результатів на сервері

a) Перехід до виконання основної частини практичної роботи виконується автоматично системою за умови успішного проходження допуску;

b) У відповідні поля ввести результати розв'язання задач і натиснути кнопку «Завершити тест достроково» для збереження результатів роботи. Якщо час, відведений на виконання, закінчився – система блокується. У будь-якому випадку комп'ютерна система відобразить оцінку виконаної роботи.

1. Знайти матрицю $C = 3A + B$ та ввести суму її елементів.

$$A = \begin{bmatrix} -3+\alpha & 2+\alpha & 7+\alpha \\ 1+\alpha & \alpha & \alpha \\ 5+\alpha & 4+\alpha & -6+\alpha \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & 1+\alpha \\ 2+\alpha & 4+\alpha & 1+\alpha \\ 3+\alpha & 2+\alpha & 9+\alpha \end{bmatrix}.$$

2. Знайти матрицю $C = A - 2B$ та ввести суму її елементів.

$$A = \begin{bmatrix} 2+\alpha & 1+\alpha & 1+\alpha \\ 4+\alpha & -1+2\alpha & 3+\alpha \\ 8+\alpha & -3+\alpha & 6+3\alpha \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 3+\alpha & -9+\alpha & 4+\alpha \\ \alpha & 4+\alpha & -2+\alpha \\ -4+\alpha & 14+\alpha & -6+\alpha \end{bmatrix}.$$

3. Знайти матрицю $C = A \times B$ та ввести суму її елементів.

$$A = \begin{bmatrix} -1+\alpha & 3+\alpha & 1+\alpha & 12+\alpha \\ 8+\alpha & 4+\alpha & -6+\alpha & 1+\alpha \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 2+\alpha & 5+\alpha & \alpha \\ \alpha & -1+\alpha & 4+\alpha \\ 3+\alpha & 2+\alpha & \alpha \\ -2+\alpha & \alpha & 7+\alpha \end{bmatrix}$$

4. Знайти матрицю $C = A \times B$ та ввести суму її елементів.

$$A=\begin{bmatrix}1{,}5+\alpha & -4{,}5+\alpha & 2+\alpha\\ \alpha & 2+\alpha & -1+\alpha\\ -2+\alpha & 7+\alpha & -3+\alpha\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}7+\alpha\\ 1+\alpha\\ -2+\alpha\end{bmatrix}.$$

5. Знайти матрицю $C = A^T \times B^T$ та ввести суму її елементів.

$$A=\begin{bmatrix}3+\alpha & \alpha & 2+\alpha\\ 8+\alpha & -4+\alpha & 7+\alpha\\ 9+\alpha & -1+\alpha & 1+\alpha\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-2+\alpha & 2+\alpha & 5+\alpha\\ \alpha & 1+\alpha & 3+\alpha\\ -3+\alpha & 6+\alpha & 2+\alpha\end{bmatrix}.$$

5. Приклади розв'язання задач та вправ до самостійної роботи студента на практичному занятті

1. Знайти матрицю $C = 3A + B$ та ввести суму її елементів.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -3 & -1\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & -3 & -1\\ 3 & 2 & 2\end{bmatrix}.$$

Розв'язання:

$$C=3\cdot\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -3 & -1\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & -3 & -1\\ 3 & 2 & 2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}3 & 6 & 3\\ 6 & -9 & -3\\ 9 & 3 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & -3 & -1\\ 3 & 2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 7 & 6\\ 8 & -12 & -4\\ 12 & 5 & 8\end{bmatrix}.$$

Відповідь: $C=\begin{bmatrix}4 & 7 & 6\\ 8 & -12 & -4\\ 12 & 5 & 8\end{bmatrix}$, сума елементів матриці С дорівнює 34.

2. Знайти матрицю $C = A - 2B$ та ввести суму її елементів.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 1\\ 1 & -4 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2 & -1 & -2\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}.$$

Розв'язання:

$$C=\begin{bmatrix}2 & 4 & 1\\ 1 & -4 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}2 & -1 & -2\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 4 & 1\\ 1 & -4 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & -2 & -4\\ 2 & 4 & 0\\ 0 & 4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 6 & 5\\ -1 & -8 & 0\\ 3 & -2 & -1\end{bmatrix}.$$

Відповідь: $C=\begin{bmatrix}-2 & 6 & 5\\ -1 & -8 & 0\\ 3 & -2 & -1\end{bmatrix}$, сума елементів матриці C дорівнює 0.

3. Знайти матрицю $C = A\times B$ та ввести суму її елементів

$$A=\begin{bmatrix}4 & 1 & 0 & 2\\ -2 & 0 & 3 & 1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}3 & 2 & -2\\ 3 & 0 & 4\\ 2 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

Розв'язання:

$$C=\begin{bmatrix}4 & 1 & 0 & 2\\ -2 & 0 & 3 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3 & 2 & -2\\ 3 & 0 & 4\\ 2 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 3\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}12+3+0-4 & 8+0+0+0 & -8+4+0+6\\ -6+0+6-2 & -4+0+3+0 & 4+0+0+3\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}11 & 8 & 2\\ -2 & -1 & 7\end{bmatrix}.$$

Відповідь: $C=\begin{bmatrix}11 & 8 & 2\\ -2 & -1 & 7\end{bmatrix}$, сума елементів матриці C дорівнює 25.

4. Знайти матрицю $C = A\times B$ та ввести суму її елементів.

$$A=\begin{bmatrix}4 & 0 & 5\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2\\ -2\\ -3\end{bmatrix}$$

Розв'язання:

$$C=\begin{bmatrix}4 & 0 & 5\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\ -2\\ -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\cdot 2+0\cdot(-2)+5\cdot(-3)\\ 2\cdot 2+1\cdot(-2)+2\cdot(-3)\\ 1\cdot 2+3\cdot(-2)+0\cdot(-3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7\\ -4\\ -4\end{bmatrix}.$$

Відповідь: $C=\begin{bmatrix}-7\\ -4\\ -4\end{bmatrix}$ сума елементів матриці С дорівнює -15.

5. Знайти матрицю $C = A^T \times B^T$ та ввести суму її елементів.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ -1 & 4 & 2\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2 & -1 & -4\\ 1 & -3 & 0\\ 1 & 2 & -2\end{bmatrix}$$

Розв'язання:

$$A^T=\begin{bmatrix}1 & -1 & -2\\ 3 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix},\ B^T=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ -1 & -3 & 2\\ -4 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

$$C=A^T\times B^T=\begin{bmatrix}1 & -1 & -2\\ 3 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ -1 & -3 & 2\\ -4 & 0 & -2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1\cdot 2+(-1)(-1)+(-2)(-4) & 1\cdot 1+(-1)(-3)+(-2)\cdot 0 & 1\cdot 1+(-1)\cdot 2+(-2)(-2)\\ 3\cdot 2+4\cdot(-1)+0\cdot(-4) & 3\cdot 1+4\cdot(-3)+0\cdot 0 & 3\cdot 1+4\cdot 2+0\cdot(-2)\\ 0\cdot 2+2\cdot(-1)+1\cdot(-4) & 0\cdot 1+2\cdot(-3)+1\cdot 0 & 0\cdot 1+2\cdot 2+1\cdot(-2)\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}11 & 4 & 3\\ 2 & -9 & 11\\ -6 & -6 & 2\end{bmatrix}.$$

Відповідь: $C=\begin{bmatrix}11 & 4 & 3\\ 2 & -9 & 11\\ -6 & -6 & 2\end{bmatrix}$, сума елементів матриці С дорівнює 12.

6. Питання для самоконтролю

1. Що називається матрицею?

2. Що називається елементом матриці?

3. Як позначаються матриці?

4. Назвіть основні математичні операції з матрицями. Поясніть їх.

5. Назвіть основні властивості математичних операцій з матрицями.

6. Яка матриця називається транспонованою до даної?

7. Які матриці не можна перемножити?

Практична робота 2. Визначники. Обчислення визначників.

1. Основні поняття та теореми

1) Нехай задана квадратна таблиця із чотирьох чисел a_1, a_2, b_1, b_2 (матриця А):

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

Число $a_1b_2 - a_2b_1$ називається визначником (детермінантом) другого порядку, відповідно до (1). Даний визначник позначається символами

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \ \Delta \text{ або } \det A$$

Звідси маємо :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1. \qquad (2)$$

Числа a_1, a_2, b_1, b_2 називаються елементами визначника.

2) Нехай задана квадратна таблиця із дев'яти чисел $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Визначником (детермінантом) третього порядку, відповідно до (3), називається число, що позначається символом:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

і визначається рівністю

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1b_3c_2. \qquad (4)$$

Числа $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ називаються елементами визначника.

Елементи, розміщені по вертикалі, називаються стовпцями, а по горизонталі – рядками визначника; елементи a_1, b_2, c_3 утворюють головну діагональ визначника, а елементи a_3, b_2, c_1 – бічну діагональ.

Для обчислення визначника III порядку зручна схема, запропонована на рис 1.

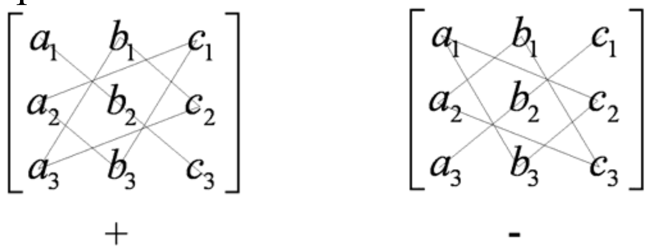


Рис.1

Добуток елементів головної діагоналі та елементів, що утворюють трикутники з основами, паралельними головній діагоналі, беруться зі знаком плюс, а добуток елементів бічної діагоналі та елементів, що лежать у вершинах трикутників з основами, паралельними бічній діагоналі, – зі знаком мінус. Величина визначника дорівнює алгебраїчній сумі одержаних шести добутків. Дана схема дістала назву «правило трикутника».

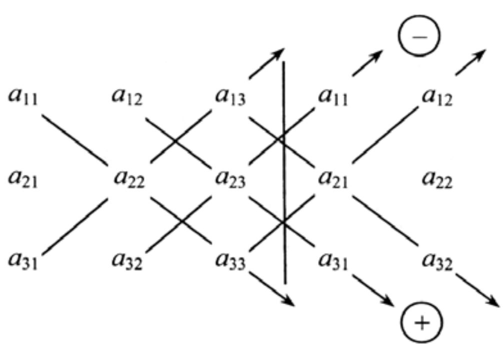


Рис. 2

Для обчислення визначників III порядку існує правило Саррюса, що запропоноване на рис 2.

Якщо до таблиці визначника дописати справа перший і другий стовпці, то при обчисленні визначника добуток елементів, розміщених на головній і паралельних їй діагоналях, потрібно взяти зі знаком плюс, а добуток елементів, розміщених на бічній і паралельних їй діагоналях, – зі знаком мінус. Величина визначника дорівнює алгебраїчній сумі одержаних шести добутків.

3) Найважливіші властивості визначників.

1. Властивість антисиметрії

Якщо у визначнику поміняти місцями будь-які два стовпці, то абсолютна величина визначника не зміниться, а знак його зміниться на протилежний:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

2. Властивість однорідності

Якщо елементи одного з рядків (стовпців) визначника помножити на деяке число λ, то визначник помножиться на λ.

$$\begin{vmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 & \lambda c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

3. Властивість лінійності

Якщо до одного з рядків (стовпців) визначника додати інший його рядок (стовпець), помножений на деяке число λ, то визначник не зміниться.

$$\begin{vmatrix} a_1 + \lambda b_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + \lambda b_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + \lambda b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

4. Розклад визначника за елементами рядка (стовпця)

Визначник дорівнює сумі добутків усіх елементів будь-якого рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення.

$$\det A = a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3;$$

$$\det A = a_1 A_1 + b_2 B_2 + c_3 C_3.$$

Для визначників n – ого порядку маємо:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = \delta_{ij} \Delta;$$

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = \delta_{ij} \Delta,$$

де

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}.$$

2. Порядок виконання допуску до практичної роботи

a) Запустити систему за допомогою файла «КВМ.exe»;
b) Перейти у розділ «Практичні роботи»;
c) Обрати практичну роботу натиснувши на гіперпосилання «Визначники. Обчислення визначників»;
d) Після ознайомлення з теоретичним матеріалом натиснути кнопку «Розпочати тестування» і при готовності кнопку «Почати»;
e) Виконати запропоновані завдання з урахуванням автоматично згенерованого параметра α і ввести отримані відповіді у відповідні поля (рис. 3). Якщо практична робота виконана не в комп'ютерній системі параметр α призначається викладачем (наприклад номер у списку або дві останні цифри залікової книжки).

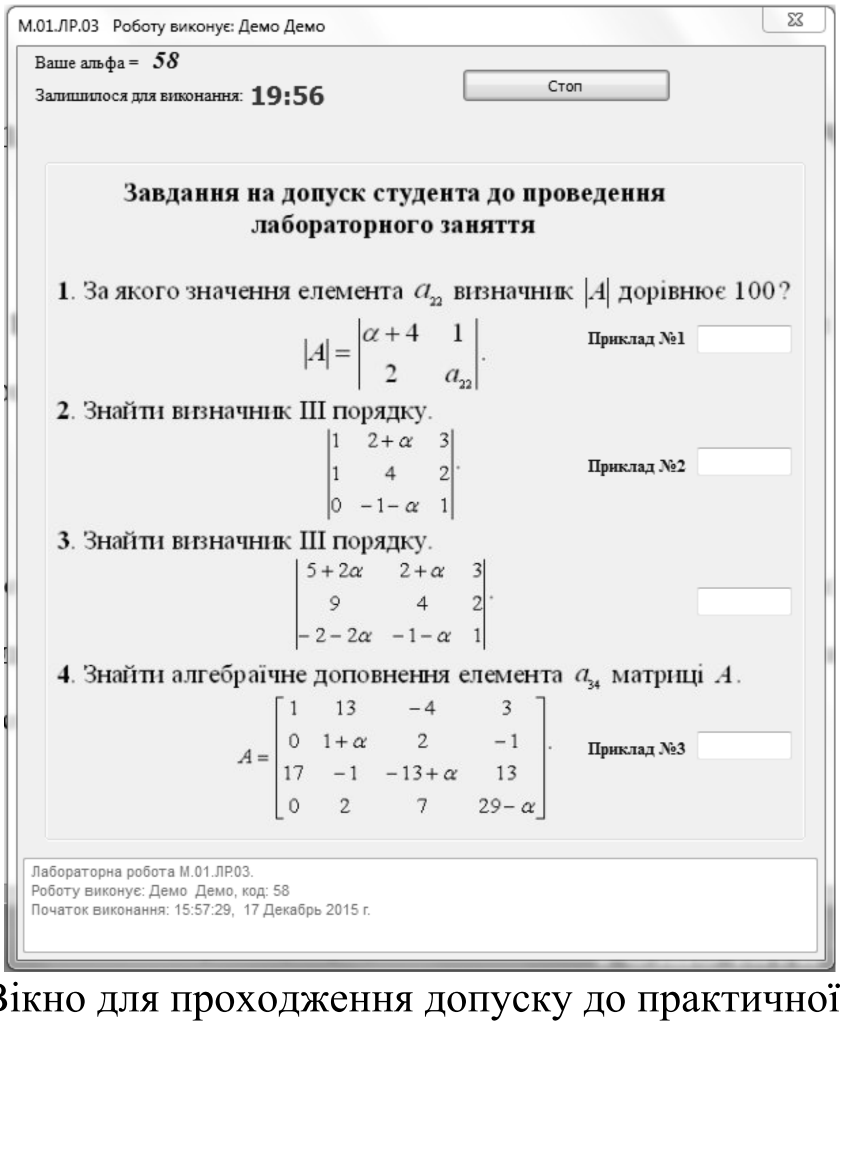


Рис. 3. Вікно для проходження допуску до практичної роботи.

1. За якого значення елемента a_{22} визначник $|A|$ дорівнює 100?

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha + 4 & 1 \\ 2 & a_{22} \end{vmatrix}.$$

2. Знайти визначник III порядку.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2+\alpha & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1-\alpha & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Знайти визначник III порядку.

$$\begin{vmatrix} 5+2\alpha & 2+\alpha & 3 \\ 9 & 4 & 2 \\ -2-2\alpha & -1-\alpha & 1 \end{vmatrix}.$$

4. Знайти алгебраїчне доповнення елемента a_{34} матриці A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 13 & -4 & 3 \\ 0 & 1+\alpha & 2 & -1 \\ 17 & -1 & -13+\alpha & 13 \\ 0 & 2 & 7 & 29-\alpha \end{bmatrix}.$$

3. Приклад виконання завдання на допуск студента до практичного заняття

1. За якого значення елемента a_{22} визначник $|A|$ дорівнює 100 ?

$$|A| = \begin{vmatrix} -35 & 2 \\ 7 & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Розв'язання: Використовуючи (2), дістанемо

$$-35a_{22} - 7 \cdot 2 = 100,$$

$$-35a_{22} - 14 = 100,$$

$$-35a_{22} = 114,$$

$$a_{22} \approx -3{,}257.$$

Відповідь: $a_{22} \approx -3{,}257$.

2. Знайти визначник III порядку.

$$\begin{vmatrix} 1 & -18 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 19 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання: Використовуючи властивості визначників отримаємо:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -18 & 3\\ 1 & 4 & 2\\ 0 & 19 & 1\end{vmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\text{Віднімаємо від II рядка I рядок}\\ \text{і отримуємо стовпець нулів}\\ \text{окрім першого елемента}\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}1 & -18 & 3\\ 0 & 22 & -1\\ 0 & 19 & 1\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}22 & -1\\ 19 & 1\end{vmatrix}=22+19=41.$$

Відповідь: $\Delta=41$.

3. Знайти визначник III порядку

$$\begin{vmatrix}-1 & -1 & 3\\ 9 & 4 & 2\\ 4 & 2 & 1\end{vmatrix}.$$

Розв'язання: Використовуючи властивості визначників, отримаємо:

$$\Delta=\begin{vmatrix}-1 & -1 & 3\\ 9 & 4 & 2\\ 4 & 2 & 1\end{vmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\text{Аналогічно до дій, виконаних у}\\ \text{завданні №2,}\\ \text{I р.-3}\cdot\text{III р.}\\ \text{II р. -2}\cdot\text{ III р.}\end{matrix}\right\}\Rightarrow.$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}-13 & -7 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 4 & 2 & 1\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}13 & -7\\ 1 & 0\end{vmatrix}=7$$

Відповідь: $\Delta=7$.

4. Знайти алгебраїчне доповнення елемента a_{34} матриці A

$$A=\begin{bmatrix}1 & 13 & -4 & 3\\ 0 & -9 & 2 & -1\\ 17 & -1 & -23 & 13\\ 0 & 2 & 7 & 39\end{bmatrix}.$$

Розв'язання: Використовуючи властивості визначників і означення алгебраїчного доповнення, отримаємо

$$A_{34}=\left(-1\right)^{3+4}\cdot M_{34}=-\begin{vmatrix}1 & 13 & -4 & 3\\ 0 & -9 & 2 & -1\\ 17 & -1 & -23 & 13\\ 0 & 2 & 7 & 39\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & 13 & -4\\ 0 & -9 & 2\\ 0 & 2 & 7\end{vmatrix}=$$

$$=-\begin{vmatrix}-9 & 2\\ 2 & 7\end{vmatrix}=-\left(-63-4\right)=67.$$

Відповідь: $A_{34}=67$.

4. Порядок виконання завдань і збереження результатів на сервері

a) Перехід до виконання основної частини практичної роботи виконується автоматично системою за умови успішного проходження допуску;

b) У відповідні поля ввести результати розв'язання задач і натиснути кнопку «Завершити тест достроково» для збереження результатів роботи. Якщо час, відведений на виконання, закінчився – система блокується. У будь-якому випадку комп'ютерна система відобразить оцінку виконаної роботи.

1. Знайти визначник другого порядку

$$\begin{vmatrix}3+\alpha & 6\\ 5 & 10-\alpha\end{vmatrix}.$$

2. Знайти визначник третього порядку

$$\begin{vmatrix}1+\alpha & 2 & 4\\ -2 & 1-\alpha & 3\\ 3 & -4 & 2-\alpha\end{vmatrix}.$$

3. Розв'язати рівняння

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & x\\ 4 & 5+\alpha & -1\\ 2 & -1 & 5-\alpha\end{vmatrix}=0.$$

4. Знайти визначник IV порядку

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1+\alpha \\ 1 & 2 & 3+\alpha & 4 \\ 1 & 3+\alpha & 6 & 10 \\ 1+\alpha & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}.$$

5. Приклади розв'язання задач та вправ до самостійної роботи студента на практичному занятті

1. Знайти визначник другого порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} -17 & 6 \\ 5 & 30 \end{vmatrix} - ?$$

Розв'язання: Використовуючи (2), отримаємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} -17 & 6 \\ 5 & 30 \end{vmatrix} = -17 \cdot 30 - 5 \cdot 6 = -510 - 30 = -540.$$

Відповідь: $\Delta = -540$.

2. Знайти визначник третього порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} -5 & 2 & 4 \\ -2 & 7 & -3 \\ 3 & -4 & 8 \end{vmatrix} - ?.$$

Розв'язання: скористаємося правилом Саррюса для обчислення визначника.

$$\Delta = \left|\begin{matrix} -5 & 2 & 4 \\ -2 & 7 & -3 \\ 3 & -4 & 8 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -5 & 2 \\ -2 & 7 \\ 3 & -4 \end{matrix} =$$

$$= -5 \cdot 7 \cdot 8 + 2 \cdot (-3) \cdot 3 + 4 \cdot (-2) \cdot (-4) - 4 \cdot 7 \cdot 3 - (-5)(-3)(-4) - 2 \cdot (-2) \cdot 8 =$$

$$= -280 - 18 + 32 - 84 + 60 + 32 = -258.$$

Відповідь: $\Delta = -258$.

3. Розв'язати рівняння

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 15 \end{vmatrix} = 0.$$

Розв'язання: використовуючи розклад визначника за елементами рядка, отримаємо

$$1\begin{vmatrix}-5 & -1\\ -1 & 15\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}4 & -1\\ 2 & 15\end{vmatrix}+x\begin{vmatrix}4 & -5\\ 2 & -1\end{vmatrix}=0;$$

$$1(-75-1)-3(60+2)+x(-4+10)=0;$$

$$x=\frac{262}{6}\approx 43,667.$$

Відповідь: $x=\frac{262}{6}\approx 43{,}667$.

4. Знайти визначник IV порядку

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & -4\\ 1 & 2 & -2 & 4\\ 1 & -2 & 6 & 10\\ -4 & 4 & 10 & 20\end{vmatrix}.$$

Розв’язання:

При обчисленні визначника замість правила Саррюса скористаємось способом зниження порядку. Якщо скупчити нулі у деякому рядку (чи стовпці) визначника, то, розклавши його за елементами такого рядка (чи стовпця) (у якому всі елементи, окрім одного, нульові обчислення визначника n (IV) порядку зведеться до обчислення визначника $n-1$ (III) порядку. Так знаходимо

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & -4\\ 1 & 2 & -2 & 4\\ 1 & -2 & 6 & 10\\ -4 & 4 & 10 & 20\end{vmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{II р. - I р.}\\ \text{III р. - I р.}\\ \text{IV р. + 4I р.}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & -4\\ 0 & 1 & -3 & 8\\ 0 & -3 & 5 & 14\\ 0 & 8 & 14 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=1\begin{vmatrix}1 & -3 & 8\\ -3 & 5 & 14\\ 8 & 14 & 4\end{vmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{II р. + 3I р.}\\ \text{III р. - 8I р.}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{vmatrix}1 & -3 & 8\\ 0 & -4 & 38\\ 0 & 38 & -60\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}-4 & 38\\ 38 & -60\end{vmatrix}=$$

$$=240-1444=-1204.$$

Відповідь: $\det A=-1204$.

6. Питання для самоконтролю

1. Що називається визначником матриці?

2. За яким правилом обчислюється визначник другого, третього порядків?

3. Назвіть найважливіші властивості визначників.

4. Що таке мінор?

5. Як знайти алгебраїчне доповнення?

6. Чому дорівнює визначник якщо матриця вироджена?

7. До якої матриці не можна знайти визначник?

8. Скільки ви знаєте способів обчислення визначника? Назвіть їх.

Практична робота 3. Обернена матриця та її знаходження.

1. Основні поняття та теореми

1) Якщо дві матриці A і B – квадратні одного і того ж порядку, а їх добуток $A \cdot B$ – одинична матриця

$$AB = E,$$

то матриця B називається матрицею оберненою до A і позначається символом A^{-1}:

$$AA^{-1} = E. \tag{1}$$

Потрібно мати на увазі, що квадратна матриця A і їй обернена A^{-1} комутативні, тобто

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

2) Для того, щоб квадратна матриця A мала обернену, необхідно і достатньо, щоб визначник $|A|$ матриці A не дорівнював нулю:

$$|A| \neq 0, \tag{2}$$

тобто матриця A не повинна бути особливою (виродженою).

3) Якщо $\tilde{A}$ – союзна (приєднана) матриця для матриці A, то обернену матрицю знаходимо за формулою

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{|A|} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}. \tag{3}$$

4) Для одержання приєднаної матриці необхідно із алгебраїчних доповнень усіх елементів матриці A скласти нову матрицю і транспонувати її. Союзну матрицю позначають символом $\tilde{A}$ і записують так :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \ldots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \ldots A_{n2} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} \ldots A_{nn} \end{bmatrix} \tag{4}$$

5) Алгебраїчні доповнення A_{ij} визначаються через мінори за формулою

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \qquad (5)$$

2. Порядок виконання допуску до практичної роботи

a) Запустити систему за допомогою файла «КВМ.exe»;
b) Перейти у розділ «Практичні роботи»;
c) Обрати практичну роботу натиснувши на гіперпосилання «Обернена матриця та її знаходження»;
d) Після ознайомлення з теоретичним матеріалом натиснути кнопку «Розпочати тестування» і при готовності кнопку «Почати»;
e) Виконати запропоновані завдання з урахуванням автоматично згенерованого параметра α і ввести отримані відповіді у відповідні поля (рис. 1). Якщо практична робота виконана не в комп'ютерній системі параметр α призначається викладачем (наприклад номер у списку або дві останні цифри залікової книжки).

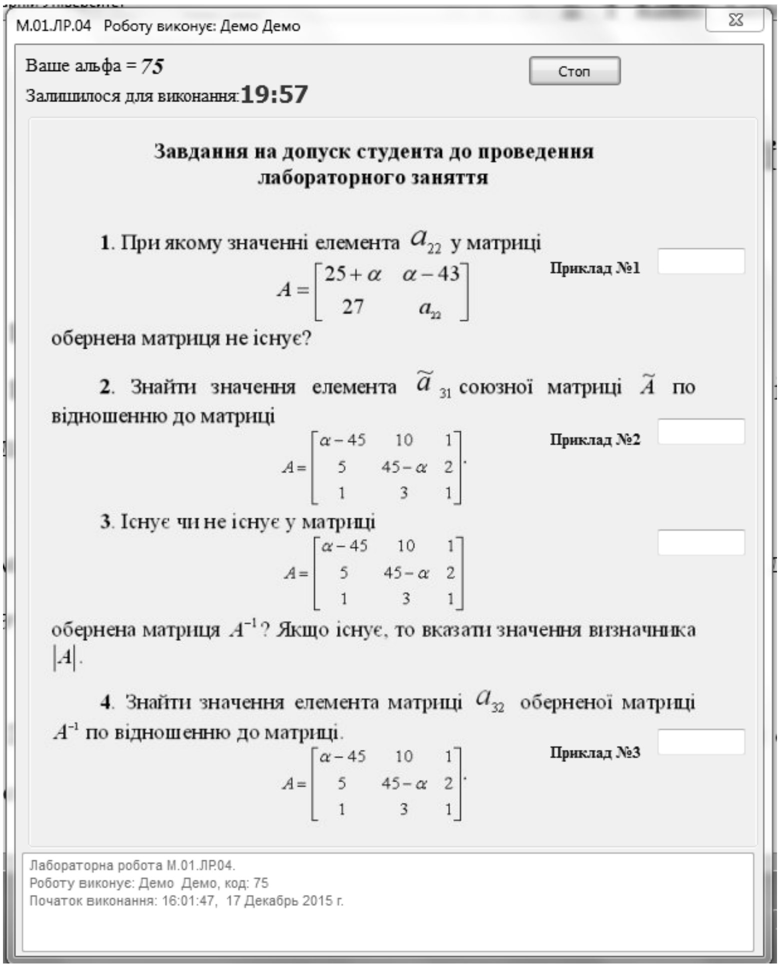


Рис. 1. Вікно для проходження допуску до практичної роботи.

1. При якому значенні елемента a_{22} у матриці.

$$A=\begin{bmatrix} 25+\alpha & \alpha-43 \\ 27 & a_{22} \end{bmatrix}$$

обернена матриця не існує?

2. Знайти значення елемента $\widetilde{a}_{31}$ союзної матриці $\widetilde{A}$ по відношенню до матриці

$$A=\begin{bmatrix} \alpha-45 & 10 & 1 \\ 5 & 45-\alpha & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Існує чи не існує у матриці

$$A=\begin{bmatrix} \alpha-45 & 10 & 1 \\ 5 & 45-\alpha & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

обернена матриця A^{-1}? Якщо існує, то вказати значення визначника $|A|$.

4. Знайти значення елемента матриці a_{32} оберненої матриці A^{-1} по відношенню до матриці.

$$A=\begin{bmatrix} \alpha-45 & 10 & 1 \\ 5 & 45-\alpha & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Приклад виконання завдання на допуск студента до практичного заняття

1.При якому значенні елемента a_{22} у матриці

$$A=\begin{bmatrix} 11 & 12 \\ -3 & a_{22} \end{bmatrix}$$

обернена матриця не існує?

Розв'язання:

Для того, щоб у матриці не існувала обернена матриця необхідно і достатньо, щоб вона була вироджена, тобто щоб визначник матриці дорівнював нулю.

Обчислюємо визначник матриці A:

$$\begin{vmatrix} 11 & 12 \\ -3 & a_{22} \end{vmatrix} = 11a_{22} + 36\,;$$

$$11a_{22} + 36 = 0\,;$$

$$a_{22} = -\frac{36}{11} \approx -3{,}273.$$

Відповідь: $a_{22} \approx -3{,}273$.

2. Знайти значення $\tilde{a}_{31}$ союзної матриці $\tilde{A}$ по відношенню до матриці

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 11 & 1 \\ 14 & 9 & 13 \\ 8 & 7 & 6 \end{bmatrix}.$$

Розв'язання: Використовуючи (5), дістанемо

$$\tilde{a}_{31} = A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{2} & \cancel{11} & \cancel{1} \\ 14 & 9 & \cancel{13} \\ 8 & 7 & \cancel{6} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 14 & 9 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = 14 \cdot 7 - 9 \cdot 8 = 26;$$

Відповідь: $\tilde{a}_{31} = 26$.

3. Існує чи не існує у матриці

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 11 & 1 \\ 14 & 9 & 13 \\ 8 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

обернена матриця A^{-1} ? Якщо існує, то вкажіть значення визначника $|A|$

Розв'язання: Згідно з (2), для того, щоб відповісти на поставлене запитання, необхідно знайти визначник матриці A. Обчислимо визначник матриці A за правилом Саррюса

$$|A| = \left|\begin{matrix} 2 & 11 & 1 \\ 14 & 9 & 13 \\ 8 & 7 & 6 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & 11 \\ 14 & 9 \\ 8 & 7 \end{matrix} =$$

$$= 2 \cdot 9 \cdot 6 + 11 \cdot 13 \cdot 8 + 1 \cdot 14 \cdot 7 - 1 \cdot 9 \cdot 8 - 2 \cdot 13 \cdot 7 - 11 \cdot 14 \cdot 6 = 172\,.$$

Відповідь: Оскільки $|A| \neq 0$, то у матриці A існує обернена матриця A^{-1}.

4. Знайти значення елемента a_{32}^{-1} оберненої матриці A^{-1} по відношенню до матриці

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 11 & 1 \\ 14 & 9 & 13 \\ 8 & 7 & 6 \end{bmatrix}.$$

Розв'язання: Використовуючи (5), отримаємо

$$|A| = 172,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 11 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = -(14 - 88) = 74.$$

Згідно з (3) $$a_{32}^{-1} = \frac{A_{23}}{|A|} = \frac{74}{172} \approx 0{,}43.$$

Відповідь: $a_{32}^{-1} \approx 0,43$.

4. Порядок виконання завдань і збереження результатів на сервері

a) Перехід до виконання основної частини практичної роботи виконується автоматично системою за умови успішного проходження допуску;
b) У відповідні поля ввести результати розв'язання задач і натиснути кнопку «Завершити тест достроково» для збереження результатів роботи. Якщо час, відведений на виконання, закінчився – система блокується. У будь-якому випадку комп'ютерна система відобразить оцінку виконаної роботи.

1. Знайти матрицю обернену до матриці?

$$A = \begin{bmatrix} 65 - \alpha & 25 \\ 20 & 7 \end{bmatrix}$$

і ввести суму її коефіцієнтів.

2. Знайти матрицю обернену до матриці

$$A = \begin{bmatrix} \alpha - 50 & 1 & 3 \\ 2 & \alpha & 2 \\ \alpha & 2 & \alpha - 45 \end{bmatrix}$$

і ввести суму її коефіцієнтів.

3. Знайти матрицю обернену до матриці

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3+\alpha & 5 \\ 2+\alpha & 4+\alpha & 8+\alpha \\ 2 & 7+\alpha & 6 \end{bmatrix}$$

і ввести суму її коефіцієнтів.

5. Приклади розв'язання задач та вправ до самостійної роботи студентів на практичному занятті

1. Знайти матрицю обернену до матриці

$$A=\begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$$

і ввести суму її коефіцієнтів.

Розв'язання: Обчислимо визначник матриці A

$$|A|=\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 3 & 14 \end{vmatrix}=9\cdot 14-2\cdot 3=120.$$

На основі (3), (5) маємо $A_{11}=14;$ $A_{12}=-3;$ $A_{21}=-2;$ $A_{22}=9$, тоді

$$A^{-1}=\frac{1}{120}\begin{vmatrix} 14 & -2 \\ -3 & 9 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0,117 & -0,017 \\ -0,025 & 0,075 \end{vmatrix}.$$

Відповідь: сума коефіцієнтів оберненої матриці $S=0,117-0,025-0,017+0,075=0,15$.

2. Знайти матрицю обернену до матриці

$$A=\begin{bmatrix} 12 & 1 & 11 \\ 4 & 9 & 3 \\ 18 & -3 & 16 \end{bmatrix}.$$

Розв'язання. Обчислимо визначник матриці A

$$|A|=\begin{vmatrix} 12 & 1 & 11 \\ 4 & 9 & 3 \\ 18 & -3 & 16 \end{vmatrix}=$$

$$=12\cdot 9\cdot 16+1\cdot 3\cdot 18+11\cdot 4\cdot(-3)-18\cdot 9\cdot 4-4\cdot 1\cdot 16-12\cdot(-3)\cdot 4=-88.$$

Застосовуючи (5), обчислимо алгебраїчні доповнення матриці A

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ -3 & 16 \end{vmatrix}=144+9=153,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 18 & 16 \end{vmatrix} = -(64-54) = -10,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 18 & -3 \end{vmatrix} = -12-162 = -174,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 11 \\ -3 & 16 \end{vmatrix} = -(16-33) = -18,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 12 & 11 \\ 18 & 16 \end{vmatrix} = 192-198 = -6,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 12 & 1 \\ 18 & -3 \end{vmatrix} = -(-36-18) = 54,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 3-99 = -96,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 12 & 11 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -(36-44) = 8,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 12 & 11 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 108-4 = 104.$$

Відповідно до (4) союзна матриця має вигляд

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 153 & -49 & -96 \\ -10 & -6 & 8 \\ -174 & 54 & 104 \end{bmatrix}.$$

Підставляючи значення $\tilde{A}$ і $|A|$ у (3), отримаємо

$$A^{-1} = -\frac{1}{88} \begin{bmatrix} 153 & -49 & -96 \\ -10 & -6 & 8 \\ -174 & 54 & 104 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}739 & 0{,}557 & 1{,}091 \\ 0{,}114 & 0{,}068 & -0{,}091 \\ 1{,}977 & -0{,}614 & -1{,}182 \end{bmatrix}$$

Відповідь: сума коефіцієнтів матриці $A^{-1} = 0{,}182$.

6. Питання для самоконтролю

1. Що називається одиничною матрицею?
2. Що називається оберненою матрицею?
3. Яка необхідна і достатня умова існування оберненої матриці?

4. Яка матриця називається союзною?
5. За якими правилами знаходимо обернену матрицю?
6. Чому дорівнює добуток матриці на свою обернену?
7. Як позначається обернена матриця?

Практична робота 4. Матрична форма запису та розв'язання систем лінійних рівнянь. Формули Крамера. метод Гауса.

1. Основні поняття та теореми

Система n лінійних рівнянь з n невідомими має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3, \\ -------------------, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1}$$

Складаємо матрицю A з коефіцієнтів a_{ij} при невідомих

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\ldots & a_{3n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\ldots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

матрицю – стовпець X з невідомих та матрицю – стовпець B з вільних членів

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Враховуючи правило множення матриць та умови рівності двох матриць, систему можна записати в такому вигляді

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\dots & a_{3n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad (2)$$

або, враховуючи зроблені позначення, всю систему рівнянь (2) можна записати компактно у вигляді одного матричного рівняння

$$AX = B \qquad (3)$$

Якщо матриця A – невироджена, тобто $|A| \neq 0$, то вона має обернену матрицю A^{-1}. Перемноживши зліва обидві частини рівняння (3) на A^{-1} та, враховуючи що $A^{-1}A = E$ – одинична матриця $(E \cdot X = X)$, знаходимо стовпець невідомих X з рівності

$$X = A^{-1}B. \qquad (4)$$

Якщо визначник $|A| = \Delta$ матриці A n-ого порядку

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\dots & a_{3n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad (5)$$

не дорівнює нулю $(\Delta \neq 0)$, то система лінійних рівнянь (1) має єдиний розв’язок, який можна знайти за методом Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta};\; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta};\; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta};\dots\; x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}\;, \qquad (6)$$

де $\Delta_1 = |A_1|$ – визначник, одержаний з визначника Δ заміною елементів $a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}, \dots, a_{ni}$, i-того стовпця відповідними вільними членами $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ $(i = 1,2,3,\dots,n)$.

Якщо визначник $\Delta = 0$, а серед визначників Δ_1, Δ_2, $\Delta_3, \dots$, Δ_n є хоч один, що не дорівнює нулю, то система лінійних рівнянь (1) розв’язків не має (не сумісна).

Якщо $\Delta = 0$, а також $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \dots = \Delta_n = 0$, то система (1) або зовсім не має розв’язків, або має нескінчену множину розв’язків. У цьому випадку вияснити остаточно сумісна чи не сумісна система рівнянь (1) можна або безпосередньо, або скориставшись теоремою Кронекера – Капеллі.

Розглянемо систему m лінійних рівнянь з n невідомими $x_1,\ x_2,\ x_3,...,x_n$, що може бути записана в такому вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ------------------, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{7}$$

Складаємо матрицю A з коефіцієнтів a_{ij} при невідомих та розширену матрицю B системи лінійних рівнянь

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}... & a_{2n} \\ ---- & ---- & ---- \\ a_{m1} & a_{m2}... & a_{mn} \end{bmatrix},\ B\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ...... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ...... & a_{2n} & b_2 \\ -- & -- & -- & -- & -- \\ a_{m1} & a_{m2} & ...... & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Теорема Кронекера – Капеллі. Система лінійних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг розширеної матриці B дорівнює рангу матриці A, тобто коли $r(B) = r(A)$.

Якщо ж $r(B) \neq r(A)$, точніше $r(A) < r(B)$, система рівнянь (2) не матиме розв’язки.

Крім того, сумісна система рівнянь (2) тоді і тільки тоді має єдиний розв’язок, коли $r(B) = r(A) = n$ – числу невідомих (це може бути тільки в тому випадку, коли $m = n$).

Рангом матриці називається найвищий порядок мінора відмінного від нуля.

У лінійній алгебрі доведено, що ранг матриці дорівнює максимальному числу лінійно незалежних рядків цієї матриці (тобто рівнянь системи) чи стовпців.

Однорідною системою n лінійних рівнянь з n невідомими називається система виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = 0,, \\ ------------------, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}x_n = 0. \end{cases} \tag{8}$$

тобто система рівнянь виду (1), в яких усі вільні члени дорівнюють нулю. Очевидно, що така система завжди має нульовий розв'язок:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0, \ldots,\ x_n = 0.$$

Якщо визначник $|A| = \Delta \neq 0,$ то цей розв'язок буде єдиним.

Можна довести, що однорідна система рівнянь (8) має ненульові розв'язки в тому і тільки тому випадку, коли

$$|A| = \Delta = 0.$$

Метод Гаусса та його різновиди детально описано в літературі, тому його застосування буде пояснено при розв'язанні окремих конкретних систем лінійних рівнянь виду (1), (7), (8).

2. Порядок виконання допуску до практичної роботи

a) Запустити систему за допомогою файла «КВМ.exe»;
b) Перейти у розділ «Практичні роботи»;
c) Обрати практичну роботу натиснувши на гіперпосилання «Матрична форма запису та розв'язання систем лінійних рівнянь. Формули Крамера. метод Гауса.»;
d) Після ознайомлення з теоретичним матеріалом натиснути кнопку «Розпочати тестування» і при готовності кнопку «Почати»;
e) Виконати запропоновані завдання з урахуванням автоматично згенерованого параметра α і ввести отримані відповіді у відповідні поля (рис. 1). Якщо практична робота виконана не в комп'ютерній системі параметр α призначається викладачем (наприклад номер у списку або дві останні цифри залікової книжки).

1. Користуючись формулами Крамера, знайти значення невідомого $\boldsymbol{x_1}$ системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} (\alpha - 65)x_1 + 2(\alpha - 40)x_2 = 2, \\ -3x_1 - 4x_2 = 4. \end{cases}$$

2. Знайти значення невідомого x_2 системи лінійних рівнянь з розширеною матрицею

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & (5+\alpha) & -3 \\ 0 & -1 & (\alpha - 40) & 2 \\ 0 & 0 & 1 & (\alpha - 45) \end{array}\right].$$

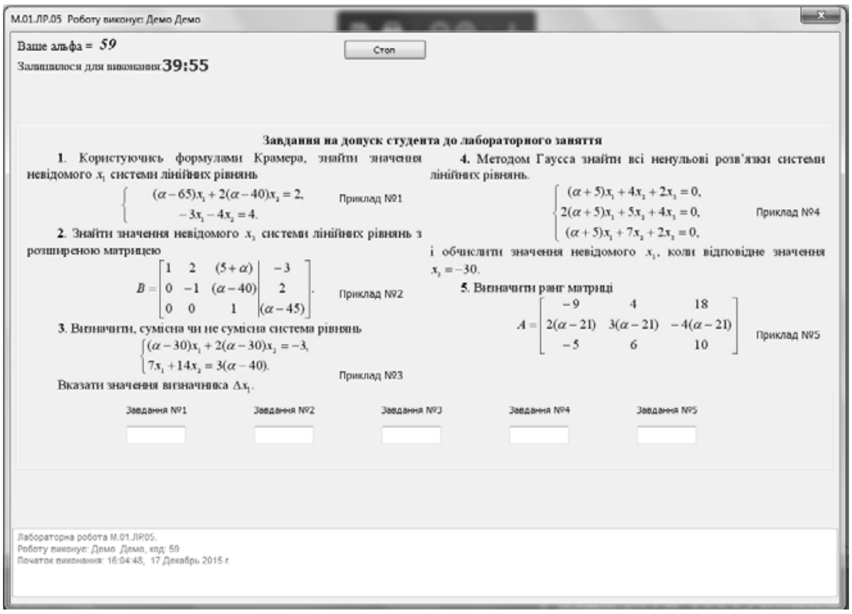


Рис. 1. Вікно для проходження допуску до практичної роботи.

3. Визначити, сумісна чи не сумісна система рівнянь

$$\begin{cases}(\alpha-30)x_1+2(\alpha-30)x_2=-3,\\ 7x_1+14x_2=3(\alpha-40).\end{cases}$$

Вказати значення визначника Δx_1.

4. Методом Гаусса знайти всі ненульові розв’язки системи лінійних рівнянь.

$$\begin{cases}(\alpha+5)x_1+4x_2+2x_3=0,\\ 2(\alpha+5)x_1+5x_2+4x_3=0,\\ (\alpha+5)x_1+7x_2+2x_3=0,\end{cases}$$

і обчислити значення невідомого x_1, коли відповідне значення $x_3=-30$.

5. Визначити ранг матриці

$$A=\begin{bmatrix}-9 & 4 & 18\\ 2(\alpha-21) & 3(\alpha-21) & -4(\alpha-21)\\ -5 & 6 & 10\end{bmatrix}.$$

3. Приклад виконання завдання на допуск студента до практичного заняття

1. Користуючись формулами Крамера, знайти значення невідомого x_1 системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases}19x_1+30x_2=2,\\ -5x_1-4x_2=3.\end{cases}$$

Розв’язання: Складемо матрицю A з коефіцієнтів при невідомих

$$A=\begin{bmatrix}19 & 30\\ -5 & -4\end{bmatrix}.$$

Її визначник

$$\Delta=|A|=\begin{vmatrix}19 & 30\\ -5 & -4\end{vmatrix}=-76+150=74.$$

Оскільки $\Delta=74\neq 0$, то значення невідомого x_1 можна знайти, скориставшись формулами (6)

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\ \text{де}\quad \Delta_1=|A|=\begin{vmatrix}2 & 30\\ 3 & -4\end{vmatrix}=-8-90=-98.$$

Тому $x_1=\dfrac{-98}{74}=-\dfrac{49}{37}$, або $x_1\approx -1{,}3243$.

Відповідь: $x_1\approx -1{,}3243$.

2. Знайти значення невідомого x_2 системи лінійних рівнянь з розширеною матрицею

$$B=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -4 & 2\\ 0 & -1 & 21 & -3\\ 0 & 0 & 1 & -32\end{array}\right].$$

Розв’язання: Систему лінійних рівнянь з даною розширеною матрицею B можна записати в такому вигляді

$$\begin{cases}x_1+2x_2-\ 4x_3\ =3,\\ \qquad -x_2+21x_3=-3,\\ \qquad\qquad\quad x_3=-32.\end{cases}$$

Звідки

$$x_3=-32,\quad x_2=21x_3+3=21(-32)+3=-669.$$

Відповідь: $x_2=-669$.

3. Визначити сумісна чи не сумісна система рівнянь

$$\begin{cases}27x_1+54x_2=-7,\\ \ 5x_1+10x_2=53.\end{cases}$$

Вказати значення визначника Δx_1.

Розв’язання: Складемо матрицю A з коефіцієнтів при невідомих

$$A = \begin{bmatrix} 27 & 54 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}.$$

Її визначник

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 27 & 54 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = 270 - 270 = 0.$$

Обчислюємо визначник

$$\Delta x_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} -7 & 54 \\ 53 & 10 \end{vmatrix} = -70 + 2862 = 2792\,.$$

Відповідь: оскільки $\Delta = 0$, а $\Delta x_1 = 2792 \neq 0$, то дана система рівнянь розв'язків не має (не сумісна).

4. Методом Гаусса знайти всі ненульові розв'язки системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 23x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 46x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0, \\ 69x_1 + 14x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$$

і обчислити значення невідомого x_1, коли відповідне значення $x_3 = -2$.

Розв'язання: Оскільки третє рівняння даної системи є сумою двох перших рівнянь, то його можна виключити з системи і тоді вона матиме вигляд:

$$\begin{cases} 23x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 46x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} 23x_1 + 5x_2 = -3x_3, \\ 46x_1 + 9x_2 = -6x_3, \end{cases}$$

Позначимо $x_3 = t$, де t (тобто x_3) будь-яке дійсне число, тоді одержимо систему

$$\begin{cases} 23x_1 + 5x_2 = -3t, \\ 46x_1 + 9x_2 = -6t. \end{cases}$$

Віднімемо від другого рівняння системи перше рівняння, помножене на два, одержимо

$$-x_2 = 0\,,$$

$$x_2 = 0\,,$$

тоді $23x_1 = -3t;\ x_1 = -\dfrac{3}{23}t$

Таким чином, розв'язок даної системи рівнянь буде

$$x_1 = -\frac{3}{23}t, \quad x_2 = 0, \quad \text{та } x_3 = t, \quad \text{де } t \in R.$$

Відповідно до умови задачі $x_3 = -2$ при $t = -2$, а тому необхідне значення невідомого

$$x_1 = \left(-\frac{3}{23}\right)\cdot(-2) = \frac{6}{23}, \ \text{ або } x_1 \approx 0{,}2608.$$

Відповідь: $x_1 \approx 0{,}2608$ **;** $x_2 = 0$**;** $x_3 = -2$.

5. Визначити ранг матриці

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & -12 \\ -2 & -4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Розв'язання: Третій рядок даної матриці є лінійною комбінацією першого та другого її рядків, тобто якщо до відповідних елементів третього рядка додати елементи першого та другого рядків, то одержимо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 0 \\ 7 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ранг якої дорівнює рангу даної матриці A, $r(A) = r(B)$.

Визначник

$$|B| = \begin{vmatrix} -5 & 3 & 0 \\ 7 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

згідно з властивостями визначників, маємо $|A| = |B| = 0$.

Таким чином, $r(A) = r(B) < 3$. Оскільки мінор другого порядку матриці A (і матриці B)

$$M_2 = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -5 - 21 = -26 \neq 0, \text{ то } r(A) = r(B) = 2.$$

Відповідь: $r(A) = r(B) = 2$.

4. Порядок виконання завдань і збереження результатів на сервері

a) Перехід до виконання основної частини практичної роботи виконується автоматично системою за умови успішного проходження допуску;

b) У відповідні поля ввести результати розв'язання задач і натиснути кнопку «Завершити тест достроково» для збереження результатів роботи. Якщо час, відведений на виконання, закінчився – система блокується. У будь-якому випадку комп'ютерна система відобразить оцінку виконаної роботи.

1. Записати у матричній формі дану систему лінійних рівнянь та знайти її розв'язки матричним способом (за допомогою оберненої матриці) :

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 4x_1 + (\alpha - 20)x_2 - 3x_3 = -5, \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -10. \end{cases}$$

В остаточній відповіді вказати суму значень невідомих

$$x_1 + x_2 + x_3.$$

2. Розв'язати дану систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими за допомогою визначників (правило Крамера).

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = (\alpha - 30), \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 11, \\ 3x_1 - x_2 + (\alpha - 31)x_3 = -5. \end{cases}$$

В остаточній відповіді вказати суму значень невідомих

$$x_1 + x_2 + x_3.$$

3. Розв'язати методом Гаусса систему лінійних рівнянь. Приведення даної системи до "ступінчатого" виду виконати шляхом перетворення розширеної матриці цієї системи

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = (\alpha - 35), \\ 5x_1 - 8x_2 - 16x_3 = -15, \\ x_1 - 3x_2 + (\alpha - 34)x_3 = -8. \end{cases}$$

В остаточній відповіді вказати суму значень невідомих

$$x_1 + x_2 + x_3.$$

4. Методом Гаусса знайти всі ненульові розв'язки даної однорідної системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими :

$$\begin{cases} 3x_1 + (\alpha+2)x_2 - 4x_3 = 0, \\ 4x_1 + (\alpha+2)x_2 - 9x_3 = 0, \\ 5x_1 + 2(\alpha+2)x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

і обчислити суму значень невідомих $(x_1 + x_2)$, коли відповідне значення $x_3 = 2$.

5. Знайти всі розв'язки даної системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2\,(\alpha+3)x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -10, \\ 7(\alpha+3)x_1 + 8x_2 - 9x_3 = 5, \\ 3(\alpha+3)x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 25 \end{cases}$$

і обчислити суму значень невідомих $(x_1 + x_2)$, коли відповідне значення $x_3 = 1$.

5. Приклад розв'язання задач та вправ до самостійної роботи студента на практичному занятті

1. Записати в матричній формі дану систему лінійних рівнянь та знайти її розв'язки матричним способом (за допомогою оберненої матриці):

$$\begin{cases} 21x_1 + 3x_2 + 3x_3 = -6, \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 = -16, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

В остаточній відповіді вказати суму значень невідомих

$$x_1 + x_2 + x_3.$$

Розв'язання: Якщо A – матриця коефіцієнтів при невідомих, X – матриця-стовпець невідомих x_1, x_2, x_3. та B – матриця – стовпець з вільних членів:

$$A = \begin{bmatrix} 21 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -6 \\ -16 \\ 2 \end{bmatrix},$$

дану систему рівнянь можна записати в матричній формі так:

$$\begin{bmatrix} 21 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -16 \\ 2 \end{bmatrix}$$

або $AX = B$.

Оскільки визначник

$$|A| = \begin{bmatrix} 21 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= 21 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 6 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 2 - 3 \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 2 - 21 \cdot 6 \cdot 2 = -165 \neq 0,$$

то для матриці A існує обернена матриця A^{-1}, а тому значення невідомих $x_1,\ x_2,\ x_3$ можна знайти за формулою $X = A^{-1}B$, або

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -6 \\ -16 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Знайшовши обернену матрицю

$$A^{-1} = -\frac{1}{165} \begin{bmatrix} -10 & 0 & 15 \\ 14 & 33 & -120 \\ 1 & -33 & 15 \end{bmatrix},$$

одержимо, що

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{165} \begin{bmatrix} -10 & 0 & 15 \\ 14 & 33 & -120 \\ 1 & -33 & 15 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 \\ -16 \\ 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{165} \begin{bmatrix} 90 \\ -852 \\ -552 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{18}{33} \\ \frac{284}{55} \\ -\frac{184}{55} \end{bmatrix}.$$

Звідки $x_1 = -\frac{18}{33},\ \ x_2 = \frac{284}{55},\ \ x_3 = -\frac{184}{55}.$

Перевірка :

$$21 \cdot \left(-\frac{18}{33}\right) + 3 \cdot \frac{284}{55} + 3 \cdot \left(-\frac{184}{55}\right) = -6,$$

$$2 \cdot \left(-\frac{18}{33}\right) + \frac{284}{55} + 6 \cdot \left(-\frac{184}{55}\right) = -16,$$

$$3 \cdot \left(-\frac{18}{33}\right) + 2 \cdot \frac{284}{55} + 2 \cdot \left(-\frac{184}{55}\right) = 2.$$

Таким чином значення невідомих

$$x_1 = -\frac{18}{33} \approx -0{,}5455, \quad x_2 = \frac{284}{55} \approx 5{,}1636, \quad x_3 = -\frac{184}{55} \approx -3{,}3455$$

знайдені правильно, а їх сума $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{154}{121} \approx 1{,}2727.$

Відповідь: $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{154}{121} \approx 1{,}2727.$

2. Розв'язати дану систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими за допомогою визначників (правило Крамера):

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 19, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 8, \\ 3x_1 - 8x_2 - 21x_3 = -11. \end{cases}$$

В остаточній відповіді вказати суму значень невідомих

$$x_1 + x_2 + x_3.$$

Розв'язання: Складемо матрицю A з коефіцієнтів при невідомих для даної системи рівнянь

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -8 & -21 \end{bmatrix}.$$

Її визначник

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -8 & -21 \end{vmatrix} = 3\cdot(-2)\cdot(-21) + (-4)\cdot 1\cdot 3 + 1\cdot 3\cdot(-8) - 3\cdot(-2)\cdot 3 -$$

$$-1\cdot(-4)\cdot(-21) - 3\cdot 1\cdot(-8) = 48.$$

Оскільки $\Delta = 48 \neq 0$, то значення невідомих x_1, x_2, x_3 можна знайти за формулами Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

де

$$\Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} 19 & -4 & 3 \\ 8 & -2 & 1 \\ -11 & -8 & -21 \end{vmatrix} = 64,$$

$$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 3 & 19 & 3 \\ 1 & 8 & 1 \\ 3 & -11 & -21 \end{vmatrix} = -120,$$

$$\Delta_3 = |A_3| = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 19 \\ 1 & -2 & 8 \\ 3 & -8 & -11 \end{vmatrix} = 80.$$

Тому $x_1 = \dfrac{64}{48} = \dfrac{4}{3}$; $x_2 = \dfrac{-120}{48} = -\dfrac{5}{2}$; $x_3 = \dfrac{80}{48} = \dfrac{5}{3}$.

Виконавши перевірку, безпосередньо можна впевнитися, що значення невідомих x_1, x_2, x_3 знайдено правильно, а їх сума

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{4}{3} - \frac{5}{2} + \frac{5}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Відповідь: $x_1 + x_2 + x_3 = 0{,}5.$

3. Розв’язати методом Гаусса систему лінійних рівнянь. Приведення даної системи до “ступінчастого” виду виконати шляхом перетворення розширеної матриці цієї системи :

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -25, \\ 3x_1 - 8x_2 - 18x_3 = -15, \\ x_1 - 4x_2 - 28x_3 = 25. \end{cases}$$

В остаточній відповіді вказати суму значень невідомих

$$x_1 + x_2 + x_3.$$

Розв’язання: Складемо розширену матрицю даної системи (стовпець вільних членів цієї матриці відокремлюватимемо лінією) :

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & -25 \\ 3 & -8 & -18 & -15 \\ 1 & -4 & -28 & 25 \end{array}\right].$$

Помножимо елементи першого рядка цієї матриці на 3 і результати додаємо до відповідних елементів другого рядка, які попередньо були помножені на (-2). Потім помножимо елементи третього рядка на (-2) і додаємо до них відповідні елементи першого рядка. Одержимо матрицю :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & -25 \\ 0 & 7 & 48 & -45 \\ 0 & 5 & 60 & 75 \end{array}\right].$$

Помножимо елементи другого рядка останньої матриці на (-5) і результати додаємо до відповідних елементів третього рядка, які попередньо помножимо на 7. Одержимо матрицю :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & -25 \\ 0 & 7 & 48 & -45 \\ 0 & 0 & 180 & -300 \end{array}\right].$$

Таким чином, дану систему лінійних рівнянь можна записати у вигляді

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -25, \\ \qquad 7x_2 + 48x_3 = -45, \\ \qquad\qquad 180x_3 = -300. \end{cases}$$

Звідки

$$x_3 = \frac{-300}{180} = -\frac{5}{3}, \text{ або } x_3 = -1{,}6667;$$

$$7x_2 = -45 + 80\ ,\ x_2 = 5;$$

$$2x_1 - 15 - \frac{20}{3} = -25\ ,\ \text{а тому } x_1 = -\frac{5}{3}, \text{ або } x_1 = -1{,}6667.$$

Виконавши перевірку, безпосередньо можна впевнитись, що значення невідомих x_1, x_2, x_3 знайдено правильно, а їх сума

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{5}{3} + 5 - \frac{5}{3} = \frac{5}{3} = 1{,}6667.$$

Відповідь: $x_1 + x_2 + x_3 = 1{,}6667.$

4. Методом Гаусса знайти всі ненульові розв'язки даної однорідної системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} 6x_1 + 32x_2 - 3x_3 = 0, \\ 11x_1 + 80x_2 - 7x_3 = 0, \\ 4x_1 + 64x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

і обчислити суму значень невідомих $(x_1 + x_2)$, коли відповідне значення $x_3 = 128.$

Розв'язання: Складемо матрицю A з коефіцієнтів даної системи

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 32 & -3 \\ 11 & 80 & -7 \\ 4 & 64 & -5 \end{bmatrix}$$

Помножимо елементи першого рядка цієї матриці на 3 і результати додамо до відповідних елементів третього рядка. Одержимо матрицю:

$$\begin{bmatrix} 6 & 32 & -3 \\ 11 & 80 & -7 \\ 22 & 160 & -14 \end{bmatrix}.$$

Розділимо елементи третього рядка на 2 і результати віднімемо від відповідних елементів другого рядка. Одержимо матрицю:

$$\begin{bmatrix} 6 & 32 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 22 & 160 & -14 \end{bmatrix}.$$

Враховуючи властивості визначників, бачимо що вказані три матриці мають рівні визначники, тобто

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 32 & -3 \\ 11 & 80 & -7 \\ 4 & 64 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 32 & -3 \\ 11 & 80 & -7 \\ 22 & 160 & -14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 32 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 22 & 160 & -14 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким чином $|A| = 0$, а тому дана однорідна система лінійних рівнянь має ненульові розв’язки.

Друге рівняння даної системи є лінійною комбінацією першого та третього рівнянь. Дійсно, помноживши перше рівняння на 3, додавши далі до третього рівняння, та розділивши потім останній результат на 2, одержимо друге рівняння. А тому його можна виключити з системи, що не змінить її розв’язків. Одержимо рівносильну систему рівнянь

$$\begin{cases} 6x_1 + 32x_2 - 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 64x_2 - 5x_3 = 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 6x_1 + 32x_2 = 3x_3, \\ 4x_1 + 64x_2 = 5x_3. \end{cases}$$

Позначимо $x_3 = t$, де t – будь-яке дійсне число, тоді одержимо систему

$$\begin{cases} 6x_1 + 32x_2 = 3t \\ 4x_1 + 64x_2 = 5t \end{cases} \left| \begin{matrix} \cdot(-4) \\ \cdot 6 \end{matrix} \right. .$$

Помножимо перше рівняння на (-4) і додаємо його до другого рівняння цієї системи, яке попередньо помножимо на 6. Одержимо систему

$$\begin{cases} 6x_1 + 32x_2 = 3t, \\ \qquad 256x_2 = 18t. \end{cases}$$

Звідки $x_2 = \dfrac{9}{128}t, \quad x_1 = \dfrac{1}{8}t.$

Виконавши безпосередньо перевірку, можна впевнитись, що $x_1 = \dfrac{1}{8}t$, $x_2 = \dfrac{9}{128}t$, $x_3 = t$ є розв’язки даної системи рівнянь.

Згідно з умовою задачі $x_3 = 128$ при $t = 128$, тому при цьому $x_1 = 9$, $x_2 = 16$, а їх сума $x_1 + x_2 = 25$.

Відповідь: $x_1 + x_2 = 25$.

5. Знайти всі розв'язки даної системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 32x_1 + 4x_2 - 4x_3 = -7, \\ 34x_1 + 7x_2 - 9x_3 = -33, \\ 68x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 12 \end{cases}$$

і обчислити суму значень невідомих $(x_1 + x_2)$, коли відповідне значення $x_3 = 1$.

Розв'язання: Друге рівняння даної системи є лінійна комбінація першого та третього рівнянь. Дійсно, помноживши перше рівняння на 3 та віднімаючи від цього результату третє рівняння, одержимо друге рівняння, а тому його можна виключити з системи рівнянь, що не змінить її розв'язки. Одержимо рівнозначну систему рівнянь

$$\begin{cases} 32x_1 + 4x_2 - 4x_3 = -7, \\ 68x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 12. \end{cases}$$

Позначимо $x_3 = t$, де t – будь – яке дійсне число, тоді одержимо систему

$$\begin{cases} 32x_1 + 4x_2 = 4t - 7, \\ 68x_1 + 5x_2 = 3t + 12. \end{cases}$$

Оскільки визначник матриці системи

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 32 & 4 \\ 68 & 5 \end{vmatrix} = -112 \neq 0,$$

то значення невідомих x_1, x_2 останньої системи рівнянь можна знайти за формулами Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad ; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta};$$

де
$$\Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} (4t-7) & 4 \\ (3t+12) & 5 \end{vmatrix} = 8t - 83,$$

$$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 32 & (4t-7) \\ 68 & (3t+12) \end{vmatrix} = -176t + 860.$$

Тому $x_1 = \dfrac{8t-83}{-112} = \dfrac{83-8t}{112} \quad ; \quad x_2 = \dfrac{-176t+860}{-112};$

Виконавши безпосередньо перевірку, можна впевнитись що це розв'язок даної системи

$$\begin{cases} 32\cdot 0,6696+4\cdot(-6,1071)-4\cdot 1=-7,0012\approx -7 \\ 68\cdot 0,6696+5\cdot(-6,1071)-3\cdot 1=11,9973\approx 12 \end{cases}$$

Згідно з умовою задачі $x_3=1$ при $t=1$, то $x_1=\dfrac{75}{112}=0,6696$, $x_2=\dfrac{684}{-112}=-6,1071$, а їх сума $x_1+x_2=-5,4375$.

Відповідь: $x_1=0,6696$, $x_2=-6,1071$.

6. Питання для самоконтролю.

1. Який вигляд має система ***n*** лінійних рівнянь з ***n*** невідомими?

2. Яким чином система лінійних рівнянь записується у матричному вигляді ?

3. Запишіть формули Крамера для знаходження розв’язків системи лінійних рівнянь.

4. Яка умова сумісності системи лінійних рівнянь?

5. Матричний метод розв’язування систем лінійних рівнянь.

6. Поясніть метод Гаусса щодо розв’язування систем лінійних рівнянь.

7. Які можливі випадки розв’язку системи?

Розділ II
ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ НА ПЛОЩИНІ

Практична робота 1. Система прямокутних координат на прямій та площині. найпростіші задачі.

1. Основні поняття та теореми

1. Відстань d між точками $A(x_1)$ і $B(x_2)$ на прямій визначається за формулою

$$d = |AB| = |x_2 - x_1|. \quad (1)$$

2. Відстань d між точками точками $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ на площині визначається за формулою

$$d = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (2)$$

3. Якщо точка $M(x; y)$ лежить на прямій, що проходить через дві дані точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ і задано відношення $\lambda = AM \,/\, MB$, в якому точка M ділить відрізок AB, то координати точки M визначаються за формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1 + \lambda} \quad , \quad y = \frac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1 + \lambda}. \quad (3)$$

Якщо точка M – середина відрізка AB, то її координати визначаються за формулами

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad , \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad (4)$$

4. Площа трикутника за відомими координатами його вершин $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ визначається за формулою

$$\pm S = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(x_2 - x_1)\cdot(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)\cdot(y_2 - y_1)\right]. \quad (5)$$

Права частина даної формули $+S$ у тому випадку, коли найкоротший поворот відрізка AB до відрізка AC додатній, і $(-S)$ у тому випадку, коли такий поворот від’ємний.

2. Порядок виконання допуску до практичної роботи

a) Запустити систему за допомогою файла «КВМ.exe»;
b) Перейти у розділ «Практичні роботи»;

c) Обрати практичну роботу натиснувши на гіперпосилання «Система прямокутних координат на прямій та площині. найпростіші задачі.»;

d) Після ознайомлення з теоретичним матеріалом натиснути кнопку «Розпочати тестування» і при готовності кнопку «Почати»;

e) Виконати запропоновані завдання з урахуванням автоматично згенерованого параметра α і ввести отримані відповіді у відповідні поля (рис. 1). Якщо практична робота виконана не в комп’ютерній системі параметр α призначається викладачем (наприклад номер у списку або дві останні цифри залікової книжки).

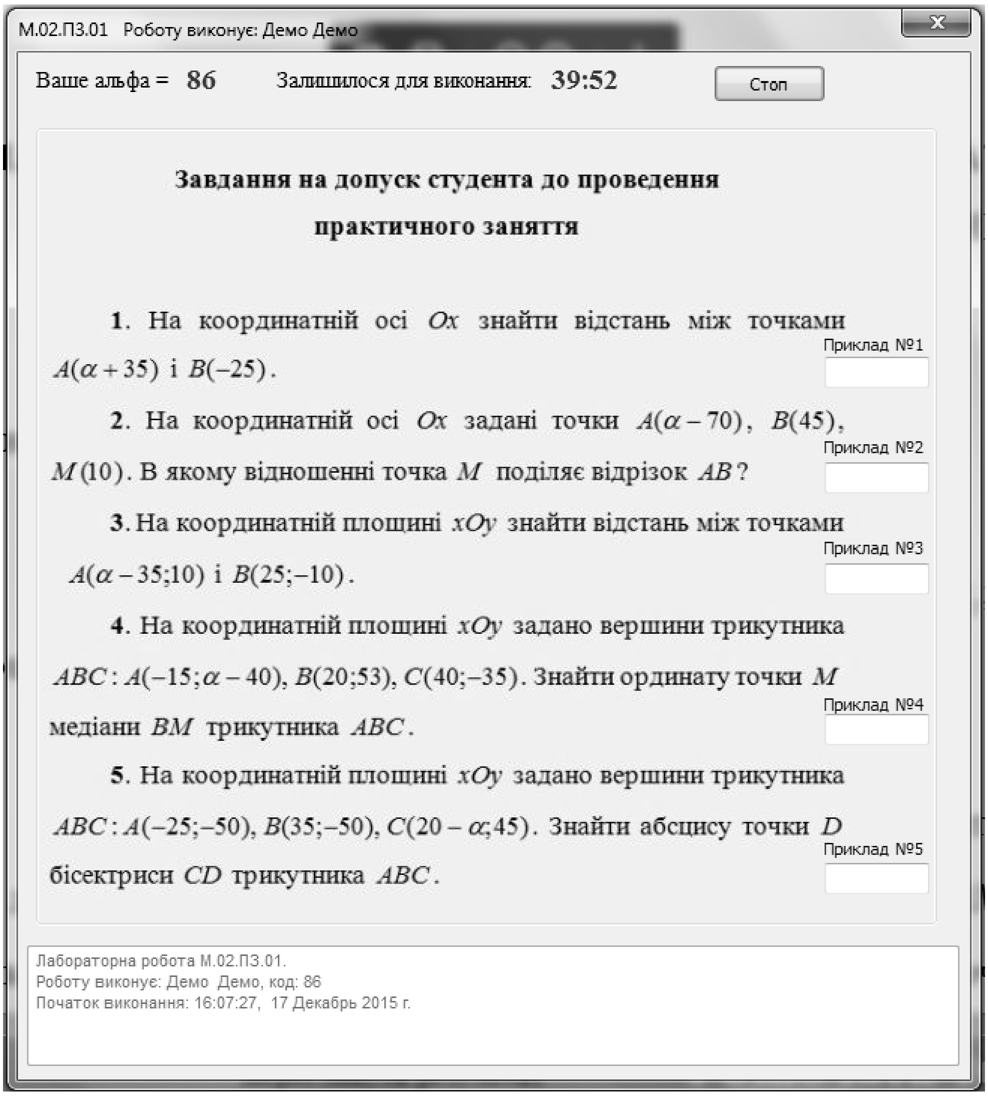


Рис.1. Вікно для проходження допуску до практичної роботи.

1. На координатній осі Ox знайти відстань між точками $A(\alpha+35)$ і $B(-25)$.

2. На координатній осі Ox задані точки $A(\alpha - 70)$, $B(45)$, $M(10)$. В якому відношенні точка M поділяє відрізок AB ?

3. На координатній площині xOy знайти відстань між точками $A(\alpha - 35;10)$ і $B(25;-10)$.

4. На координатній площині xOy задано вершини трикутника $ABC: A(-15;\alpha - 40), B(20;53), C(40;-35)$. Знайти ординату точки M медіани BM трикутника ABC.

5. На координатній площині xOy задано вершини трикутника $ABC: A(-25;-50), B(35;-50), C(20-\alpha;45)$. Знайти абсцису точки D бісектриси CD трикутника ABC.

3. Приклад виконання завдання на допуск студента до практичної роботи

1. На координатній осі Ox знайти відстань між точками $A(85)$ і $B(-25)$.

Розв'язання:

$d = |AB| = |-25 - 85| = |-110| = 110$.

Відповідь: $d = 110$.

2. На координатній осі Ox задано точки $A(5)$, $B(45)$, $M(10)$. В якому відношенні точка M поділяє відрізок AB ?

Розв'язання:

$$\lambda = \frac{AM}{MB} = \frac{10-5}{45-10} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7} \approx 0{,}1429.$$

Відповідь: $\lambda = 0{,}1429$.

3. На координатній площині xOy знайти відстань між точками $A(15;10)$ і $B(25;10)$.

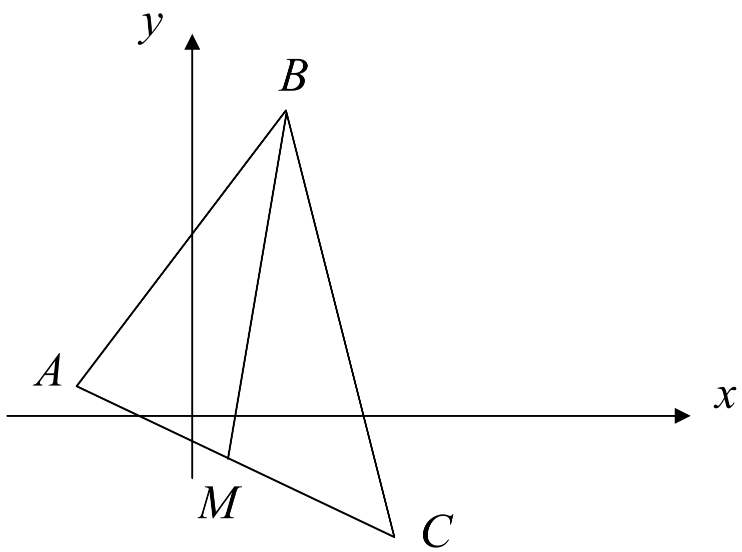
Розв'язання:

Скористаємось формулою (2)

$$d = |AB| = \sqrt{(25-15)^2 + (10-10)^2} = \sqrt{10^2} = 10.$$

Відповідь: $d = 10$.

4. На координатній площині xOy задано вершини трикутника $ABC: A(-15;10), B(20;53), C(40;-35)$. Знайти ординату точки M медіани BM трикутника ABC.



Розв'язання:

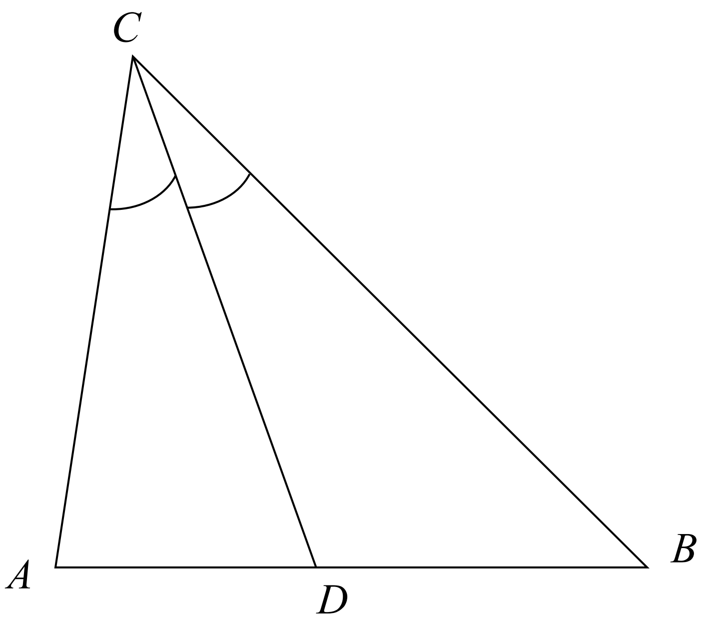
Для знаходження ординати точки M використаємо формулу (4)

$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2}, \quad y_M = \frac{10 + (-35)}{2} = \frac{-25}{2} = -12{,}5.$$

Відповідь: $y_M = -12{,}5$.

5. На координатній площині xOy задано вершини трикутника $ABC: A(-25;50), B(35;-50), C(-30;45)$. Знайти абсцису точки D бісектриси CD трикутника ABC.

Розв'язання:



Бісектриса CD трикутника ABC поділяє протилежну сторону AB на два відрізки, які відносяться один до одного як відповідні бічні сторони:

$$\lambda = \frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|CB|} = \frac{\sqrt{(-30-(-25))^2 + (45-50)^2}}{\sqrt{(-30-35)^2 + (45-(-50))^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{25+25}}{\sqrt{4225+9025}} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{13250}} \approx \frac{7,07}{115,12} \approx 0,06$$

Абсцису точки D знайдемо за формулою (3):

$$x_D = \frac{x_A + \lambda \cdot x_B}{1+\lambda},$$

$$x_D = \frac{-25 + 0,06 \cdot 35}{1+0,06} = \frac{-25+2,1}{1,06} \approx -21,6.$$

Відповідь: $x_D \approx -21,6$.

4. Порядок виконання завдань і збереження результатів на сервері

a) Перехід до виконання основної частини практичної роботи виконується автоматично системою за умови успішного проходження допуску;
b) У відповідні поля ввести результати розв'язання задач і натиснути кнопку «Завершити тест достроково» для збереження результатів роботи. Якщо час, відведений на виконання, закінчився – система блокується. У будь-якому випадку комп'ютерна система відобразить оцінку виконаної роботи.

1. На координатній площині xOy задано вершини трикутника $ABC: A(\alpha - 45;43), B(25;-35), C(-30;-20)$. Знайти довжину бісектриси його внутрішнього кута при вершині A.

2. На координатній площині xOy задано вершини трикутника $ABC: A(-10;25), B(25;30), C(\alpha - 55;40)$. Знайти довжину його висоти, яка проведена з вершини C.

3. Точки $A(-20+\alpha;-10), B(-15;40), C(45;60)$ – три вершини паралелограма, де A і C – протилежні вершини. Знайти абсцису четвертої вершини D.

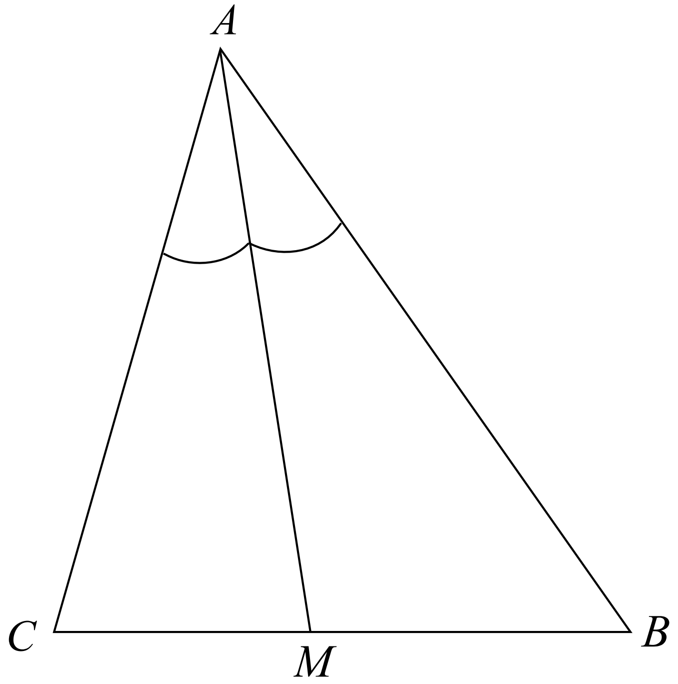
4. Пряма проходить через точки $M(20-\alpha;-10), N(80;15)$. На прямій знайти абсцису точки, ордината якої дорівнює $\alpha + 20$.

5. Точка M – перетину медіан трикутника лежить на осі абсцис, дві його вершини – точка $A(25;-30)$ і $B(-25-\alpha;15)$, третя вершина C лежить на осі ординат. Знайти абсцису точки M .

5. Приклади розв'язання задач та вправ до самостійної роботи студента на практичному занятті

1. На координатній площині xOy задано вершини трикутника $ABC: A(10;43), B(30;-20), C(-20;-38)$. Знайти довжину бісектриси його внутрішнього кута при вершині A.

Розв'язання:



Нехай ΔABC заданий, AM – його бісектриса. Використовуючи властивість бісектриси внутрішнього кута трикутника і (2), (3) отримаємо

$$\lambda = \frac{|CM|}{|MB|} = \frac{|CA|}{|AB|} = \frac{\sqrt{(10+20)^2 + (43+38)^2}}{\sqrt{(30-10)^2 + (-20-43)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{30^2 + 81^2}}{\sqrt{20^2 + 63^2}} = \frac{\sqrt{900+6561}}{\sqrt{400+3969}} = \frac{\sqrt{7461}}{\sqrt{4369}} \approx \sqrt{1,708} \approx 1,307.$$

Оскільки точка M ділить відрізок CB у відношенні λ, то згідно з (3) дістанемо:

$$x_M = \frac{-20 + 1,307 \cdot 30}{1 + 1,307} = \frac{19,21}{2,307} \approx 8,327.$$

$$y_M = \frac{-38+1{,}307\cdot(-20)}{1+1{,}307} = \frac{-38-26{,}14}{2{,}307} = -\frac{64{,}14}{2{,}307} \approx -27{,}802.$$

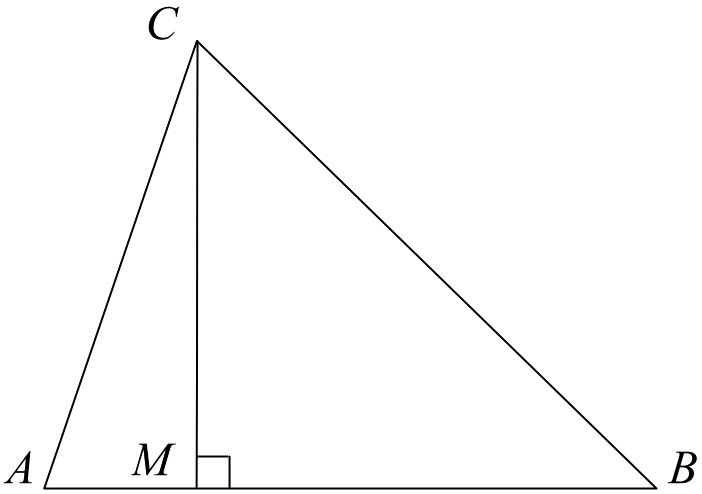
Отже, $M(8{,}327;-27{,}802)$.

Для знаходження довжини бісектриси використовуємо (2)

$$d = |AM| = \sqrt{(8{,}327-10)^2 + (-27{,}802-43)^2} =$$
$$= \sqrt{(-1{,}673)^2 + (-70{,}802)^2} =$$
$$= \sqrt{2{,}799 + 5012{,}923} = \sqrt{5015{,}722} \approx 70{,}822.$$

Відповідь: $d \approx 70{,}822$**.**

2. На координатній площині xOy задано вершини трикутника $ABC: A(-10;24), B(30;27), C(10;45)$. Знайти довжину його висоти, яка проведена із вершини C.



Розв'язання:

Нехай ΔABC заданий, CM – його висота. Використовуючи (5), отримаємо

$$\pm S_\Delta = \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 30+10 & 27-24 \\ 10+10 & 45-24 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 40 & 3 \\ 20 & 21 \end{vmatrix} =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot(40\cdot 21 - 3\cdot 20) = \frac{1}{2}\cdot(840-60) = \frac{1}{2}\cdot 780 = 390.$$

Згідно з (1)

$$|AB| = \sqrt{(30+10)^2 + (27-24)^2} = \sqrt{40^2+3^2} = \sqrt{1609} = 40{,}112$$

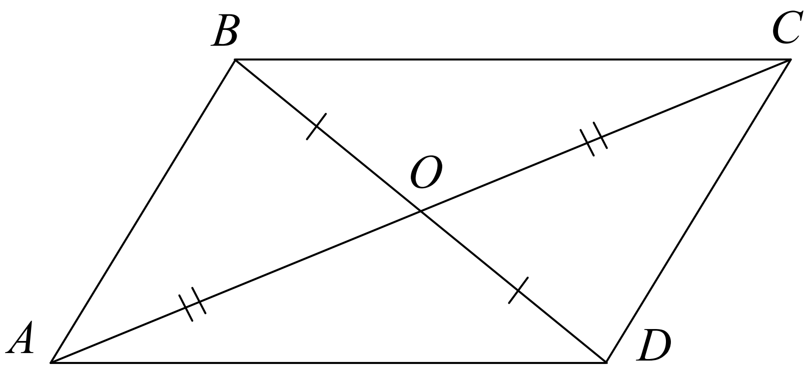
Оскільки $S_\Delta = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot CM$, то $CM = \frac{2\cdot S_\Delta}{AB}$,

$$CM = \frac{2\cdot 390}{40{,}112} = \frac{780}{40{,}112} \approx 19{,}446.$$

Відповідь: $CM \approx 19{,}446$**.**

3. Точки $A(-20;-13), B(-10;25), C(40;47)$ – три вершини паралелограма, де A і C – протилежні вершини. Знайти абсцису четвертої вершини D.

Розв'язання:



Нехай $ABCD$ заданий паралелограм. Нехай O – середина AC, то згідно з (4) маємо

$$x_0 = \frac{-20+40}{2} = \frac{20}{2} = 10.$$

Відповідно, O – середина BD і згідно з (4) дістанемо

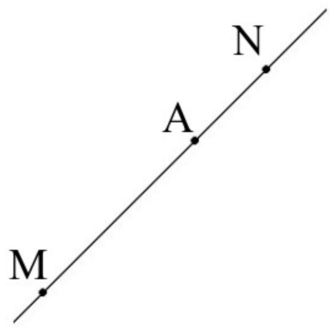
$$x_0 = \frac{x_B + x_D}{2};\ x_D = 2 \cdot x_0 - x_B$$

$$x_D = 2 \cdot 10 - (-10) = 20 + 10 = 30.$$

Відповідь: $x_D = 30$**.**

4. Пряма проходить через точки $M(12;-3), N(75;21)$. На прямій знайти абсцису точки, ордината якої дорівнює 13.

Розв'язання:



Нехай точка $A(x;13)$. Тоді згідно з (3) дістанемо $\lambda = \dfrac{|MA|}{|AN|}$

$$y_A = \frac{y_M + \lambda \cdot y_N}{1+\lambda};\ 13 = \frac{-3+\lambda \cdot 21}{1+\lambda};$$

$$13 + 13 \cdot \lambda = -3 + 21 \cdot \lambda;$$

$$8 \cdot \lambda = 16;$$

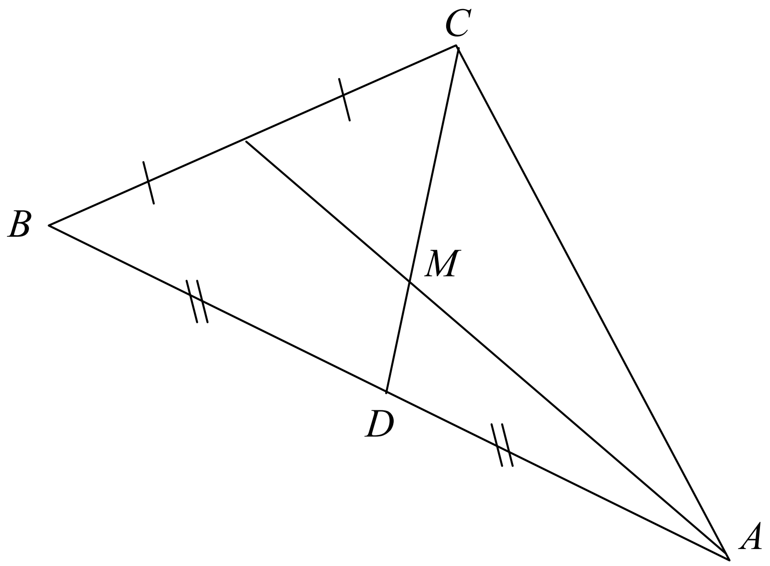
$$\lambda = 2;$$

$$x_A = \frac{x_M + \lambda \cdot x_N}{1+\lambda}; \; x_A = \frac{12 + 2\cdot 75}{1+2} = \frac{162}{3} = 54.$$

Відповідь: $x_A = 54$**.**

5. M точка перетину медіан трикутника лежить на осі абсцис, дві його вершини – точки $A(30;-25)$ і $B(-28;10)$, третя вершина C лежить на осі ординат. Знайти абсцису точки M .

Розв'язання:



Нехай ABC – заданий трикутник. Оскільки точка $C \in Oy$, то $C(0;y)$; а $M \in Ox$, то $M(x;0)$. Відомо, що медіани трикутника діляться точкою перетину у відношенні $2:1$, тоді

$$\lambda = \frac{|CM|}{|MD|} = \frac{2}{1} = 2.$$

Оскільки D – середина AB , то згідно з (4) дістаємо

$$x_D = \frac{30 + (-28)}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Використовуючи (3) дістанемо

$$x_M = \frac{x_C + \lambda \cdot x_D}{1+\lambda}; x_M = \frac{0 + 2\cdot 1}{1+2} = \frac{2}{3} \approx 0,667.$$

6. Питання для самоконтролю

1. За якою формулою знаходиться відстань між двома точками на прямій?

2. За якою формулою знаходиться відстань між двома точками на площинні?

3. Як знайти координати точки ***M***, яка ділить відрізок ***AB*** у відношенні $\lambda = \dfrac{\boldsymbol{AM}}{\boldsymbol{MB}}$?

4. Запишіть формулу, за якою знаходяться координати середини відрізка?

5. Запишіть формулу для знаходження площі трикутника, заданого координатами своїх вершин?

6. Наведіть формулу для знаходження відстані між точками.

7. У якому відношенні поділяє сторону бісектриса?

8. Дайте означення бісектрисі, медіані та висоті.

Практична робота 2. Пряма на площині. різні форми рівняння прямої.

1. Основні поняття та теореми

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

$$y = kx + b,$$

де k – кутовий коефіцієнт прямої, тобто тангенс кута, який утворює пряма з додатнім напрямком осі Ox, причому цей кут відраховується від осі Ox до прямої проти руху часової стрілки; b – величина відрізка, який пряма відтинає на осі ординат.

Загальне рівняння прямої

$$Ax + By + C = 0. \qquad (1)$$

Нормальне рівняння прямої

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0, \qquad (2)$$

де p – довжина перпендикуляра, який опущено з початку координат на пряму, а α – кут, який цей перпендикуляр утворює з додатнім напрямком осі Ox. Кут α відраховується від осі Ox проти годинникової стрілки.

Для приведення загального рівняння прямої до нормального вигляду обидві його частини потрібно помножити на нормуючий множник.

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (3)$$

Знак множника вибирається протилежним знаку вільного члена загального рівняння прямої.

Рівняння прямої, що проходить через задану точку $A(x_1; y_1)$ в даному напрямі, який визначається кутовим коефіцієнтом *k*:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \quad (4)$$

Рівняння прямої, що проходить через дві точки: $A(x_1; y_1)$та $B(x_2; y_2)$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \quad (5)$$

Кутовий коефіцієнт прямої, що проходить через дві дані точки, визначається за формулою

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (6)$$

Кутом між прямими a і b називається кут, на який потрібно повернути пряму a навколо точки перетину цих прямих проти часової стрілки до співпадання її з прямою b. Якщо дві прямі задані рівняннями

$$\begin{array}{l} y = k_1 x + b_1 \\ y = k_2 x + b_2 \end{array},$$

то кут між ними θ визначається за формулою

$$tg\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \quad (7)$$

Якщо рівняння прямих задане в загальному вигляді

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0,$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0,$$

то кут між ними визначається за формулою

$$tg\theta = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}. \quad (8)$$

Умови паралельності двох прямих. Прямі паралельні якщо їх кутові коефіцієнти рівні:

$$k_1 = k_2. \quad (9)$$

Прямі паралельні, якщо їх коефіцієнти A та B пропорційні.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \quad (10)$$

Умови перпендикулярності двох прямих. Прямі перпендикулярні, якщо:

$$\text{а) } k_1 = -\frac{1}{k_2}; \tag{11}$$

$$\text{б) } A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \tag{12}$$

Координати точки перетину двох прямих знаходять, розв'язуючи систему рівнянь:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Прямі перетинаються тільки в тому випадку, коли:

$$A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0 \tag{13}$$

2. Порядок виконання допуску до практичної роботи

a) Запустити систему за допомогою файла «КВМ.exe»;
b) Перейти у розділ «Практичні роботи»;
c) Обрати практичну роботу натиснувши на гіперпосилання «Пряма на площині. різні форми рівняння прямої»;
d) Після ознайомлення з теоретичним матеріалом натиснути кнопку «Розпочати тестування» і при готовності кнопку «Почати»;
e) Виконати запропоновані завдання з урахуванням автоматично згенерованого параметра α і ввести отримані відповіді у відповідні поля (рис. 1). Якщо практична робота виконана не в комп'ютерній системі параметр α призначається викладачем (наприклад номер у списку або дві останні цифри залікової книжки).

1. При якому значенні параметра a пряма

$$ax - 4y - 2 = 0$$

перетинає вісь OX у точці $M(1 + (\alpha - 50) \cdot 0{,}1; 0)$?

2. Знайти кутовий коефіцієнт прямої

$$(2 + (\alpha - 50) \cdot 0{,}1)x + 4y - 2 = 0.$$

3. Точки $A(-2;1), B(-2;5), C(3;3 + (\alpha - 50) \cdot 0{,}1)$ – вершини трикутника ABC. Знайти ординату точки D – висоти CD трикутника ABC.

4. При якому значенні абсциси точка $M\left(x; \frac{5}{2}\right)$ належить прямій, що проходить через точки

$$A(-2 + (\alpha - 50) \cdot 0{,}1; 1) \text{ та } B(6;3).$$

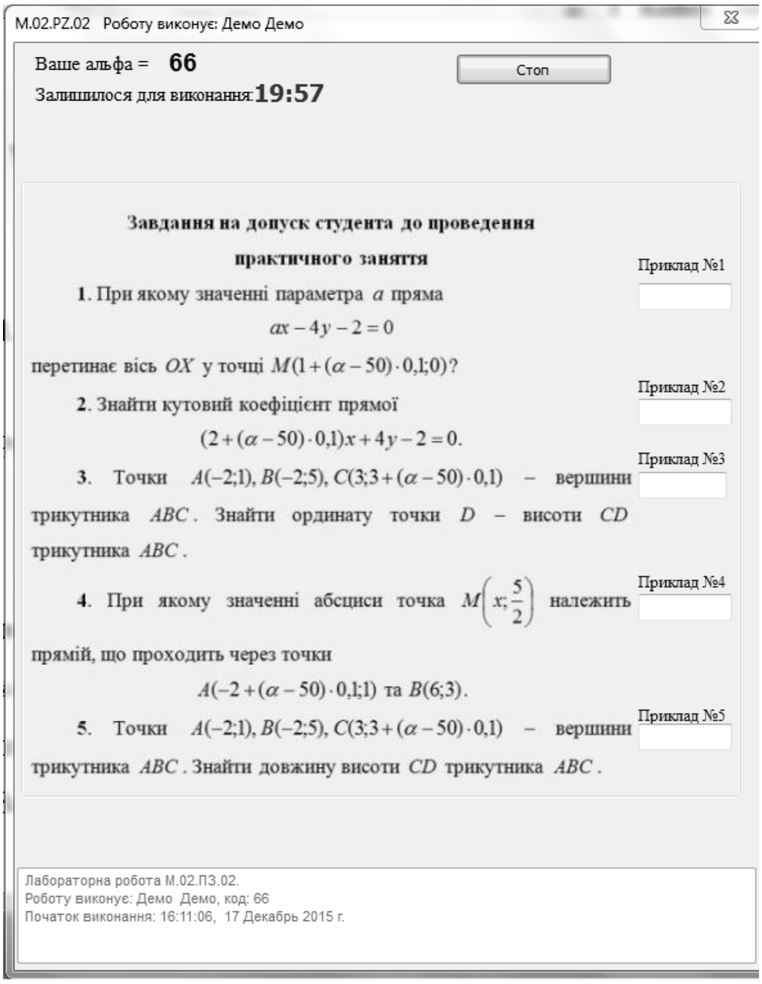


Рис. 1. Вікно для проходження допуску до практичної роботи.

5. Точки $A(-2;1), B(-2;5), C(3;3+(\alpha-50)\cdot 0{,}1)$ – вершини трикутника ABC. Знайти довжину висоти CD трикутника ABC.

3. Приклад виконання завдання на допуск студента до практичної роботи

1. При якому значенні параметра a пряма

$$ax-4y-2=0$$

перетинає вісь OX у точці $M(3{,}5;0)$.

Розв'язання:

Якщо задана пряма $l: ax-4y-2=0$ перетинає вісь OX у точці M, то точка M належить прямій l, тобто її координати перетворюватимуть рівняння прямої в правильну рівність

$$a3{,}5-4\cdot 0-2=0;$$

$$3{,}5a=2;$$

$$a=2:3{,}5;$$

$$a\approx 0{,}57.$$

Відповідь: $a\approx 0{,}57$**.**

2. Знайти кутовий коефіцієнт прямої

$$4{,}5x + 4y - 2 = 0.$$

Розв'язання:

Зведемо рівняння даної прямої до вигляду рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $y = kx + b$

$$4y = -4{,}5x + 2;$$

$$y = \frac{-4{,}5}{4}x + \frac{2}{4}$$

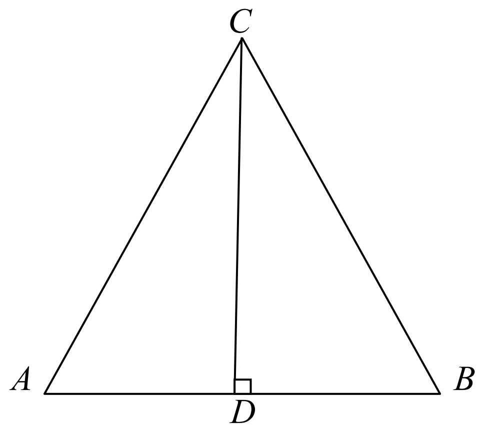
$$y = -1{,}125x + 0{,}5$$

Отже, $k = -1{,}125$ – кутовий коефіцієнт заданої прямої.

Відповідь: $k = -1{,}125$ **.**

3. Точки $A(-2;1), B(-2;5), C(3;5{,}5)$ – вершини трикутника ABC. Знайти ординату точки D – висоти CD трикутника ABC.

Розв'язання:



1) Основа висоти CD точка D знаходиться, як точка перетину двох прямих AB і CD.

2) Рівняння прямої AB складаємо у вигляді прямої, що проходить через дві точки за формулою (5)

$$AB: \frac{y-1}{5-1} = \frac{x+2}{-2+2};$$

$$0 \cdot (y-1) = 4(x+2);$$

$$4x + 8 = 0;$$

$$x = -2.$$

3) Висота CD перпендикулярна до сторони AB і містить точку $C(3;5{,}5)$, тоді її рівняння

$$CD: y = 5{,}5$$

Отже, $\boldsymbol{y_D = 5{,}5}$.

Відповідь: $\boldsymbol{y_D = 5{,}5}$ **.**

4. При якому значенні абсциси точка $M\left(x;\frac{5}{2}\right)$ належить прямій, що проходить через точки $A(0{,}5;1)$ та $B(6;3)$?

Розв'язання:

1) Складемо рівняння прямої AB у вигляді прямої, що проходить через дві точки, за формулою (5)

$$AB: \frac{y-1}{3-1}=\frac{x-0{,}5}{6-0{,}5};$$

$$5{,}5(y-1)=2(x-0{,}5);$$

$$5{,}5y-5{,}5=2x-1 \quad |\cdot 2;$$

$$11y-11=4x-2;$$

$$11y-4x-9=0.$$

2) Точка M належить прямій AB за умови, що її координати перетворюватимуть рівняння прямої AB у правильну рівність

$$11\cdot\frac{5}{2}-4x_M-9=0 \quad |\cdot 2;$$

$$55-8x_M-18=0;$$

$$8x_M=37;$$

$$x_M=4{,}625.$$

Відповідь: $x_M=4{,}625$.

5. Точки $A(-2;1), B(-2;5), C(3;5{,}5)$ – вершини трикутника ABC. Знайти довжину висоти CD трикутника ABC.

Розв'язання:

Знайдемо довжину висоти CD, як відстань між двома точками, використавши результати завдання 3.

Точка $D(-2;5{,}5)$, $C(3;5{,}5)$, тоді

$$|CD|=\sqrt{(3+2)^2-(5{,}5-5{,}5)^2}=5.$$

Відповідь: $|CD|=5$.

4. Порядок виконання завдань і збереження результатів на сервері

a) Перехід до виконання основної частини практичної роботи виконується автоматично системою за умови успішного проходження допуску;

b) У відповідні поля ввести результати розв'язання задач і натиснути кнопку «Завершити тест достроково» для збереження результатів роботи. Якщо час, відведений на виконання, закінчився – система блокується. У будь-якому випадку комп'ютерна система відобразить оцінку виконаної роботи.

1. Дано координати вершин трикутника ABC: $A(3+(\alpha-50)\cdot 0{,}1;2), B(5;-2), C(1;(\alpha-50)\cdot 0{,}1)$. Знайти кутовий коефіцієнт медіани AE трикутника ABC.

2. Знайти відношення, в якому основа бісектриси внутрішнього кута B трикутника ABC ділить сторону AC. Координати вершин трикутника: $A(5+(\alpha-50)\cdot 0{,}1;4)$, $B(1;2)$, $C(-2;(\alpha-50)\cdot 0{,}1)$.

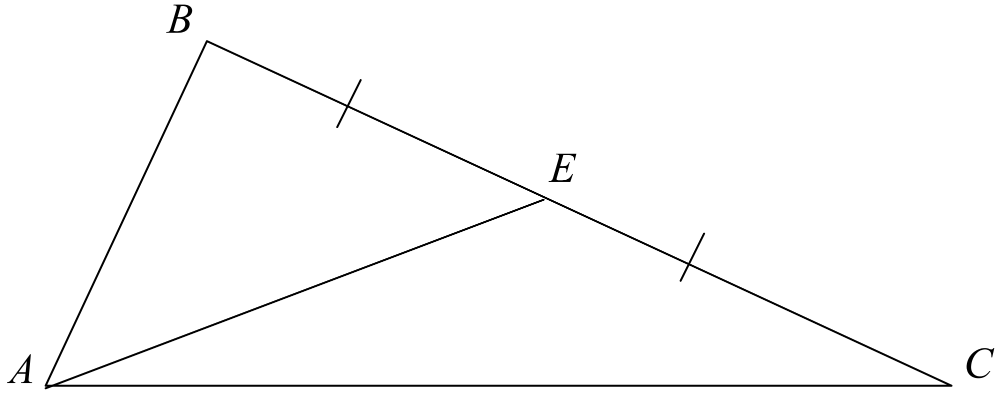
3. Дві сторони квадрата лежать на прямих $5\cdot(\alpha-50)\cdot 0{,}1x+12y+26=0$ та $5\cdot(\alpha-50)\cdot 0{,}1x+12y-65=0$ Знайти його площу.

4. Точки $M_1(2;1), M_2(5+(\alpha-50)\cdot 0{,}1;3+(\alpha-50)\cdot 0{,}1)$, $M_3(3;-4)$, координати відповідно середин сторін AB, BC, AC трикутника ABC. Знайти координати точки A. У відповіді вказати суму координат точки $A: z = x + y$.

5. Дано координати вершин трикутника $A(-10;13), B(-2;3)$, $C(2+(\alpha-50)\cdot 0{,}1\,;1+(\alpha-50)\cdot 0{,}1)$. Обчислити довжину перпендикуляра, який проведено з вершини B на медіану, проведену з вершини C.

5. Приклади розв'язання задач та вправ до самостійної роботи студента на практичному занятті

1. Дано координати вершин трикутника ABC: $A(0,5;2)$, $B(5;-2)$, $C(1;-2,5)$. Знайти кутовий коефіцієнт медіани AE трикутника ABC.



Розв'язання: Знайдемо координати точки E

$$x_E = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{5+1}{2} = 3;$$

$$y_E = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-2-2,5}{2} = -2,25.$$

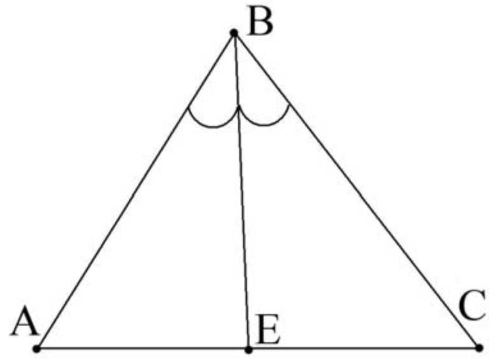
Координати точки $E(3;-2;25)$.

Кутовий коефіцієнт медіани AE відповідно (6)

$$k_{AE} = \frac{y_E - y_A}{x_E - x_A} = \frac{-2,25-2}{3-0,5} = \frac{-4,25}{2,5} = -1,7.$$

Відповідь: $k_{AB} = -1,7$**.**

2. Знайти відношення в якому основа бісектриси BE внутрішнього кута B трикутника ABC ділить сторону AC. Координати вершин трикутника $A(2,5;4)$, $B(1;2)$, $C(-2;-2,5)$.



Розв'язання: За властивістю бісектриси внутрішнього кута трикутника

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AE|}{|EC|} = \lambda.$$

Довжина сторін AB і BC трикутника ABC

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(1-2,5)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{6,25};$$

$$|BC| = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(-2-1)^2 + (-2,5-2)^2} = \sqrt{29,25};$$

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AE|}{|EC|} = \sqrt{\frac{6,25}{29,25}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{117}} = \frac{5}{\sqrt{117}} \approx 0,4623;$$

Відповідь: $\frac{|AE|}{|EC|} \approx 0,4623$**.**

3. Дві сторони квадрата лежать на прямих

$$-12,5x + 12y + 26 = 0. \qquad (1)$$

$$-12,5x + 12y - 65 = 0. \qquad (2)$$

Знайти його площу.

Розв'язання:

Площа квадрата дорівнює квадрату його сторони $S = a^2$. Довжина сторони квадрата дорівнює відстані між даними прямими, що проходить через його протилежні сторони. Відстань між двома прямими визначається, як відстань між точкою та прямою.

Візьмемо на прямій (1) точку $A\left(2;-\frac{1}{12}\right)$. Рівняння прямої (2) запишемо в нормальному вигляді.

$$\frac{-12{,}5x + 12y - 65}{\sqrt{(-12{,}5)^2 + 12^2}} = 0;$$

$$\frac{-12{,}5x + 12y - 65}{\sqrt{300{,}25}} = 0.$$

В отримане рівняння замість ***x*** та ***y*** підставимо координати точки $A\left(2;-\frac{1}{12}\right)$.

$$a = \left| \frac{-12 \cdot 2 - \frac{12}{12} - 65}{\sqrt{300{,}25}} \right| = \frac{90}{\sqrt{300{,}25}} = \frac{180}{\sqrt{1201}}.$$

Тоді площа квадрата

$$S = a^2 = \left(\frac{180}{\sqrt{1201}} \right)^2 \approx 26{,}9775 \text{ кв. од.}$$

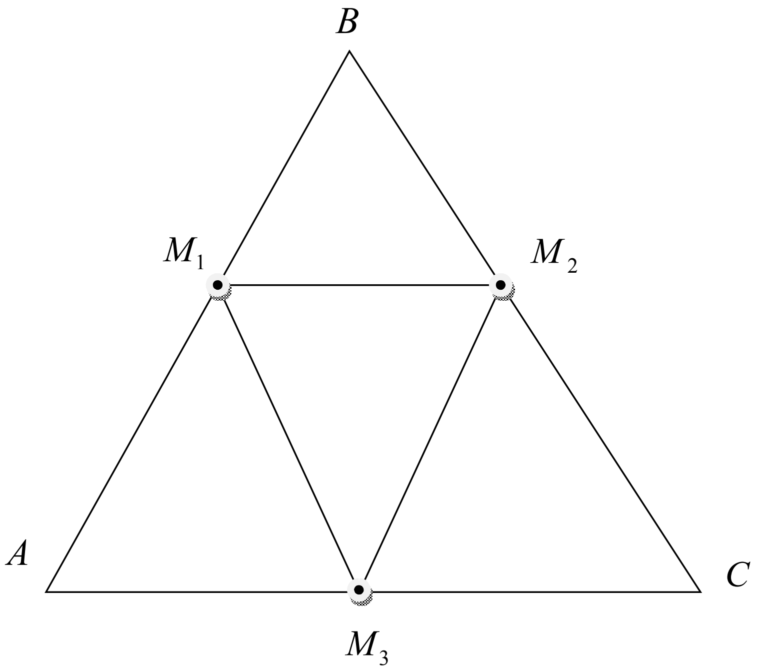
Відповідь: $S \approx 26{,}9775$ кв.од.

4. Точки $M_1(2;1), M_2(2{,}5;0{,}5), M_3(3;-4)$ – координати відповідно середини сторін AB, BC, AC трикутника ABC. Знайти координати точки A. У відповіді вказати суму координат точки $A: z = x + y$

Розв'язання: Знайдемо кутові коефіцієнти прямих M_2M_3 і M_1M_2 за формулою (6):

$$k_{M_1M_2} = \frac{y_{M_2} - y_{M_1}}{x_{M_2} - x_{M_1}} = \frac{0{,}5 - 1}{2{,}5 - 2} = -1$$

$$k_{M_2M_3} = \frac{y_{M_3} - y_{M_2}}{x_{M_3} - x_{M_2}} = \frac{-4 - 0{,}5}{3 - 2{,}5} = -9$$



Кутові коефіцієнти прямих M_2M_3 і M_1M_2 відповідно дорівнюють кутовим коефіцієнтам прямих AB і AC, оскільки M_2M_3 і M_1M_2 – середні лінії трикутника ABC, і вони паралельні сторонам AB і AC відповідно. Тоді, згідно (9):

$$k_{AC} = k_{M_1M_2} = -1;$$

$$k_{AB} = k_{M_2M_3} = -9.$$

Рівняння сторін AB і AC знаходимо за формулою (4):

$$AC: y - y_{M_3} = k_{AC}(x - x_{M_3});$$

$$y + 4 = -1 \cdot (x - 3);$$

$$x + y + 1 = 0.$$

$$AB: y - y_{M_1} = k_{AB}(x - x_{M_1});$$

$$y - 1 = -9 \cdot (x - 2);$$

$$9x + y - 19 = 0.$$

Координати точки A знайдемо, розв'язавши систему рівнянь прямих AB і AC:

$$\begin{cases} 9x + y - 19 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases};$$

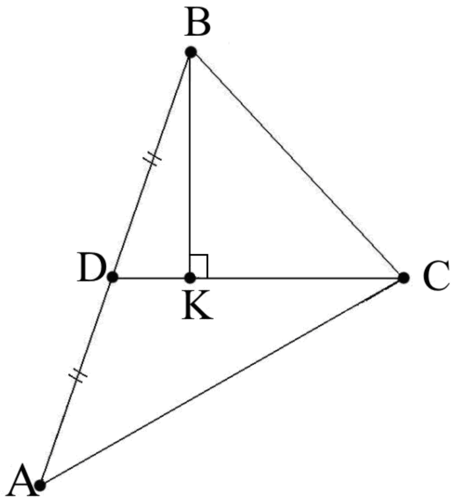
$$x = \frac{5}{2}; \qquad y = -\frac{7}{2};$$

Таким чином, координати точки $A\left(\frac{5}{2};-\frac{7}{2}\right)$.

$$z = x + y = \frac{5}{2} - \frac{7}{2} = -1$$

Відповідь: $z = -1$.

5. Дано координати вершин трикутника ABC $A(-10;-13)$, $B(-2,3)$, $C(-0,5;-1,5)$. Обчислити довжину перпендикуляра, який проведено з вершини B на медіану, проведену з вершини C .



Розв'язання:

За умовою задачі CD – медіана трикутника ABC, BK – перпендикуляр, який проведено на медіану CD з вершини B.

Координати точки D

$$\begin{cases} x_D = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-10-2}{2} = -6 \\ y_D = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{-13+3}{2} = -5 \end{cases}.$$

Рівняння медіани CD за формулою (5)

$$\frac{y - y_D}{y_C - y_D} = \frac{x - x_D}{x_C - x_D};$$

$$\frac{y+5}{-1,5+5} = \frac{x+6}{-0,5+6};$$

$$\frac{y+5}{3,5} = \frac{x+6}{5,5}; \quad \frac{y+5}{7} = \frac{x+6}{11}; \; 7x - 11y - 13 = 0;$$

Довжину висоти BK знайдемо, як відстань від точки B до прямої CD. Приведемо рівняння прямої CD до нормального вигляду:

$$\frac{7x-11y-13}{\sqrt{7^2+(-11)^2}}=0.$$

Тоді

$$d_{BK}=\left|\frac{7\cdot(-2)-11\cdot3-13}{\sqrt{170}}\right|=\frac{60}{\sqrt{170}}\approx 4,6$$

Відповідь: $d_{BK}\approx 4,6$.

6. Питання для самоконтролю

1. Що називається прямою лінією на площині?

2. Запишіть відомі вам рівняння прямої лінії на площині.

3. За якою формулою знаходять кутовий коефіцієнт прямої?

4. Як знайти кут між двома прямими на площині?

5. Запишіть умови паралельності, перпендикулярності двох прямих на площині.

6. Як знайти координати точки перетину двох прямих на площині?

7. Як знайти відстань між точкою і прямою?

8. Як знайти відстань між двома прямими?

Практична робота 3. Лінії другого порядку на площині. Еліпс. Гіпербола. Парабола.

1. Основні поняття та теореми

1. Еліпс. Еліпсом називається геометричне місце точок, для кожної з яких сума відстаней від двох фіксованих точок площини (F_1 і F_2), які називаються фокусами, є величина стала (необхідно, щоб ця стала була більша за відстань між фокусами).

Канонічне (найпростіше) рівняння еліпса з фокусами $F_1(-c,0)$ та $F_2(c,0)$ має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{1}$$

де a – велика піввісь еліпса, b – мала піввісь еліпса.

Якщо $2c$ – відстань між фокусами (фокальна відстань), то a, b, та c (при умові, що $a>b$) зв’язані співвідношенням

$$c^2=a^2-b^2. \tag{2}$$

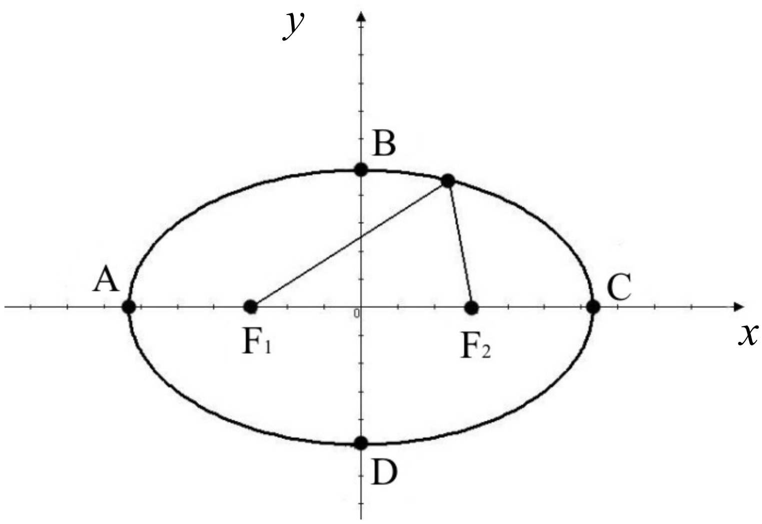


Рис. 1

Ексцентриситетом еліпса (ε) – називається відношення фокальної відстані $(2c)$ до довжини його великої півосі $(2a)$, тобто

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \qquad (3)$$

Оскільки у еліпса $2c > 2a\,(c > a)$, а його фокуси розташовані на великій півосі, то ексцентриситет еліпса $\varepsilon > 1$.

Дві прямі, перпендикулярні до більшої осі, які розташовані симетрично відносно центра на відстані $\frac{a}{\varepsilon}$ від нього, називаються директрисами еліпса. Рівняння директрис у вибраній системі координат мають вигляд:

$$x = -\frac{a}{\varepsilon} \text{ та } x = \frac{a}{\varepsilon}. \qquad (4)$$

Якщо $a = b$, то канонічне рівняння еліпса (1) матиме вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

або

$$x^2 + y^2 = a^2 \qquad (5)$$

Рівняння (5) – це рівняння кола з центром у точці $O(0;0)$ та радіусом $r = a$.

Коло – це геометричне місце точок, кожна з яких рівновіддалена від однієї і тієї ж точки, яка називається центром кола. Рівняння кола має такий вигляд:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2, \qquad (6)$$

де (x_0, y_0) – координати центра кола, r – радіус кола.

2. Гіпербола. Гіперболою називається геометричне місце точок, для кожної з яких різниця відстаней від двох фіксованих точок площини, які називаються фокусами, є величина стала (необхідно, щоб ця стала не дорівнювала нулю і була б менша за фокальну відстань).

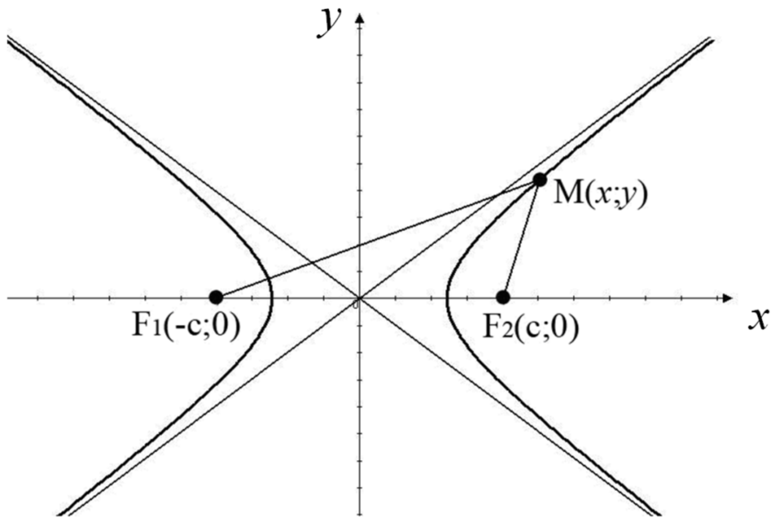


Рис. 2

Канонічне (найпростіше) рівняння гіперболи з фокусами $F_1(-c,0)$ та $F_2(c,0)$ має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{7}$$

де a –дійсна піввісь гіперболи, b –уявна піввісь гіперболи.

Якщо $2c$ – відстань між фокусами гіперболи то a, b та c – зв'язані співвідношення $(c>a)$

$$c^2=a^2+b^2. \tag{8}$$

Якщо $a=b$, то гіпербола називається рівнобічною, її рівняння при цьому має вигляд:

$$x^2-y^2=a^2. \tag{9}$$

Фокуси гіперболи розташовані на її дійсній осі.

$$\varepsilon=\frac{c}{a} \tag{10}$$

Оскільки у гіперболи $2c>2a$ $(c>a)$, то її ексцентриситет $\varepsilon>0$.

Дві прямі, перпендикулярні до дійсної осі гіперболи, які розташовані симетрично відносно центра на відстані $\frac{a}{\varepsilon}$ від нього, називаються директрисами гіперболи. Рівняння директрис у вибраній системі координат мають вигляд:

$$x=-\frac{a}{\varepsilon} \text{ та } x=\frac{a}{\varepsilon}. \tag{11}$$

Асимптоти гіперболи – дві прямі, які визначаються рівняннями:

$$y = \frac{b}{a} \cdot x, \; y = -\frac{b}{a} \cdot x. \qquad (12)$$

3. Парабола. Параболою називається геометричне місце точок для кожної з яких відстань до деякої фіксованої точки площини (F), яка називається фокусом, дорівнює відстані до деякої фіксованої прямої, яка називається директрисею (ця пряма не повинна проходити через фокус) – рис. 3.

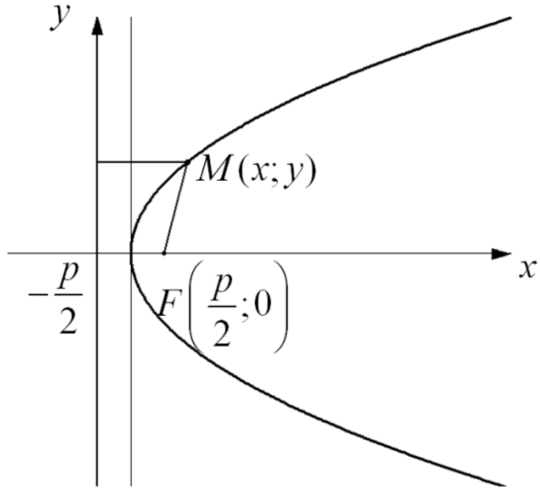


Рис. 3

Канонічне (найпростіше) рівняння параболи з фокусом $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ та директрисою $x = -\frac{p}{2}$ має вигляд

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x \;, \qquad (13)$$

де p – параметр параболи. Ексцентриситет параболи $\varepsilon = 1$.

2. Порядок виконання допуску до практичної роботи

a) Запустити систему за допомогою файла «КВМ.exe»;
b) Перейти у розділ «Практичні роботи»;
c) Обрати практичну роботу натиснувши на гіперпосилання «Лінії другого порядку на площині. Еліпс. Гіпербола. Парабола.»;
d) Після ознайомлення з теоретичним матеріалом натиснути кнопку «Розпочати тестування» і при готовності кнопку «Почати»;
e) Виконати запропоновані завдання з урахуванням автоматично згенерованого параметра α і ввести отримані відповіді у відповідні поля (рис. 4). Якщо практична робота виконана не в комп’ютерній системі параметр α призначається викладачем

(наприклад номер у списку або дві останні цифри залікової книжки).

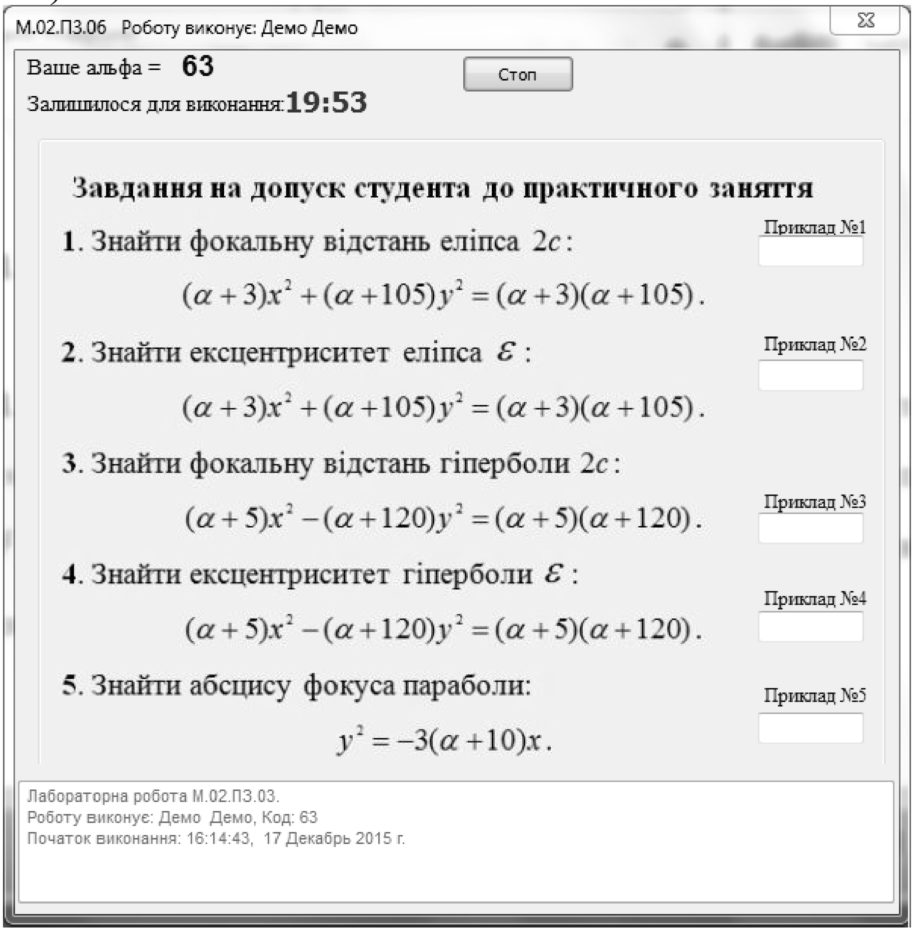


Рис. 4. Вікно для проходження допуску до практичної роботи.

1. Знайти фокальну відстань еліпса $2c$:

$$(\alpha+3)x^2+(\alpha+105)y^2=(\alpha+3)(\alpha+105).$$

2. Знайти ексцентриситет еліпса ε:

$$(\alpha+3)x^2+(\alpha+105)y^2=(\alpha+3)(\alpha+105).$$

3. Знайти фокальну відстань гіперболи $2c$:

$$(\alpha+5)x^2-(\alpha+120)y^2=(\alpha+5)(\alpha+120).$$

4. Знайти ексцентриситет гіперболи ε:

$$(\alpha+5)x^2-(\alpha+120)y^2=(\alpha+5)(\alpha+120).$$

5. Знайти абсцису фокуса параболи:

$$y^2=-3(\alpha+10)x.$$

3. Приклад виконання завдання на допуск студента до практичної роботи

1. Знайти фокальну відстань еліпса:

$$53x^2+155y^2=8215.$$

Розв'язання:

Напишемо рівняння еліпса у канонічному вигляді (1), поділивши обидві частини рівності на 8215.

$$\frac{x^2}{155}+\frac{y^2}{53}=1,$$

де

$a=\sqrt{155}$ – велика піввісь еліпса;

$b=\sqrt{53}$ – мала піввісь еліпса.

Знайдемо фокальну відстань еліпса $2c$, де

$$c^2=a^2-b^2$$

$$2c=2\sqrt{155-53}\approx 20{,}2.$$

Відповідь: $2c\approx 20{,}2$.

2. Знайти ексцентриситет еліпса:

$$53x^2+155y^2=8215.$$

Розв'язання:

Знайдемо ексцентриситет еліпса за формулою (3)

$$\varepsilon=\frac{c}{a};$$

$$a=\sqrt{155}\approx 12{,}45;$$

$$c\approx 10{,}1;$$

Отже, $$\varepsilon=\frac{10{,}1}{12{,}45}\approx 0{,}81.$$

Відповідь: $\varepsilon\approx 0{,}81$.

3. Знайти фокальну відстань гіперболи:

$$55x^2-155y^2=9010.$$

Розв'язання:

Зведемо рівняння гіперболи до канонічного вигляду

$$\frac{x^2}{\frac{9010}{55}}-\frac{y^2}{\frac{9010}{155}}=1.$$

Фокальна відстань гіперболи дорівнює $2c$, де $c^2=a^2+b^2$

$$2c=2\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{\frac{9010}{55}+\frac{9010}{155}}\approx 29{,}79$$

Відповідь: $2c\approx 29{,}79$.

4. Знайти ексцентриситет гіперболи:

$$55x^2-155y^2=9010.$$

Знайдемо ексцентриситет гіперболи за формулою (10)

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \approx \frac{14,89}{12,45} \approx 1,19.$$

Відповідь: $\varepsilon \approx 1,19$.

5. Знайти абсцису фокуса параболи:

$$y^2 = -120x.$$

Розв'язання:

Фокус параболи $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, якщо рівняння параболи $y^2 = -2px$, то $y^2 = -120x$, отже $p = -60$.

Відповідь: $\frac{p}{2} = -30$.

4. Порядок виконання завдань і збереження результатів на сервері

a) Перехід до виконання основної частини практичної роботи виконується автоматично системою за умови успішного проходження допуску;

b) У відповідні поля ввести результати розв'язання задач і натиснути кнопку «Завершити тест достроково» для збереження результатів роботи. Якщо час, відведений на виконання, закінчився – система блокується. У будь-якому випадку комп'ютерна система відобразить оцінку виконаної роботи.

1 Записати рівняння кола, що проходить через три точки $A(0;\alpha+1), B(\alpha-50;0), C(\alpha+1;\alpha+5)$ і обчислити суму координат центра та радіуса $(x_0 + y_0 + r)$.

2 Записати рівняння геометричного місця точок, для кожної з яких відстань до даної точки $A(\alpha-52;50-\alpha)$ та до даної прямої $4x+7=0$ відносяться як $4:5$. Одержане рівняння привести до канонічного вигляду, визначити, що це за лінія та обчислити суму координат її центра симетрії $(x_0;y_0)$ і суму значень півосей $(x_0 + y_0 + a + b)$.

3 Записати рівняння геометричного місця точок, для кожної з яких відстань до даної точки $A(\alpha-51;52-\alpha)$ та до даної прямої $5x+8=0$ відноситься, як $5:4$. Одержане рівняння привести до канонічного вигляду, визначити, що це за лінія та обчислити суму координат її центра симетрії $(x_0; y_0)$ і суму значень півосей$(x_0 + y_0 + a + b)$.

4 Записати рівняння геометричного місця точок, кожна з яких рівновіддалена від точки $A(\alpha - 45; 51 - \alpha)$ та прямої $x + 54 = \alpha$. Одержане рівняння привести до канонічного вигляду, визначити, що це за лінія і обчислити суму значень абсциси x_0, та параметра p**:** $(x_0 + p)$.

5 Записати рівняння геометричного місця точок, кожна з яких рівновіддалена від точки $A(\alpha - 53; 47 - \alpha)$ та прямої $y + \alpha = 54$. Одержане рівняння привести до канонічного вигляду, визначити, що це за лінія, і обчислити суму значень ординати y_0 вершини знайденої лінії та її параметра $p : (y_0 + p)$.

5. Приклад розв'язання задач та вправ для самостійної роботи на практичному занятті

1. Записати рівняння кола, що проходить через три точки $A(0;101)$, $B(60;0), C(101;110)$, і обчислити суму координат центра та радіуса $(x_0 + y_0 + r)$.

Розв'язання:

Шукане рівняння кола має вигляд (6) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$. Оскільки коло проходить через три вказані точки A, B, C, то координати кожної з них задовольняють рівнянню кола. Підставляючи по черзі в шукане рівняння координати даних точок, одержимо систему трьох рівнянь з трьома невідомими x_0, y_0, r:

$$\begin{cases} x_0^2 + (101 - y_0)^2 = r^2 \\ (60 - x_0)^2 + y_0^2 = r^2 \\ (101 - x_0)^2 + (110 - y_0)^2 = r^2. \end{cases} \qquad (14)$$

Оскільки в усіх рівняннях праві частини рівні, то рівні також їх ліві частини. Прирівнюючи ліві частини першого та другого рівнянь, потім першого та третього, одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} x_0^2 + (101 - y_0)^2 = (60 - x_0)^2 + y_0^2 \\ x_0^2 + (101 - y_0)^2 = (101 - x_0)^2 + (110 - y_0)^2. \end{cases}$$

Розкриваючи дужки та спрощуючи, матимемо

$$\begin{cases} 120x_0 - 202y_0 = -6601 \\ 101x_0 + 9y_0 = 6050. \end{cases}$$

Звідки

$$x_0 \approx 54{,}124 \quad y_0 \approx 64{,}831.$$

Підставляючи ці значення x_0 та y_0 в перше рівняння системи (14), одержимо що $r^2 = 4237{,}5963$; тому $r \approx 65{,}097$. Для контролю правильності знайдених значень x_0, y_0 та r їх необхідно підставити в систему рівнянь (14).

Після чого відшукане рівняння кола можна записати у вигляді

$$(x - 54{,}124)^2 + (y - 64{,}831)^2 = 4237{,}5963$$

Необхідна сума значень координат центра та радіуса

$$x_0 + y_0 + r \approx 183{,}982.$$

Відповідь: $x_0 + y_0 + r \approx 183{,}982$.

2. Записати рівняння геометричного місця точок, для кожної з яких відстань до даної точки $A(50;-49)$ та до даної прямої $3x + 5 = 0$ відносяться як $3:4$. Одержане рівняння привести до канонічного вигляду, визначити, що це за лінія, та обчислити суму координат її центра симетрії $(x_0; y_0)$ і суму значень півосей $(x_0 + y_0 + a + b)$.

Розв'язання:

Згідно з умовою задачі зробимо схематичний рисунок. Нехай $M(x, y)$ – будь-яка змінна точка шуканого геометричного місця точок. Опустимо перпендикуляр MB на дану пряму $3x + 5 = 0$ або $x = \frac{-5}{3}$ і визначимо координати точки B (рис. 5). Очевидно, що абсциса точки B дорівнює $\left(-\frac{5}{3}\right)$, а ордината точки B дорівнює ординаті точки M. Таким чином маємо – $B\left(-\frac{5}{3}; y\right)$. Згідно з умовою задачі $\frac{AM}{BM} = \frac{3}{4}$, але оскільки

$$AM = \sqrt{(x - 50)^2 + (y + 49)^2}$$

та

$$BM = \sqrt{\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 + (y - y)^2} = \sqrt{\left(x + \frac{5}{3}\right)^2},$$

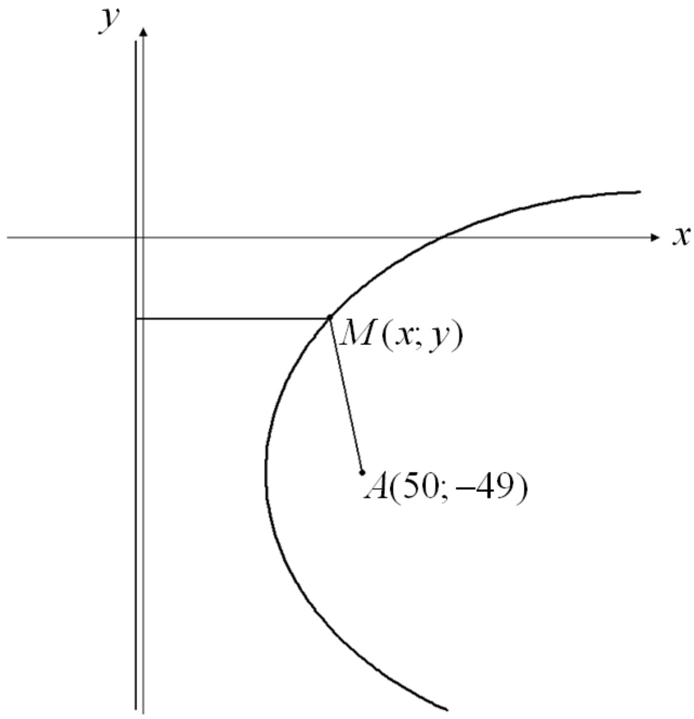


Рис. 5

то одержимо

$$\frac{\sqrt{(x-50)^2+(y+49)^2}}{\sqrt{\left(x+\frac{5}{3}\right)^2}}=\frac{3}{4}$$

або

$$4\sqrt{(x-50)^2+(y+49)^2}=3\sqrt{\left(x+\frac{5}{3}\right)^2}\,.$$

Після піднесення правої та лівої частини до квадрату одержимо

$$16\left(x^2-100x+2500+(y+49)^2\right)=9\left(x^2+\frac{10}{3}x+\frac{25}{9}\right).$$

Звідки

$$16x^2-1600x+40000+16(y+49)^2=9x^2+30x+25$$

або

$$7x^2-1630x+16(y+49)^2+39975=0\,.$$

Виділимо повний квадрат різниці для змінної $\boldsymbol{x}$

$$7\cdot\left[x^2-2\cdot\frac{815}{7}x+\left(\frac{815}{7}\right)^2-\left(\frac{815}{7}\right)^2\right]+16(y+49)^2+39975=0\,,$$

або

$$7\cdot\left[x^2-2\cdot\frac{815}{7}x+\left(\frac{815}{7}\right)^2\right]+16(y+49)^2=\frac{384400}{7},$$

тобто

$$\frac{(x-116{,}43)^2}{7844{,}9}+\frac{(y+49)^2}{3432{,}14}=1.$$

Одержане рівняння є канонічним рівнянням еліпса з центром симетрії в точці з координатами $x_0=\frac{815}{7}\approx 116{,}43$ та $y_0=-49$.

Півосі еліпса

$$a=\sqrt{\frac{384400}{49}}\approx 88{,}57\quad b=\sqrt{\frac{384400}{112}}\approx 58{,}58.$$

Необхідна контрольна сума значень координат центра симетрії $(x_0;y_0)$ та півосей еліпса дорівнює

$$x_0+y_0+a+b\approx 214{,}58.$$

Відповідь: $x_0+y_0+a+b\approx 214{,}58$.

3. Записати рівняння геометричного місця точок, для кожної з яких відстань до даної точки $A(50;-52)$ та до даної прямої $2x+5=0$ відноситься як $5:2$. Одержане рівняння привести до канонічного вигляду, визначити, що це за лінія, та обчислити суму координат її центра симетрії $(x_0;y_0)$ і суму значень півосей (x_0+y_0+a+b).

Розв'язання:

Згідно з умовою задачі зробимо схематичний рисунок. Нехай $M(x,y)$ – будь-яка змінна точка відшукуваного геометричного місця точок. Опустимо перпендикуляр MB на дану пряму $2x+5=0$ або $x=\frac{-5}{2}$. Очевидно, що абсциса точки B дорівнює $\left(-\frac{5}{2}\right)$, а ордината точки B дорівнює ординаті точки М, тобто $B\left(-\frac{5}{2};y\right)$ – (рис. 6).

Згідно з умовою задачі. $\frac{|AM|}{|BM|}=\frac{5}{2}$.

Оскільки $AM=\sqrt{(x-50)^2+(y+52)^2}$ та $BM=\sqrt{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+(y-y)^2}=\sqrt{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2}$, то одержимо, що

$$\frac{\sqrt{(x-50)^2+(y+52)^2}}{\sqrt{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2}}=\frac{5}{2},$$

або

$$2\sqrt{(x-50)^2+(y+52)^2}=5\sqrt{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2}.$$

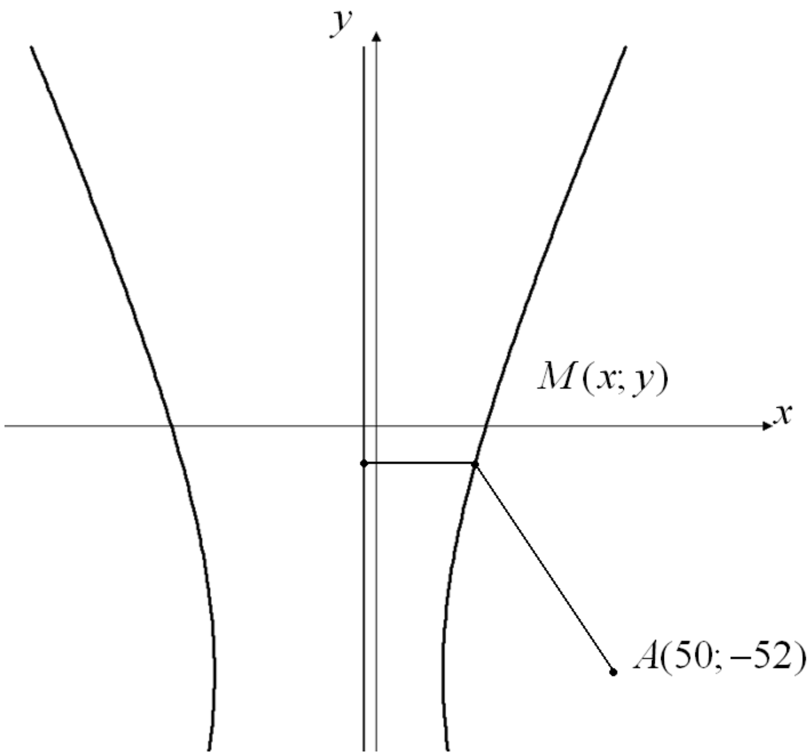


Рис. 6

Після піднесення правої та лівої частини до квадрату одержимо

$$4\left(x^2-100x+2500+(y+52)^2\right)=25\left(x^2+\frac{4}{5}x+\frac{4}{25}\right).$$

Звідки

$$4x^2-400x+10000+4(y+52)^2=25x^2+20x+4$$

або

$$21x^2+420x-4(y+52)^2-9996=0.$$

Виділимо повний квадрат різниці для змінної $\boldsymbol{x}$

$$21(x^2+2\cdot 10\cdot x+10^2-10^2)-4(y+52)^2-9996=0$$

або

$$21(x^2+20x+100)-4(y+52)^2=12096.$$

Після ділення останнього рівняння на 12096 одержимо

$$\frac{(x+10)^2}{576}-\frac{(y+52)^2}{3024}=1,$$

або

$$\frac{(x+10)^2}{24^2}-\frac{(y+52)^2}{12\sqrt{21}}=1$$

Останнє рівняння є канонічне рівняння гіперболи з центром симетрії в точці з координатами $x_0=-10$, $y_0=-52$.

Півосі гіперболи – дійсна $a=24$, уявна піввісь $b=12\sqrt{21}\approx 54{,}991$. Відшукувана контрольна сума значень координат центра симетрії $(x_0;y_0)$ та півосей гіперболи дорівнює

$x_0+y_0+a+b\approx 16{,}991$

Відповідь: $x_0+y_0+a+b\approx 16{,}991$.

4. Записати рівняння геометричного місця точок, кожна з яких рівновіддалена від точки $A(53;-59)$ та прямої $x-56=0$. Одержане рівняння привести до канонічного вигляду, визначити, що це за лінія, та обчислити суму значень абсциси x_0, вершини знайденої лінії та параметра $p:(x_0+p)$.

Розв'язання:

Згідно з умовою задачі, зробимо схематичний рисунок. Нехай $M(x,y)$ – будь-яка змінна точка відшукуваного геометричного місця точок. Опустимо перпендикуляр MB на дану пряму $x-56=0$ або $x=56$. Очевидно, що точка B має координати $x_B=56$, $y_B=y$, тобто $B(56;y)$ (рис. 7). Згідно з умовою задачі $AM = BM$, при цьому

$$AM=\sqrt{(x-53)^2+(y+59)^2}$$

та

$$BM=\sqrt{(x-56)^2+(y-y)^2}=\sqrt{(x-56)^2}\,.$$

Тому одержимо

$$\sqrt{(x-53)^2+(y+59)^2}=\sqrt{(x-56)^2}\,.$$

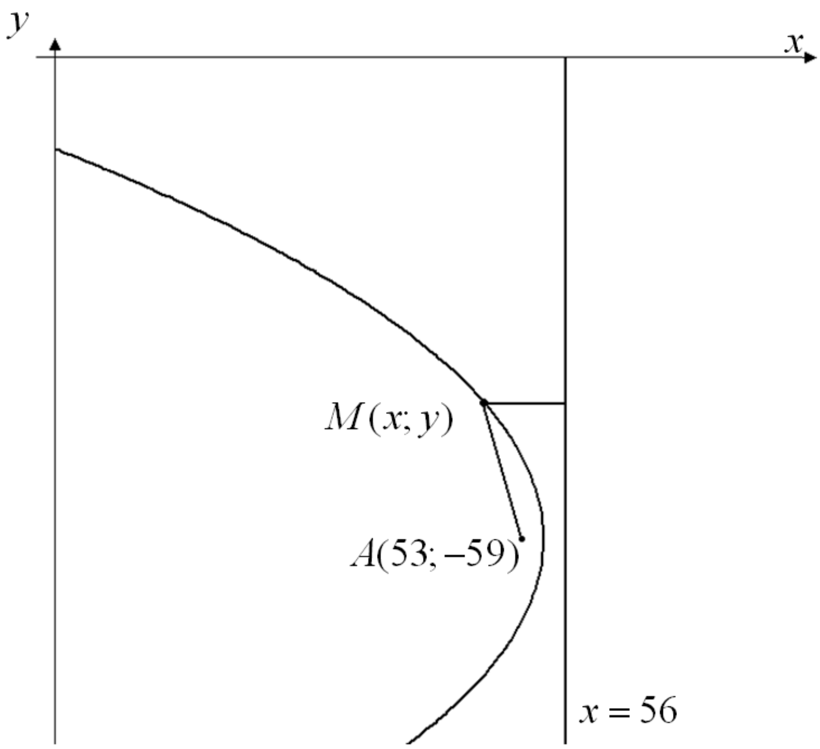


Рис. 7

Після піднесення правої та лівої частин до квадрату одержимо

$$x^2 - 106x + 2809 + (y+59)^2 = x^2 - 112x + 3136 .$$

Звідки

$$(y+59)^2 = -6x + 327$$

або

$$(y+59)^2 = -6\left(x - \frac{327}{6}\right).$$

Якщо виконати заміну $X = x - \frac{327}{6}$, та $Y = y + 59$, то одержимо канонічне рівняння параболи (13).

$$Y^2 = 2 \cdot (-3) X,$$

де $p = -3$ – параметр параболи.

Знайдене рівняння

$$(y+59)^2 = 2 \cdot (-3) \cdot \left(x - \frac{327}{6}\right)$$

це також рівняння параболи, яка має вершину в точці з координатами $x_0 = \frac{327}{6} = 54{,}5$; $y_0 = -59$, і параметром $p = -3$. шукана контрольна сума значень координат вершини і параметра дорівнює

$x_0 + p = 51{,}5$

Відповідь: $x_0 + p = 51{,}5$.

5. Записати рівняння геометричного місця точок, кожна з яких рівновіддалена від точки $A(62;-65)$ та прямої $y+57=0$. Одержане рівняння привести до канонічного вигляду, визначити, що це за лінія і обчислити суму значень ординати y_0, вершини знайденої лінії та її параметра $p:(y_0+p)$.

Розв'язання:

Відповідно до умови задачі зробимо схематичний рисунок. Нехай $M(x,y)$ – будь-яка змінна точка відшукуваної лінії. Опустимо перпендикуляр MB на дану пряму $y+57=0$ або $y=-57$ і визначимо координати точки B (рис. 8).

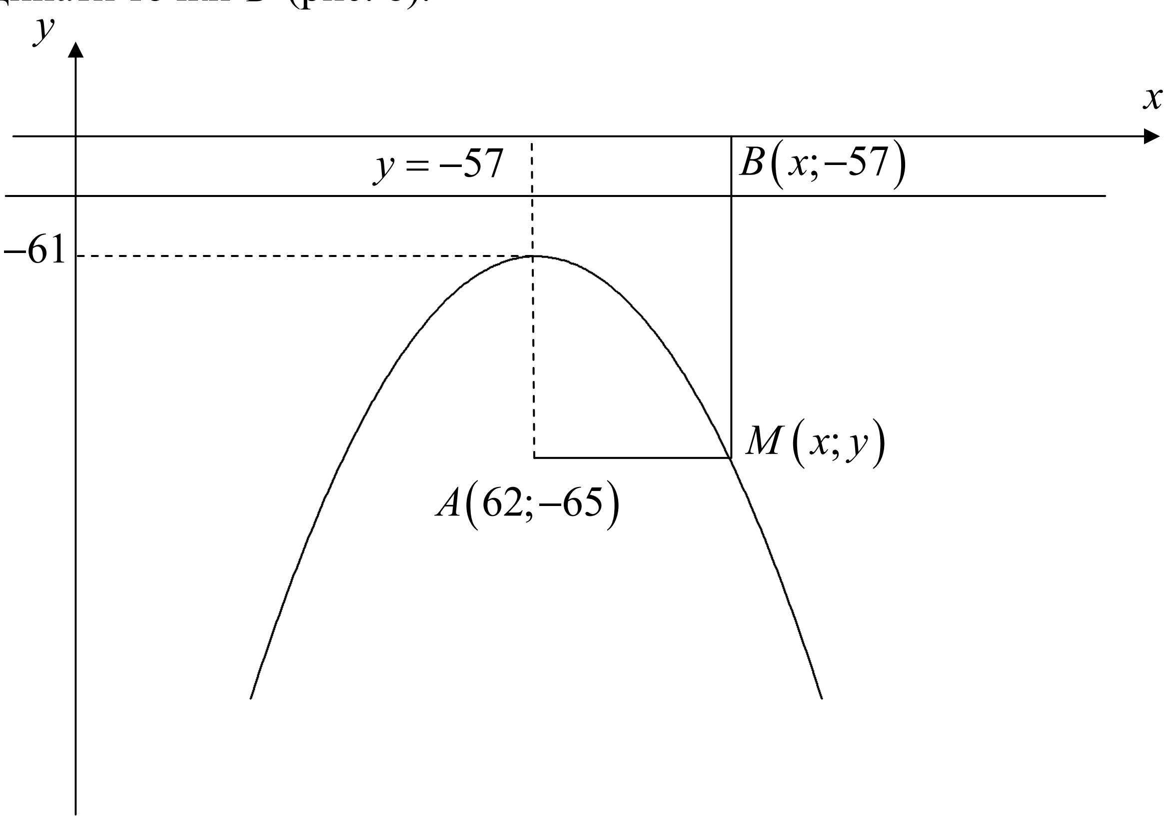


Рис. 8

Очевидно, що абсциса точки B дорівнює абсцисі точки M, а ордината точки B дорівнює (-57). Таким чином маємо, що $B(x;-57)$. Згідно з умовою задачі $AM = BM$, але оскільки

$$AM=\sqrt{(x-62)^2+(y+65)^2},$$

$$BM=\sqrt{(x-x)^2+(y+57)^2}=\sqrt{(y+57)^2},$$

то одержимо

$$\sqrt{(x-62)^2+(y+65)^2}=\sqrt{(y+57)^2}.$$

Після піднесення правої та лівої частини до квадрату одержимо

$$(x-62)^2+y^2+130y+4225=y^2+114y+3249\,.$$

Звідки

$$(x-62)^2=-16y-976$$

або

$$(x-62)^2=-16(y+61)\,.$$

Якщо виконати заміну $X=x-62$ та $Y=y+61$, то одержимо канонічне рівняння параболи

$$X^2=2\cdot(-8)Y,$$

де $p=-8$ – параметр параболи.

Дійсно, рівняння вигляду

$$x^2=2py \qquad (15)$$

Це найпростіше рівняння параболи, у якої директриса паралельна осі Ox, а її вітки направлені або вгору $(p>0)$ або вниз $(p<0)$.

Таким чином, знайдене рівняння

$$(x-62)^2=2\cdot(-8)(y+61)$$

є рівнянням параболи, яка має вершину в точці з координатами $x_0=62$, $y_0=-61$ і параметр $p=-8$.

Відшукувана контрольна сума ординати вершини і параметра дорівнює

$y_0+p=-69$.

Відповідь: $y_0+p=-69$.

6. Питання для самоконтролю

1. Що називається еліпсом, запишіть його канонічне рівняння?

2. Що називається ексцентриситетом еліпса?

3. Що називається директрисами еліпса?

4. Запишіть рівняння кола.

5. Дайте означення гіперболи. Запишіть її канонічне рівняння.

6. Яка гіпербола називається рівнобічною?

7. Дайте означення та запишіть формули для знаходження ексцентриситета, директрис та асимптот гіперболи.

8. Що називається параболою? Запишіть її рівняння.

9. Що таке фокальна відстань і як її знайти?

Практична робота 4. Перетворення прямокутних координат на площині.

1. Основні поняття та теореми

Загальне рівняння кола має вигляд:

$$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$$

Для того, щоб загальне рівняння другого ступеня з двома змінними було колом, необхідно, щоб коефіцієнти при квадратах змінних були рівними між собою і в рівнянні була відсутня складова з добутком цих змінних.

Еліпсом називається геометричне місце точок, для яких сума відстаней до двох фіксованих точок площини, які називаються фокусами, є така величина, більша, ніж відстань між фокусами.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

канонічне рівняння еліпса: a – велика піввісь, b – мала піввісь.

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(b-\beta)^2}{b^2} = 1$$

- рівняння еліпса з центром у точці $O(\alpha;\beta)$;

$\varepsilon = \frac{c}{a}$ – ексцентриситет еліпса, де ε – фокальна відстань, a – велика піввісь.

Прямі : $x = -\frac{a}{\varepsilon}$, $x = \frac{a}{\varepsilon}$ називаються директрисами еліпса.

Гіперболою називається геометричне місце точок, для яких різниця відстаней від двох фіксованих точок площини, які називаються фокусами, є величина стала.

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ – канонічне рівняння гіперболи,

$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ – рівняння гіперболи з центром у точці $O(\alpha;\beta)$.

Рівняння асимптот гіперболи $y = \frac{b}{a}x$; $y = -\frac{b}{a}x$; $\varepsilon = \frac{c}{a}$ – ексцентриситет гіперболи, де c – фокусна відстань, a – відстань від центра гіперболи до її вершини $x = -\frac{a}{\varepsilon}$, $x = \frac{a}{\varepsilon}$ – директриси гіперболи.

Параболою називається геометричне місце точок, для кожної з яких відстань до деякої фіксованої точки площини, яка називається фокусом, рівна відстані до деякої фіксованої прямої, яка називається директрисою.

$y^2 = 2px$ – канонічне рівняння параболи.

2. Порядок виконання допуску до практичної роботи

a) Запустити систему за допомогою файла «КВМ.exe»;
b) Перейти у розділ «Практичні роботи»;
c) Обрати практичну роботу натиснувши на гіперпосилання «Перетворення прямокутних координат на площині»;
d) Після ознайомлення з теоретичним матеріалом натиснути кнопку «Розпочати тестування» і при готовності кнопку «Почати»;
e) Виконати запропоновані завдання з урахуванням автоматично згенерованого параметра α і ввести отримані відповіді у відповідні поля (рис. 1). Якщо практична робота виконана не в комп'ютерній системі параметр α призначається викладачем (наприклад номер у списку або дві останні цифри залікової книжки).

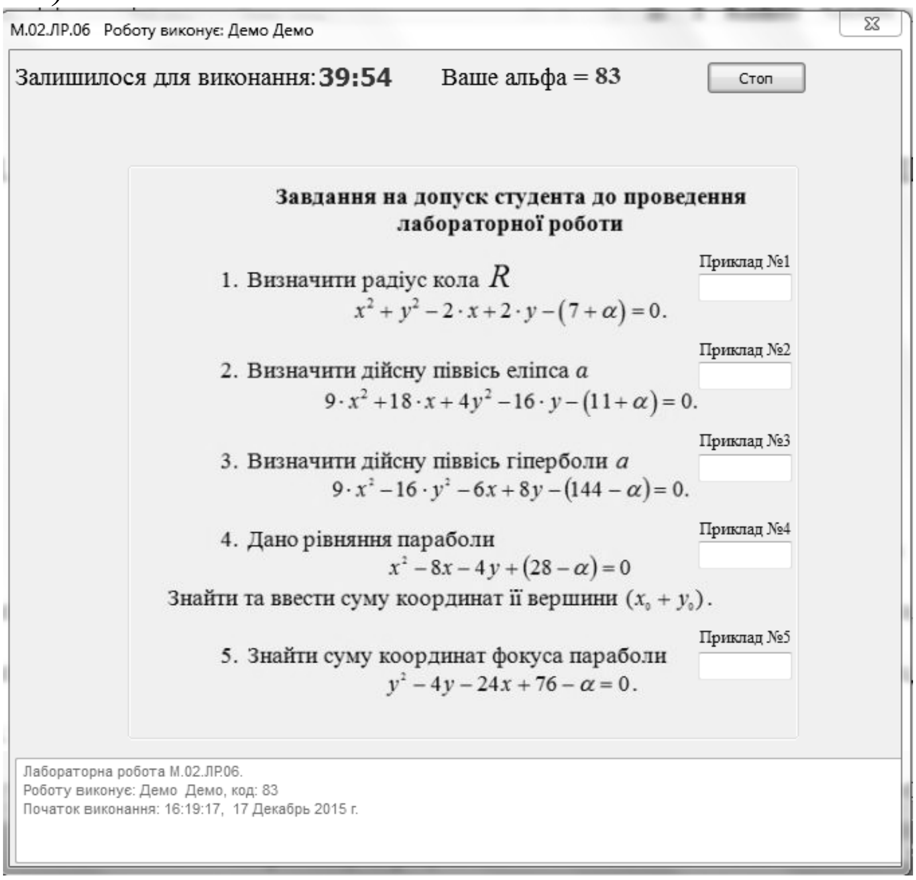


Рис. 1. Вікно для проходження допуску до практичної роботи.

1. Визначити радіус кола R

$$x^2+y^2-2x+2y-7-\alpha=0$$

2. Визначити дійсну піввісь еліпса a

$$9x^2+4y^2+18x-16y-11-\alpha=0$$

3. Визначити дійсну піввісь гіперболи a

$$9x^2-16y^2-6x+8y-144+\alpha=0$$

4. Дано рівняння параболи

$$x^2-8x-4y+(28-\alpha)=0.$$

Знайти та ввести суму координат її вершини: (x_0+y_0).

5. Знайти суму координат фокуса параболи

$$y^2-4y-24x+76-\alpha=0.$$

3. Приклад виконання завдання на допуск студента до практичної роботи

1. Визначити радіус кола

$$x^2+y^2-2x+2y-57=0$$

Розв'язання:

Виконаємо перетворення даного рівняння до вигляду:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2;$$

$$x^2-2x+1+y^2+2y+1-1-1-57=0;$$

$$(x-1)^2+(y+1)^2-59=0;$$

$$(x-1)^2+(y+1)^2=59;$$

$$(x-1)^2+(y+1)^2=(\sqrt{59})^2.$$

Отже, з рівняння кола бачимо, що його радіус дорівнює $\sqrt{59}\approx 7{,}68$.

Відповідь: $R\approx 7{,}68$

2. Визначити дійсну піввісь еліпса

$$9x^2+4y^2+18x-16y-61=0$$

Розв'язання:

Перетворимо дане рівняння до вигляду:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1;$$

$$(3x)^2+2\cdot 3x\cdot 3+9+(2y)^2-2\cdot 2y\cdot 4+16-9-16-61=0;$$

$$(3x+3)^2+(2y-4)^2-86=0;$$

$$3(x+1)^2+2(y-2)^2=86;$$
$$\frac{3(x+1)^2}{86}+\frac{2(y-2)^2}{86}=1;$$
$$\frac{(x+1)^2}{\frac{86}{3}}+\frac{(y-2)^2}{43}=1.$$

Дійсна піввісь еліпса: $a=\sqrt{\frac{86}{3}}\approx 5{,}35$.

Відповідь: $a\approx 5{,}35$.

3. Визначити дійсну піввісь гіперболи

$$9x^2-16y^2-6x+8y-94=0$$

Розв'язання:

Перетворимо рівняння гіперболи до вигляду: $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$;

$$(3x)^2-2\cdot 3x+1-\left((4y)^2-2\cdot 4y+1\right)-1+1-94=0;$$
$$(3x-1)^2-(4y-1)^2=94;$$
$$\frac{3^2\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)^2}{94}-\frac{4^2\cdot\left(y-\frac{1}{4}\right)^2}{94}=1;$$
$$\frac{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{94}{9}}-\frac{\left(y-\frac{1}{4}\right)^2}{\frac{94}{16}}=1.$$

Дійсна піввісь гіперболи: $a=\frac{\sqrt{94}}{3}\approx 3{,}23$.

Відповідь: $a\approx 3{,}23$.

4. Дано рівняння параболи

$$x^2-8x-4y-22=0.$$

Знайти та ввести суму координат її вершини (x_0+y_0).

Розв'язання:

Перетворимо рівняння заданої параболи до виду:

$$(x-a)^2=2p\cdot(y-b);$$
$$x^2-2\cdot x\cdot 4+16-16-22=4y;$$
$$(x-4)^2-38=4y;$$
$$(x-4)^2=4y+38;$$

$$(x-4)^2 = 4\left(y+\frac{38}{4}\right);$$

$$(x-4)^2 = 4\left(y+\frac{19}{2}\right);$$

Точка $A\left(4;-\frac{19}{2}\right)$ – вершина параболи.

Контрольна сума координат її вершини: $4+\left(\frac{-19}{2}\right)=-5{,}5$.

Відповідь: $A\left(4;-\frac{19}{2}\right)$; $x_0+y_0=-5{,}5$.

5. Знайти суму координат фокуса параболи

$$y^2-4y-24x+26=0.$$

Розв’язання:

Виконаємо перетворення даного рівняння до вигляду:

$$(y-b)^2 = 2p(x-a);$$

$$y^2-4y+4-24x+26-4=0;$$

$$(y-2)^2 = 24x-22;$$

$$(y-2)^2 = 24\left(x-\frac{22}{24}\right).$$

Звідси, точка $A\left(\frac{11}{12};2\right)$ – вершина параболи, $p=12$.

Абсциса фокуса параболи дорівнює:

$$\frac{11}{12}+\frac{p}{2}=\frac{11}{12}+6=6\frac{11}{12}.$$

Ордината фокуса параболи дорівнює ординаті вершини параболи, тобто 2.

Точка $F\left(6\frac{11}{12};2\right)$ – фокус параболи.

Контрольна сума: $6\frac{11}{12}+2\approx 8{,}92$.

Відповідь: $8{,}92$.

4. Порядок виконання завдань і збереження результатів на сервері

a) Перехід до виконання основної частини практичної роботи виконується автоматично системою за умови успішного проходження допуску;

b) У відповідні поля ввести результати розв’язання задач і натиснути кнопку «Завершити тест достроково» для збереження результатів роботи. Якщо час, відведений на виконання, закінчився – система блокується. У будь-якому випадку комп’ютерна система відобразить оцінку виконаної роботи.

1. Показати, що рівняння $25x^2+16y^2-50x+16y-371-\alpha=0$ виражає еліпс. Знайти центр, півосі, фокуси і ексцентриситет еліпса. У відповіді вказати суму півосей $\left(a+b\right)$.

2. Знайти координати центра, фокусів, вершин, півосі, ексцентриситет і написати рівняння асимптот гіперболи, яка задана рівнянням:

$$9x^2-16y^2+18x+64y-199-\alpha=0.$$

У відповіді вказати суму півосей $\left(a+b\right)$.

3. Дано рівняння параболи $y^2+6y+3x-15-\alpha=0$. Знайти координати її вершин, фокус, рівняння директриси. У відповіді вказати суму координат вершини параболи $\left(x_0+y_0\right)$.

4. Дано рівняння $16x^2+16y^2+48x-8y-43-\alpha=0$. Знайти координати центра і радіус кола. У відповіді вказати радіус кола R.

5. Скласти рівняння геометричного місця точок на площині, якщо відстань кожної з них у два рази ближча до прямої $x=2+\alpha$, ніж до точки $A(8;0)$. У відповіді вказати суму квадратів півосей $\left(a^2+b^2\right)$.

5. Приклади розв’язання задач та вправ до практичної роботи

1. Показати, що рівняння $25x^2+16y^2-50x+16y-371=0$ виражає еліпс. Знайти центр, півосі, фокуси і ексцентриситет еліпса. У відповіді вказати суму півосей.

Розв’язання: Перетворимо дане рівняння до вигляду :

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1;$$

$$25x^2+16y^2-50x+16y-371=0;$$

$$25(x^2-2x+1)+16\left(y^2+y+\frac{1}{4}\right)=371+25+4;$$

$$25(x-1)^2+16\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=400;$$

$$\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}{25}=1;$$

Рівняння виражає еліпс, центр якого в точці $\left(1;-\frac{1}{2}\right)$, а півосі $a=4$, $b=5$ (рис. 2)

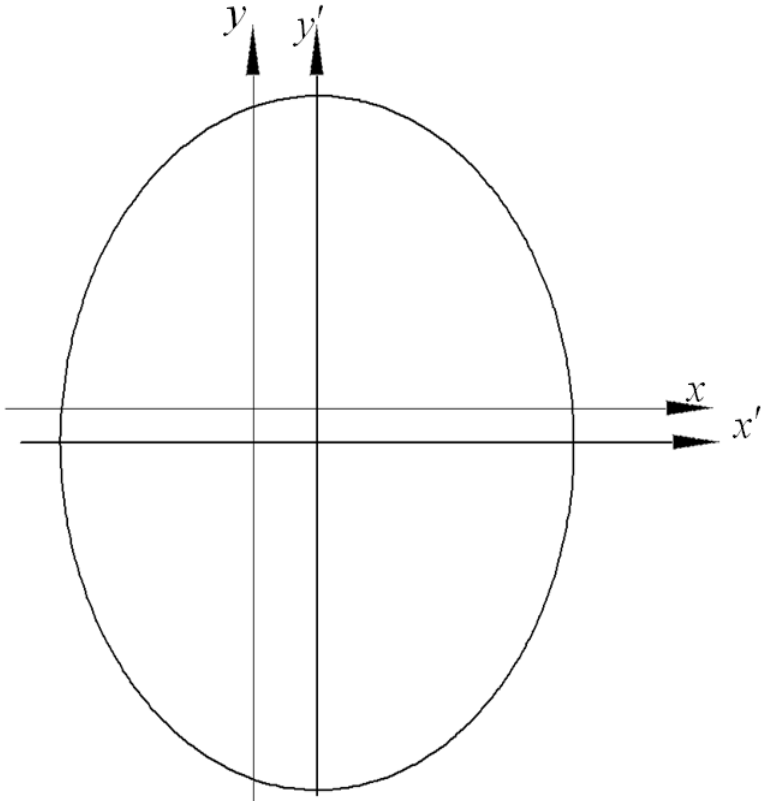


Рис.2

Оскільки еліпс витягнутий по осі ***y***, то замість стандартної формули $c=\sqrt{a^2-b^2}$, ми застосуємо $c=\sqrt{b^2-a^2}$.

$$c=\sqrt{5^2-4^2}=3.$$

Координати фокусів: $F_1(0;3)$, $F_2(0;-3)$

$$\varepsilon = \frac{c}{a}; \quad \varepsilon = \frac{3}{5}$$

$$\begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' - \dfrac{1}{2}. \end{cases},$$

Відносно нової системи координат $(x'; y')$ координати вершини будуть: $(4;0)$, $(-4;0)$, $(0;5)$, $(0;-5)$, координати фокусів $(0;3)$ і $(0;-3)$.

Відносно системи координат $(x; y)$ координати вершини будуть $\left(5;-\frac{1}{2}\right)$, $\left(3;-\frac{1}{2}\right)$, $\left(1;\frac{9}{2}\right)$, $\left(1;-\frac{11}{2}\right)$, а фокуси в точках: $F_1\left(1;\frac{5}{2}\right)$, $F_2\left(1;-\frac{7}{2}\right)$.

Відповідь: $\left(1;-\frac{1}{2}\right)$ – центр; $a = 4$, $b = 5$ – півосі; $F_1\left(1;\frac{5}{2}\right)$, $F_2\left(1;-\frac{7}{2}\right)$ – фокуси; $\varepsilon = \frac{3}{5}$ – ексцентриситет еліпса, сума півосей $a + b = 4 + 5 = 9$.

2. Знайти координати центра, фокусів, вершин, півосі, ексцентриситет і написати рівняння асимптот гіперболи

$$4 \cdot x^2 - 9 \cdot y^2 - 8 \cdot x + 18 \cdot y - 41 = 0.$$

У відповіді вказати суму півосей.

Розв'язання:

Запишемо рівняння $4 \cdot x^2 - 9 \cdot y^2 - 8 \cdot x + 18 \cdot y - 41 = 0$ у вигляді: $4 \cdot (x^2 - 2x) - 9 \cdot (y^2 - 2y) - 41 = 0$. Доповнимо вирази в дужках до повних квадратів, додавши до правої і лівої частини рівності відповідно однакові числа, одержимо:

$$4 \cdot (x^2 - 2x + 1) - 9 \cdot (y^2 - 2y + 1) = 41 + 4 - 9.$$

Звідки: $4 \cdot (x^2 - 2x + 1) - 9 \cdot (y^2 - 2y + 1) = 36$.

$$4 \cdot (x-1)^2 - 9 \cdot (y-1)^2 = 36;$$

$$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1.$$

З рівняння слідує, що центр гіперболи в точці $(1;1)$, $a = 3$, $b = 2$ (рис. 3).

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a}} = \frac{\sqrt{13}}{3}.$$

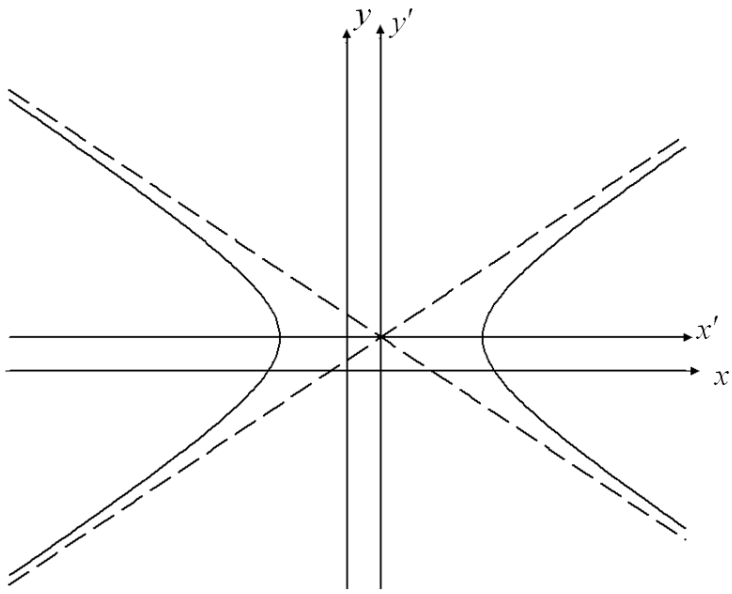


Рис. 3

Відносно нової системи координат, початок якої в центрі гіперболи, вершини мають координати $(3;0)$ і $(-3;0)$, фокуси мають координати $(\sqrt{13};0)$ і $(-\sqrt{13};0)$. Асимптоти виражаються рівняннями:

$$y' = \pm\frac{b}{a}\cdot x',\ y' = \pm\frac{2}{3}\cdot x'.$$

Відносно старої системи координат, вершини мають координати $(4;1)$, і $(-2;1)$, фокуси $(\sqrt{13}+1;1)$ і $(-\sqrt{13}+1;1)$. Асимптоти виражаються рівняннями:

$$y-1 = \pm\frac{2}{3}\cdot(x-1).$$

Відповідь: $(1;1)$ – центр; $(4;1)$, $(-2;1)$ – вершини; $(\sqrt{13}+1;1)$ і $(-\sqrt{13}+1;1)$ – фокус; $a=3$, $b=2$ – півосі; $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{13}}{3}$ – ексцентриситет; $y-1=\pm\dfrac{2}{3}\cdot(x-1)$ – асимптоти, сума півосей $a+b=3+2=5$.

3. Дано рівняння параболи: $y^2+4y-24x+76=0$.
Знайти координати її вершин, фокус, рівняння директриси. У відповіді вказати суму координат вершини параболи.

Розв'язання:

Перетворимо рівняння $y^2+4y-24x+76=0$ до виду

$$(y-b)^2 = 2\cdot(x-a);$$

$$y^2 + 4\cdot y - 24\cdot x + 76 = 0;$$

$$y^2 + 4\cdot y = 24\cdot x - 76;$$

$$y^2 + 2\cdot 2\cdot y + 2^2 = 24\cdot x - 76 + 2^2;$$

$$(y+2)^2 = 24\cdot(x-3).$$

Звідки $A(3;-2)$, $2\cdot p = 24$, $p = 12$.

Відстань від вершини параболи до фокуса рівна $\frac{p}{2} = \frac{12}{2} = 6$.

Абсциса фокуса рівна $3 + \frac{p}{2} = 3 + 6 = 9$. Фокус лежить правіше вершини параболи, тому що парабола направлена вітками вправо, ордината фокуса рівна ординаті вершини, тому що вісь параболи паралельна осі Ox, тоді $F(9;-2)$.

Відповідь: $A(3;-2)$ – центр; $F(9;-2)$ – фокус; сума координат вершини 1

4. Дано рівняння $4x^2 + 4y^2 + 4x - 8y - 11 = 0$. Знайти координати центру і радіус кола.

Розв’язання:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2;$$

$$4x^2 + 4x + 4y^2 - 8y - 11 = 0.$$

Доповнимо перші дві складові рівняння до повного квадрату.

$$\left[(2x)^2 + 2\cdot(2x)\cdot 1 + 1^2\right] - 1^2 + \left[(2y)^2 - 2\cdot 2y\cdot 2 + 2^2\right] - 2^2 - 11 = 0;$$

$$(2x+1)^2 - 1 + (2y-2)^2 - 4 - 11 = 0;$$

$$4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 4(y-1)^2 = 1 + 4 + 11;$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{16}{4};$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = 2^2.$$

Центр кола в точці $O\left(-\frac{1}{2};1\right)$, $R = 2$.

Відповідь: $O\left(-\frac{1}{2};1\right)$, $R = 2$.

5. Скласти рівняння траєкторії точки M, яка при своєму русі по площині залишається вдвічі ближче від точки $A(1;0)$, ніж від прямої $\boldsymbol{x = 4}$ (рис. 4). У відповіді вказати значення $a^2 + b^2$

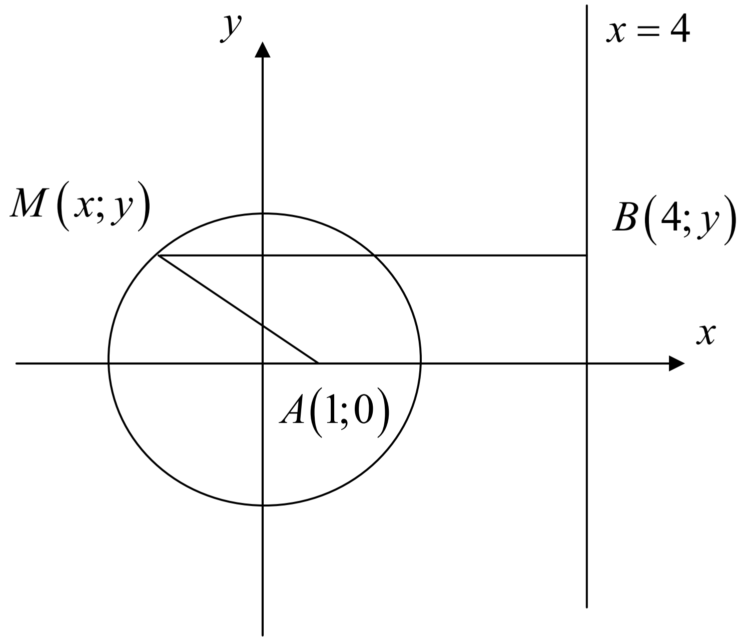


Рис. 4

Розв'язання:

Для будь – якої точки $M(x;y)$ геометричного місця точок справедливо $2 \cdot MA = MB$.

$$MA = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}\,;$$

$$MB = \sqrt{(x-4)^2 + (y-y)^2} = \sqrt{(x-4)^2} = |x-4|.$$

Звідки : $$2 \cdot \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = |x-4|;$$

$$4 \cdot (x-1)^2 + 4 \cdot y^2 = (x-4)^2;$$

$$4\left(x^2 - 2x + 1\right) + 4y^2 = x^2 - 8x + 16;$$

$$4x^2 - 8x + 4 + 4y^2 = x^2 - 8x + 16;$$

$$3 \cdot x^2 - 4 \cdot y^2 = 12\,;$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

Звідси видно, що рівняння траєкторії – еліпс.

Відповідь: еліпс, $a^2 + b^2 = 4 + 3 = 7$

6. Питання для самоконтролю

1. Що називається еліпсом? Запишіть його канонічне рівняння?

2. Що називається ексцентриситетом еліпса?

3. Що називається директрисами еліпса?

4. Запишіть рівняння кола.

5. Дайте означення гіперболи. Запишіть її канонічне рівняння.

6. Яка гіпербола називається рівнобічною?

7. Дайте означення та запишіть формули для знаходження ексцентриситета, директрис та асимптот гіперболи.

8. Що називається параболою? Запишіть її рівняння.

Практична робота 5. Полярні координати та їх зв'язок з прямокутними координатами.

1. Основні поняття та теореми

Якщо полюс системи координат знаходиться в початку прямокутної системи координат, а вісь Ox співпадає з полярною віссю, вісь Oy перпендикулярна осі Ox і спрямована так, що їй відповідає полярний кут $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то за відомими полярними координатами точки її прямокутні координати x і y визначаються за формулами:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\varphi & (1) \\ y = r \cdot \sin\varphi & (2) \end{cases}$$

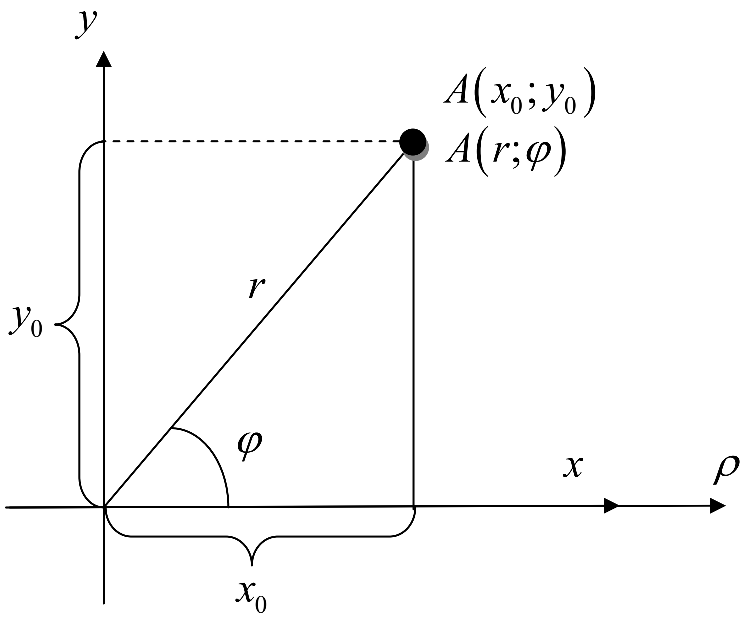
Якщо відомі прямокутні координати $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{y}$ точки, її полярні координати визначаються за формулами:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (3)$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad (4)$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad (5)$$

$$tg\varphi = \frac{y}{x} \qquad (6)$$



2. Порядок виконання допуску до практичної роботи

a) Запустити систему за допомогою файла «КВМ.exe»;
b) Перейти у розділ «Практичні роботи»;
c) Обрати практичну роботу натиснувши на гіперпосилання «Полярні координати та їх зв'язок з прямокутними координатами»;
d) Після ознайомлення з теоретичним матеріалом натиснути кнопку «Розпочати тестування» і при готовності кнопку «Почати»;
e) Виконати запропоновані завдання з урахуванням автоматично згенерованого параметра α і ввести отримані відповіді у відповідні поля (рис. 1). Якщо практична робота виконана не в комп'ютерній системі параметр α призначається викладачем (наприклад номер у списку або дві останні цифри залікової книжки).

1. Знайти прямокутні координати точки A, полярні координати якої $\left(2+\alpha;\frac{\pi}{4}\right)$. У відповіді вказати $x+y$.

2. Знайти полярний радіус точки з прямокутними координатами $M\left(-\alpha;\alpha\cdot\sqrt{3}\right)$. У відповіді вказати r.

3. Прямокутні координати точки $A(2;3+\alpha)$. Знайти її полярні координати. У відповіді вказати $r+\varphi(\textit{рад})$.

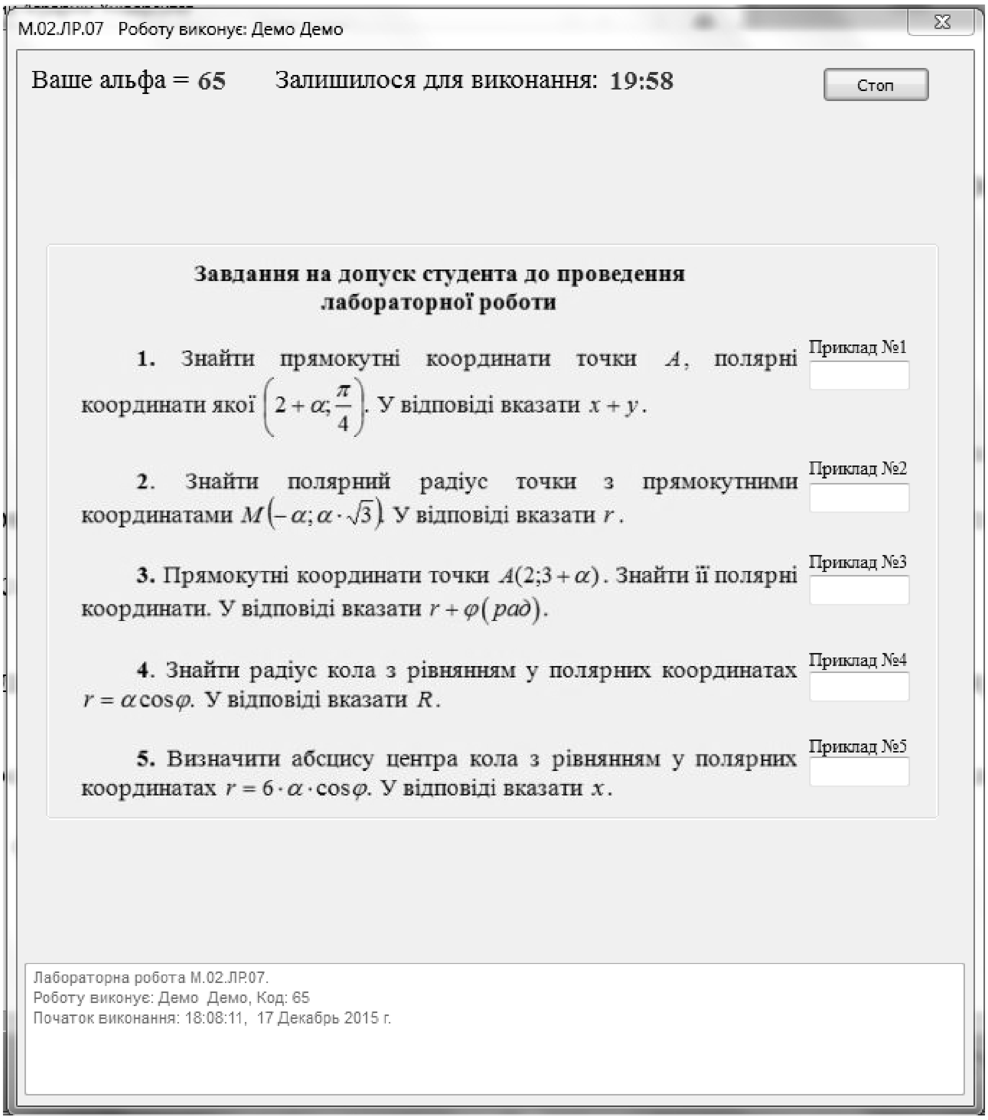


Рис. 1. Вікно для проходження допуску до практичної роботи.

4. Знайти радіус кола з рівнянням у полярних координатах $r=\alpha\cos\varphi.$ У відповіді вказати R.

5. Визначити абсцису центра кола з рівнянням у полярних координатах $r=6\cdot\alpha\cdot\cos\varphi.$ У відповіді вказати x.

3. Приклад виконання завдання на допуск студента до практичної роботи

1. Знайти прямокутні координати точки A, полярні координати якої $\left(52; \frac{\pi}{4}\right).$

Розв'язання:

Перейдемо від полярної до прямокутної системи координат, скориставшись формулами переходу (1) і (2)

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\varphi \\ y = r \cdot \sin\varphi \end{cases}.$$

Точка $A\left(52; \dfrac{\pi}{4}\right)$, тобто $r = 52$, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. Тому,

$$x = 52 \cdot \cos\frac{\pi}{4} = 54 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 26\sqrt{2}$$

$$y = 52 \cdot \sin\frac{\pi}{4} = 54 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 26\sqrt{2}$$

Отже, точка A в прямокутній системі координат матиме такі координати: $A(26\sqrt{2}; 26\sqrt{2})$.

Відповідь: $A(26\sqrt{2}; 26\sqrt{2})$; $x + y = 73,5391$.

2. Знайти полярний радіус точки з прямокутними координатами $M\left(-50; 50\sqrt{3}\right)$.

Розв'язання:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2500 + 7500} = 100$$

Відповідь: $r = 100$.

3. Прямокутні координати точки $A(2;53)$. Знайти її полярні координати. У відповіді вказати $r + \varphi$.

Розв'язання:

Використаємо формулу переходу до полярних координат $x = 2$, $y = 53$, $r = \sqrt{4 + 2809} = \sqrt{2813} \approx 53{,}04$

$$tg\varphi = \frac{y}{x} = \frac{53}{2} \approx 26{,}5$$

$$tg\varphi \approx 26{,}5$$

Отже, $\varphi = 1{,}53$.

Відповідь: $A(53{,}04;\ 1{,}53)$; $r + \varphi = 53{,}04 + 1{,}53 = 54{,}57$.

4. Знайти радіус кола з рівнянням у полярних координатах $r = 50\cos\varphi$.

Розв'язання: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Підставимо у знайдене рівняння кола

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 50 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Домножимо обидві частини на $\sqrt{x^2 + y^2}$

Отримаємо:

$$x^2 + y^2 = 50x.$$

Перетворимо рівняння кола до вигляду $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

$$x^2 - 50x + 25^2 + y^2 - 25^2 = 0$$

$$(x - 25^2) + y^2 = 25^2.$$

Маємо рівняння кола в прямокутних координатах з центром у точці $(25;0)$ та радіусом 25.

Відповідь: $R = 25$.

5. Визначити абсцису центра кола з рівнянням у полярних координатах $r = 300\cos\varphi$.

Розв'язання:

Використаємо формулу переходу від полярних до декартових координат:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Підставимо у задане рівняння кола:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 300 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$x^2 + y^2 = 300x;$$

$$x^2 - 300x + 150^2 - 150^2 + y^2 = 0;$$

$$(x - 150)^2 + y^2 = 150^2.$$

Отже, отримали рівняння кола в декартовій системі координат. Абсциса центра кола дорівнює 150.

Відповідь: $x = 150$.

4. Порядок виконання завдань і збереження результатів на сервері

a) Перехід до виконання основної частини практичної роботи виконується автоматично системою за умови успішного проходження допуску;

b) У відповідні поля ввести результати розв'язання задач і натиснути кнопку «Завершити тест достроково» для збереження результатів роботи. Якщо час, відведений на виконання, закінчився – система блокується. У будь-якому випадку комп'ютерна система відобразить оцінку виконаної роботи.

1. У полярній системі координат дано точки $M_1\left(5+\alpha;\frac{\pi}{4}\right)$ і $M_2\left(8+\alpha;-\frac{\pi}{12}\right)$. Знайти відстань d між ними.

2. У полярній системі координат дано дві протилежні вершини квадрата $P\left(6+\alpha;-\frac{7\pi}{12}\right)$ і $Q\left(4+\alpha;\frac{\pi}{6}\right)$. Визначити його площу.

3. У полярній системі координат дано точки $A\left(8+\alpha;-\frac{2\pi}{3}\right)$ і $B\left(6+\alpha;\frac{\pi}{3}\right)$. Знайти полярні координати середини відрізка, який з'єднує точки A і B. У відповіді вказати $r+\varphi(рад)$.

4. Полярна вісь полярної системи координат паралельна осі абсцис декартової системи координат і спрямована однаково з нею. Дано декартові прямокутні координати полюса, $O(1+\alpha\,;2+\alpha)$ і полярні координати точок $M_1\left(7+\alpha;\frac{\pi}{2}\right)$, $M_2(3+\alpha;0)$, $M_3\left(5+\alpha;-\frac{\pi}{2}\right)$, $M_4\left(2+\alpha;\frac{2\pi}{3}\right)$, $M_5\left(2+\alpha;-\frac{\pi}{6}\right)$. Визначити координати цих точок у декартовій прямокутній системі координат. У відповіді вказати суму координат усіх знайдених точок.

5. Полюс полярної системи координат співпадає з початком декартових прямокутних координат, а полярна вісь спрямована по бісектрисі першого координатного кута. Дані полярні координати $M_1\left(5+\alpha;\frac{\pi}{4}\right)$, $M_2\left(3+\alpha;-\frac{\pi}{4}\right)$, $M_3\left(1+\alpha;\frac{3\pi}{4}\right)$, $M_4\left(6+\alpha;-\frac{3\pi}{4}\right)$ і $M_5\left(2+\alpha;-\frac{\pi}{12}\right)$. Визначити декартові прямокутні координати цих точок. У відповіді вказати суму координат усіх знайдених точок.

5. Приклади розв'язання задач до самостійної роботи студента на практичній роботі

1. У полярній системі координат дано точки $M_1\left(55;\frac{\pi}{4}\right)$, $M_2\left(58;-\frac{\pi}{12}\right)$. Знайти відстань d між ними.

Розв'язання:

Перейдемо до прямокутної системи координат

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{M_1} = 55\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{55\cdot\sqrt{2}}{2} \approx 38,8908 \\ y_{M_1} = 55\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{55\cdot\sqrt{2}}{2} \approx 38,8908 \end{cases}$$

$$M_1(38,89;38,89).$$

$$\begin{cases} x_{M_2} = 58\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) \approx 58\cdot 0,9659 = 56,0222 \\ y_{M_2} = -58\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) \approx -58\cdot 0,2588 = -15,0104 \end{cases}$$

$$M_2(56,02;-15,01).$$

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2};$$

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{17,13^2 + 53,9^2} \approx \sqrt{293,44 + 2905,21}$$

$$= \sqrt{3198,65} \approx 56,56.$$

Відповідь: $d \approx 56,56$.

2. У полярній системі координат точок дано дві протилежні вершини квадрата $P\left(16;-\dfrac{7\pi}{12}\right)$, $Q\left(14;\dfrac{\pi}{6}\right)$. Визначити його площу.

Розв'язання:

Знайдемо декартові координати точок P і Q.

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_p = 16\cdot\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) \approx 16\cdot 0,2588 \approx 4,14 \\ y_p = -16\cdot\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) \approx -16\cdot 0,9659 \approx -15,45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_Q = 14\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 14\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 12,12 \\ y_Q = 14\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 14\cdot\dfrac{1}{2} = 7 \end{cases}$$

$P(4,14;-15,45)$, $Q(12,12;7)$

Відстань між точками P і Q – це діагональ квадрата d

$$d = |PQ| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} =$$

$$= \sqrt{7{,}98^2 + 22{,}45^2} \approx \sqrt{63{,}68 + 504} \approx 23{,}83.$$

Тоді площа квадрата дорівнює:

$$S = \frac{1}{2}d^2 = \frac{1}{2}\cdot(23{,}83)^2 \approx 283{,}93.$$

Відповідь: $S \approx 283{,}93$.

3. У полярній системі координат дано точки $A\left(4; \frac{2\pi}{3}\right)$ і $B\left(6; \frac{\pi}{3}\right)$. Знайти полярні координати середини відрізка, який з'єднує точки A і B. У відповіді вказати $r + \varphi(рад)$

Розв'язання:

Знайдемо декартові координати точок A і B.

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A = 4\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 \\ y_A = 4\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B = 6\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 6\cdot\frac{1}{2} = 3 \\ y_B = 6\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \end{cases}$$

$A(-2;2\sqrt{3})$; $\quad B(3;3\sqrt{3})$

Координати середини відрізка AB в декартовій системі будуть:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} \quad x_C = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$y_C = \frac{y_A + y_B}{2} \quad y_C = \frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Тоді $C\left(\frac{1}{2}; \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$ – середина відрізка AB в декартовій системі координат. Визначимо її в полярній системі координат.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{76}}{2} \approx 4{,}35$$

$$tg\varphi = x/y, \; tg\varphi = \frac{5\sqrt{3}/2}{1/2} = 5\sqrt{3}, \; \varphi = 1{,}45\,рад.$$

Точка C, середина відрізка AB має полярні координати $C(4{,}35;1{,}45)$, $r = 4{,}35$, $\varphi = 1{,}45$.

Відповідь: $C(4{,}35;1{,}45)$, $r + \varphi = 4{,}35 + 1{,}45 = 5{,}8$.

4. Полярна вісь полярної системи координат паралельна осі абсцис декартової прямокутної системи координат і однаково з нею спрямована. Дано декартові прямокутні координати полюса $O(2;5)$ і полярні координати точок $M_1(1;0)$, $M_2\left(4;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Визначити координати цих точок у декартовій прямокутній системі. У відповіді вказати суму координат знайдених точок.

Розв'язання:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1\cdot\cos(0) = 1 \\ y = 1\cdot\sin(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2 = 3 \\ y = 0 + 5 = 5 \end{cases}$$

$$M_1(3;5).$$

$$\begin{cases} x = 4\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \\ y = 4\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 4 \end{cases}$$

$$M_2(0;4).$$

Відповідь: $M_1(3;5)$, $M_2(0;4)$, сума координат 12.

5. Полюс полярної системи координат співпадає з початком декартових прямокутних координат, а полярна вісь спрямована по бісектрисі першого координатного кута. Дано полярні координати точки $M\left(8;\dfrac{\pi}{4}\right)$. Визначити декартові прямокутні координати цієї точки. У відповіді вказати суму координат знайдених точок.

Розв'язання:

Декартові прямокутні координати точки M визначимо за формулами:

$$\begin{cases} x = x'\cdot\cos\varphi - y'\cdot\sin\varphi \\ y = x'\cdot\sin\varphi + y'\cdot\cos\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_M = r \cdot \cos\varphi = 8 \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 8 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 4 \cdot \sqrt{2} \\ y'_M = r \cdot \sin\varphi = 8 \cdot \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 8 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 4 \cdot \sqrt{2} \end{cases}$$

Оскільки за умовою задачі полярна вісь спрямована по бісектрисі першого координатного кута, то вона утворює кут $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ з додатнім напрямком осі Ox.

$$x_M = 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 4\sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4 - 4 = 0$$

$$y_M = 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + 4\sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4 + 4 = 8.$$

Відповідь: $M(0;8)$, сума координат 8.

6. Питання для самоконтролю

1. Що називається полярною системою координат?

2. За якими формуламм знаходять прямокутні координати за відомими полярними?

3. Які формули використовують для знаходження полярних координат, якщо відомі декартові прямокутні координати?

Розділ III
ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Практична робота 1. Система прямокутних координат у просторі. Вектори. Лінійні дії над векторами. Розкладання вектора. Проекції вектора на вісь. Скалярне множення векторів.

1. Основні поняття та теореми

Будь-яка упорядкована пара точок A і B простору визначає напрямлений відрізок або вектор. Вектор, початок якого знаходиться в точці A, а кінець – у точці B, позначається $\overrightarrow{AB}$ або $\vec{a}$.

Відстань між початком вектора і його кінцем називається довжиною (або модулем) вектора і позначається $|\vec{a}|$ або $|\overrightarrow{AB}|$.

Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається одиничним. Одиничний вектор, напрям якого збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, називається ортом вектора $\vec{a}$ і позначається $\overrightarrow{a^0}$.

Вектор, початок якого збігається з кінцем, називається нульовим і позначається $\vec{0}$. Напрям нульового вектора невизначений, а його довжина дорівнює 0.

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються колінеарними, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються рівними, якщо вони колінеарні, однаково направлені і мають рівні довжини.

Вектори можна переносити паралельно самим собі, тобто вектори в аналітичній геометрії називаються вільними.

Три вектори називаються компланарними, якщо вони лежать в одній площині або в паралельних площинах.

<u>Лінійні дії над векторами</u>

1. Додавання векторів.

Сума $\vec{a}+\vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ за означенням є вектор $\vec{c}$, напрямлений з початку вектора $\vec{a}$ в кінець вектора $\vec{b}$ за умови, що початок вектора $\vec{b}$ збігається з кінцем вектора $\vec{a}$, це правило додавання вектора називають правилом трикутника (рис.1).

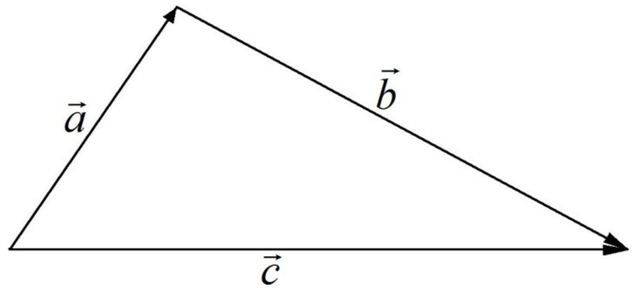


Рис.1

Суму двох векторів можна побудувати також за правилом паралелограма (рис.2).

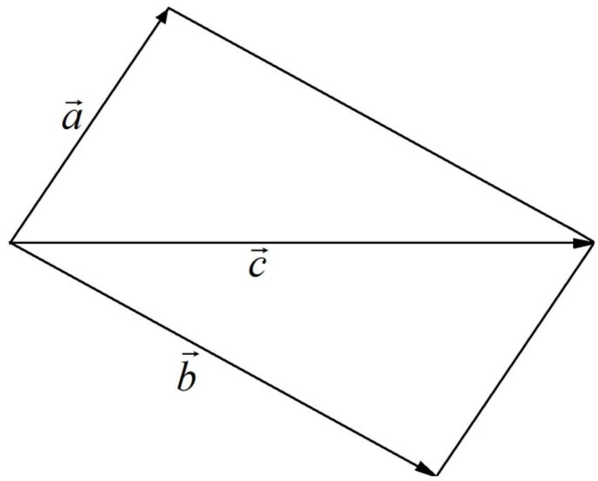


Рис.2

2. Віднімання векторів визначається як дія, обернена додаванню. Різницею $\vec{a}$-$\vec{b}$ векторів називається вектор $\vec{c}$, який будучи доданий до вектора $\vec{b}$, дає вектор $\vec{a}$ (рис.3).

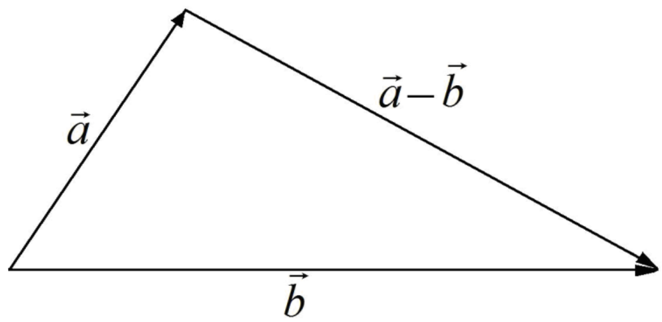


Рис.3

Два вектори називаються протилежними, якщо вони колінеарні, довжини їх однакові, а напрямки протилежні. Вектор протилежний $\vec{a}$ позначається через $-\vec{a}$. Відняти від вектора $\vec{a}$ вектор $\vec{b}$, це все одно що до вектора $\vec{a}$ додати вектор протилежний вектору $\vec{b}$, тобто $\vec{a}$-$\vec{b}$=$\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$.

3. Множення вектора на число.

Нехай задані вектор $\vec{a} \neq 0$ і число $\lambda \neq 0$. Добутком $\lambda\vec{a}$ – називається вектор, довжина якого дорівнює $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$, а напрям збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, якщо $\lambda > 0$. Якщо $\vec{a} = 0$, то $\lambda\vec{a} = 0$.

Розклад вектора за базисом.

Базисом на прямій називається довільний ненульовий вектор на цій прямій. Базисом у просторі –довільна упорядкована трійка некопланарних векторів. Вектори, що складають базис називаються базисними. Розкласти вектор за базисом означає зобразити його у вигляді лінійної комбінації базисних векторів.

Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ складають базис і вектор $\vec{d}$ розкладений вищим базисом, тобто

$$\vec{d} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c} \tag{1}$$

то числа α, β, γ називаються координатами вектора $\vec{d}$ в даному базисі, а вектори $\alpha\vec{a}$, $\beta\vec{b}$, $\gamma\vec{c}$ – компонентами вектора $\vec{d}$.

Проекція вектора на вісь.

Віссю називається напрямлена пряма. Напрям прямої позначають стрілкою. Заданий напрям вважають додатнім, а протилежний йому – від'ємним.

Проекцією точки A на вісь u називається основа A_1 перпендикуляра AA_1, опущеного з точки A на дану вісь.

Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь називається додатне число, яке дорівнює величині відрізка A_1B_1 осі, де A_1 і B_1 – проекції A і B на цю вісь.

Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь u виражається через його модуль та кут φ нахилу до осі u за формулою

$$np_u\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi \tag{2}$$

Проекції довільного вектора $\vec{a}$ на осі прямокутної системи координат позначаються X, Y, Z

$$\vec{a} = \{X; Y; Z\} \tag{3}$$

означає, що числа X, Y, Z є проекціями вектора на координатні осі.

Проекції вектора на координатні осі називаються також його декартовими координатами. Якщо дані дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і

$M_2(x_2, y_2, z_2)$ – відповідно початок та кінець вектора $\vec{a}$, то його координати X, Y, Z визначаються за формулами

$$X = x_2 - x_1,\ Y = y_2 - y_1,\ Z = z_2 - z_1 \tag{4}$$

Формула
$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \tag{5}$$

дає змогу по координатам вектора визначити його модуль.

Якщо θ, β, γ – кути, які складає вектор $\vec{a}$ з координатними осями, то $\cos\theta$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ називаються спрямовуючими косинусами вектора $\vec{a}$.

Проекції вектора $\vec{a}$ визначаються за формулами

$$x = \left|\vec{a}\right|\cos\theta \quad , \quad y = \left|\vec{a}\right|\cos\beta \quad , \quad z = \left|\vec{a}\right|\cos\gamma \tag{6}$$

Тоді
$$\cos^2(\theta) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1 \tag{7}$$

<u>Скалярне множення векторів</u>.

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, що дорівнює добуткові довжин цих векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos(\varphi), \tag{8}$$

де φ –кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Скалярний добуток двох векторів можна виразити також формулою

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot np_{\vec{a}}\vec{b}$$

або
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{b}\right| \cdot np_{\vec{b}}\vec{a} \tag{9}$$

Якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, то кут φ –гострий, якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, то кут φ – тупий. Скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ тільки в тому випадку, коли вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні.

Скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{a}$ називається скалярним квадратом і позначається символом

$$\vec{a}^{\,2} = \left|\vec{a}\right|^2 \tag{10}$$

Якщо вектори задані координатами

$$\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\},\ \vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$$

то
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 \tag{11}$$

Достатня умова перпендикулярності векторів

$$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0 \tag{12}$$

Кут φ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ визначається формулою

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|} \tag{13}$$

або в координатах

$$\cos\varphi = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2} + z_1^{\ 2}}\sqrt{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2} + z_2^{\ 2}}} \tag{14}$$

2. Порядок виконання допуску до практичної роботи

a) Запустити систему за допомогою файла «КВМ.exe»;
b) Перейти у розділ «Практичні роботи»;
c) Обрати практичну роботу натиснувши на гіперпосилання «Система прямокутних координат у просторі. Вектори. Лінійні дії над векторами. Розкладання вектора. Проекції вектора на вісь. Скалярне множення векторів»;
d) Після ознайомлення з теоретичним матеріалом натиснути кнопку «Розпочати тестування» і при готовності кнопку «Почати»;
e) Виконати запропоновані завдання з урахуванням автоматично згенерованого параметра α і ввести отримані відповіді у відповідні поля (рис. 4). Якщо практична робота виконана не в комп'ютерній системі параметр α призначається викладачем (наприклад номер у списку або дві останні цифри залікової книжки).

1. На відрізку, який з'єднує точки $O(0;0;0)$ та $B(1;\ 2+(\alpha-50)\cdot 0{,}1;\ 2)$, знайти ординату точки $M(x, y, z)$, що поділяє відрізок OB у відношенні $\lambda = \dfrac{2}{3}$.

2. Знайти проекцію вектора $\vec{a}$ на вісь координат OX, якщо $\left|\vec{a}\right| = 2+\alpha$. Кути, що складає вектор $\vec{a}$ з віссю OX, OY, OZ відповідно дорівнюють $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, $\beta = \dfrac{\pi}{3}$, $\gamma = \dfrac{2\pi}{3}$.

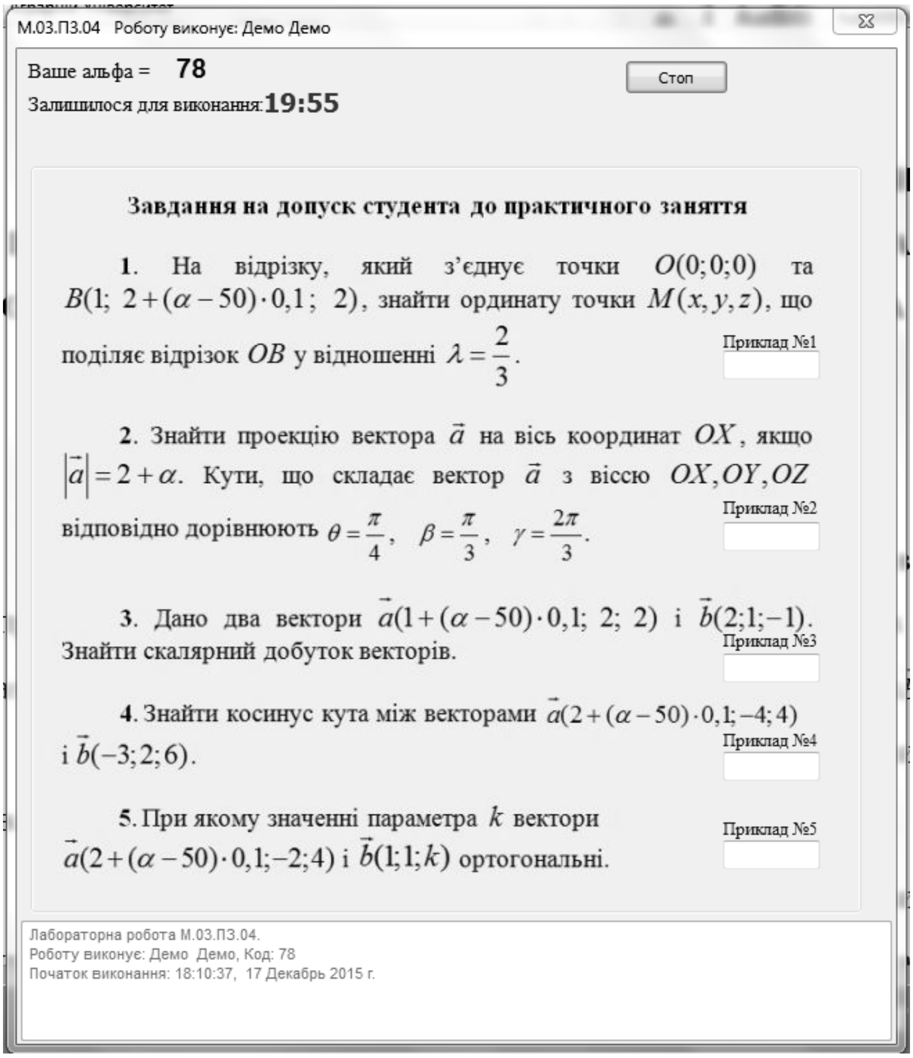


Рис. 4. Вікно для проходження допуску до практичної роботи.

3. Дано два вектори $\vec{a}(1+(\alpha-50)\cdot 0{,}1;\ 2;\ 2)$ і $\vec{b}(2;1;-1)$. Знайти скалярний добуток векторів.

4. Знайти косинус кута між векторами $\vec{a}(2+(\alpha-50)\cdot 0{,}1;-4;4)$ і $\vec{b}(-3;2;6)$.

5. При якому значенні параметра k вектори $\vec{a}(2+(\alpha-50)\cdot 0{,}1;-2;4)$ і $\vec{b}(1;1;k)$ ортогональні.

3. Приклад виконання завдання на допуск студента до практичної роботи

1. На відрізку, що з'єднує точки $O(0;0;0)$ та $B(1;7;2)$ знайти ординату точки $M(x,y,z)$, що поділяє відрізок OB у відношенні $\lambda=2:3$.

Розв'язання:

Якщо точка M лежить на відрізку OB і поділяє його за умовою у відношенні $2:3$, то застосуємо формули для знаходження координат точки яка ділить відрізок у відношенні.

$$x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda};\ y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda};\ z_M = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$$

$$y_M = \frac{0 + \frac{2}{3}\cdot 7}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{14}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{14}{5} = 2{,}8$$

$$y_M = 2{,}8$$

Відповідь: $y_M = 2{,}8$

2. Знайти проекцію вектора $\vec{a}$ на вісь координат OX, якщо $\left|\vec{a}\right| = 52$. Кути, що складає вектор $\vec{a}$ з віссю OX, OY, OZ відповідно дорівнюють $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = \frac{2\pi}{3}$.

Розв'язання:

Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь OX знайдемо за формулою (6):

$$X = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos(\theta),$$

$$X = 52 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 52 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 26\sqrt{2}.$$

Відповідь: $X = 26\sqrt{2} \approx 36,7696$.

3. Дано два вектори $\vec{a}(6;2;2)$ і $\vec{b}(2;1;-1)$. Знайти скалярний добуток векторів.

Розв'язання:

Якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ задані своїми координатами, то їх скалярний добуток знайдемо за формулою (11).

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 12 + 2 - 2 = 12.$$

Відповідь: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$.

4. Знайти косинус кута між векторами $\vec{a}(7;-4;4)$ і $\vec{b}(-3;2;6)$.

Розв'язання:

Кути між векторами знаходимо за формулою (13)

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$$

Обчислимо скалярний добуток векторів $\vec{a}\cdot\vec{b}$ та їх довжини:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 7\cdot(-3)+(-4)\cdot 2+4\cdot 6 = -21-8+24 = -5,$$

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{49+16+16} = \sqrt{81} = 9,$$

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{9+4+36} = \sqrt{49} = 7,$$

Отже, $\cos\varphi = \dfrac{-5}{9\cdot 7} = -\dfrac{5}{63} \approx -0,0794$.

Відповідь: $\cos\varphi \approx -0,0794$.

5. При якому значенні параметра k вектори $\vec{a}(7;-2;4)$ і $\vec{b}(1;1;k)$ ортогональні.

Розв'язання:

Якщо два вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ за умовою ортогональні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю. Тобто:

$$7\cdot 1+(-2)\cdot 1+4\cdot k = 0,$$

$$7-2+4k = 0,$$

$$4k = -5,$$

$$k = -\frac{5}{4}$$

При $k = -\dfrac{5}{4}$ вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ будуть ортогональні.

Відповідь: $k = -\dfrac{5}{4} = -1,25$.

4. Порядок виконання завдань і збереження результатів на сервері

a) Перехід до виконання основної частини практичної роботи виконується автоматично системою за умови успішного проходження допуску;

b) У відповідні поля ввести результати розв'язання задач і натиснути кнопку «Завершити тест достроково» для збереження результатів роботи. Якщо час, відведений на виконання, закінчився – система блокується. У будь-якому випадку комп'ютерна система відобразить оцінку виконаної роботи.

1. Визначити кінець вектора $\vec{a}=\{2;-3;-1\}$, якщо його початок співпадає з точкою $\big(1+(\alpha-50)\cdot 0{,}1;-\big(1+(\alpha-50)\cdot 0{,}1\big);$ $2+(\alpha-50)\cdot 0{,}1\big)$. У відповіді вказати суму координат кінця вектора $\vec{a}$.

2. Дано $|\vec{a}|=11$; $|\vec{b}|=23$; $|\vec{a}-\vec{b}|=30+(\alpha-50)\cdot 0{,}1$. Визначити $|\vec{a}+\vec{b}|$.

3. Визначити при яких значеннях β і γ вектори
$\vec{a}=(2+(\alpha-50)\cdot 0{,}1)\vec{i}+3\vec{j}+\beta\vec{k}$ і $\vec{b}=\gamma\vec{i}-6\vec{j}+\big(2+(\alpha-50)\cdot 0{,}1\big)\vec{k}$ колінеарні. У відповіді вказати значення $\beta+\gamma$.

4. Дано два вектори $\vec{a}\big(3+(\alpha-50)\cdot 0{,}1;-2;6\big)$ і
$\vec{b}\big(-2;1;(\alpha-50)\cdot 0{,}1\big)$. Визначити проекцію на вісь OX вектора
$2\vec{a}+3\vec{b}$.

5. Дано вершини трикутника $A\big(-1;-(2+(\alpha-50)\cdot 0{,}1);4\big)$; $B\big(-4;2;(\alpha-50)\cdot 0{,}1\big)$; $C\big(3;-2;1+(\alpha-50)\cdot 0{,}1\big)$. Визначити косинус його внутрішнього кута B.

6. Дано вершини чотирикутника:
$A(1+(\alpha-50)\cdot 0{,}1;-(2+(\alpha-50)\cdot 0{,}1);2+(\alpha-50)\cdot 0{,}1)$;
$B(1+(\alpha-50)\cdot 0{,}1;4+(\alpha-50)\cdot 0{,}1;(\alpha-50)\cdot 0{,}1)$;
$C(-(4+(\alpha-50)\cdot 0{,}1);1+(\alpha-50)\cdot 0{,}1;1+(\alpha-50)\cdot 0{,}1)$;
$D(-(5+(\alpha-50)\cdot 0{,}1);-(5+(\alpha-50)\cdot 0{,}1);3+(\alpha-50)\cdot 0{,}1)$.
Визначити скалярний добуток його діагоналей.

7. Дано вектори $\vec{a}(1+(\alpha-50)\cdot 0{,}1;-3;4)$, $\vec{b}(3;-4;2+(\alpha-50)\cdot 0{,}1)$, $\vec{c}\big(-1;1+(\alpha-50)\cdot 0{,}1;4\big)$. Визначити $np_{(\vec{b}+\vec{c})}\vec{a}$.

5. Приклад виконання завдань до практичного заняття

1. Визначити кінець вектора $\vec{a}=(2;-3;-1)$, якщо його початок співпадає з точкою $(1{,}5;-1{,}5;-0{,}5)$. У відповіді вказати суму координат кінця вектора.

Розв'язання: Координати вектора $\vec{a}$ визначаються за формулами (4)

$$x=x_2-x_1,\ y=y_2-y_1,\ z=z_2-z_1,$$

де x_1, y_1, z_1 – координати початку вектора, а x_2, y_2, z_2 – координати його кінця. Тоді координати початку вектора на вісі координат дорівнюють

$$x_1 = x_2 - x,, \ y_1 = y_2 - y, \ z_1 = z_2 - z;$$
$$x_1 = 1{,}5 - 2 = -0{,}5 \quad y_1 = -1{,}5 - (-3) = 1{,}5$$
$$z_1 = -0{,}5 - (-1) = 0{,}5$$

Координати початку вектора $(-0{,}5; 1{,}5; 0{,}5)$. Сума координат кінця вектора $\vec{a} = 1{,}5$.

Відповідь: $\vec{a} = 1{,}5$.

2. Дано $|\vec{a}| = 11$; $|\vec{b}| = 23$; $|\vec{a} - \vec{b}| = 27{,}5$. Визначити $|\vec{a} + \vec{b}|$.

Розв'язання: Довжина вектора $|\vec{a} + \vec{b}|$ – довжина більшої діагоналі паралелограма, який побудовано на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, як на сторонах. В цьому паралелограмі $|\vec{a} - \vec{b}|$ – це довжина меншої діагоналі. Скористаємось властивістю паралелограма, за якою сума квадратів його сторін дорівнює сумі квадратів його діагоналей, тобто

$$2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2 = |\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2.$$

Звідки $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2}$;

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{2 \cdot 11^2 + 2 \cdot 23^2 - 27{,}5^2} \approx 23{,}318.$$

Відповідь: $|\vec{a} + \vec{b}| \approx 23{,}318.$

3. Визначити при яких значеннях β і γ вектори $\vec{a} = 0{,}5i + 3j + \beta k$ і $\vec{b} = \gamma i - 6j - 0{,}5k$ колінеарні. У відповіді вказати суму $\alpha = \beta + \gamma$.

Розв'язання: Якщо вектори колінеарні, то їх координати пропорційні

$$\frac{-0{,}5}{\gamma} = \frac{3}{-6} = \frac{\beta}{-0{,}5}.$$

Тоді $\gamma = 1$; $\beta = 0{,}25$. Сума $\alpha = \beta + \gamma = 1{,}25$.

Відповідь: $\alpha = 1{,}25$.

4. Дано два вектори $\vec{a}(0{,}5; -2; 6)$ і $\vec{b}(-2; 1; -2{,}5)$. Визначити проекцію на вісь вектора $2\vec{a} + 3\vec{b}$.

Розв'язання:

Координати вектора

$2\vec{a}+3\vec{b}=\left(2\cdot 0,5+3\cdot(-2);\, 2\cdot(-2)+3\cdot 1; 2\cdot 6+3\cdot(-2,5)\right)=\left(-5;-1;4,5\right)$так им чином проекція (або координата) вектора $2\vec{a}+3\vec{b}$ на вісь OX дорівнює $x=-5$.

Відповідь: $x=-5$.

5. Дано вершини трикутника $A(-1;0,5;4)$; $B(-4;2;-2,5)$; $C(3;-2;-1,5)$. Визначити косинус його внутрішнього кута B.

Розв'язання:

Координати вектора

$\overrightarrow{BA}=\left(-1-(-4);\, 0,5-2;\, 4-(-2,5)\right)=(3;-1,5;6,5)$

(відповідно (4)).

Координати вектора

$\overrightarrow{BC}=(3-(-4);\,-2-2;\,-1,5-(-2,5))=(7;-4;1)$

(відповідно (4)).

Косинус кута B відповідно (14) дорівнює

$$\cos\hat{B}=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{3\cdot 7+(-1,5)\cdot(-4)+6,5\cdot 1}{\sqrt{3^2+(-1,5)^2+6,5^2}\cdot\sqrt{7^2+(-4)^2+1^2}}=$$

$$=\frac{33,5}{\sqrt{53,5}\cdot\sqrt{66}}\approx 0,564$$

Відповідь: $\cos\hat{B}\approx 0,564$.

6. Дано вершини чотирикутника: $A(-1,5;0,5;-0,5)$; $B(-1,5;1,5;-2,5)$; $C(-1,5;-1,5;-1,5)$; $D(-2,5;-2,5;0,5)$. Визначити скалярний добуток його діагоналей.

Розв'язання:

Координати вектора $\overrightarrow{AC}$ за формулою (4):

$\overrightarrow{AC}=\left(-1,5-(-1,5);\,-1,5-0,5;\,-1,5-(-0,5)\right)=(0;-2;-1)$

Координати вектора $\overrightarrow{BD}$ за формулою (4):

$\overrightarrow{BD}=(-2,5-(-1,5);\,-2,5-1,5;\,0,5-(-2,5))=(-1;-4;3).$

Скалярний добуток векторів визначаємо за формулою (11)

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=X_1\cdot X_2+Y_1\cdot Y_2+Z_1\cdot Z_2$$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0\cdot(-1)+(-2)\cdot(-4)+(-1)\cdot 3=8-3=5.$$

Відповідь: $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=5$.

7. Дано вектори $\vec{a}(-1,5;-3;4)$, $\vec{b}(3;-4;-0,5)$, $\vec{c}(-1;-1,5;4)$. Визначити $np_{(\vec{b}+\vec{c})}\vec{a}$.

Розв'язання:

Знайдемо координати вектора

$$\vec{b}+\vec{c}=\left(3-1;-4-1,5;-0,5+4\right)=\left(2;-5,5;3,5\right)$$

За означенням скалярний добуток векторів $\vec{b}+\vec{c}$ і $\vec{a}$ дорівнює

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}+\vec{c}\right|\cdot\cos\varphi \text{ або}$$

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left|\vec{b}+\vec{c}\right|\cdot np_{(\vec{b}+\vec{c})}\vec{a}$$

Звідки

$$np_{(\vec{b}+\vec{c})}=\frac{\overrightarrow{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)}{\left|\vec{b}+\vec{c}\right|}=\frac{-1,5\cdot 2+(-3)\cdot(-5,5)+4\cdot 3,5}{\sqrt{2^2+(-5,5)^2+(3,5)^2}}=$$

$$=\frac{-3+16,5+14}{\sqrt{46,5}}=4,03.$$

Відповідь: $np_{(\vec{b}+\vec{c})}=4,03.$

6.Питання для самоконтролю

1. Що називається вектором, як він позначається?

2. Що називається одиничним вектором?

3. Які вектори називаються колінеарними?

4. Які вектори називаються компланарними?

5. Назвіть відомі вам лінійні дії над векторами.

6. Поясніть, за яким правилом відбувається розклад вектора за базисом.

7. Як знайти проекцію вектора на вісь?

8. Як знайти модуль вектора?

9. За якою формулою обчислюється скалярний добуток векторів.

10. Запишіть умову перпендикулярності векторів.

11. Як знайти кут між векторами?

Практична робота 2. Векторне та мішане множення векторів.

1. Основні поняття та теореми

Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, який позначається $\vec{a}\times\vec{b}$ називається вектор, що визначається такими трьома умовами:

1. Модуль вектора $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$рівний $\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi$, де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

2. Вектор $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ перпендикулярний як вектору $\vec{a}$ так і $\vec{b}$.

3. Упорядкована трійка векторів $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}\right)$, відкладених від однієї точки, утворює правий базис.

Векторний добуток залежить від порядку співмножників:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right).$$

Модуль векторного добутку $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ дорівнює площі S паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$і $\vec{b}$.

Векторний добуток перетворюється на нуль тоді, коли вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні.

Якщо система координатних осей права і вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задані координатами:

$$\vec{a}=\left(x_1;y_1;z_1\right),\ \vec{b}=\left(x_2;y_2;z_2;\right),$$

то векторний добуток вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ визначається формулою:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\left\{\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right\} \qquad (1)$$

Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називаються число рівне векторному добутку $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$, яке помножене скалярно на вектор $\vec{c}$ тобто:

$$\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}.$$

Мішаний добуток $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$ дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні змішаний добуток $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$ дорівнює нулю.

Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ задані своїми координатами:

$$\vec{a}=\left(x_1;y_1;z_1\right),\ \vec{b}=\left(x_2;y_2;z_2;\right),\ \vec{c}=\left(x_3;y_3;z_3\right)$$

змішаний добуток $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$ визначається за формулою:

$$\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \qquad (2)$$

2. Порядок виконання допуску до практичної роботи

a) Запустити систему за допомогою файла «КВМ.exe»;

b) Перейти у розділ «Практичні роботи»;

c) Обрати практичну роботу натиснувши на гіперпосилання «Векторне та мішане множення векторів»;

d) Після ознайомлення з теоретичним матеріалом натиснути кнопку «Розпочати тестування» і при готовності кнопку «Почати»;

e) Виконати запропоновані завдання з урахуванням автоматично згенерованого параметра α і ввести отримані відповіді у відповідні поля (рис. 1). Якщо практична робота виконана не в комп'ютерній системі параметр α призначається викладачем (наприклад номер у списку або дві останні цифри залікової книжки).

1. Знайти ординату вектора $\vec{a}\times\vec{b}$, якщо $\vec{a}=\left(3+\alpha;-1;2\right)$, $\vec{b}=\left(2;-3;-5\right)$.

2. Знайти площу трикутника ABC з вершинами $A\left(1+\alpha;2;3\right),B\left(2;-1;-5\right),C\left(0;1;3\right)$.

3. При якому значенні параметра а вектори $\vec{a}=\left(1;\alpha;3\ \right)$, $b=\left(2;a;6\right)$ колінеарні?

4. При якому значенні параметра k вектори $\vec{a}=\left(1;-1;3\right)$, $\vec{b}=\left(1;9;-11\right)$, $\vec{c}=\left(2;3k;\alpha-1\right)$ компланарні?

5. Знайти об'єм тетраедра заданого вершинами $A(0;0;0)$, $B(4;1;1)$, $C(1;1;0)$, $D(0;0;8+\alpha)$.

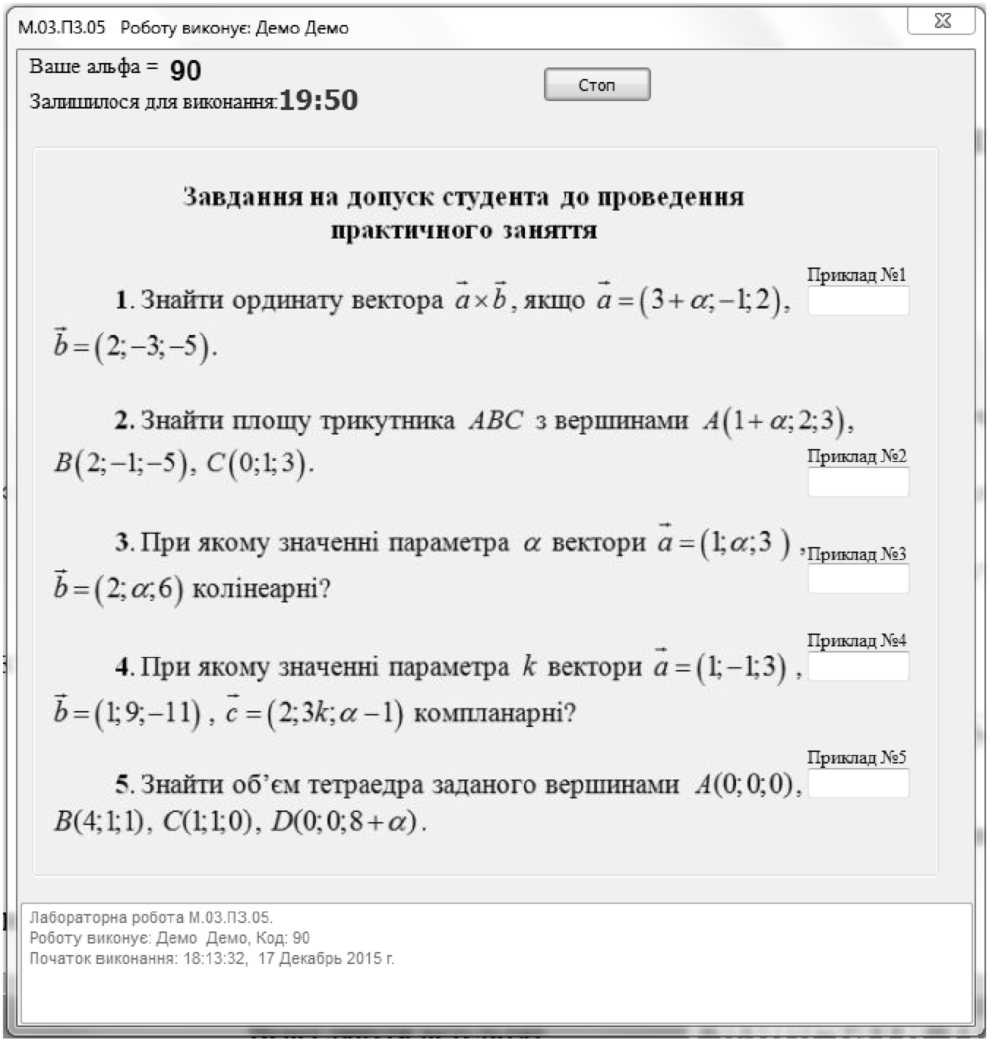


Рис.1. Вікно для проходження допуску до практичної роботи.

3. Приклад виконання завдання на допуск студента до практичної роботи

1. Знайти ординату вектора $\vec{a}\times\vec{b}$, якщо $\vec{a}=(3;-1;2)$, $\vec{b}=(50;-3;-5)$

Розв'язання:

Результатом векторного добутку $\vec{a}\times\vec{b}$ буде третій вектор $\vec{c}$, ординату якого знайдемо з формули (1):

$$y_c=-\begin{vmatrix}3 & 2\\ 50 & -5\end{vmatrix}=-(-15-100)=-(-115)=115.$$

Відповідь: $y_c=115$.

2. Знайти площу трикутника ABC з вершинами $A(3;2;1)$, $B(-8;-1;5)$, $C(5;0;2)$.

Розв'язання:

Скористаємося формулою $S_{паралелограма} = \vec{a} \times \vec{b}$, а оскільки нам потрібно знайти площу трикутника, то застосуємо відповідно $S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$. Зайдемо вектори $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} = (-8-3;-1-2;5-1) = (-11;-3;4)$,

$\overrightarrow{AC} = (5-3;0-2;2-1) = (2;-2;1)$,

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -11 & -3 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}^2 + \left(-\begin{vmatrix} -11 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right)^2 + \begin{vmatrix} -11 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{25+361+784} = \frac{1}{2}\sqrt{1170} \approx 17{,}1026 \text{ кв.од.}$$

Відповідь: $S_{\Delta} = 17{,}1026$ кв.од.

3. При якому значенні параметра α вектори $\vec{a} = (1;50;3)$, $\vec{b} = (2;\alpha;6)$ колінеарні?

Розв'язання:

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то їх векторний добуток дорівнює нулю, тобто $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, або

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = (0;0;0).$$

За формулою (1):

$$y_c = -\begin{vmatrix} 50 & 3 \\ \alpha & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

$$300 - 3\alpha = 0,$$

$$3\alpha = 300,$$

$$\alpha = 100.$$

Відповідь: 100

4. При якому значенні параметра k вектори $\vec{a} = (1;-1;3)$, $\vec{b} = (1;9;-11)$, $\vec{c} = (2;3k;49)$ компланарні?

Розв'язання:

Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні за умови, що їх мішаний добуток дорівнює нулю. Мішаний добуток $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$ знайдемо за формулою (2):

$$\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 1 & 9 & -11\\ 2 & 3k & 49\end{vmatrix}=0,$$

$$1\cdot(9\cdot 49+11\cdot 3k)+1\cdot(49+22)+3(3k-18)=0,$$

$$441+33k+71+9k-54=0,$$

$$42k=-458,$$

$$k=-\frac{458}{42},$$

$$k\approx -10{,}9$$

Відповідь: $-10{,}9$.

5. Знайти об’єм тетраедра заданого вершинами $A(0;0;0)$, $B(4;1;1)$, $C(1;1;0)$, $D(0;0;58)$.

Розв’язання:

Об’єм тетраедра дорівнює шостій частині об’єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{AD}$. Знайдемо координати векторів:

$$\overrightarrow{AB}=\{4;1;1\},$$

$$\overrightarrow{AC}=\{1;1;0\},$$

$$\overrightarrow{AD}=\{0;0;58\}.$$

Об’єм паралелепіпеда знайдемо за формулою (2):

$$\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}4 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 58\end{vmatrix}=$$

$$4\cdot 1\cdot 58+1\cdot 0\cdot 0+1\cdot 1\cdot 0-0\cdot 1\cdot 1-1\cdot 1\cdot 58-4\cdot 0\cdot 0=174$$

$$V=\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right|=|174|=174.$$

Тоді об’єм тетраедра дорівнює:

$$V=\frac{1}{6}\cdot 174=29 \text{ куб. од.}$$

Відповідь: $V=29$ куб. од.

4. Порядок виконання завдань і збереження результатів на сервері

a) Перехід до виконання основної частини практичної роботи виконується автоматично системою за умови успішного проходження допуску;

b) У відповідні поля ввести результати розв'язання задач і натиснути кнопку «Завершити тест достроково» для збереження результатів роботи. Якщо час, відведений на виконання, закінчився – система блокується. У будь-якому випадку комп'ютерна система відобразить оцінку виконаної роботи.

1. Дано вершини тетраедра $A(4;1;2)$, $B(7;0;-3)$, $C(6;3;1)$, $D(-1;-2;8+\alpha)$. Знайти довжину його висоти опущеної з вершини D.

2. Дано точки $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$, $C(5;2;6+\alpha)$. Знайти площу трикутника ABC.

3. Дано вершини трикутника $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2+\alpha)$, $C(1;3;-1)$. Знайти довжину його висоти, опущеної з вершини B на сторону AC.

4. Дано вектори $\vec{a}=\left(1;-1;3\right)$, $\vec{b}=\left(-2;2;1\right)$, $\vec{c}=\left(3;-2;5+\alpha\right)$. Знайти $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$.

5. При якому значенні параметра k вектори $\vec{a}=\left(1;-1;3\right)$, $\vec{b}=\left(1;9;-11\right)$, $\vec{c}=\left(2;3k;\alpha-1\right)$ компланарні?

5. Приклад розв'язання задач та вправ до самостійної роботи студента на практичному занятті

1. Дано вершини тетраедра $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(-5;-4;8)$. Знайти довжину його висоти, опущеної з вершини D (рис. 2).

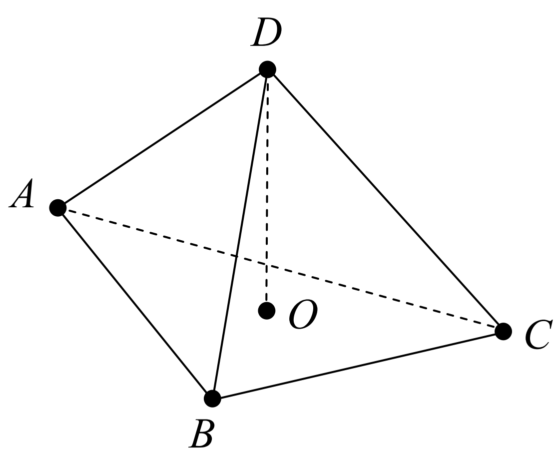


Рис. 2

Розв'язання:

$V_T = \frac{1}{6} V_{пар}$ – формула для знаходження об'єму тетраедра.

$$V_T = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right)\right|,\ V_T = \frac{S_{осн} \cdot H}{3}$$

$$H = \frac{3 \cdot V_T}{S_{осн}},$$

$$\overrightarrow{AB} = \{2;\ -2; -3\},\ \overrightarrow{AC} = \{4;\ 0; 6\},\ \overrightarrow{AD} = \{-7;\ -7; 7\},$$

$$V_{пар} = \left|\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)\right| = \left|\left(\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right)\right|.$$

1. Знайдемо об'єм тетраедра:

$$\left(\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ -7 & -7 & 7 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-7) \cdot 6 + (-2) \cdot 7 \cdot 4 + (-7) \cdot (-3) \cdot 0 -$$

$$-4 \cdot (-7) \cdot (-3) - (-7) \cdot (-2) \cdot 6 - 2 \cdot 7 \cdot 0 = -308$$

$$V_{пар} = |-308| = 308$$

$$V_T = \frac{1}{6} \cdot 308 = \frac{154}{3}$$

2. Знайдемо площу основи:

$$S_{осн} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right\}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \right\}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \{-12; 24; 8\}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-12)^2+24^2+8^2} = \sqrt{784} = 28$$

$$S_{осн} = S_{\Delta\, ABC} = \frac{28}{2} = 14.$$

Знаючи обєм тетраедра $\left(V_T = \dfrac{154}{3}\right)$ та площу основи $\left(S_{осн} = 14\right)$ можимо визначити висоту застосувавши формулу $H = \dfrac{3\cdot V_T}{S_{осн}}$

$$H = \frac{3\cdot\frac{154}{3}}{14} = 11$$

Відповідь: $H = 11$.

1. Дано координати вершини піраміди $A_1(5;1;-4)$, $A_2(1;2;-1)$, $A_3(3;3;-4)$, $A_4(2;2;2)$. Знайти її об’єм (рис. 3).

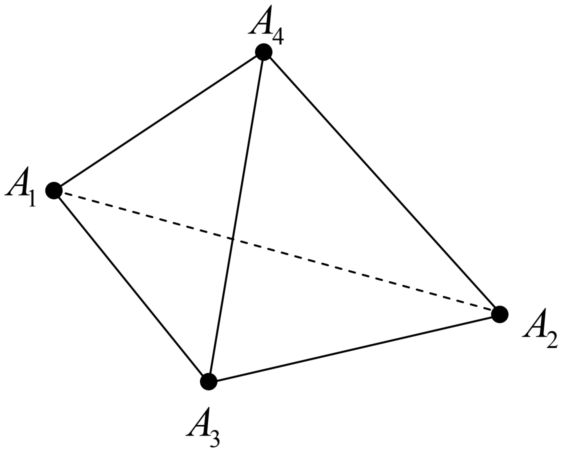


Рис. 3

Розв’язання:

Знайдемо координати трьох векторів $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$.

$\overrightarrow{A_1A_2} = \{-4;1;3\}$; $\overrightarrow{A_1A_3} = \{-2;2;0\}$; $\overrightarrow{A_1A_4} = \{-3;1;6\}$.

$$V = \pm\frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix} -4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$\pm\frac{1}{6}\cdot(-4\cdot2\cdot6+1\cdot0\cdot(-3)+(-2)\cdot3\cdot1-(-3)\cdot2\cdot3-$$

$$-(-2)\cdot1\cdot6-(-4)\cdot0\cdot1) = 4 \text{ од. куб.}$$

У правій частині беремо знак мінус, так як визначник від’ємний.

Відповідь: $V = 4$ од. куб..

3. Встановити чи компланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ якщо:

a) $\vec{a}=\{3;-2;1\}$, $\vec{b}=\{2;1;2\}$, $\vec{c}=\{3;-1;-2\}$.

b) $\vec{a}=\{2;-1;2\}$, $\vec{b}=\{1;2;-3\}$, $\vec{c}=\{3;-4;7\}$.

Розв'язання:

Якщо змішаний добуток $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ дорівнює нулю, то вектори компланарні. $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=0$

a) $$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\left\{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix};-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right\},$$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\left\{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix};-\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\right\},$$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\left(-3;4;1\right),$$

$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\bar{c}=-3\cdot 3+(-4)\cdot(-1)+1\cdot(-2)=-7\neq 0$ – вектори не компланарні.

b) $$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\left\{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix};-\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right\}$$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\left(-1;8;5\right)$$

$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(-1\right)\cdot 3+8\cdot\left(-4\right)+7\cdot 5=0$. Отже вектори компланарні.

4. Дано точки $A(1;3;-2)$, $B(0;7;1)$, $C(5;3;1)$. Знайти площу трикутника ABC (рис. 4).

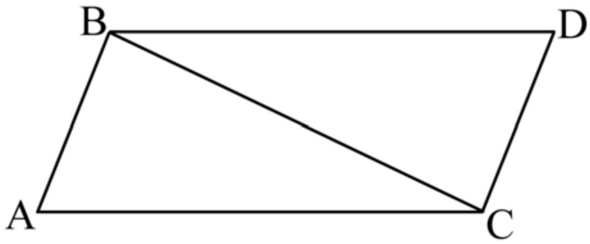


Рис. 4

Розв'язання:

Модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограма побудованого на його векторах

$$\left|\ \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\ \right|=S_{ABCD}.$$

Площа трикутника дорівнює половині площі паралелограма

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot S_{ABCD}.$$

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB}=(-1;4;3),\ \overrightarrow{AC}=(4;0;3),$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left\{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix};-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right\},$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left\{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix};-\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}\right\},$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(12;15;-16),$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{12^2+15^2+(-16)^2}=\sqrt{625}=25,$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{25}{2}=12{,}5 \text{ кв. од.}$$

Відповідь: $S_{\Delta ABC}=12{,}5$ кв. од.

6. Питання для самоконтролю

1. Що називається векторним добутком векторів?
2. За якою формулою знаходять векторний добуток векторів?
3. Коли векторний добуток векторів дорівнює нулю?
4. Що називається змішаним добутком векторів?
5. Запишіть формулу для знаходження змішаного добутку векторів.
6. Коли мішаний добуток дорівнює нулю?
7. Геометричний зміст мішаного добутку векторів?
8. Геометричний зміст векторного добутку векторів?

Практична робота 3. Поверхні у просторі. Площина як поверхня першого порядку. Деякі форми рівняння площини.

1. Основні поняття та теореми

1. Загальне рівняння площини :

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{1}$$

2. Рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і має вектор нормалі $\vec{n}=\{A;B;C\}$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{2}$$

3. Рівняння площини у відрізках на осях

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \tag{3}$$

де a, b, c – відрізки, які відтинає площина на координатних осях.

4. Рівняння площини у нормальному виді :

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma - p = 0, \tag{4}$$

де α, β, γ – кути між координатними осями Ox, Oy, Oz і перпендикуляром, проведеним із початку координат на площину, а p –довжина даного перпендикуляра.

Для приведення загального рівняння площин (1) до нормального виду (4) обидві його частини необхідно домножити на нормуючий множник

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{5}$$

Знак нормуючого множника береться протилежним вільному члену (1).

Відстань d від точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ визначається по формулі :

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{6}$$

7. Кут між площинами

$$(\pi_1): \qquad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0.$$

$$(\pi_2): \qquad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

$$\cos\varphi = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \tag{7}$$

8. Умова перпендикулярності двох площин

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \tag{8}$$

9. Умова паралельності двох площин

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{9}$$

10. Рівняння площини, яка проходить через задані точки $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \tag{10}$$

11. Рівняння сфери

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2, \tag{11}$$

де a, b, c –координати центра, R – радіус сфери.

2. Порядок виконання допуску до практичної роботи

a) Запустити систему за допомогою файла «КВМ.exe»;
b) Перейти у розділ «Практичні роботи»;
c) Обрати практичну роботу натиснувши на гіперпосилання «Поверхні у просторі. Площина як поверхня першого порядку. Деякі форми рівняння площини»;
d) Після ознайомлення з теоретичним матеріалом натиснути кнопку «Розпочати тестування» і при готовності кнопку «Почати»;
e) Виконати запропоновані завдання з урахуванням автоматично згенерованого параметра α і ввести отримані відповіді у відповідні поля (рис. 1). Якщо практична робота виконана не в комп'ютерній системі параметр α призначається викладачем (наприклад номер у списку або дві останні цифри залікової книжки).

1. Знайти ординату центра сфери

$$x^2+y^2+z^2-4\cdot x-(4+\alpha)\cdot y+4\cdot z=0.$$

2. При якому значенні параметра k точка $M(1+\alpha;2;-3k)$ належить площині $x-2y+3z+12=0$?

3. Знайти відрізок, який відрізає площина $2x+y-5z-(6+\alpha)=0$ на осі Ox?

4. При якому значенні параметра k площина

$$(4+2\alpha)\cdot x+(2+\alpha)\cdot y-4\cdot k\cdot z+5=0$$

паралельна площині $2x+y-2z-1=0$?

5. Знайти відстань від точки $A(1+\alpha;2;1)$ до площини $2x-3y+6z-7=0$.

3. Приклад виконання завдання на допуск студента до практичної роботи

1. Знайти ординату центра сфери

$$x^2+y^2+z^2-4\cdot x-54\cdot y+4\cdot z=0.$$

Розв'язання:

$$x^2+y^2+z^2-4\cdot x-54\cdot y+4\cdot z=0,$$

$$x^2-4x+y^2-54y+z^2+4z=0,$$

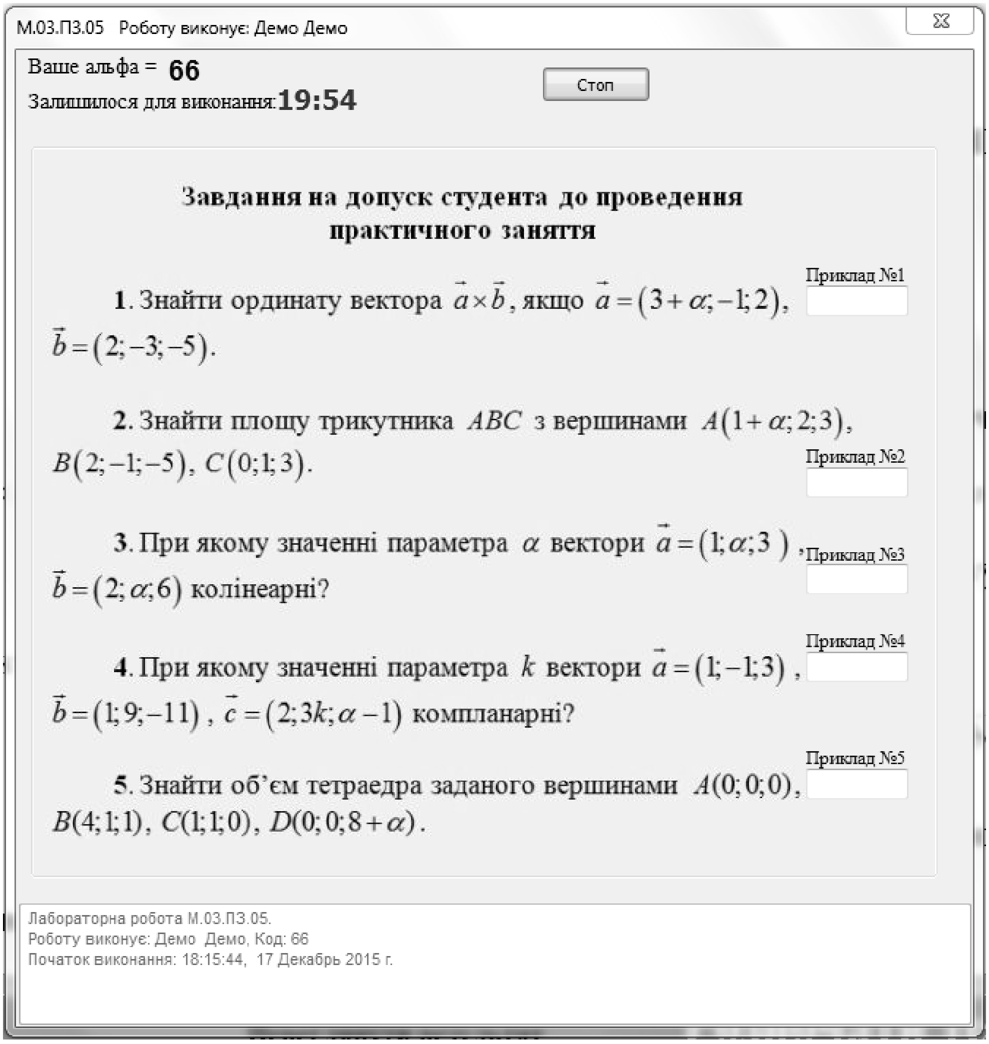


Рис. 1. Вікно для проходження допуску до практичної роботи.

$$x^2-4x+\left(y^2-54y+27^2\right)-27^2+z^2+4z=0,$$

$$x^2-4x+\left(y-27\right)^2-27^2+z^2+4z=0.$$

Отже $y_c=27$ – ордината центра сфери.

Відповідь: $y_c=27$

2. При якому значенні параметра k точка $M(51;2;-3k)$ належить площині $x-2y+3z+12=0$?

Розв'язання:

Якщо точка M належить площині, то її координати перетворюють рівняння площини у правильну рівність:

$$51-2\cdot2+3\cdot(-3k)+12=0,$$

$$51-4-9k+12=0,$$

$$9k=59,$$

$$k=\frac{59}{9},$$

$$k \approx 6,5556.$$

Відповідь: $k \approx 6,5556$.

3. Знайти відрізок, який відтинає площина $2x+y-5z-56=0$ на осі Ox?

Розв'язання:

Для того, щоб визначити який відрізок відтинає задана площина на осі Ox необхідно привести рівняння площини до рівняння площини у відрізках (3):

$$2x+y-5z=56 \quad |:56$$

$$\frac{x}{28}+\frac{y}{56}+\frac{z}{-\frac{56}{5}}=1$$

Відповідь: $a=28$.

4. При якому значенні параметра k площина

$$104x+52y-4kz+5=0$$

паралельна площині $2x+y-2z-1=0$?

Розв'язання:

Використаємо умову паралельності двох площин (9):

$$\frac{104}{2}=\frac{52}{1}=\frac{-4k}{-2}$$

$$\frac{2k}{1}=\frac{52}{1}$$

$$2k=52$$

$$k=26$$

Відповідь: $k=26$.

5. Знайти відстань від точки $A(51;2;1)$ до площини $2x-3y+6z-7=0$.

Розв'язання:

Знайдемо відстань від точки A до заданої площини за формулою (6):

$$d=\frac{|2\cdot 51-3\cdot 2+6\cdot 1-7|}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}}=$$

$$=\frac{|102-6+6-7|}{\sqrt{4+9+36}}=\frac{95}{7}\approx 13,5714.$$

4. Порядок виконання завдань і збереження результатів на сервері

a) Перехід до виконання основної частини практичної роботи виконується автоматично системою за умови успішного проходження допуску;

b) У відповідні поля ввести результати розв'язання задач і натиснути кнопку «Завершити тест достроково» для збереження результатів роботи. Якщо час, відведений на виконання, закінчився – система блокується. У будь-якому випадку комп'ютерна система відобразить оцінку виконаної роботи.

1. Знайти відстань від точки $P(-1;1+\alpha;-2)$ до площини, яка проходить через три точки $M_1(1;-1;1)$, $M_2(-2;1;3)$, $M_3(4;-5;-2)$.

2. Знайти довжину перпендикуляра, проведеного із початку координат на площину π, яка проходить через точки $M_1(1+\alpha;-1;-2)$ і $M_2(3;1;1)$ перпендикулярно до площини $\pi_1 \quad : \quad x-2\cdot y+3\cdot z-5=0$.

3. Знайти відрізок, який відтинає на осі Ox площина π, яка проходить через точку $M_0(-4+\alpha;3;-7)$ і паралельна до площини $\pi_1 \quad : \quad 5\cdot x-y+6\cdot z+2=0$.

4. Дві грані куба розміщені на площинах
$\pi_1 : 2\cdot x-2\cdot y+z-(1+\alpha)=0$ і $\pi_2 : 2\cdot x-2\cdot y+z+5=0$.
Знайти об'єм куба.

5. Знайти об'єм піраміди, яка обмежена координатними площинами і площиною π, яка проходить через точку $M(0;1-\alpha;2,5)$ і має нормальний вектор $\vec{n}=\{2;-3;6\}$.

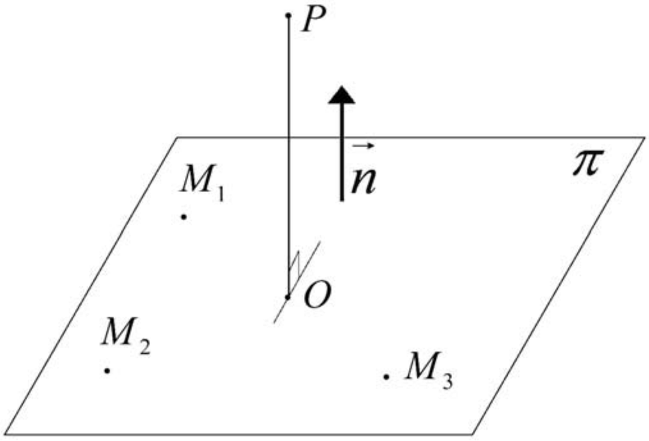


Рис. 2

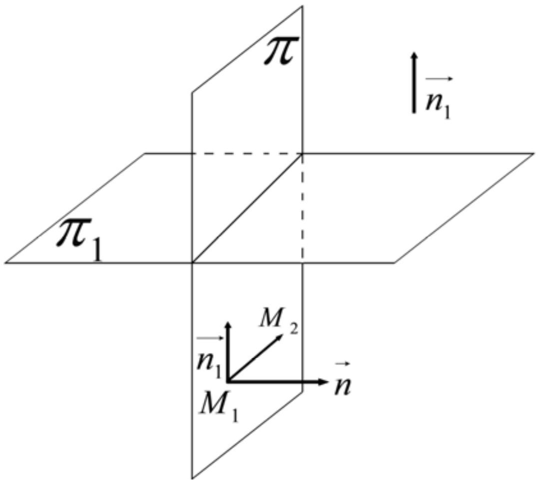


Рис.3

5. Приклади розв'язання задач та вправ до самостійної роботи студента на практичному занятті

1. Знайти відстань від точки $P(13;45;-10)$ до площини (рис. 2), яка проходить через три точки $M_1(1;-1;3)$, $M_2(-3;1;3)$, $M_3(5;-6;-3)$.

Розв'язання:

Використовуючи (10) дістанемо рівняння площини

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-3 \\ -3-1 & 1+1 & 3-3 \\ 5-1 & -6+1 & -3-3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-3 \\ -4 & 2 & 0 \\ 4 & -5 & -6 \end{vmatrix} = 0,$$

$$-12\cdot(x-1)-24\cdot(y+1)+12\cdot(z-3)=0,$$

$$-12\cdot x+12-24\cdot y-24+12\cdot z-36=0,$$

$$-12\cdot x-24\cdot y+12\cdot z-48=0,$$

$$x+2\cdot y-z+4=0.$$

Згідно з (6) одержимо :

$$d=\frac{|1\cdot 13+2\cdot 45-(-10)+4|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{117}{\sqrt{6}}=\frac{117}{2,449}\approx 47,7746.$$

Відповідь: $d\approx 47,7746$

2. Знайти довжину перпендикуляра (рис. 3), проведеного із початку координат на площину π, яка проходить через точки

$M_1(2;-1;3)$ і $M_2(5;1;2)$ перпендикулярно до площини $\pi_1 \;:\; x-2\cdot y+3\cdot z-5=0$.

Розв'язання:

Знайдемо рівняння площини π. За формулою (2), відповідно до точки M_1 і нормального вектора

$$\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{n}_1=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5-2 & 1+1 & 2-3\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 2 & -1\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix}=4\cdot\vec{i}-10\cdot\vec{j}-8\cdot\vec{k}$$

дістанемо рівняння площини π:

$$4\cdot(x-2)-10\cdot(y+1)-8\cdot(z-3)=0,$$

$$4\cdot x-8-10\cdot y-10-8\cdot z+24=0,$$

$$4\cdot x-10\cdot y-8\cdot z+6=0.$$

Приведемо рівняння площини (10) до нормального виду (4). Для цього за формулою (5) знайдемо нормуючий множник

$$\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{4^2+(-10)^2+(-8)^2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{16+100+64}}=$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{180}}=\pm\frac{1}{13,4164}\approx\pm 0,0745.$$

Так як вільний член рівняння площини додатній, то $\mu=-0,0745$. Домноживши рівняння площини на μ дістанемо

$$-0,298\cdot x+0,745\cdot y+0,596\cdot z-0,447=0.$$

Порівнюючи з (4), дістанемо, що $p=0,447$.

Відповідь: $p=0,447$.

3. Знайти відрізок, який відтинає на осі Oy площина π (рис. 4), яка проходить через точку $M_0(1;2;-7)$ і паралельна до площини $\pi_1 \;:\; 2\cdot x-3\cdot y+5\cdot z+2=0$.

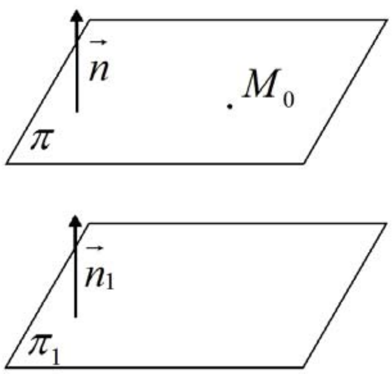


Рис. 4

Розв’язання:

За формулою (2), відповідно до точки M_0 і нормального вектора $\vec{n} = \vec{n}_1 = \{2; -3; 5\}$ одержимо рівняння площини π.

$$2\cdot(x-1)-3\cdot(y-2)+5\cdot(z+7)=0,$$

$$2\cdot x-2-3\cdot y+6+5\cdot z+35=0,$$

$$2\cdot x-3\cdot y+5\cdot z+39=0.$$

Використовуючи (3), приведемо рівняння площини π до рівняння площини у відрізках

$$2\cdot x-3\cdot y+5\cdot z=-39,$$

$$\frac{x}{-\frac{39}{2}}+\frac{y}{\frac{-39}{-3}}+\frac{z}{\frac{-39}{5}}=1,$$

$$\frac{x}{-19{,}5}+\frac{y}{13}+\frac{z}{-7{,}8}=1.$$

Отже, на осі Oy площина відтинає відрізок $b=13$.

Відповідь: $b=13$.

4. Дві грані куба розміщені (рис. 5) на площинах

$\pi_1: 3\cdot x-3\cdot y+z-5=0,$

$\pi_2: 3\cdot x-3\cdot y+z+13=0.$

Знайти об’єм куба.

Розв’язання:

Розглянемо довільну точку $M_0(0;0;-13)\in\pi_2$. Використовуючи (6), знайдемо довжину ребра куба, як відстань від точки M_0 до площини π_1

$$d=\frac{\left|3\cdot 0-3\cdot 0-13-5\right|}{\sqrt{3^2+(-3)^2+1^1}}=\frac{18}{\sqrt{19}}=\frac{18}{4{,}359}\approx 4{,}129.$$

Тоді, $V=d^3=(4{,}129)^3\approx 70{,}394$.

Відповідь: $V\approx 70{,}394$.

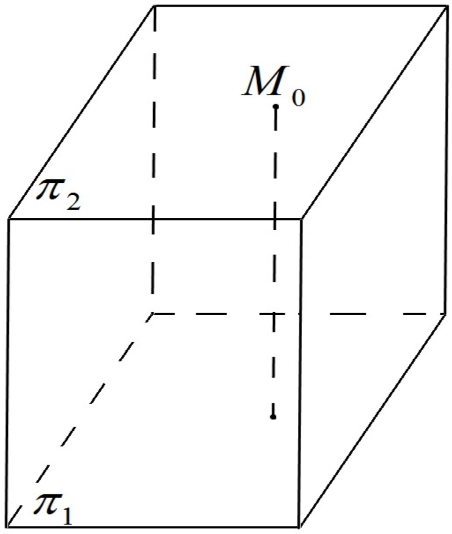


Рис.5

5. Знайти об'єм піраміди, яка обмежена координатними площинами і площиною π, яка проходить через точку $M(0;-5;2)$ і має нормальний вектор $\vec{n}=(2;-3;5)$.

Розв'язання:

За формулою (2), відповідно до точки M_0 і нормального вектора $\vec{n}$, дістанемо рівняння площини :

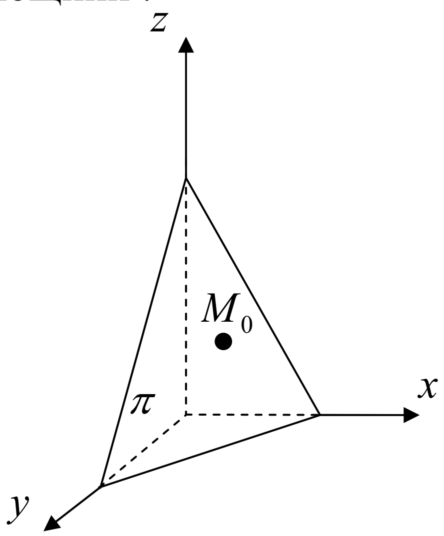


Рис. 6

$$-2\cdot(x-0)+3\cdot(y+5)+5\cdot(z-2)=0,$$
$$-2\cdot x+3\cdot y+15+5\cdot z-10=0,$$
$$2\cdot x-3\cdot y-5\cdot z-5=0.$$

Згідно з (3) дістанемо

$$2\cdot x-3\cdot y-5\cdot z=5,$$

$$\frac{x}{2,5}+\frac{y}{-1,667}+\frac{z}{-1}=1.$$

Отже, відрізки які відтинає площина π на координатних осях $a=2,5$; $b=-1,667$; $c=-1$.

Тоді $V_{пір}=\frac{1}{6}\cdot V_{парал.}=\frac{1}{6}\cdot 2,5\cdot 1,667\cdot 1\approx 0,695$.

Відповідь: $V_{пір}\approx 0,695$

6.Питання для самоконтролю

1. Запишіть відомі вам рівняння площини у просторі.
2. Як знайти відстань від точки до площини?
3. За якою формулою знаходять кут між площинами?
4. Запишіть умову перпендикулярності, паралельності двох площин.
5. Запишіть рівняння площини, яка проходить через три задані точки.
6. Запишіть рівняння сфери.

Практична робота 4. Лінії у просторі. Форми рівняння прямої у просторі. Кутові співвідношення між прямими, площинами, прямими та площинами.

1. Основні поняття та теореми

Пряма KN в просторі як перетин двох площин π_1 та π_2 визначається сумісним заданням двох рівнянь першого степеня (рис.1).

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 & (\pi_1) \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 & (\pi_2) \end{cases} \tag{1}$$

при умові, що коефіцієнти A_1, B_1, C_1 не пропорційні коефіцієнтам A_2, B_2, C_2, інакше вказані два рівняння будуть визначати або паралельні площини, або площини, які співпадають.

Рівняння пучка площин (сукупності усіх площин, які проходять через деяку пряму (1)) має вигляд

$$\alpha\cdot(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta\cdot(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0, \tag{2}$$

де α , β – будь-які дійсні числа. Якщо $\alpha \neq 0$, то позначивши $\dfrac{\beta}{\alpha} = \lambda$, рівняння (2) можна записати в такому вигляді

$$(A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1) + \lambda \cdot (A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0. \qquad (3)$$

Канонічні рівняння прямої лінії, яка проходить через відому точку $M_0(x_0, y_0\, z_0)$ в заданому вектором $\vec{a} = \{l; m; p\}$ напрямі ($\vec{a}$ – напрямлений вектор прямої), мають вигляд (рис.2).

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{p} \qquad (4)$$

Рівняння (4) виражає колінеарність двох векторів $\vec{a} = \{l; m; p\}$ та $\overrightarrow{M_0 M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$.

У параметричному вигляді рівняння прямої лінії в просторі записується так:

$$\begin{cases} x = x_0 + l \cdot t, \\ y = y_0 + m \cdot t, \\ z = z_0 + p \cdot t. \end{cases} \qquad (5)$$

де t –параметр .

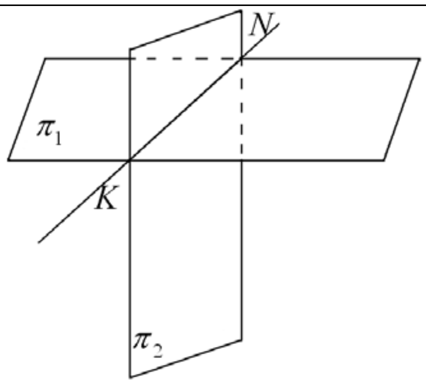


Рис.1

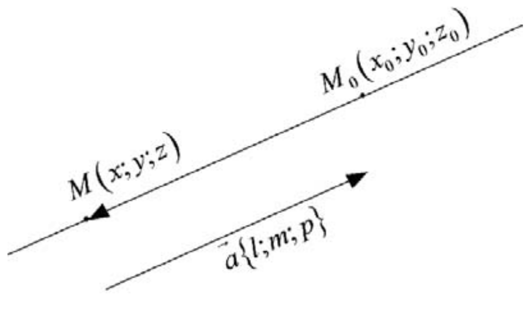


Рис.2

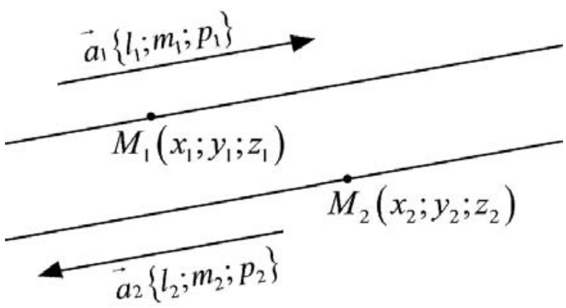


Рис.3

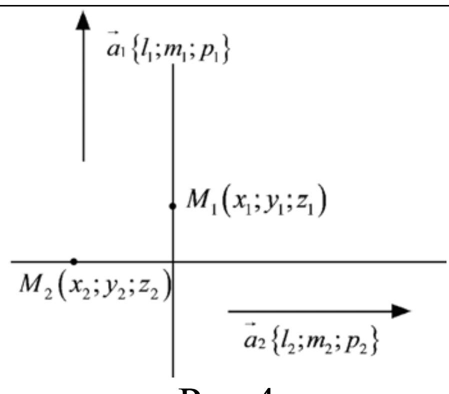


Рис.4

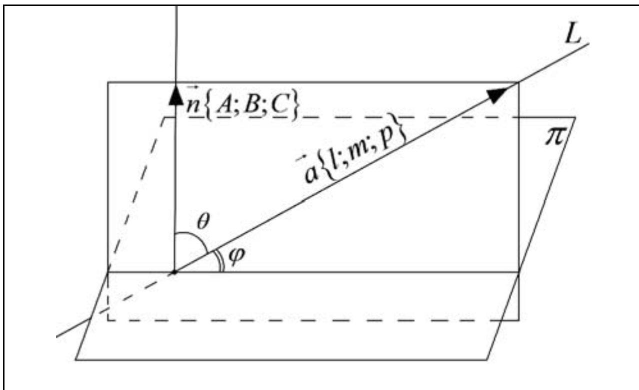


Рис.5

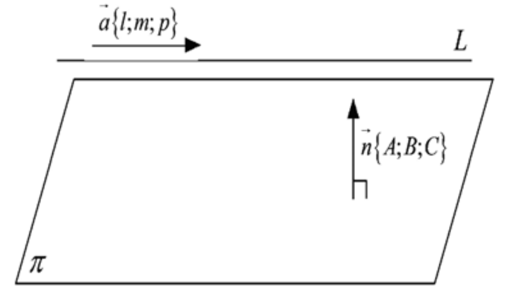


Рис.6

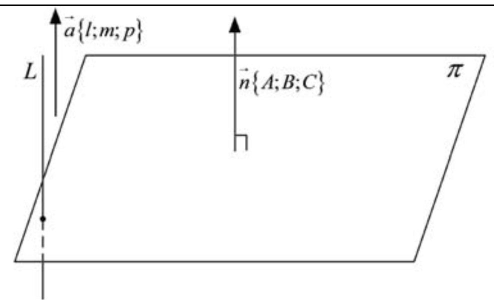


Рис.7

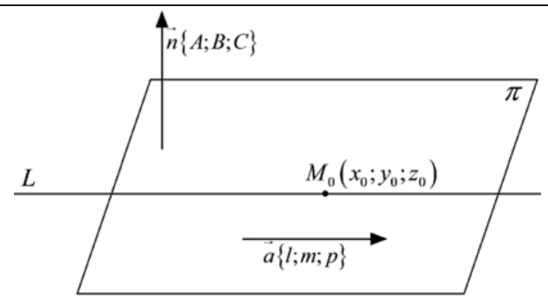


Рис.8

Умова паралельності двох прямих у просторі (рис.3).

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{p_1}.$$

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{p_2}. \qquad (6)$$

має вигляд

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{p_1}{p_2} \qquad (7)$$

і виражає умову колінеарності спрямовуючих (напрямлених) векторів $\vec{a}_1=\{l_1;m_1;p_1\}$ та $\vec{a}_2=\{l_2;m_2;p_2\}$ прямих (6) .

Умова перпендикулярності двох прямих (6) має вигляд (рис.4) :

$$l_1l_2+m_1m_2+p_1p_2=0 \qquad (8)$$

і виражає умову перпендикулярності їх напрямлених векторів.

Кут між двома прямими (6) визначається як кут між їх напрямленими векторами :

$$\cos\varphi=\pm\frac{l_1l_2+m_1m_2+p_1p_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+p_2^2}}. \qquad (9)$$

Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ та $M_2(x_2;y_2;z_2)$ записуються у вигляді

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (10)$$

Гострий кут між прямою L

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{p}$$

та площиною π

$$Ax+By+Cz+D=0$$

визначається за формулою $\cos(\theta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin(\varphi)$ рис.5

$$\sin\varphi=\frac{|A\,l+B\,m+C\;p|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+p^2}} \qquad (11)$$

Умова перпендикулярності прямої L та площини π має вигляд (рис.6)

$$A\,l+B\,m+C\;p=0 \qquad (12)$$

і виражає умову перпендикулярності векторів $\vec{a}=\{l;m;p\}$ та $\vec{n}=\{A;B;C\}$.

Умова перпендикулярності прямої L і площини π має вигляд (рис.7) :

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{p} \qquad (13)$$

і виражає умову перпендикулярності векторів $\vec{a}$ і $\vec{n}$.

Умова належності прямої L до площини π має вигляд (рис.8) :

$$\begin{cases} Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \\ A\,l+B\,m+C\;p=0 \end{cases}. \qquad (14)$$

2. Порядок виконання допуску до практичної роботи

a) Запустити систему за допомогою файла «КВМ.exe»;
b) Перейти у розділ «Практичні роботи»;
c) Обрати практичну роботу натиснувши на гіперпосилання «Лінії у просторі. Форми рівняння прямої у просторі. Кутові співвідношення між прямими, площинами, прямими та площинами»;

d) Після ознайомлення з теоретичним матеріалом натиснути кнопку «Розпочати тестування» і при готовності кнопку «Почати»;

e) Виконати запропоновані завдання з урахуванням автоматично згенерованого параметра α і ввести отримані відповіді у відповідні поля (рис. 9). Якщо практична робота виконана не в комп'ютерній системі параметр α призначається викладачем (наприклад номер у списку або дві останні цифри залікової книжки).

1. Знайти ординату точки перетину прямої

$$\begin{cases} 2x+(\alpha+2)y-z-3(\alpha-50)=0, \\ x+(\alpha+5)y+z-4(\alpha-45)=0 \end{cases}$$

з координатною площиною Oxy.

2. Дано рівняння прямої

$$\frac{x+2(\alpha-20)}{l}=\frac{y-(\alpha+10)}{3}=\frac{z-(\alpha-55)}{4(\alpha+3)}$$

та площини $3(\alpha+1)x-4(\alpha+2)y-5(\alpha+7)z=0$. При якому значенні l вони будуть паралельні?

3. Знайти ординату напрямленого вектора прямої, що проходить через дві дані точки $A(-\alpha-3;\alpha-50;\alpha-55)$ та $B(\alpha+7;2\alpha-115;\alpha+20)$.

4. Знайти косинус гострого кута між прямими

$$\frac{x-\alpha}{\alpha+2}=\frac{y-(\alpha+3)}{7}=\frac{z+\alpha}{-100} \text{ та } \frac{x+1}{-3}=\frac{y}{4}=\frac{z-10}{6}.$$

5. Знайти синус гострого кута між прямою

$$\frac{x-(\alpha+5)}{\alpha+3}=\frac{y-(\alpha-50)}{2}=\frac{z+\alpha}{-6}$$

та площиною $4x+4y-7z+(\alpha+3)=0$.

3. Приклад виконання завдання на допуск студента до практичної роботи

1. Знайти ординату точки перетину прямої

$$\begin{cases} 2x+53y-z-3=0, \\ x+56y+z-20=0 \end{cases}$$

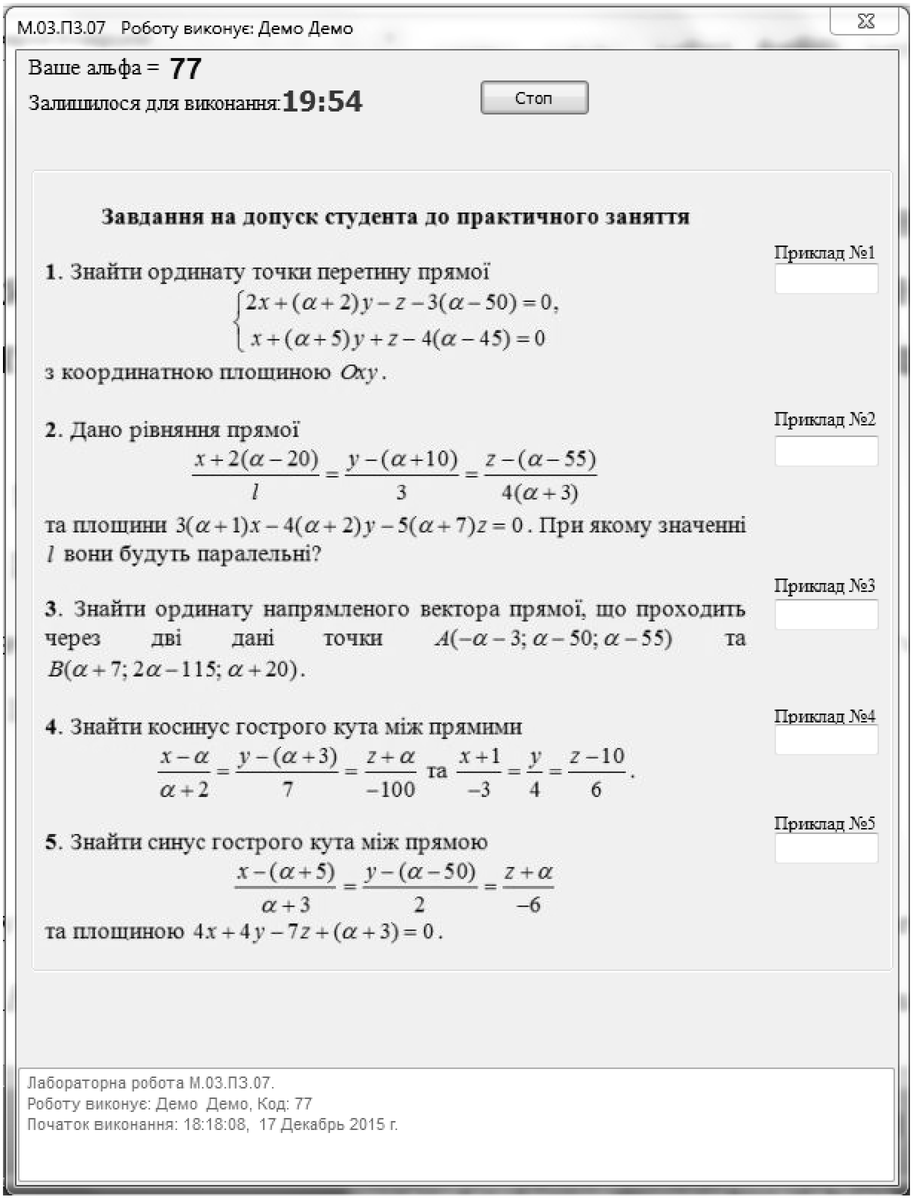


Рис. 9. Вікно для проходження допуску до практичної роботи.

з координатною площиною Oxy.

Розв'язання:

Рівняння площини Oxy має вираз $z=0$. Підставимо $z=0$ в задане рівняння прямої отримаємо:

$$\begin{cases} 2x+53y=3, \\ x+56y=20 \end{cases}$$

Знайдемо з цієї системи невідому ординату точки перетину

$$\begin{cases} 2x+53y=3, \\ -2x-56\cdot 2y=-40 \end{cases} +$$

$$53y-112y=-37$$

$$-59y=-37,$$

$$y = \frac{37}{59}$$

$$y \approx 0,6271$$

Відповідь: $y \approx 0,6271$.

2. Дано рівняння прямої

$$\frac{x+30}{l} = \frac{y-60}{3} = \frac{z-5}{212}$$

та площини $153x - 208y - 285z = 0$. При якому значенні l вони будуть паралельні?

Розв'язання:

Використаємо умову (12) паралельності прямої та площини

$$153l - 208 \cdot 3 - 285 \cdot 212 = 0,$$

$$153l = 624 + 60420,$$

$$153l = 61044,$$

$$l = \frac{61044}{153},$$

$$l \approx 398,98.$$

Відповідь: $l \approx 398,98$.

3. Знайти ординату напрямленого вектора прямої, що проходить через дві дані точки $A(-103; -50; 45)$ та $B(107; 85; 120)$.

Розв'язання:

Знайдемо ординату напрямленого вектора прямої, яка проходить через дві точки A і B, скориставшись формулою (10)

$$\frac{x-107}{-103-107} = \frac{y-85}{-50-85} = \frac{z-120}{45-120}$$

$$\frac{x-107}{-210} = \frac{y-85}{-135} = \frac{z-120}{-75}$$

Відповідь: -135.

4. Знайти косинус гострого кута між прямими

$$\frac{x-50}{52} = \frac{y-53}{7} = \frac{z+50}{-100} \text{ та } \frac{x+1}{-3} = \frac{y}{4} = \frac{z-10}{6}$$

Розв'язання:

Косинус кута між заданими прямими знайдемо за формулою (9):

$$\cos\varphi = \pm\frac{-52 \cdot 3 + 7 \cdot 4 - 100 \cdot 6}{\sqrt{52^2 + 7^2 + 100^2} \cdot \sqrt{9+16+36}} =$$

$$= \pm\frac{-156+28-600}{\sqrt{2704+49+10000} \cdot \sqrt{61}} = \pm\frac{-728}{112,93 \cdot 7,81} \approx \mp 0,8254.$$

Відповідь: $\cos\varphi \approx \mp 0,8254$.

5. Знайти синус гострого кута між прямою

$$\frac{x-55}{53} = \frac{y}{2} = \frac{z+50}{-6}$$

та площиною $4x + 4y - 7z + 53 = 0$.

Розв'язання:

Для знаходження синуса кута між прямою і площиною використаємо формулу (11).

$$\sin\varphi = \frac{4\cdot 53 + 4\cdot 2 - 7\cdot(-6)}{\sqrt{53^2 + 2^2 + (-6)^2}\cdot\sqrt{4^2 + 4^2 + (-7)^2}} =$$

$$= \frac{212 + 8 + 42}{\sqrt{2819}} \approx \frac{262}{53,38\cdot 9} \approx 0,5454.$$

Відповідь: $\sin\varphi \approx 0,5454$.

4. Порядок виконання завдань і збереження результатів на сервері

a) Перехід до виконання основної частини практичної роботи виконується автоматично системою за умови успішного проходження допуску;

b) У відповідні поля ввести результати розв'язання задач і натиснути кнопку «Завершити тест достроково» для збереження результатів роботи. Якщо час, відведений на виконання, закінчився – система блокується. У будь-якому випадку комп'ютерна система відобразить оцінку виконаної роботи.

1. Дано дві прямі в просторі (рис.9)

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z - 10 = 0 & (\pi_1) \\ (\alpha+10)x - 2(\alpha+1)y + 3\alpha z - 6(\alpha+5) = 0 & (\pi_2) \end{cases}$$

та $\dfrac{x-\alpha}{\alpha+1} = \dfrac{y-(\alpha+1)}{-2} = \dfrac{z+\alpha}{4}$

Потрібно:

а) записати рівняння першої прямої в канонічному вигляді (за відповідну точку M_1 взяти точку перетину першої прямої з координатною площиною Oxz) ;

б) знайти гострий кут (в радіанах) між прямими:

в) обчислити відстань між точками M_1 та M_2 даних прямих.

У відповіді вказати відстань між точками M_1 та M_2.

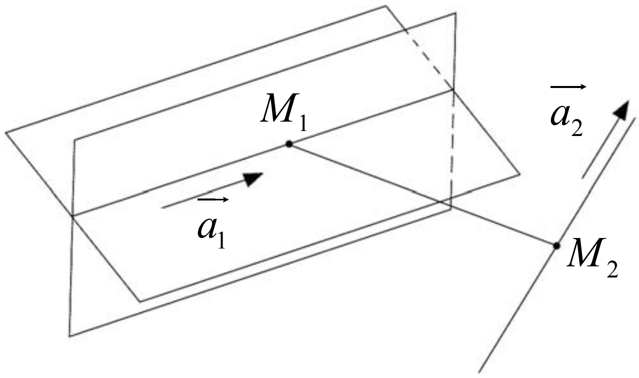


Рис. 10

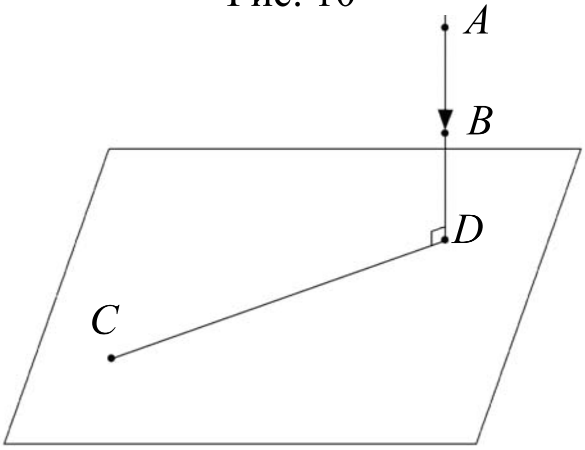


Рис. 11

2. Знайти загальне рівняння площини, що проходить через пряму

$$\begin{cases} x = 5\,t + (\alpha + 2), \\ y = -4\,t - (\alpha + 1), \\ z = 3\,t + (\alpha + 2). \end{cases}$$

та точку $M(4;-2;-3)$. Рівняння шуканої площини записати з найменшими цілими коефіцієнтами A, B, C, D $(A > 0)$ та знайти суму $A + B + C + D$.

3. Дано три точки $A(\alpha - 4; \alpha; 8 + \alpha)$, $B(\alpha; 2 + \alpha; 4 + \alpha)$ та $C(\alpha - 45; \alpha - 50; -47)$.

Потрібно:

а) записати канонічні рівняння прямої AB;

б) знайти відстань від точки C до прямої AB.

У відповіді вказати відстань від т С до прямої AB.

4. Дано вершини трикутника $A(\alpha - 47; \alpha - 46; \alpha - 52)$, $B(\alpha - 43; 47 - \alpha; \alpha - 54)$, $C(\alpha - 45; \alpha - 49; \alpha - 57)$. Записати параметричні рівняння його висоти, опущеної з вершини B на протилежну сторону, та знайти її довжину. У відповіді вказати довжину висоти.

5. Дано дві прямі в просторі

$$\begin{cases} 2x - 3y + 2z - 8 = 0 & (\pi_1) \\ 2(\alpha+1)x - 3(\alpha+3)y + 2(\alpha+2)z - 4(2\alpha+5) = 0 & (\pi_2) \end{cases}$$

та $\dfrac{x-\alpha}{l+\alpha} = \dfrac{y+\alpha}{4} = \dfrac{z+10}{2}$

Потрібно знайти:

а) значення l при якому вони перетинаються;

б) координати точки перетину.

Для контролю обчислити суму значень координат точки перетину та параметра $l = (x + y + z + 1)$.

5. Приклади розв'язання задач та вправ для самостійної роботи на практичному занятті

1. Дано дві прямі в просторі

$$\begin{cases} 4x + 5y - 4z - 16 = 0, & (\pi_1) \\ 3x + 4y - 5z - 15 = 0, & (\pi_2) \end{cases}$$

$$\text{та } \frac{x-9}{10} = \frac{y-12}{3} = \frac{z+11}{5}.$$

Потрібно:

а) записати рівняння першої прямої в канонічному вигляді (за відповідну точку M_1 взяти точку перетину першої прямої з координатною площиною Oxz) ;

б) знайти гострий кут (у радіанах) між прямими;

в) обчислити відстань між точками M_1 та M_2 даних прямих.

Розв'язання:

а) Перша пряма, як лінія перетину двох площин π_1 та π_2, записана в вигляді (1). Для того щоб записати її рівняння в канонічному вигляді (4) необхідно знайти спрямовуючий вектор $\vec{a}_1$ та координати деякої точки M_1, що належить даній прямій. Вектор $\vec{a}_1$ можна визначити як векторний добуток двох нормальних векторів $\vec{n}_1$ та $\vec{n}_2$ площин π_1 та π_2: $\vec{a}_1 = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$, де $\vec{n}_1 = \{4;\ 5; -4\}$ і $\vec{n}_2 = \{4;\ 5; -4\}$.

Тоді $\vec{a}_1 = \left\{ \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \right\}$

звідки $\vec{a}_1 = \{-9;\ 8; 1\}$.

Точку M_1, згідно з умовою задачі, потрібно вибрати як точку перетину першої прямої з площиною Oxz , рівняння якої $y = 0$. Тому для знаходження координат точки M_1 прямої необхідно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 4x + 5y - 4z - 16 = 0, \\ 3x + 4y - 5z - 15 = 0, \text{ або} \\ y = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 4z = 16 \big| \div 4 \\ \ \ 3x - 5z = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 4 \\ 3x - 5z = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 + z \\ 3x - 5z = 15 \end{cases} \Rightarrow$$

$$3 \cdot (4 + z) - 5z = 15$$

$$12 + 3z - 5z = 15$$

$$-2z = 3$$

$$z = -1{,}5,\ x = 4 + (-1{,}5) = 2{,}5$$

Звідки $x = 2{,}5$, $z = -1{,}5$ та $y = 0$.

Таким чином канонічні рівняння першої прямої мають вигляд (оскільки $M_1(2{,}5; 0; -1{,}5)$) :

$$\frac{x - 2{,}5}{-9} = \frac{y}{8} = \frac{z = 1{,}5}{1}.$$

б) Косинус кута між двома прямими, визначається за формулою (9), в якій потрібно взяти $\vec{a}_1 = \{-9; 8; 1\}$ і $\vec{a}_2 = \{10; 3; 5\}$, тобто $l_1 = -9$; $m_1 = 8$; $p_1 = 1$; $l_2 = 10$; $m_2 = 3$; $p_2 = 5$ тоді :

$$\cos\varphi = \pm\frac{-61}{\sqrt{146} \cdot \sqrt{134}} = \pm(-0{,}4361).$$

Так як потрібно знайти гострий кут, то перед дужками вибираємо знак "мінус", тобто $\cos\varphi = 0{,}4361$.

Звідки, користуючись таблицями тригонометричних функцій, або зо допомогою мікрокалькулятора знаходимо $\varphi = \arccos(0{,}4361) \approx 1{,}1195$ радіан.

в) Відстань між двома точками $M_1(2{,}5; 0; -1{,}5)$ та $M_2(9; 12; -11)$ даних прямих обчислюємо за формулою

$$d_{M_1M_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} =$$
$$= \sqrt{(9 - 2{,}5)^2 + (12 - 0)^2 + (-11 + 1{,}5)^2} = \sqrt{342{,}5}$$

або $d_{M_1M_2} \approx 18{,}5068$.

Відповідь: $d_{M_1M_2} \approx 18{,}5068$

2. Знайти загальне рівняння площини, що проходить через пряму

$$\begin{cases} x = 5\,t - 102, \\ y = 4\,t - 106, \\ z = 3\,t - 101. \end{cases}$$

та точку $M(6;-2;-5)$. Рівняння шуканої площини записати з найменшими цілими коефіцієнтами A, B, C, D $(A > 0)$ та знайти суму $A + B + C + D$.

Розв'язання: Дана пряма задана параметричними рівняннями. Запишемо її канонічні рівняння (4)

$$\frac{x+102}{5} = \frac{y+106}{4} = \frac{z+101}{3}.$$

Далі запишемо рівняння цієї прямої в вигляді (1), тобто як перетин двох площин :

$$\begin{cases} \dfrac{x+102}{5} = \dfrac{y+106}{4} \\ \dfrac{y+106}{4} = \dfrac{z+101}{3} \end{cases}$$

Звідти, одержимо (рис.1)

$$\begin{cases} 4x - 5y - 126 = 0, & (\pi_1) \\ 3y - 4z - 86 = 0, & (\pi_2) \end{cases}$$

Рівняння пучка площин, що проходять через дану пряму в відповідності з (3), можна записати так :

$$4x - 5y - 126 + \lambda \cdot (3y - 4z - 86) = 0,$$

Із цього пучка площин потрібно вибрати одну, ту яка проходить через точку $M(6;-2;-5)$.

Якщо площина проходить через деяку точку, то координати цієї точки повинні задовольняти рівнянню площини. Підставляючи в рівняння пучка площин координати точки M, одержимо рівняння для знаходження λ :

$$4 \cdot 6 - 5 \cdot (-2) - 126 + \lambda \cdot (3 \cdot (-2) - 4 \cdot (-5) - 86) = 0$$

Звідки $92 + 72 \cdot \lambda = 0$, тобто $\lambda = -\dfrac{92}{72}$, або $\lambda = -\dfrac{23}{18}$.

Підставляючи знайдене значення λ в рівняння (*), одержимо :

$$4x-5y-126+\left(-\frac{23}{18}\right)\cdot\left(3y-4z-86\right)=0,$$

або $18\cdot\left(4x-5y-186\right)-23\cdot\left(3y-4z-86\right)=0.$

Звідки $72x-159y+92z-1370=0$

Безпосередньо, зробивши перевірку, можна впевнитись що знайдена площина проходить через точку M і дану пряму, у відповідності з умовами (14).

Для контролю обчислимо суму коефіцієнтів

$$A+B+C+D=72-159+92-1370=-1365.$$

Відповідь: $A+B+C+D=-1365$

3. Дано три точки $A(102;-105;-111)$, $B(105;-107;-106)$, $C(44;-53;-44)$. Потрібно:

а) записати канонічні рівняння прямої AB ;

б) знайти відстань від точки C до прямої AB.

Розв'язання:

а) Для того, щоб записати канонічні рівняння прямої AB, скористуємось формулами (10) , в яких потрібно взяти $x_1=102$; $y_1=-105$; $z_1=-111$; $x_2=105$; $y_2=-107$; $z_2=-106$. тоді одержимо

$$\frac{x-102}{105-102}=\frac{y+105}{-107+105}=\frac{z+111}{-106+111}$$

Звідки $\dfrac{x-102}{3}=\dfrac{y+105}{-2}=\dfrac{z+111}{5}.$

б) Відстань від точки $C(44;-53;-44)$ до прямої AB можна знайти як довжину перпендикуляра CD, опущенного з точки C на дану пряму. Вказаний перпендикуляр CD побудуємо в площині π, що проходить через точку C перпендикулярно до прямої AB (рис.10). Так як напрямлений вектор $\vec{a}$ прямої AB $\left(\vec{a}=\overrightarrow{AB}\right)$ перпендикулярний до площини π, беремо його за нормальний вектор цієї площини – $\vec{n}=\vec{a}=\left\{3;\,-2;5\right\}$, тому рівняння площини π знаходимо в вигляді :

$$3\cdot(x-44)+(-2)\cdot(y+53)+5\cdot(z+44)=0$$

або $3x-2y+5z-18=0$ π

Далі, знаходимо точку D, як точку перетину прямої AB з площиною π. Для цього рівняння прямої AB запишемо в параметричному вигляді (5). Нехай кожне з трьох відношень, що входить в рівняння прямої AB, дорівнює t :

$$\frac{x-102}{3}=\frac{y+105}{-2}=\frac{z+111}{5}=t$$

$$\text{або}\ \begin{cases} \dfrac{x-102}{3}=t, \\ \dfrac{y+105}{-2}=t, \\ \dfrac{z+111}{5}=t, \end{cases}$$

$$\text{звідки}\ \begin{cases} x=3\,t+102, \\ y=-2\,t-105, \\ z=5\,t-111. \end{cases}$$

Підставляючи ці значення x, y та z в рівняння площини π, одержимо :

$$3\cdot(3\,t+102)-2\cdot(-2\,t-105)+5(5\,t-111)-18=0.$$

Звідки $38t-57=0$, тобто $t=1{,}5$. Це значення t є значення параметра в точці D перетину прямої і площини. Таким чином координати точки D: $x_D=3\cdot 1{,}5+102$; $y_D=-2\cdot 1{,}5-105$; $z_D=5\cdot 1{,}5-111$, звідки $x_D=106{,}5$; $y_D=-108$; $z_D=-103{,}5$, тобто $D(106{,}5;-108;-103{,}5)$. Тоді відстань від точки C до прямої AB дорівнює :

$$d_{M_1M_2}=\sqrt{(106{,}5-44)^2+(-108+53)^2+(-103{,}5+44)^2}=$$
$$=\sqrt{10471{,}5}\approx 102{,}330$$

Відповідь: $d_{M_1M_2}\approx 102{,}330$.

4. Дано вершини трикутника $A(52;57;48)$, $B(54;49;42)$, $C\left(56;52;50\right)$. Записати параметричні рівняння його висоти, опущеної з вершини B на протилежну сторону, та знайти її довжину.

Розв'язання:

Позначимо через D основу висоти з вершини B (рис.12). Точка D – це спільна точка прямої AC і висоти (перпендикуляра) BD. Для знаходження координат точки D запишемо канонічні та параметричні рівняння прямої AC. Канонічні рівняння прямої AC запишемо в відповідності з формулами (10), в яких візьмемо $x_1=52$; $y_1=57$; $z_1=48$; $x_2=56$; $y_2=52$; $z_2=50$. Тоді одержимо

$$\frac{x-52}{4}=\frac{y-57}{-5}=\frac{z-48}{-2}\quad (AC)$$

Звідси напрямлений вектор цієї прямої $\vec{a}_1=\overrightarrow{AC}=\{\,4;\ -5;2\,\}$. Параметричні рівняння прямої AC запишемо у вигляді:

$$\begin{cases} x=4\,t+52, \\ y=-5\,t+57,\ (AC) \\ z=-2\,t+48. \end{cases}$$

Згідно з умовою задачі BD перпендикулярна до AC, тобто вектори $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$ взаємно перпендикулярні, а їх скалярний добуток дорівнює нулю. Тому відшукаємо параметр t так, щоб виконувалася рівність $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$, де

$\overrightarrow{BD}=\{\,4t+52-54;\ -5t+57-49;-2t+48-42\,\}$ або

$\overrightarrow{BD}=\{\,4t-2;-5t+8;-2t+6\,\}$.

Так як $\overrightarrow{AC}=\{\,4;-5;-2\,\}$, то для знаходження відповідного значення t одержимо рівняння :

$$4\cdot(4t-2)+(-5)\cdot(-5t+8)+(-2)\cdot(-2t+6)=0,$$

звідки $45t-60=0$, тобто $t=\dfrac{4}{3}$

Таким чином координати точки D :

$$x_D=4\cdot\frac{4}{3}+52=57\frac{1}{3}\approx 57{,}333\ ;$$

$$y_D=-5\cdot\frac{4}{3}+57=50\frac{1}{3}\approx 50{,}333\ ;$$

$$z_D=-2\cdot\frac{4}{3}+48=45\frac{1}{3}\approx 45{,}333$$

тобто $D\left(57\frac{1}{3};50\frac{1}{3};45\frac{1}{3}\right)$.

Тоді вектор $\overrightarrow{BD}$ дорівнює :

$$\overrightarrow{BD}=\left\{\,57\frac{1}{3}-54;50\frac{1}{3}-49;45\frac{1}{3}-42\,\right\}$$

або $\overrightarrow{BD}=\left\{\frac{10}{3};\ \frac{4}{3};\frac{10}{3}\right\}$. Але за напрямний вектор прямої (висоти) BD можна взяти вектор $\vec{a}_2=\frac{3}{2}\overrightarrow{BD}$, тобто вектор $\vec{a}_2=\{\ 5;2;5\ \}$ (рис.11).

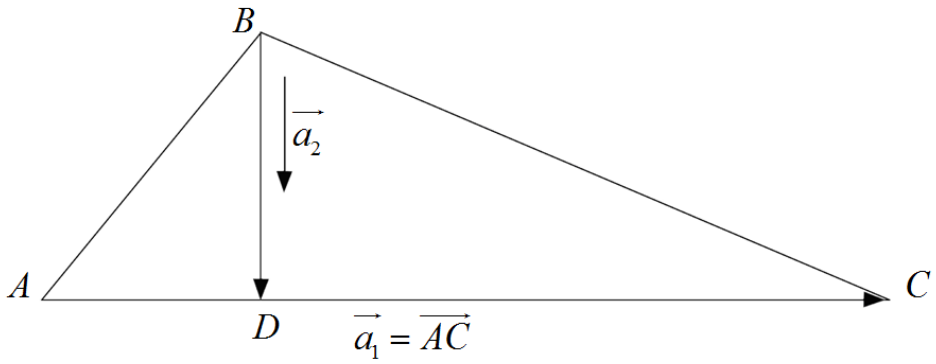


Рис.12

Таким чином, канонічні рівняння висоти BD можна записати у вигляді :

$$\frac{x-54}{5}=\frac{y-49}{2}=\frac{z-42}{5}\quad (BD),$$

а шукані параметричні рівняння висоти, опущеної з вершини B на протилежну сторону AC, мають вигляд :

$$\begin{cases} x=5\,t+54, \\ y=2\,t+49, \ (BD) \\ z=5\,t+42. \end{cases}$$

Довжина висоти BD, яку потрібно знайти, в даному випадку дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{BD}$, тобто

$$\left|\overrightarrow{BD}\right|=\sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{10}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}\sqrt{216}\approx 4{,}8990.$$

Відповідь: $\left|\overrightarrow{BD}\right|\approx 4{,}8990$.

5. Дано дві прямі в просторі

$$\begin{cases} 3x-5y+2z-7=0, & (\pi_1) \\ 70x-120y+45z-161=0, & (\pi_2) \end{cases}$$

та $\frac{x-41}{l+41}=\frac{y-7}{3}=\frac{z+5}{-4}$.

Потрібно знайти :

а) значенні l при якому вони перетинаються;

б) координати точки перетину.

Для контролю обчислити суму значень координат точки перетину та параметра $(x+y+z+l)$.

Розв’язання:

Перша пряма задана як лінія перетину двох площин π_1 та π_2. Запишемо її в канонічному вигляді (4), так як це детально зроблено і описано при розв’язанні першої задачі. В даному випадку маємо: $\vec{n}_1 = \{3;\ -5;\ 2\}$ і $\vec{n}_2 = \{70;\ -120;\ 45\}$. Тоді $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \{25;\ -5;\ 35\}$, а напрямний вектор $\vec{a}_1 = \frac{1}{5}\cdot\left(\vec{n}_1 \times \vec{n}_2\right) = \{5;\ -1;\ 7\}$.

Координати точки M_1 першої прямої знаходимо як розв’язки системи рівнянь $\begin{cases} x = 0, \\ -5y + 2z = 7, \\ -120y + 45z = 161. \end{cases}$

Звідки $x = 0$, $z = \frac{7}{3}$ та $y = -\frac{7}{15}$ тобто $M_1\left(0; -\frac{7}{15}; -\frac{7}{3}\right)$.

Таким чином канонічні рівняння першої прямої мають вигляд $\frac{x}{5} = \frac{y+\frac{7}{15}}{-1} = \frac{z-\frac{7}{3}}{7}$, а її параметричні рівняння записуються так :

$$\begin{cases} x = 5\,t_1\ , \\ y = -t_1 - \frac{7}{15}, \\ z = 7\,t_1 + \frac{7}{3}. \end{cases}$$

Параметричні рівняння другої прямої мають вигляд :

$$\begin{cases} x = (l+41)\cdot t_2 + 41, \\ y = 3\,t_2 + 7, \\ z = -4\,t - 5. \end{cases}$$

Підберемо значення параметрів t_1 і t_2 так, щоб відповідні координати (x, y, z) першої та другої прямої співпадали. Ці значення (x, y, z) і будуть координатами точки перетину даних прямих).

Ліві частини в параметричних рівняннях першої та другої прямої будуть рівні тільки в тому випадку , коли будуть рівні їх праві частини, тобто одержимо: $\begin{cases} 5\,t_1 = (l+41)\cdot t_2 + 41, \\ -t_1 - \dfrac{7}{15} = 3\,t_2 + 7, \\ 7\,t_1 + \dfrac{7}{3} = -4\,t_2 - 5. \end{cases}$

Остання система – це система трьох рівнянь з трьома невідомими t_1, t_2 та l, розв'язавши яку знаходимо

$$t_1 \approx 0,46274,\ t_2 \approx -2,46314,\ l \approx -26,3635.$$

Таким чином, дані дві прямі перетинаються при значенні $l \approx -26,3635$. Підставляючи далі або значення параметра t_1 в параметричні рівняння першої прямої, або значення t_2 і l у параметричні рівняння другої прямої, знаходимо координати точки перетину:

$$x = 5 \cdot 0,46274 \approx 2,3137;$$

$$y = -0,46274 - 0,4667 \approx -0,9294\ ;$$

$$z = 7 \cdot 0.46274 + 2,33333 \approx 5,5726\ ;$$

інакше $x = (-26,3635 + 41)\cdot(-2,64314) + 41 \approx 2,3137\ ;$

$$y = 3 \cdot (-2,64314) + 7 \approx -0,9294\ ;$$

$$z = -4 \cdot (-2,64314) - 5 \approx 5,5726\ .$$

Обчислимо необхідну для контролю суму значень координат точки перетину прямих $(2,3131; -0,9294; 5,5726)$ та параметра $l = -26,3635$:

$x + y + z + l = 2,3137 - 0,9294 + 5,5726 - 26,3635 \approx -19,4066$.

Відповідь: $x + y + z + l \approx -19,4066$

6. Питання для самоконтролю

1. Запишіть рівняння прямої лінії у просторі як результат перетину двох площини.

2. Який канонічний та параметричний вигляд прямої лінії у просторі?

3. Яка умова паралельності, перпендикулярності двох прямих ліній у просторі?

4. Як знайти кут між двома площинами у просторі?

5. Як знайти кут між прямою та площиною у просторі?

6. Запишіть умови паралельності, перпендикулярності прямої і площини у просторі.

Розділ IV
ВСТУП ДО АНАЛІЗУ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Практична робота 1. Нескінченно малі функції та їх властивості.

1. Основні поняття та теореми

Нехай на числовому проміжку X задано функцію $y = f(x)$ і для змінної $x \in X$ визначено граничний процес.

Якщо функція $f(x)$ така, що ***y*** при цьому стає і продовжує бути за абсолютною величиною менше будь-якого додатнього числа, то таку функцію називають нескінченно малою функцією, а змінну ***y*** називають просто нескінченно малою.

Функція $f(x)$ називається нескінченно малою (н.м.) при $x \to c$ (відповідно, при $x \to \infty$ або $x \to -\infty$, або $x \to +\infty$), якщо для будь-якого довільного $\varepsilon > 0$ існує, залежне від нього $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх *x*, для яких $0 < |x - c| < \delta$ (відповідно, $x < \delta$, або $x < -\delta$, або $|x| < \delta$), має місце нерівність $|f(x)| < \varepsilon$.

Властивості нескінченно малих функцій

1. Алгебраїчна сума або добуток будь-якої кількості нескінченно малих функцій є функція нескінченно мала.

2. Якщо функція $\alpha(x)$ нескінченно мала в точці x_0, а функція $\varphi(x)$ має границю в точці x_0, відмінну від 0, то частка $\dfrac{\alpha(x)}{\varphi(x)}$ є нескінченно малою функцією в точці x_0.

3. Якщо функція $\alpha(x)$ нескінченно мала в точці x_0 і в деякому околі точки x_0 виконується нерівність $|\beta(x)| \le |\alpha(x)|$, то функція $\beta(x)$ є також нескінченно малою в точці x_0.

2. Порядок виконання допуску до практичної роботи

a) Запустити систему за допомогою файла «КВМ.exe»;
b) Перейти у розділ «Практичні роботи»;
c) Обрати практичну роботу натиснувши на гіперпосилання «Нескінченно малі функції та їх властивості»;

d) Після ознайомлення з теоретичним матеріалом натиснути кнопку «Розпочати тестування» і при готовності кнопку «Почати»;

e) Виконати запропоновані завдання з урахуванням автоматично згенерованого параметра α і ввести отримані відповіді у відповідні поля (рис. 1). Якщо практична робота виконана не в комп'ютерній системі параметр α призначається викладачем (наприклад номер у списку або дві останні цифри залікової книжки).

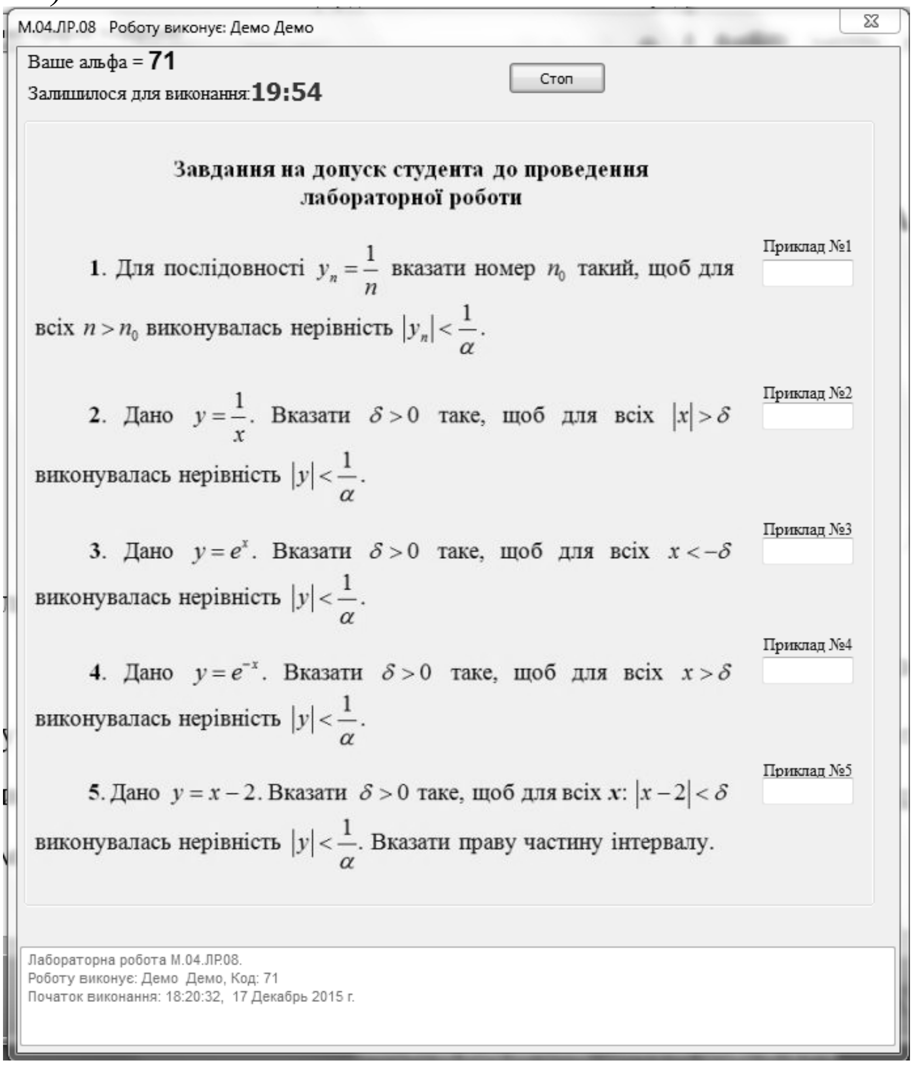


Рис. 1. Вікно для проходження допуску до практичної роботи.

1. Для послідовності $y_n = \dfrac{1}{n}$ вказати номер n_0 такий, щоб для всіх $n > n_0$ виконувалась нерівність $|y_n| < \dfrac{1}{\alpha}$.

2. Дано $y = \dfrac{1}{x}$. Вказати $\delta > 0$ таке, щоб для всіх $|x| > \delta$ виконувалась нерівність $|y| < \dfrac{1}{\alpha}$.

3. Дано $y = e^x$. Вказати $\delta > 0$ таке, щоб для всіх $x < -\delta$ виконувалась нерівність $|y| < \dfrac{1}{\alpha}$.

4. Дано $y = e^{-x}$. Вказати $\delta > 0$ таке, щоб для всіх $x > \delta$ виконувалась нерівність $|y| < \dfrac{1}{\alpha}$.

5. Дано $y = x - 2$. Вказати $\delta > 0$ таке, щоб для всіх $\boldsymbol{x}$: $|x - 2| < \delta$ виконувалась нерівність $|y| < \dfrac{1}{\alpha}$. Вказати праву частину інтервалу.

3. Приклад виконання завдання на допуск студента до практичної роботи

1. Для послідовності $y_n = \dfrac{1}{n}$ (рис.2) вказати номер n_0 такий, щоб для всіх $n > n_0$ виконувалась нерівність $|y_n| < \dfrac{1}{12}$.

Розв'язання:

Дано послідовність $y_n = \dfrac{1}{n}$. Задамо число $\varepsilon = \dfrac{1}{12}$. За умовою $|y_n| < \dfrac{1}{12}$, або $\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{12}$. Звідки $n > 12$, $n_0 = 12$.

Відповідь: $n_0 = 12$.

2. Дано $y = \dfrac{1}{x}$. Вказати $\delta > 0$ таке, щоб для всіх $|x| > \delta$ виконувалась нерівність $|y_n| < \dfrac{1}{20}$.

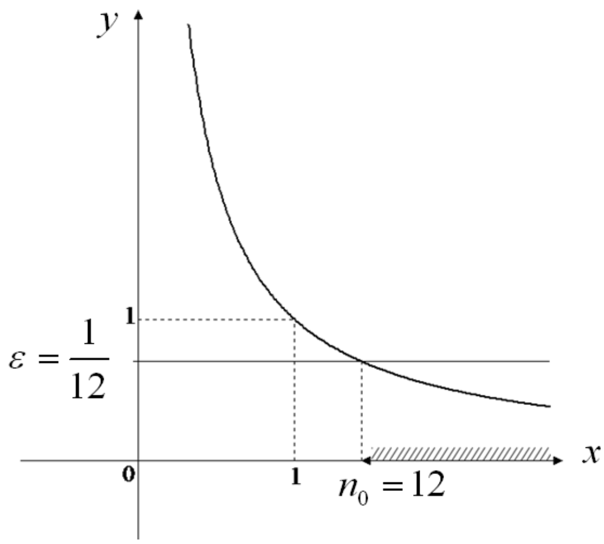


Рис. 2

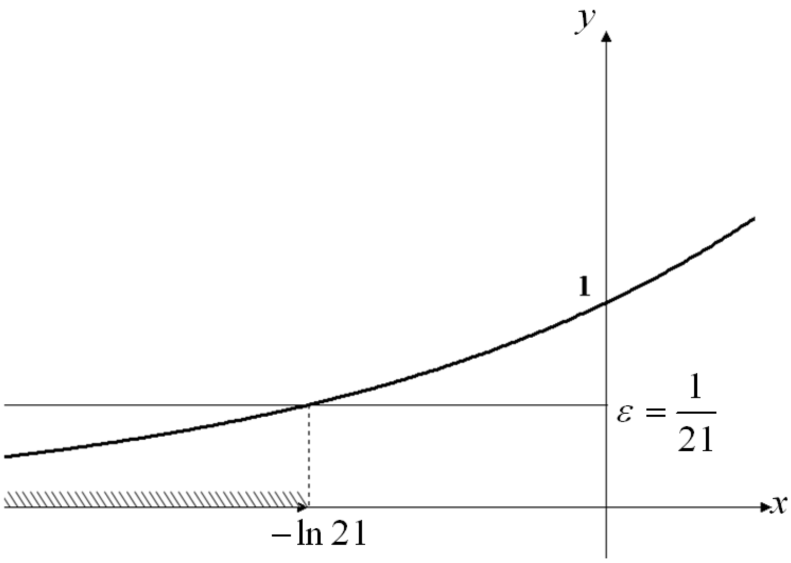


Рис. 3

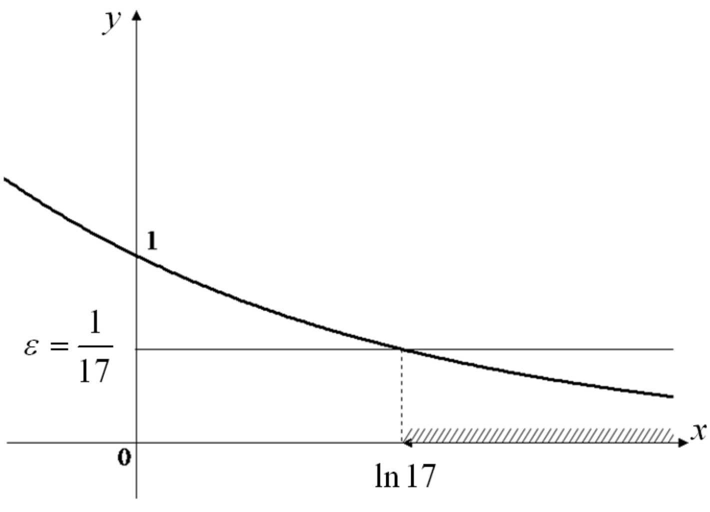


Рис. 4

Дано функцію $y = \dfrac{1}{x}$. Задамо число $\varepsilon = \dfrac{1}{20}$. За умовою $|y| < \dfrac{1}{20}$ або $\left|\dfrac{1}{x}\right| < \dfrac{1}{20}$. Звідки $|x| > 20, \quad \delta = 20.$

Відповідь: $|x| > 20, \quad \delta = 20.$

3. Дано $y = e^x$ (рис. 3). Вказати $\delta > 0$ таке, щоб для всіх $x < -\delta$ виконувалась нерівність $|y| < \dfrac{1}{21}$.

Розв'язання:

Дано функцію $y = e^x$. Задамо число $\varepsilon = \dfrac{1}{21}$. За умовою $|y| < \dfrac{1}{21}$, або $e^x < \dfrac{1}{21}$. Прологарифмуємо праву і ліву частини нерівності: $\ln\left(e^x\right) < \ln\left(\dfrac{1}{21}\right)$.

За основною логарифмічною тотожністю ліва частина запишеться: $x < \ln 1 - \ln 21$.

Звідки: $x < -\ln 21$, тобто $\delta = \ln 21$.

Відповідь: $\delta = \ln 21$.

4. Дано $y = e^{-x}$(рис. 4). Вказати $\delta > 0$ таке, щоб для всіх $x > \delta$ виконувалась нерівність $y < \dfrac{1}{17}$.

Розв'язання:

Дано функцію $y = e^{-x}$. Задамо число $\varepsilon = \dfrac{1}{17}$. За умовою $y < \dfrac{1}{17}$, тобто: $\left|e^{-x}\right| < \dfrac{1}{17}$. Прологарифмуємо праву і ліву частину нерівості:

$$\ln e^{-x} < \ln\frac{1}{17},$$

$$\ln\frac{1}{e^x} < \ln\frac{1}{17}.$$

Використувуючи властивості логарифмів, маємо:

$$\ln 1 - \ln e^x < \ln 1 - \ln 17.$$

$$-\ln e^x < -\ln 17,$$

або $x > \ln 17$.

Звідки $\delta = \ln 17$.

Відповідь: $\delta = \ln 17$.

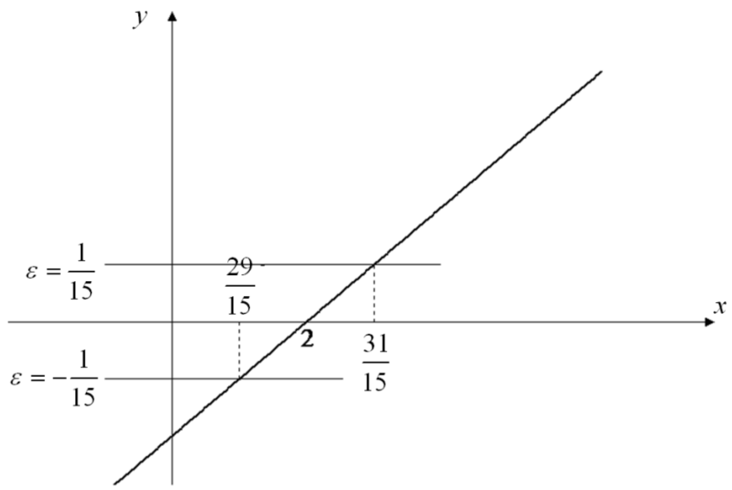


Рис. 5

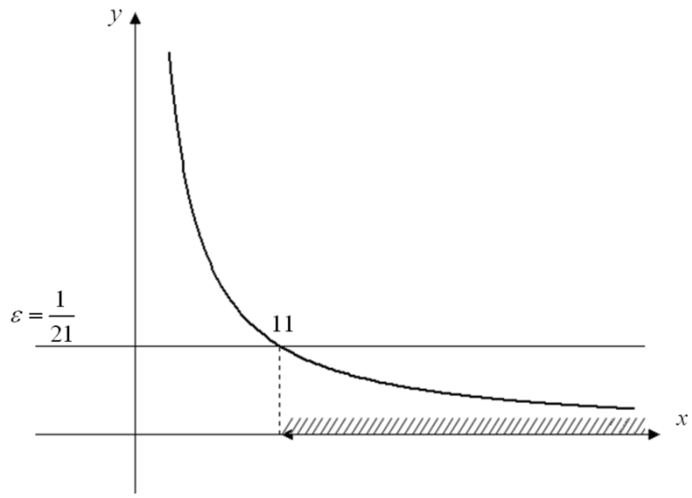


Рис. 6

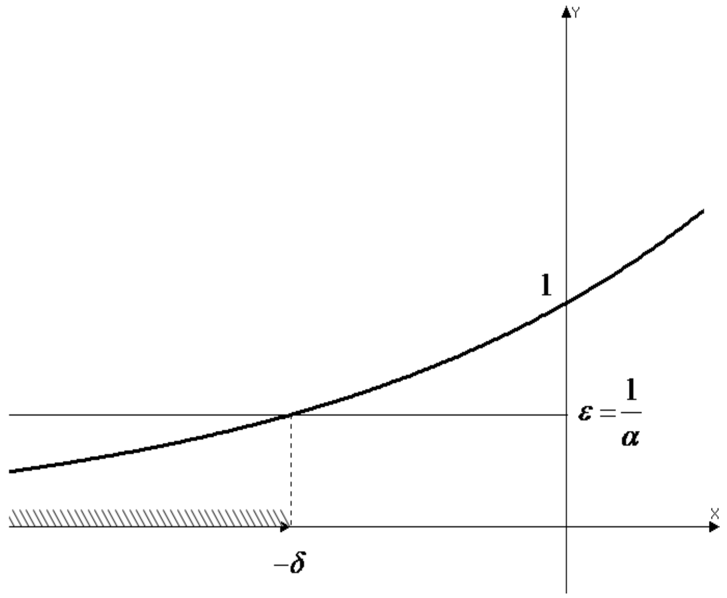


Рис. 7

5. Дано $y = x - 2$ (рис. 5). Вказати $\delta > 0$ таке, щоб для всіх x: $|x - 2| < \delta$ виконувалась нерівність $|y| < \frac{1}{15}$.

Розв'язання:

Дано функцію $y = x - 2$. Задамо число $\varepsilon = \frac{1}{15}$. За умовою $y < \frac{1}{15}$, тобто: $|x - 2| < \frac{1}{15}$. Або $2 - \frac{1}{15} < x < 2 + \frac{1}{15}$. Отже, $\delta = 2 + \frac{1}{15}$.

Відповідь: $\delta = 2 + \frac{1}{15}$.

4. Порядок виконання завдань і збереження результатів на сервері

a) Перехід до виконання основної частини практичної роботи виконується автоматично системою за умови успішного проходження допуску;

b) У відповідні поля ввести результати розв'язання задач і натиснути кнопку «Завершити тест достроково» для збереження результатів роботи. Якщо час, відведений на виконання, закінчився – система блокується. У будь-якому випадку комп'ютерна система відобразить оцінку виконаної роботи.

1. Для послідовності $y_n = \frac{1}{2n-1}$ вказати номер n_0 такий, щоб для всіх $n > n_0$ виконувалась нерівність $|y_n| < \frac{1}{\alpha}$.

2. Дано $y = e^{2x}$. Вказати $\delta > 0$ таке, щоб для всіх $x < -\delta$ виконувалась нерівність $|y| < \frac{1}{\alpha}$.

3. Дано $y = 10^{-x}$. Вказати $\delta > 0$ таке, щоб для всіх $x > \delta$ виконувалась нерівність $|y| < \frac{1}{\alpha}$.

4. Дано $y = 2^x$. Вказати $\delta > 0$ таке, щоб для всіх $x < -\delta$ виконувалась нерівність $|y| < \frac{1}{\alpha}$.

5. Дано $y = x - 5$. Вказати $\delta > 0$ таке, щоб для всіх x: $|x - 5| < \delta$ виконувалася нерівність $|y| < \frac{1}{\alpha}$. Вказати праву частину інтервалу.

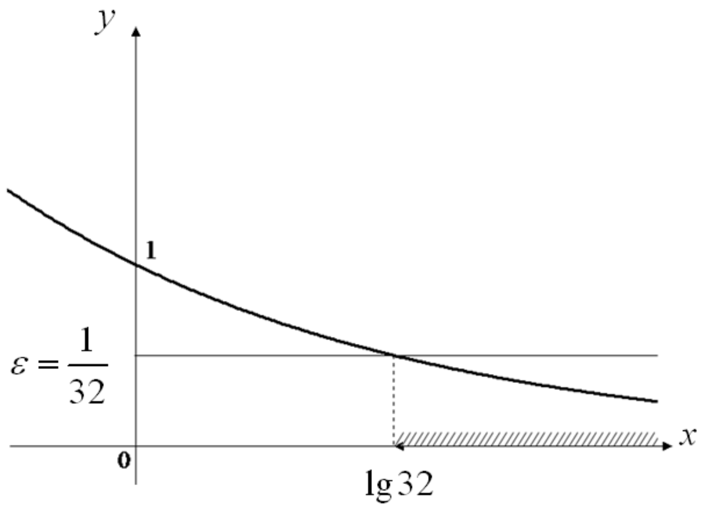


Рис. 8

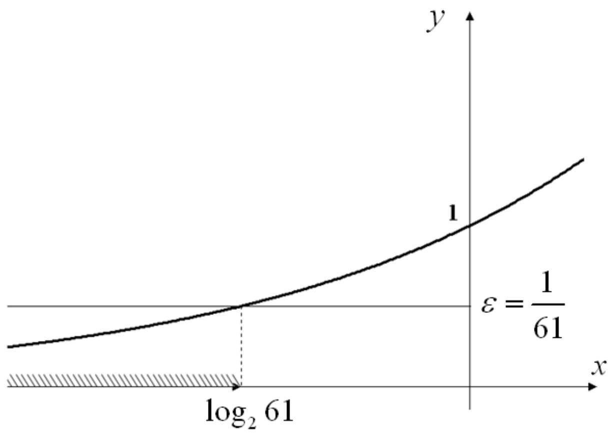


Рис. 9

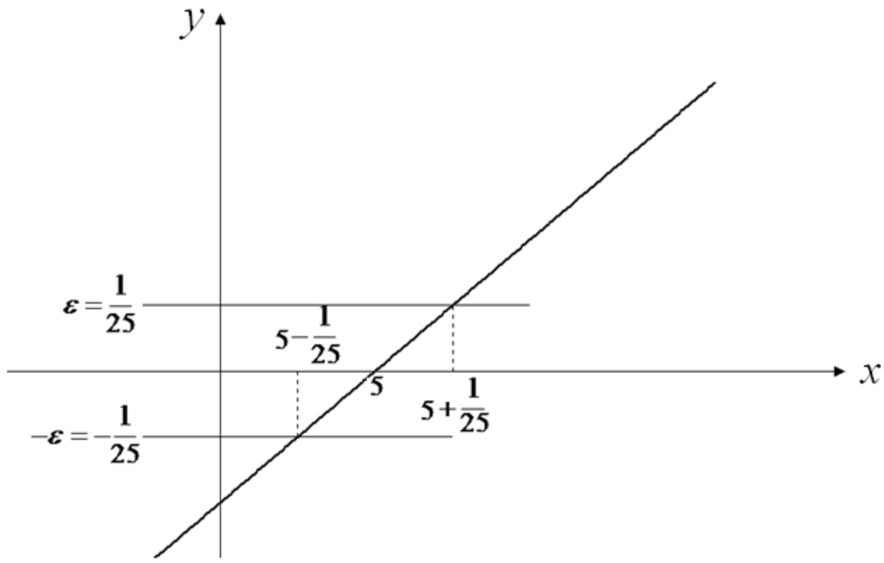


Рис. 10

5. Приклади розв'язання задач та вправ до практичної роботи

1. Для послідовності $y_n = \dfrac{1}{2n-1}$ (рис. 6) вказати номер n_0 такий, щоб для всіх $n > n_0$ виконувалась нерівність $|y_n| < \dfrac{1}{21}$.

Розв’язання:

Дано послідовність $y_n = \dfrac{1}{2n-1}$ Задамо число $\varepsilon = \dfrac{1}{21}$. Візьмемо послідовність по модулю $|y_n| = \left|\dfrac{1}{2n-1}\right|$. За умовою $|y_n| < \dfrac{1}{21}$, тобто $\left|\dfrac{1}{2n-1}\right| < \dfrac{1}{21}$, або $2n-1 > 21$. Звідки $2n > 21+1$, $n > 11$, або $n_0 = 11$.

Відповідь: $n_0 = 11$.

2. Дано $y = e^{2x}$. Вказати $\delta > 0$ таке, щоб для всіх $x < -\delta$ виконувалась нерівність $|y| < \dfrac{1}{10}$.

Розв’язання:

Дано функцію $y = e^{2x}$. Задамо число $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$. За умовою $|y| < \varepsilon$, тобто $\left|e^{2x}\right| < \dfrac{1}{10}$. Прологарифмуємо праву і ліву частини нерівності: $\ln e^{2x} < \ln\dfrac{1}{10}$.

За основною логарифмічною тотожністю ліва частина нерівності запишеться $2x < \ln\dfrac{1}{10}$.

За властивістю логарифмів права частина нерівності запишеться: $2x < -\ln 10$, звідки $x < -\dfrac{\ln 10}{2}$. Отже, $\delta = \dfrac{\ln 10}{2}$.

Відповідь: $\delta = \dfrac{\ln 10}{2}$.

3. Дано $y = 10^{-x}$. Вказати $\delta > 0$ таке, щоб для всіх $x > \delta$ виконувалась нерівність $|y| < \dfrac{1}{32}$.

Розв'язання:

Дано функцію $y = 10^{-x}$ (рис. 8). Задамо число $\varepsilon = \dfrac{1}{32}$. За умовою $|y| < \varepsilon$, тобто $\left|10^{-x}\right| < \dfrac{1}{32}$ або $\dfrac{1}{10^{x}} < \dfrac{1}{32}$. Прологарифмуємо праву і ліву частини нерівності:

$$\lg\frac{1}{10^{x}} < \lg\frac{1}{32}.$$

За властивістю логарифмів права частина нерівності запишеться: $\lg 1 - \lg 10^{x} < \lg 1 - \lg 32, -x < -\lg 32$ або $x > \lg 32$. Звідки $\delta = \lg 32$.

Відповідь: $\delta = \lg 32$.

4. Дано $y = 2^{x}$ (рис. 9). Вказати $\delta > 0$ таке, щоб для всіх $x < -\delta$ виконувалась нерівність $|y| < \dfrac{1}{61}$.

Розв'язання:

Дано функцію $y = 2^{x}$. Задамо число $\varepsilon = \dfrac{1}{61}$. За умовою $|y| < \varepsilon$, тобто $\left|2^{x}\right| < \dfrac{1}{61}$. Прологарифмуємо праву і ліву частину

нерівності: $\log_2 2^{x} < \log_2 \dfrac{1}{61}$.

За основною логарифмічною тотожністю та властивостями логарифмів маємо: $x < -\log_2 61$.

Тобто $\delta = \log_2 61$.

Відповідь: $\delta = \log_2 61$.

5. Дано $y = x - 5$ (рис. 10). Вказати $\delta > 0$ таке, щоб для всіх $\boldsymbol{x}$: $|x-5| < \delta$ виконувалась нерівність $|y| < \dfrac{1}{25}$.

Розв'язання:

Дано функцію $y = x - 5$. Задамо число $\varepsilon = \dfrac{1}{25}$. За умовою $|y| < \dfrac{1}{25}$. Замість y підставимо значення:

$$|x-5| < \frac{1}{25} \text{ або } 5 - \frac{1}{25} < x < 5 + \frac{1}{25}.$$

Отже, $\delta = 5 + \frac{1}{25}$.

Відповідь: $\delta = \frac{126}{25}$.

Практична робота 2. Границя функції.

1. Основні поняття та теореми

1. Границя числової послідовності

Число A називають **границею числової послідовності** $\{y_n\}$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N(\varepsilon)$, що при всіх $n > N(\varepsilon)$ виконується нерівність

$$|y_n - A| < \varepsilon. \qquad (1)$$

Символічно це означення записують

$$\lim_{n\to\infty} y_n = A.$$

2. Границя функції в точці x_0

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0. Число A називають **границею функції $f(x)$ в точці x_0**, тобто $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх x, які задовольняють умову $0 < |x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, виконується нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon. \qquad (2)$$

У термінах логічної символіки це означення можна записати так:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)$$

$$(\forall x \in Д(f): 0 < |x - x_0| < \delta)\ (|f(x)| - A < \varepsilon).$$

Геометрично, це означає, що графік функції $f(x)$ для точок $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ $(x \neq x_0)$ потрапляє всередину прямокутника, обмеженого прямими $y = A - \varepsilon$, $y = A + \varepsilon$, $x = x_0 - \delta$; $x = x_0 + \delta$

(рис.1). Що ж до точки $(x_0; f(x_0))$ (якщо в точці x_0 функція $f(x)$ визначена), то вона може належати або не належати цьому прямокутнику.

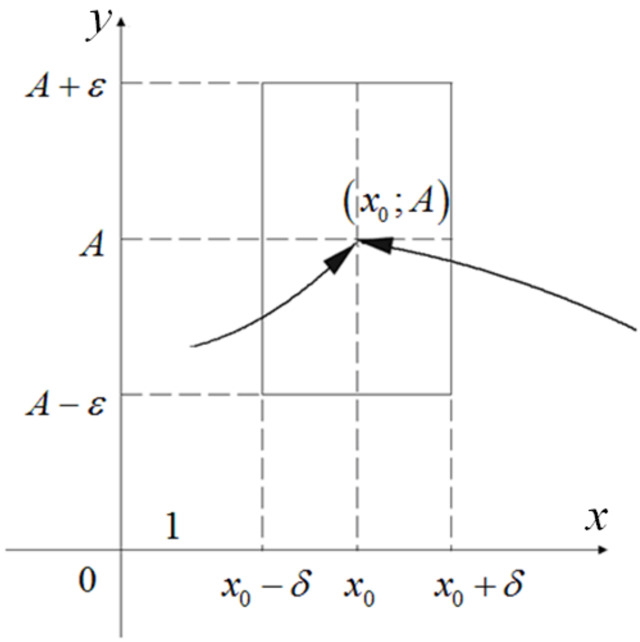


Рис.1

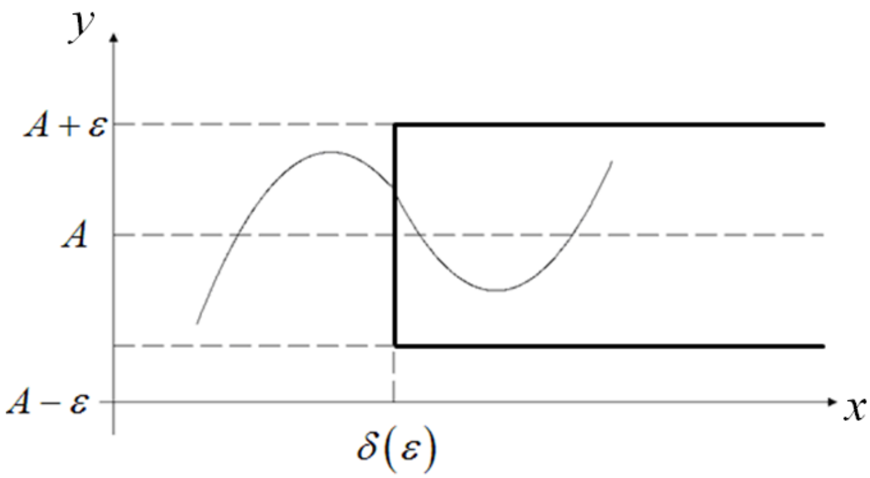


Рис.2

3. Границя функції в $+\infty$

Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі $(a;+\infty)$. Число A називають **границею функції** $f(x)$ **в плюс нескінченно віддаленій точці**, тобто $A=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, якщо для довільного числа $\varepsilon>0$, існує число $\delta(\varepsilon)\geq 0$ таке, що для всіх x, які задовольняють умову $\delta<x<+\infty$, виконується нерівність

$$|f(x)-A|<\varepsilon. \tag{3}$$

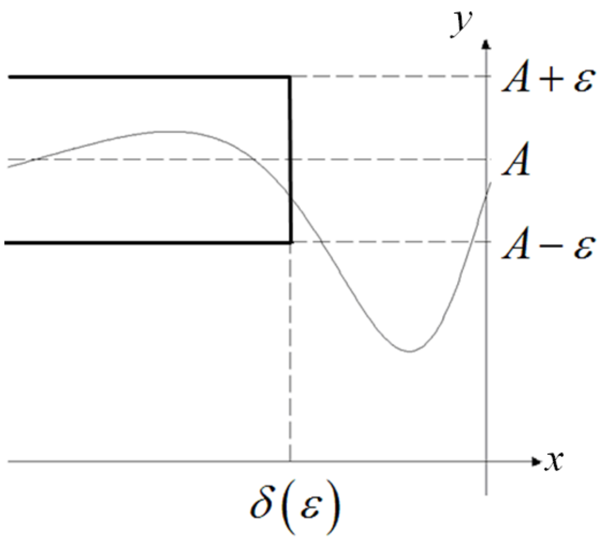


Рис.3

У термінах логічної символіки це означення можна записати так:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) \geq a)$$

$$\left(\forall x \in Д(f) : \delta < x < +\infty\right) \left(\left|f(x) - A\right| < \varepsilon\right)$$

Геометрично, це означає, що графік функції $f(x)$для точок $x \in (\delta; +\infty)$ міститься в півсмузі, обмеженій прямими $y = A - \varepsilon$, $y = A + \varepsilon$, $x = \delta$ (рис. 2), які лежать справа від прямої $x = \delta$.

4. Границя функції в $-\infty$

Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі $\left(-\infty; -b\right)$. Число A називають **границею функції** $f(x)$ **в мінус нескінченно віддаленій точці,** тобто $A = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$, існує число $\delta(\varepsilon) \leq -b$ таке, що для всіх x, які задовольняють умову $-\infty < x < \delta(\varepsilon)$, виконується нерівність

$$\left|f(x) - A\right| < \varepsilon. \tag{4}$$

У термінах логічної символіки це означення можна записати так:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A \overset{def}{\Longleftrightarrow} \left(\forall \varepsilon > 0\right) \left(\exists \delta(\varepsilon) \leq -b\right).$$

$$\left(\forall x \in Д\left(f\right) : -\infty < x < \delta\left(\varepsilon\right)\right) \left(\left|f\left(x\right) - A\right| < \varepsilon\right).$$

Геометрично це означає, що графік функції $f(x)$ для точок $x \in \left(-\infty;\delta\right)$ міститься в півсмузі, обмеженій прямими $y = A - \varepsilon$, $y = A + \varepsilon$, $x = \delta$ (рис. 3), які лежать зліва від прямої $x = \delta$.

5. Границя функції в ∞

Число А називають **границею функції *f(x)* в нескінченно віддаленій точці**, тобто $A = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta(\varepsilon) > 0$, що при $|x| > \delta(\varepsilon)$ виконується нерівність

$$\left|f\left(x\right) - A\right| < \varepsilon. \qquad (5)$$

У термінах логічної символіки це означення можна записати так:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)$$
$$\left(\exists \delta(\varepsilon) > 0\right) \left(\forall x \in Д\left(f\right) : |x| > \delta\right) \left(\left|f\left(x\right) - A\right| < \varepsilon\right).$$

6. Означення границі функції з використанням поняття нескінченої малої

Функцію $\alpha(x)$ називають **нескінченно малою в точці** x_0 або при $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Нехай на множині задано граничний процес, тобто правило, яке встановлює порядок для всеможливих пар різних елементів даної множини.

Число А називають границею функції у відповідному граничному процесі, якщо різниця між функцією і числом А є нескінченно малою функцією при $x \to x_0$, або при $x \to +\infty$, або при $x \to -\infty$, або при $x \to \infty$, тобто $f(x) - A = \alpha(x)$.

Звідси випливає, що якщо число А є границею функції у відповідному граничному процесі, то справджується рівність

$$f(x) = A + \alpha(x) \qquad (6)$$

2. Порядок виконання допуску до практичної роботи

a) Запустити систему за допомогою файла «КВМ.exe»;
b) Перейти у розділ «Практичні роботи»;
c) Обрати практичну роботу натиснувши на гіперпосилання «Границя функції»;

d) Після ознайомлення з теоретичним матеріалом натиснути кнопку «Розпочати тестування» і при готовності кнопку «Почати»;

e) Виконати запропоновані завдання з урахуванням автоматично згенерованого параметра α і ввести отримані відповіді у відповідні поля (рис. 4). Якщо практична робота виконана не в комп'ютерній системі параметр α призначається викладачем (наприклад номер у списку або дві останні цифри залікової книжки).

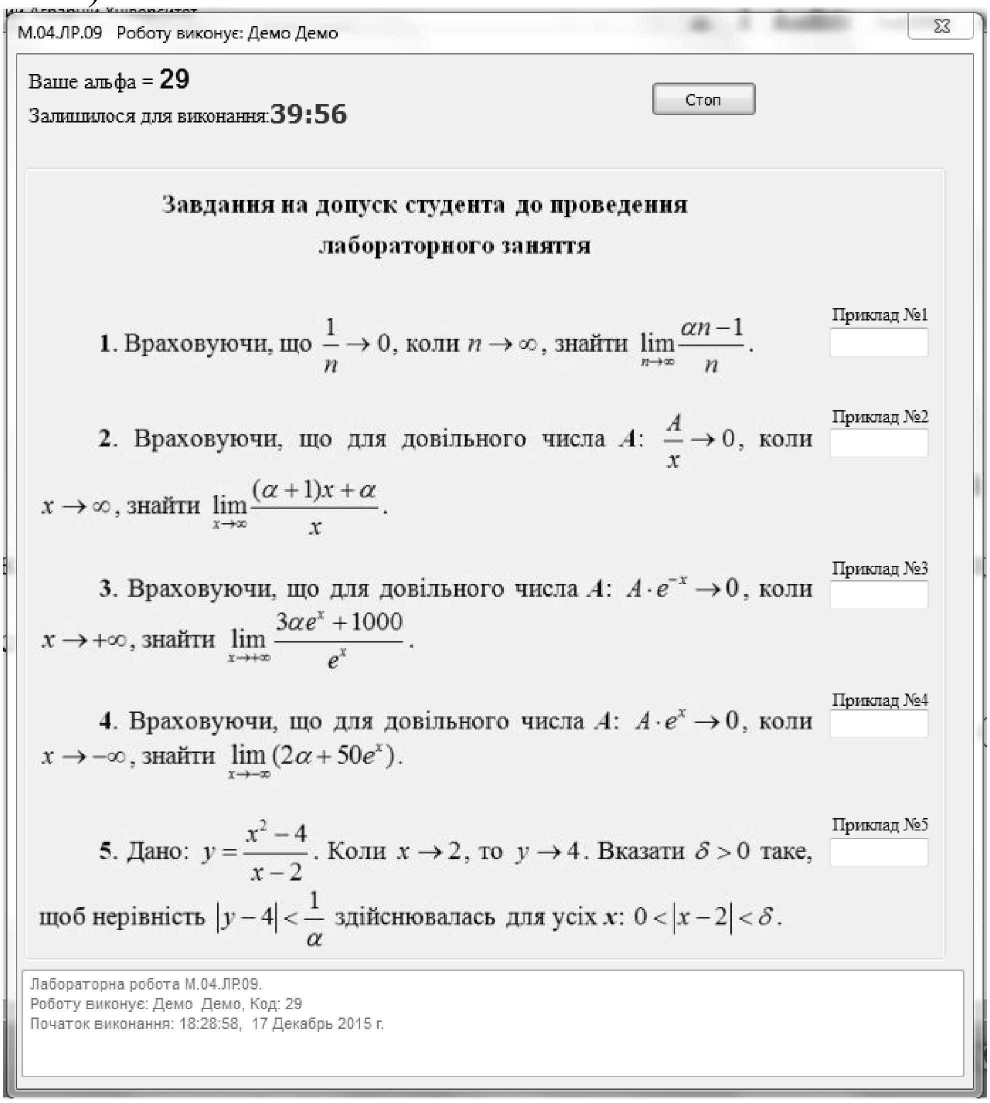


Рис. 4. Вікно для проходження допуску до практичної роботи.

1. Враховуючи, що $\frac{1}{n}\to 0$, коли $n\to\infty$, знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha n-1}{n}$.

2. Враховуючи, що для довільного числа A: $\frac{A}{x}\to 0$, коли $x\to\infty$, знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\alpha+1)x+\alpha}{x}$.

3. Враховуючи, що для довільного числа ***A***: $A\cdot e^{-x}\to 0$, коли $x\to+\infty$, знайти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\alpha e^{x}+1000}{e^{x}}$.

4. Враховуючи, що для довільного числа ***A***: $A\cdot e^{x}\to 0$, коли $x\to-\infty$, знайти $\lim\limits_{x\to-\infty}(2\alpha+50e^{x})$.

5. Дано: $y=\dfrac{x^{2}-4}{x-2}$. Коли $x\to 2$, то $y\to 4$. Вказати $\delta>0$ таке, щоб нерівність $\left|y-4\right|<\dfrac{1}{\alpha}$ здійснювалась для усіх ***x***: $0<\left|x-2\right|<\delta$.

3. Приклад виконання завдання на допуск студента до практичного заняття

1. Враховуючи, що $\dfrac{1}{n}\to 0$, коли $n\to\infty$, знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-25n+1}{n}$.

Розв'язання:

Так як $\dfrac{-25n+1}{n}=\dfrac{-25n}{n}+\dfrac{1}{n}=-25+\dfrac{1}{n}$, то на основі означення границі (6) дістанемо, що $f(x)=\dfrac{-25n+1}{n}$, $A=-25$, $\alpha(x)=\dfrac{1}{n}$, тобто $f(x)=A+\alpha(x)$, а це означає, що число $A=-25$ є границею функції ***f(x)***. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-25n+1}{n}=-25$.

Відповідь: -25.

2. Враховуючи, що для довільного числа А: $\dfrac{A}{x}\to 0$, коли $x\to\infty$, знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x+3}{x}$.

Розв'язання:

Згідно з (6) одержимо:

$$\frac{8x+3}{x}=\frac{8x}{x}+\frac{3}{x}=8+\frac{3}{x}\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{8x+3}{x}=8.$$

Відповідь: 8.

3. Враховуючи, що для довільного числа А: $A\cdot e^{-x}\to 0$, коли $x\to+\infty$, знайти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-7e^{x}+13}{e^{x}}$.

Розв'язання:

Згідно з (6) одержимо:

$$\frac{-7e^x+13}{e^x}=\frac{-7e^x}{e^x}+\frac{13}{e^x}=-7+13e^{-x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{-7e^x+13}{e^x}=-7\,.$$

Відповідь: -7.

4. Враховуючи, що для довільного числа А: $A\cdot e^x\to 0$, коли $x\to-\infty$, знайти $\lim\limits_{x\to-\infty}(137+13e^x)$.

Розв'язання:

Згідно з (6) одержимо: $\lim\limits_{x\to-\infty}(137+13e^x)=137$.

Відповідь: 137.

5. Дано: $y=\dfrac{x^2-9}{x-3}$. Коли $x\to 3$, то $y\to 6$. Вказати $\delta>0$ таке, щоб нерівність $|y-6|<\dfrac{1}{100}$ здійснювалась для усіх ***x***: $0<|x-3|<\delta$.

Розв'язання:

Згідно умови нам потрібно довести, що $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$.

Розглянемо модуль різниці між функцією і числом 6:

$$\left|\frac{x^2-9}{x-3}-6\right|=\left|\frac{x^2-9-6x+18}{x-3}\right|=\left|\frac{x^2-6x+9}{x-3}\right|=$$

$$=\left|\frac{(x-3)(x-3)}{x-3}\right|=|x-3|,$$

якщо $x\neq 3$.

Згідно з означенням границі функції (2) треба вказати $\delta(\varepsilon)>0$ таке, що $\forall x:0<|x-3|<\delta(\varepsilon)$ буде виконуватись нерівність $|x-3|<\varepsilon$, де $\varepsilon=\dfrac{1}{100}$.

Це і означає згідно з означенням границі функції, що $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$, і $\delta(\varepsilon)=\dfrac{1}{100}\approx 0{,}01$.

Відповідь: $\delta(\varepsilon)\approx 0{,}01$

4. Порядок виконання завдань і збереження результатів на сервері

a) Перехід до виконання основної частини практичної роботи виконується автоматично системою за умови успішного проходження допуску;
b) У відповідні поля ввести результати розв'язання задач і натиснути кнопку «Завершити тест достроково» для збереження результатів роботи. Якщо час, відведений на виконання, закінчився – система блокується. У будь-якому випадку комп'ютерна система відобразить оцінку виконаної роботи.

1. Враховуючи, що $\frac{1}{n} \to 0$, коли $n \to \infty$, знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{0,5\alpha n + 1}{n}$.

2. Враховуючи, що для довільного числа ***A***: $\frac{A}{x} \to 0$ коли $x \to \infty$, знайти $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{0,5(\alpha - 50)x + \alpha}{x}$.

3. Враховуючи, що для довільного числа ***A***: $A \cdot \alpha^{-x} \to 0$, коли $x \to +\infty$, знайти $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{0,6(\alpha - 40)\alpha^x + 500}{\alpha^x}$.

4. Враховуючи, що для довільного числа ***A***: $A \cdot \alpha^{x} \to 0$, коли $x \to -\infty$, знайти $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[0,45(\alpha - 55) + 1000\alpha^x \right]$.

5. Використовуючи означення границі функції, довести, що $\lim\limits_{x\to 3} \left(0,01\sqrt{\alpha x - 5} \right) = 0,03\sqrt{\alpha} - 5$. Знайти $\delta(\varepsilon)$, якщо $\varepsilon = 0,01$.

5. Приклад розв'язання задач та вправ до самостійної роботи студента на практичному занятті

1. Враховуючи, що $\frac{1}{n} \to 0$, коли $n \to \infty$, знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7n + 1}{n}$.

Розв'язання:

Згідно з (6) одержимо: $\frac{7n+1}{n} = \frac{7n}{n} + \frac{1}{n} = 7 + \frac{1}{n} \Rightarrow \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{7n+1}{n} = 7$.

Відповідь: 7.

2. Враховуючи, що для довільного числа А: $\frac{A}{x} \to 0$ коли $x \to \infty$, знайти $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{17x + 23}{x}$.

Розв'язання:

Згідно з (6) одержимо:

$$\frac{17x+23}{x}=\frac{17x}{x}+\frac{23}{x}=17+\frac{23}{x}\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{17x+23}{x}=17.$$

Відповідь: 17.

3. Враховуючи, що для довільного числа А: $A\cdot\alpha^{-x}\to 0$, коли $x\to+\infty$, знайти $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5\cdot 3^x+2}{3^x}$.

Розв'язання:

Згідно з (6) одержимо:

$$\frac{5\cdot 3^x+2}{3^x}=\frac{5\cdot 3^x}{3^x}+\frac{2}{3^x}=5+2\cdot 3^{-x}\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{5\cdot 3^x+2}{3^x}=5.$$

Відповідь: 5.

4. Враховуючи, що для довільного числа А: $A\cdot\alpha^{x}\to 0$, коли $x\to-\infty$, знайти $\lim\limits_{x\to-\infty}(13+7\cdot 2^x)$.

Розв'язання:

Згідно з (6) одержимо: $\lim\limits_{x\to-\infty}(13+7\cdot 2^x)=13$.

Відповідь: 13.

5. Використовуючи означення границі функції, довести, що $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\frac{15x^2-2x-1}{x-\frac{1}{3}}=8$. Знайти $\delta(\varepsilon)$, якщо $\varepsilon=0,01$.

Розв'язання:

Розглянемо модуль різниці між функцією і числом 8:

$$\left|\frac{15x^2-2x-1}{x-\frac{1}{3}}-8\right|=\left|\frac{15x^2-2x-1-8x+\frac{8}{3}}{x-\frac{1}{3}}\right|=$$

$$=\left|\frac{15x^2-10x+\frac{5}{3}}{x-\frac{1}{3}}\right|=15\cdot\left|x-\frac{1}{3}\right|,$$ якщо $x\neq\frac{1}{3}$. Згідно з означенням границі функції (2) треба вказати $\delta(\varepsilon)>0$ таке, що $\forall x:0<\left|x-\frac{1}{3}\right|<\delta(\varepsilon)$ буде виконуватись нерівність $15\left|x-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon$.

Вирішуючи нерівність відносно $\left|x-\frac{1}{3}\right|$, дістанемо $\left|x-\frac{1}{3}\right|<\frac{\varepsilon}{15}$.

Отже, для довільного $\varepsilon>0$ ми вказали таке число $\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{15}=\frac{0,01}{15}=\frac{1}{1500}\approx 0,00066$, що $\forall x:0<\left|x-\frac{1}{3}\right|<\delta(\varepsilon)$ буде виконуватись нерівність $\left|\frac{15x^2-2x-1}{x-\frac{1}{3}}-8\right|<\varepsilon$.

Це і означає згідно з означенням границі функції, що

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{15x^2-2x-1}{x-\frac{1}{3}}=8.$$

Відповідь: доведено.

6.Питання для самоконтролю

1. Що називається границею числової послідовності?
2. Що називається границею функції?
3. В чому полягає геометричний зміст границі функції?
4. Означення границі функції на нескінченності.
5. Яка функція називається нескінченно малою?
6. Як довести що число А є границя функції на нескінченності?

Практична робота 3. Нескінченно великі функції та їх властивості.

1. Основні поняття та теореми

Якщо при $x \to c$ або $x \to +\infty$, або $x \to -\infty$ функція $f(x)$ така, що y в залежності від x стає і продовжує бути по абсолютній величині більше будь-якого додатного числа, то функцію називають **нескінченно великою функцією**, а змінну величину y просто нескінченно великою. Той факт, що y нескінченно велика при $x \to c$, відповідно при $x \to -\infty$, або $x \to -\infty$, записують у вигляді:

$$y \to \infty \qquad (x \to c) \text{ або } \qquad \lim_{x \to c} f(x) = \infty$$

$$y \to +\infty \qquad (x \to +\infty) \text{ або } \lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$$

$$y \to -\infty \qquad (x \to -\infty) \text{ або } \lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

$$y \to \infty \qquad (x \to \infty) \text{ або } \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

Функція $f(x)$ називається **нескінченно великою** при $x \to c$ (або $x \to +\infty$, або $x \to -\infty$), якщо для будь-якого $M > 0$ можна вказати залежне від M $\delta > 0$ таке, що нерівність $|f(x)| > M$ виконується для всіх x, які задовольняють умові $0 < |x - c| < \delta$ (відповідно: $x > \delta$, або $x < -\delta$, або $|x| < \delta$).

2. Порядок виконання допуску до практичної роботи

a) Запустити систему за допомогою файла «КВМ.exe»;
b) Перейти у розділ «Практичні роботи»;
c) Обрати практичну роботу натиснувши на гіперпосилання «Нескінченно великі функції та їх властивості»;
d) Після ознайомлення з теоретичним матеріалом натиснути кнопку «Розпочати тестування» і при готовності кнопку «Почати»;
e) Виконати запропоновані завдання з урахуванням автоматично згенерованого параметра α і ввести отримані відповіді у відповідні поля (рис. 1). Якщо практична робота виконана не в комп'ютерній системі параметр α призначається викладачем (наприклад номер у списку або дві останні цифри залікової книжки).

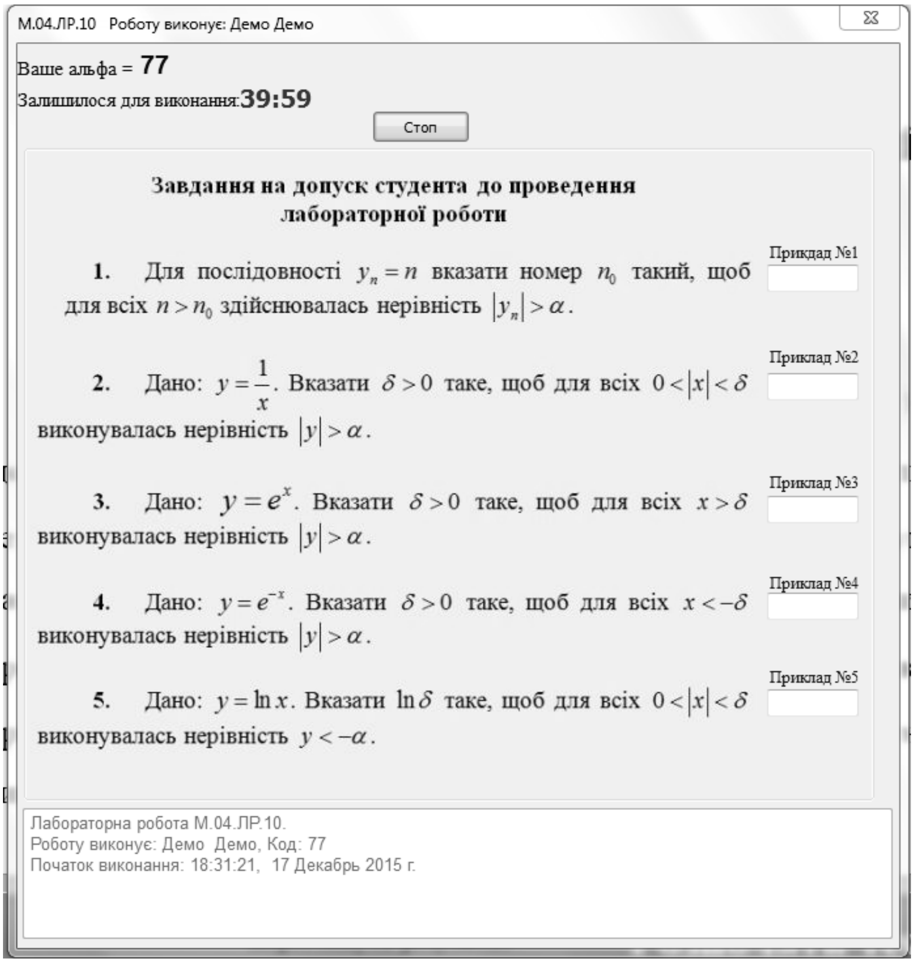


Рис. 1. Вікно для проходження допуску до практичної роботи.

1. Для послідовності $y_n = n$ вказати номер n_0 такий, щоб для всіх $n > n_0$ здійснювалась нерівність $|y_n| > \alpha$.
2. Дано: $y = \frac{1}{x}$. Вказати $\delta > 0$ таке, щоб для всіх $0 < |x| < \delta$ виконувалась нерівність $|y| > \alpha$.
3. Дано: $y = e^x$. Вказати $\delta > 0$ таке, щоб для всіх $x > \delta$ виконувалась нерівність $|y| > \alpha$.
4. Дано: $y = e^{-x}$. Вказати $\delta > 0$ таке, щоб для всіх $x < -\delta$ виконувалась нерівність $|y| > \alpha$.
5. Дано: $y = \ln x$. Вказати $\ln \delta$ таке, щоб для всіх $0 < |x| < \delta$ виконувалась нерівність $y < -\alpha$.

3. Приклад виконання завдання на допуск студента до практичної роботи

1. Для послідовності $y_n = n$ (рис. 2), вказати номер n_0 такий, щоб для всіх $n > n_0$ здійснювалась нерівність $|y_n| > 12$.

Розв'язання:

Дано послідовність $y_n = n$. Задамо число $\varepsilon = 12$. За умовою $|y_n| > 12$. Тобто $|n| > 12$, $n > 12$. Звідки $n_0 = 12$.

Відповідь: $n_0 = 12$.

2. Дано: $y = \frac{1}{x}$. Вказати $\delta > 0$ таке, щоб для всіх $0 < |x| < \delta$ виконувалась нерівність $|y| > 17$.

Розв'язання:

Дана функція $y = \frac{1}{x}$. Задамо число $\varepsilon = 17$. За умовою $|y_n| > 17$. Тобто $\left|\frac{1}{x}\right| > 17$, $\frac{1}{|x|} > 17$. Або $|x| < \frac{1}{17}$. Звідки $\delta = \frac{1}{17}$.

Відповідь: $\delta = \frac{1}{17} \approx 0,0588$.

3. Дано: $y = e^x$ (рис. 3). Вказати $\delta > 0$ таке, щоб для всіх $x > \delta$ виконувалась нерівність $|y| > 20$.

Розв'язання:

Дана функція $y = e^x$. Задамо число $\varepsilon = 20$. За умовою $|y_n| > 20$. Підставимо значення функції, дістанемо: $|e^x| > 20$. Прологарифмуємо праву і ліву частину нерівності: $\ln e^x > \ln 20$. Застосувавши до лівої частини основну логарифмічну тотожність маємо: $x > \ln 20$. Звідки $\delta = \ln 20$.

Відповідь: $\delta = \ln 20$.

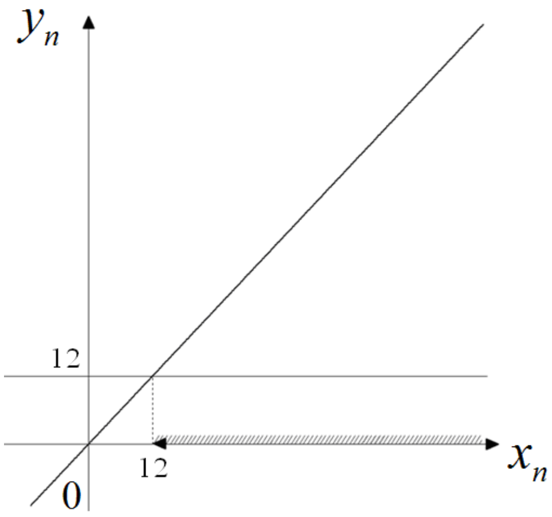


Рис. 2

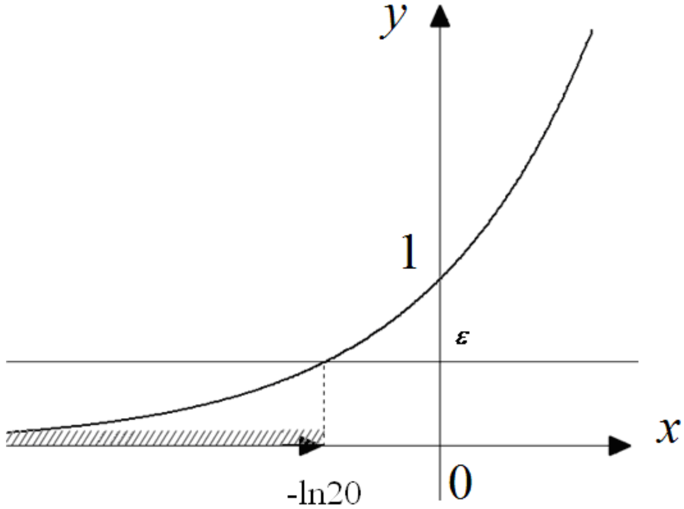


Рис. 3

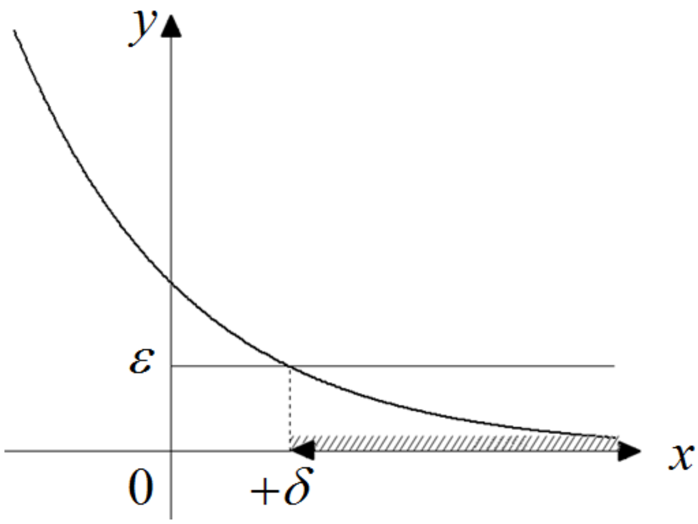


Рис. 4

4. Дано: $y = e^{-x}$ (рис. 4). Вказати $\delta > 0$ таке, щоб для всіх $x < -\delta$ виконувалась нерівність $|y| > 21$.

Розв’язання:

Дана функція $y = e^{-x}$. Задамо число $\varepsilon = 21$. За умовою $|y| > 21$. Підставимо значення функції, дістанемо: $|e^{-x}| > 21$. Або $\frac{1}{e^x} > 21$, $e^x < \frac{1}{21}$. Прологарифмуємо праву і ліву частину нерівності: $\ln e^x < \ln\frac{1}{21}$, $x < -\ln 21$. Звідки $\delta = \ln 21$.

Відповідь: $\delta = \ln 21$.

5. Дано: $y = \ln x$ (рис. 5). Вказати $\ln\delta$ таке, щоб для всіх $0 < x < \delta$ виконувалась нерівність $y < -15$.

Розв’язання:

Дана функція $y = \ln x$. Задамо число $\varepsilon = -15$. За умовою $y < -15$, тобто:

$$\ln x < -15,\ -\ln x > 15,$$
$$\ln x^{-1} > 15,\ e^{\ln\frac{1}{x}} > e^{15},$$
$$\frac{1}{x} > e^{15},\ x < \frac{1}{e^{15}},$$
$$\delta = e^{-15},\ \ln\delta = -15.$$

Відповідь: $\ln\delta = -15$.

4. Порядок виконання завдань і збереження результатів на сервері

a) Перехід до виконання основної частини практичної роботи виконується автоматично системою за умови успішного проходження допуску;

b) У відповідні поля ввести результати розв’язання задач і натиснути кнопку «Завершити тест достроково» для збереження результатів роботи. Якщо час, відведений на виконання, закінчився – система блокується. У будь-якому випадку комп’ютерна система відобразить оцінку виконаної роботи.

1. Для послідовності $y_n = n + 2$ вказати номер n_0 такий, щоб для всіх $n > n_0$ виконувалась нерівність $|y_n| > \alpha$.

2. Дано: $y = e^{2x}$. Вказати $\delta > 0$ таке, щоб для всіх $x > \delta$ виконувалась нерівність $|y| > \alpha$.

3. Дано: $y = 10^{-x}$. Вказати $\delta > 0$ таке, щоб для всіх $x < -\delta$ виконувалась нерівність $|y| > \alpha$.

4. Дано: $y = 2^{x}$. Вказати $\delta > 0$ таке, щоб для всіх $x > \delta$ виконувалась нерівність $|y| > \alpha$.

5. Дано: $y = \dfrac{1}{x^2}$. Вказати $\delta > 0$ таке, щоб для всіх $0 < |x| < \delta$ виконувалась нерівність $|y| > \alpha$.

5. Приклади розв'язання задач та вправ до практичної роботи

1. Для послідовності $y_n = n + 2$ (рис. 6), вказати номер n_0 такий, щоб для всіх $n > n_0$ виконувалась нерівність $|y_n| > 33$.

Розв'язання:

Дано послідовність $y_n = n + 2$. Задамо число $\varepsilon = 33$. За умовою $|y_n| > 33$. Тобто $|n+2| > 33$, $|n| + 2 > 33$. Звідки $n > 33 - 2$ або $n > 31$, $n_0 = 31$.

Відповідь: $n_0 = 31$.

2. Дано: $y = e^{2x}$ (рис. 7). Вказати $\delta > 0$ таке, щоб для всіх $x > \delta$ виконувалась нерівність $|y| > 18$.

Розв'язання:

Дано функція $y = e^{2x}$. Задамо число $\varepsilon = 18$. За умовою $|y| > 18$. Підставимо значення $|e^{2x}| > 18$. Прологарифмуємо праву і ліву частину нерівності: $\ln e^{2x} > \ln 18$. За основною логарифмічною тотожністю: $2x > \ln 18$. Звідки $x > \dfrac{\ln 18}{2}$, $\delta = \dfrac{\ln 18}{2}$.

Відповідь: $\delta = \dfrac{\ln 18}{2}$.

3. Дано: $y = 10^{-x}$ (рис. 8). Вказати $\delta > 0$ таке, щоб для всіх $x < -\delta$ виконувалась нерівність $|y| > 20$.

Розв'язання:

Дано функція $y = 10^{-x}$. Задамо число $\varepsilon = 20$. За умовою $|y| > 20$.

$$\left|10^{-x}\right| > 20,$$

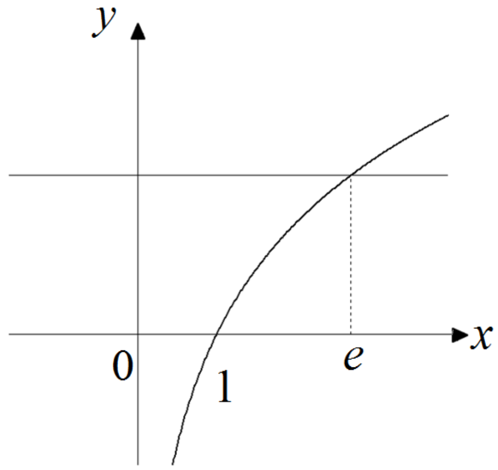


Рис. 5

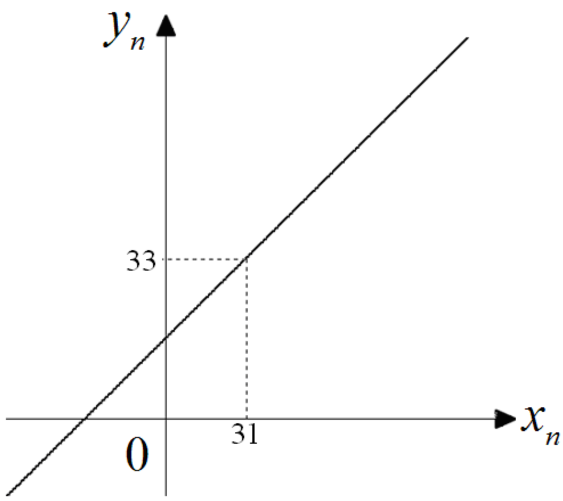


Рис. 6

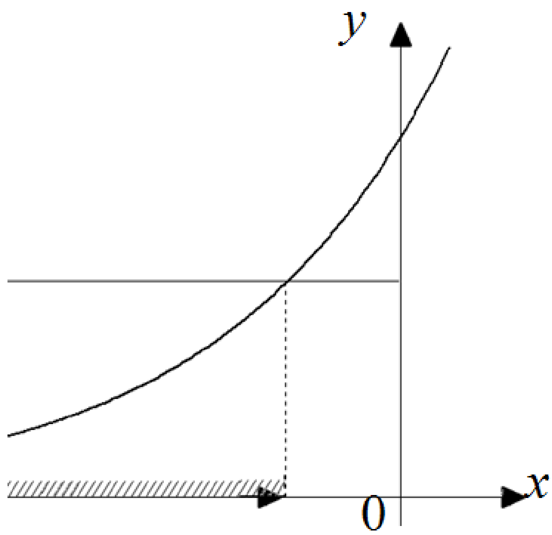


Рис. 7

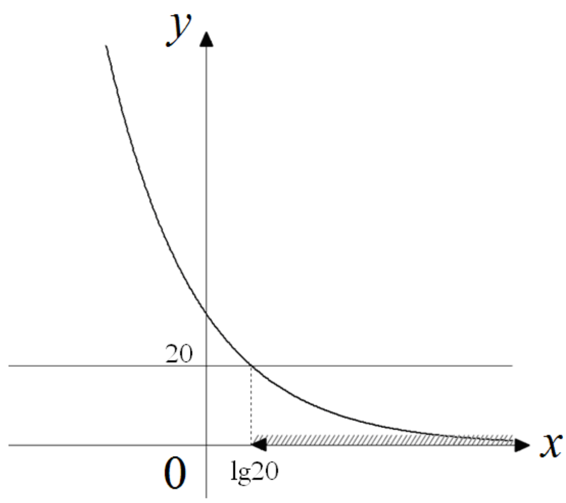


Рис. 8

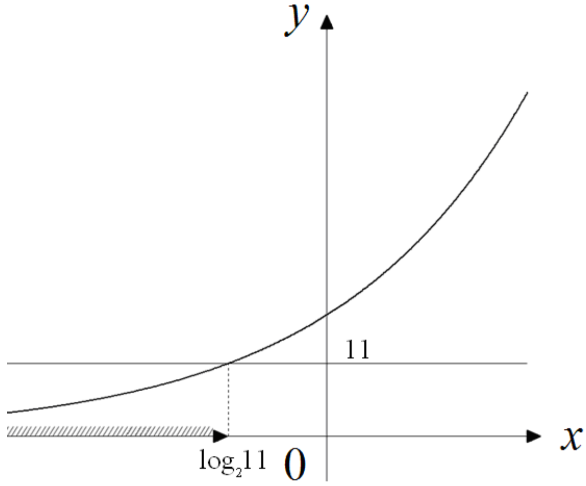


Рис. 9

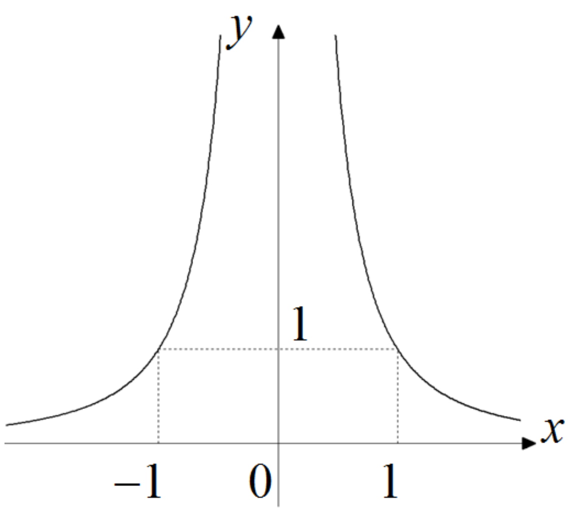


Рис. 10

$$\frac{1}{10^x} > 20,$$

$$10^x < \frac{1}{20}.$$

Прологарифмуємо: $\lg 10^x < \lg \frac{1}{20}$,

$$x < -\lg 20,$$
$$\delta = \lg 20.$$

Відповідь: $\delta = \lg 20$.

4. Дано: $y = 2^x$ (рис. 9) Вказати $\delta > 0$ таке, щоб для всіх $x > \delta$ виконувалась нерівність $|y| > 11$.

Розв'язання:

Дано функція $y = 2^x$. Задамо число $\varepsilon = 11$. За умовою $|y| > 11$. Підставимо значення функції, дістанемо: $|2^x| > 11$. Прологарифмуємо праву і ліву частини нерівності:

$$\log_2 2^x > \log_2 11,$$
$$x > \log_2 11,\ \delta = \log_2 11.$$

Відповідь: $\delta = \log_2 11$.

5. Дано $y = \frac{1}{x^2}$ (рис. 10). Вказати $\delta > 0$ таке, щоб для всіх $0 < |x| < \delta$ виконувалась нерівність $|y| > 10$.

Розв'язання:

Дано $y = \frac{1}{x^2}$. Задамо число $\varepsilon = 10$. За умовою $|y| > 10$.

$$\left|\frac{1}{x^2}\right| > 10,\ \ x < \frac{1}{\sqrt{10}},\ \delta = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Відповідь: $\delta = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Практична робота 4. Границя. Арифметичні властивості границь.

1. Основні поняття та теореми

1. Якщо при $x \to a$ функція $f(x)$ має кінцеву границю, а c деяка стала величина, то:

$$\lim_{x\to a} cf(x) = c\lim_{x\to a} f(x).$$

2. Якщо при $x \to a$ функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ мають кінцеві границі, то і алгебраїчна сума їх $f(x) \pm \varphi(x)$ має границю, яка дорівнює сумі границь, тобто якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, а $\varphi(x) = b_1$, то

$$\lim_{x\to a}\left(f(x) \pm \varphi(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a}\varphi(x) = b \pm b_1.$$

3. Якщо при $x \to a$ функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ мають кінцеві границі, то їх добуток $f(x)\cdot\varphi(x)$ має границю, яка дорівнює добутку цих границь, тобто якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, а $\varphi(x) = b_1$, то

$$\lim_{x\to a}\left(f(x) \cdot \varphi(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a}\varphi(x) = b \cdot b_1.$$

4. Якщо при $x \to a$ функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ мають границі і границя функції $\varphi(x)$ не дорівнює нулю, то границя частки існує і дорівнює частці від ділення їх границь, тобто якщо

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \text{ а } \varphi(x) \to b_1 \quad (b_1 \neq 0), \text{ то}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim \varphi(x)} = \frac{b}{b_1}.$$

2. Порядок виконання допуску до практичної роботи

a) Запустити систему за допомогою файла «КВМ.exe»;

b) Перейти у розділ «Практичні роботи»;

c) Обрати практичну роботу натиснувши на гіперпосилання «Границя. Арифметичні властивості границь»;

d) Після ознайомлення з теоретичним матеріалом натиснути кнопку «Розпочати тестування» і при готовності кнопку «Почати»;

e) Виконати запропоновані завдання з урахуванням автоматично згенерованого параметра α і ввести отримані відповіді у відповідні поля (рис. 1). Якщо практична робота виконана не в комп'ютерній системі параметр α призначається викладачем (наприклад номер у списку або дві останні цифри залікової книжки).

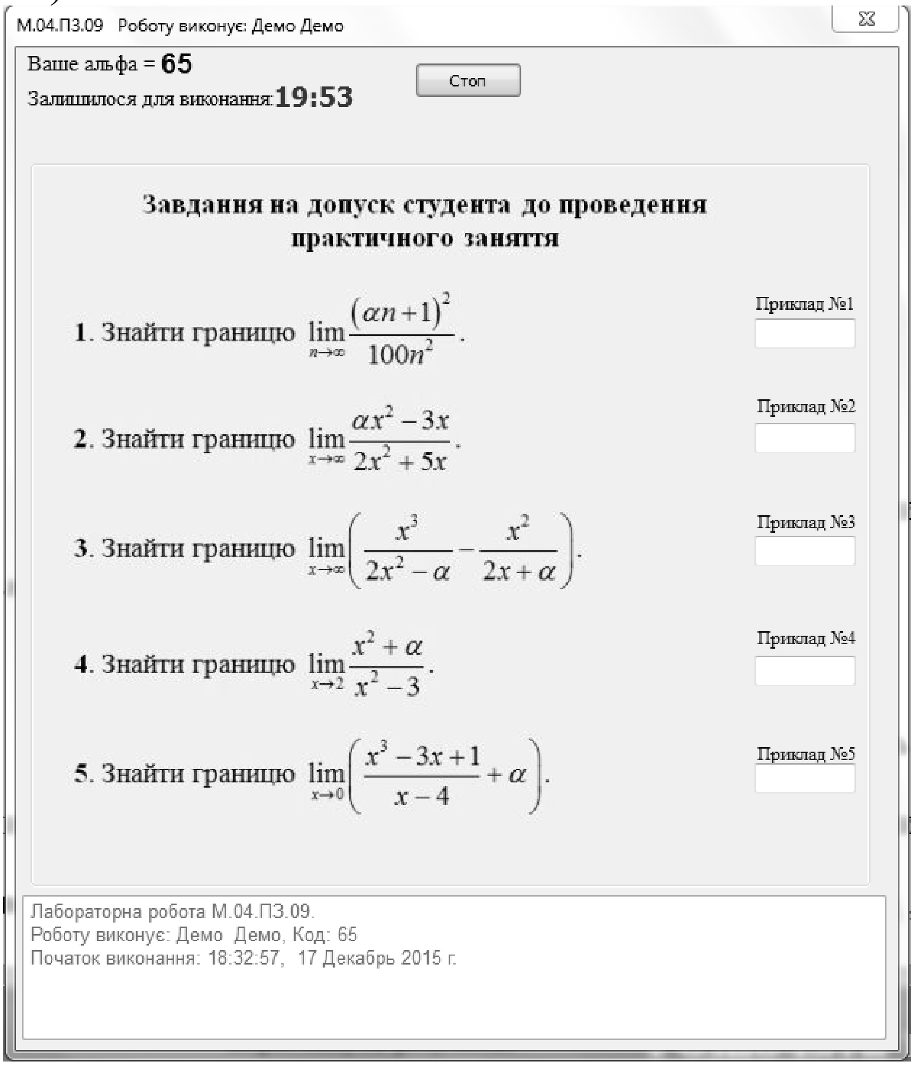


Рис.1. Вікно для проходження допуску до практичної роботи.

1. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\alpha n+1)^2}{100n^2}$.

2. Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\alpha x^2-3x}{2x^2+5x}$.

3. Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-\alpha}-\frac{x^2}{2x+\alpha}\right)$.

4. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+\alpha}{x^2-3}$.

5. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^3-3x+1}{x-4}+\alpha\right)$.

3. Приклад виконання завдання на допуск студента до практичного заняття

1. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n+1)^2}{100n^2}$.

Розв'язання:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)^2}{100^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{9n^2+6n+1}{100n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{9n^2}{100n^2}+\dfrac{6n}{100n^2}+\dfrac{1}{100n^2}}{\dfrac{100n^2}{100n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9}{100}+\frac{6}{100n}+\frac{1}{100n^2}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9}{100}+\lim_{n\to\infty}\frac{6}{100n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{100n^2}=\frac{9}{100}.$$

Відповідь: $\dfrac{9}{100}$.

2. Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-3x}{2x^2+5x}$.

Розв'язання:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2-3x}{2x^2+5x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6-\dfrac{3}{x}}{2+\dfrac{5}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}6-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}2+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x}}=\frac{6}{2}=3.$$

Відповідь: 3.

3. Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-5}-\dfrac{x^2}{2x+5}\right)$.

Розв'язання:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-5}-\frac{x^2}{2x+5}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3(2x+5)-(2x^2-5)}{(2x^2-5)(2x+5)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^4+5x^3-2x^4+5x^2}{4x^3+10x^2-10x-25}\right)=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}5-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}4+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{25}{x^3}}=\frac{5}{4}.$$

Відповідь: $\frac{5}{4}$.

4. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+11}{x^2-3}$.

Розв'язання:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+11}{x^2-3}=\lim_{x\to 2}\frac{2^2+11}{2^2-3}=4+11=15.$$

Відповідь: 15.

5. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^3-3x+1}{x-4}+7\right)$.

Розв'язання:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3-3x+1}{x-4}+7\right)=7-\frac{1}{4}=\frac{4\cdot 7-1}{4}=\frac{28-1}{4}=\frac{27}{4}.$$

Відповідь: $\frac{27}{4}$.

4. Порядок виконання завдань і збереження результатів на сервері

a) Перехід до виконання основної частини практичної роботи виконується автоматично системою за умови успішного проходження допуску;
b) У відповідні поля ввести результати розв'язання задач і натиснути кнопку «Завершити тест достроково» для збереження результатів роботи. Якщо час, відведений на виконання, закінчився – система блокується. У будь-якому випадку комп'ютерна система відобразить оцінку виконаної роботи.

1. Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\alpha x^2-1}{3x^2+1}$.

2. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2-x+1}{x-3}+\alpha\right)$.

3. Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x^2-\alpha}-\dfrac{x^2}{3x+\alpha}\right)$.

4. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\alpha n+1)^3}{3n^3}$.

5. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+\alpha}{x^3-4}$.

5. Приклади розв'язання задач та вправ до самостійної роботи студента на практичному занятті

1. Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-1}{3x^2+1}$.

Розв'язання:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{3x^2+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}2-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}3+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{3}.$$

Відповідь: $\dfrac{2}{3}$.

2. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2-x+1}{x-3}-77\right)$.

Розв'язання:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-x+1}{x-3}+77\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-x+1}{x-3}\right)+\lim_{x\to 2}77=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-x+1\right)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-3)}+\lim_{x\to 2}77=\frac{\left(\lim\limits_{x\to 2}x^2\right)-\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}1}{\lim\limits_{x\to 2}x-\lim\limits_{x\to 2}3}+$$

$$+\lim_{x\to 2}77=\frac{2^2-2+1}{2-3}+77=74.$$

Відповідь: 74.

3. Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x^2-15}-\dfrac{x^2}{3x+15}\right)$.

Розв'язання:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3x^2-15}-\frac{x^2}{3x+15}\right)=\left[\infty-\infty\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3\left(2x+15\right)-x^2\left(3x-15\right)}{\left(3x^2-15\right)\left(3x+15\right)}\right)=$$

$$=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4+15x^3-3x^4+15x^2}{9x^3+45x^2-45x+225}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{15x^3+15x^2}{9x^3+45x^2-45x+225}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}15-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{15}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}9+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{45}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{45}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{225}{x^2}}=\frac{15}{9}=\frac{5}{3}.$$

Відповідь: $\frac{5}{3}$.

4. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(4n+1\right)^3}{3n^3}$.

Розв'язання:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(4n+1\right)^3}{3n^3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{64n^3+48n^2+12n+1}{3n^3}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(64+\frac{48}{n}+\frac{12}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)}{3}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}64+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{48}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{12}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty}3}=\frac{64}{3}.$$

Відповідь: $\frac{64}{3}$.

5. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3+12}{x^3-4}$.

Розв'язання:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+12}{x^3-4}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^3+12\right)}{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^3-4\right)}=\frac{8+12}{8-4}=\frac{20}{4}=5.$$

Відповідь: 5.

6.Питання для самоконтролю

1. Означення границі функції.
2. Арифметичні властивості границі.
3. Чому дорівнює границя суми (різниці)?
4. Чому дорівнює границя добутку?
5. Чому дорівнює границя частки?

Практична робота 5. Перша та друга чудові границі.

1. Основні поняття та теореми

1. Перша чудова границя

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{1}$$

2. Друга чудова границя

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e \tag{2}$$

Дане число e ірраціональне і наближено дорівнює $e\approx 2,718281$. Логарифм числа $x>0$ за основою e називається <u>натуральним логарифмом</u> і позначається символом $\ln x$.

3. Теорема про перехід до границі в показнику степеня при постійній умові.

Якщо існує $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, то при сталому значенні b має місце рівність

$$\lim_{x\to a} b^{f(x)}=b^{\lim\limits_{x\to a} f(x)} \tag{3}$$

4. При обчисленні багатьох границь, пов’язаних з числом e, використовують таке твердження:

Якщо функції $f\left(x\right)$ та $\varphi\left(x\right)$ мають границю в точці a, причому $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)>0$, то функція $f\left(x\right)^{\varphi(x)}$ також має границю, яка обчислюється за формулою

$$\lim_{x\to a} f\left(x\right)^{\varphi(x)}=\left[\lim_{x\to a} f\left(x\right)\right]^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)} \tag{4}$$

Зауваження. У формулі (4) a може позначати і число, і один із символів $\infty, +\infty, -\infty$.

Якщо у (4) $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \pm\infty$, а $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ – скінченне число, не рівне 1, то вона також справедлива.

Якщо у (4) $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \pm\infty$, а $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$, то має місце рівність

$$\lim_{x\to a} f(x)^{\varphi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}\left[(f(x)-1)\cdot\varphi(x)\right]} \tag{5}$$

2. Порядок виконання допуску до практичної роботи

a) Запустити систему за допомогою файла «КВМ.exe»;
b) Перейти у розділ «Практичні роботи»;
c) Обрати практичну роботу натиснувши на гіперпосилання «Перша та друга чудові границі»;
d) Після ознайомлення з теоретичним матеріалом натиснути кнопку «Розпочати тестування» і при готовності кнопку «Почати»;
e) Виконати запропоновані завдання з урахуванням автоматично згенерованого параметра α і ввести отримані відповіді у відповідні поля (рис. 1). Якщо практична робота виконана не в комп'ютерній системі параметр α призначається викладачем (наприклад номер у списку або дві останні цифри залікової книжки).

1. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{x}$.

2. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\alpha x + \arcsin x}{2x - arctgx}$.

3. Обчислити $\lim\limits_{x\to \alpha}\dfrac{\sin^2 x - \sin^2\alpha}{x^2 - \alpha^2}$.

4. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(\dfrac{x}{\alpha+50}\right)^2\cdot\left(1-\cos\dfrac{\alpha}{x}\right)\right]$.

5. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right)^{\frac{x}{\alpha+50}}$.

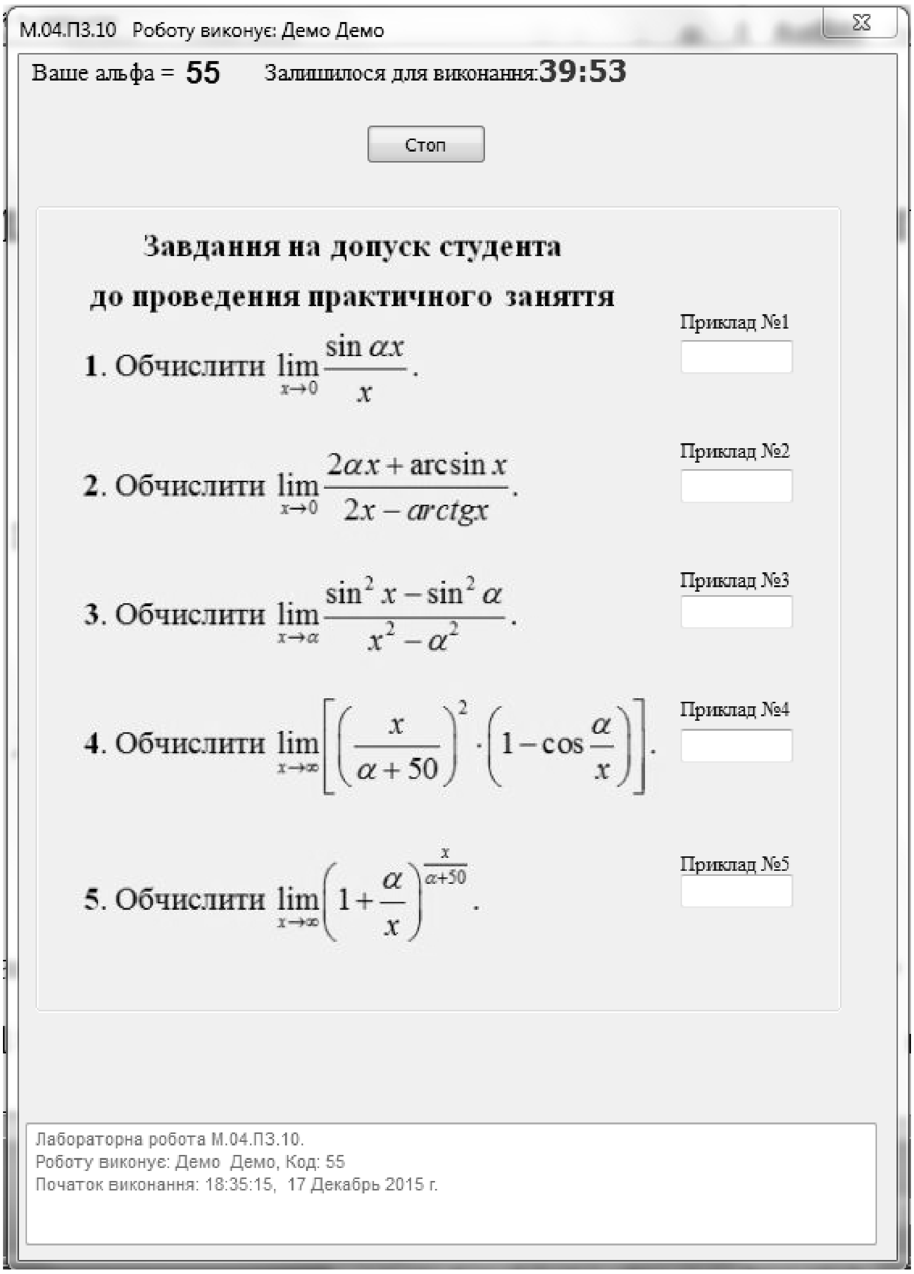


Рис. 1. Вікно для проходження допуску до практичної роботи.

3. Приклади виконання завдання на допуск студента до практичного заняття

1. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x}$.

Розв'язання:

Використовуючи (1), дістанемо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(7\cdot\frac{\sin 7x}{7x}\right)=$$

$$=7\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}=7\cdot 1=7.$$

Відповідь: 7.

2. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{arctg\,2x}$.

Розв'язання:

Роблячи заміну $arctg\,2x = t$, дістанемо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x}{arctg\,2x} = \left|\begin{array}{c} arctg\,2x = t \\ 2x = tgt \\ x \to 0;\ t \to 0 \end{array}\right| = \lim_{t\to 0}\frac{2tgt}{t} =$$

$$= 2\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{\cos t} = 2.$$

Відповідь: 2.

3. Обчислити $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos 3x - \cos x}{tg^2 2x}$.

Розв'язання:

Використовуючи формули тригонометрії, дістанемо:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\cos 3x - \cos x}{tg^2 2x} =$$

$$= \lim_{x\to\pi}\frac{-2\sin\frac{3x+x}{2}\cdot\sin\frac{3x-x}{2}\cdot\cos^2 2x}{\sin^2 2x} =$$

$$= -\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin 2x\cdot\sin x\cdot\cos^2 2x}{\sin^2 2x} =$$

$$= -\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin x\cdot\cos^2 2x}{\sin 2x} =$$

$$= -\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin x\cdot\cos^2 2x}{2\sin x\cdot\cos x} = -\lim_{x\to\pi}\frac{\cos^2 2x}{\cos x} =$$

$$= -\frac{(\cos 2\pi)^2}{\cos\pi} = -\frac{1}{-1} = 1.$$

Відповідь: 1.

4. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(1-\cos\dfrac{2}{x}\right)$.

Розв'язання:

Роблячи заміну $\dfrac{1}{x} = t$, дістанемо:

$$\lim_{x\to\infty} x^2\left(1-\cos\frac{2}{x}\right)=\left|\begin{array}{c}\frac{1}{x}=t,\\ x=\frac{1}{t},\\ x\to\infty\Rightarrow t\to 0\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos(2t)}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin^2(t)}{t^2}=$$

$$=2\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t}=2.$$

Відповідь:2

5. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{3}}$.

Розв'язання. Використовуючи (2), дістанемо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{3}}=\left|\begin{array}{l}\frac{2}{x}=t,\ x=\frac{2}{t}\\ x\to\infty\Rightarrow t\to 0\end{array}\right|=\lim_{t\to 0}\left(1+t\right)^{\frac{2}{3t}}=$$

$$=\left[\lim_{t\to 0}\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}}\right]^{\frac{2}{3}}=e^{\frac{2}{3}}.$$

Відповідь: $e^{\frac{2}{3}}$.

4. Порядок виконання завдань і збереження результатів на сервері

a) Перехід до виконання основної частини практичної роботи виконується автоматично системою за умови успішного проходження допуску;

b) У відповідні поля ввести результати розв'язання задач і натиснути кнопку «Завершити тест достроково» для збереження результатів роботи. Якщо час, відведений на виконання, закінчився – система блокується. У будь-якому випадку комп'ютерна система відобразить оцінку виконаної роботи.

1. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\alpha x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{tg^2\dfrac{x}{2}}$.

2. Обчислити

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+arctg\alpha\ x}-\sqrt[3]{1-\arcsin\alpha\ x}}{\sqrt{1-\arcsin\left(\left(\alpha+20\right)x\right)}-\sqrt{1+arctg\left(\left(\alpha+20\right)x\right)}}$$

3. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n-1}\right)^{\sqrt[3]{\alpha}\cdot n+1}$.

4. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\sin\sqrt{\alpha}x\right)}{\sqrt{\alpha}\cdot\sin 4\sqrt{\alpha}x}$.

5. Обчислити $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(\dfrac{\sin x}{\sin\alpha}\right)^{\frac{1}{x-\alpha}}$.

5. Приклади розв’язання задач та вправ до самостійної роботи студента на практичному занятті

1. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$.

Розв’язання:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}\right)\left(1+\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}\right)}{x^2\left(1+\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x\cdot\left(1-2\sin^2 x\right)}{x^2\left(1+\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+2\sin^2 x\cdot\cos^2 x}{x^2\left(1+\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\cdot\left(1+2\cos^2 x\right)}{x^2\cdot\left(1+\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1+2\cos^2 x}{1+\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}}=.$$

$$=1\cdot 1\cdot \frac{3}{2}=1,5\,.$$

Відповідь: $1,5$.

2. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-\arcsin 2x}-\sqrt[3]{1+arctg\,2x}}{\sqrt{1-arctg\,3x}-\sqrt{1+\arcsin 2x}}$.

Розв'язання:

Використовуючи формули тотожнього множення і властивості границь, дістанемо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-\arcsin 2x}-\sqrt[3]{1+arctg\,2x}}{\sqrt{1-arctg\,3x}-\sqrt{1+\arcsin 2x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left\{\begin{array}{l}\text{Домножимо чисельник}\\ \text{на кубічне спляжене,}\\ \text{а знаменник на}\\ \text{ квадратне спряжене}\end{array}\right\}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1-\arcsin 2x}-\sqrt[3]{1+arctg\,2x}\right)\left(\sqrt[3]{\left(1-\arcsin 2x\right)^2}+\sqrt[3]{\left(1-\arcsin 2x\right)\left(1+arctg\,2x\right)}+\sqrt[3]{\left(1-arctg\,2x\right)^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{\left(1-\arcsin 2x\right)^2}+\sqrt[3]{\left(1-\arcsin 2x\right)\left(1+arctg\,2x\right)}+\sqrt[3]{\left(1-arctg\,2x\right)^2}\right)}\times$$

$$\times\frac{\left(\sqrt{1-arctg\,3x}+\sqrt{1+\arcsin 2x}\right)}{\left(\sqrt{1-arctg\,3x}-\sqrt{1+\arcsin 2x}\right)\left(\sqrt{1-arctg\,3x}+\sqrt{1+\arcsin 2x}\right)}=,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\arcsin 2x-1-arctg\,2x}{3}\times\frac{2}{1-arctg\,3x-1-\arcsin 2x}=,$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{arctg\,2x+\arcsin 2x}{arctg\,3x+\arcsin 3x}=\left\{\begin{array}{l}\text{Поділимо чисельник}\\ \text{і знаменник на } x\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{2\dfrac{arctg\,2x}{2x}+2\dfrac{\arcsin 2x}{2x}}{3\dfrac{arctg\,3x}{3x}+3\dfrac{\arcsin 3x}{3x}}=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{6}=\frac{8}{18}=\frac{4}{9}\approx 0,4444,$$

так, як

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{2x}=\left|\begin{array}{c}\arcsin 2x=t\\ 2x=\sin t\\ x\to 0\Rightarrow t\to 0\end{array}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{-1}=\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctg3x}{3x}=\left|\begin{array}{c} arctg3x=t \\ 3x=tg\ t \\ x\to 0\Rightarrow t\to 0\end{array}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1.$$

Відповідь: 1.

3. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{3x+2}$.

Розв'язання:

Використовуючи (2), дістанемо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{3x+2}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{-4}\cdot\frac{-4}{x+3}\cdot(3x+2)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{-4}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-12x-8}{x+3}}=e^{-12}\approx 0{,}000006$$

Або використовуючи (5), дістанемо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{3x+2}=\left[1^{\infty}\right]=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(\frac{x-1}{x+3}-1\right)(3x+2)\right]}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(\frac{x-1-x-3}{x-3}\right)(3x+2)\right]}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4(3x+2)}{x+3}}=e^{-12}.$$

Відповідь: e^{-12}**.**

4. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 2x)}{7\sin 4x}$.

Розв'язання:

Використовуючи властивості границь і другу чудову границю (2), одержимо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin 2x)}{7\sin 4x}=\frac{1}{7}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin 2x)}{2\sin 2x\cdot\cos 2x}=$$

$$=\frac{1}{14}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin 2x)}{\sin 2x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x}=$$

$$=\frac{1}{14}\cdot\frac{1}{\cos(0)}\lim_{x\to 0}\ln(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}}$$

Обчислимо окремо границю:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\sin 2x\right)^{\frac{1}{\sin 2x}}=\left[1^{\infty}\right]=\left|\begin{matrix}\sin 2x=\dfrac{1}{t},\\ x\to 0\Rightarrow t\to+\infty\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e$$

отже,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\sin 2x\right)}{7\sin 4x}=\frac{1}{14}\ln\left(e\right)=\frac{1}{14}\approx 0{,}0714.$$

Відповідь: $0{,}0714$.

5. Обчислити $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\sin x}{\sin 2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$.

Розв'язання:

Використовуючи (5), дістанемо:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sin x}{\sin 2}\right)^{\frac{1}{x-2}}=\left[1^{\infty}\right]=e^{\lim\limits_{x\to 2}\left[\left(\frac{\sin x}{\sin 2}-1\right)\frac{1}{x-2}\right]}$$

Обчислимо:

$$\lim_{x\to 2}\left[\left(\frac{\sin x}{\sin 2}-1\right)\frac{1}{x-2}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{\sin x-\sin 2}{\sin 2\cdot\left(x-2\right)}=$$

$$=\lim_{x-2}\frac{2\cos\dfrac{x+2}{2}\sin\dfrac{x-2}{2}}{\sin 2\cdot\left(x-2\right)}=$$

$$=\frac{2}{\sin 2}\lim_{x\to 2}\cos\frac{x+2}{2}\lim_{x\to 2}\frac{\sin\dfrac{x-2}{2}}{\left(\dfrac{x-2}{2}\right)\cdot 2}=$$

$$=\frac{2}{\sin 2}\cdot\cos 2\cdot\frac{1}{2}=ctg 2$$

Звідки:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sin x}{\sin 2}\right)^{\frac{1}{x-2}}=e^{ctg 2}\approx e^{-0,4577}\approx 0{,}6328.$$

Відповідь: $0{,}6328$.

6.Питання для самоконтролю

1. Сформулюйте означення першої чудової границі.

2. Сформулюйте означення другої чудової границі.

3. Наслідки другої чудової границі.

4. Що називається натуральним логарифмом?

5. Чому дорівнює число e?

6. Сформулюйте теорему про перехід до границі показника степеня при постійній основі.

Практична робота 6. Неперервність функції. розрив функції у точці.

1. Основні поняття та теореми

1. Односторонні границі.

Нехай функція $f(x)$ визначена на деякому проміжку $(a;b)$ крім, можливо, точки $x_0 \in (a;b)$.

Число **А** називається **правосторонньою (лівосторонньою) границею функції** $f(x)$ **в точці** x_0**,** якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх $x \in \langle a;b \rangle$, які задовольняють нерівність $x_0 < x < x_0 + \delta \quad (x_0 - \delta < x < x_0)$, виконується нерівність:

$$\left| f(x) - A \right| < \varepsilon . \qquad (1)$$

це записують так:

$$\lim_{x \to x+0} f(x) = f(x_0 + 0) = A.$$

$$\lim_{x \to x-0} f(x) = f(x_0 - 0) = A.$$

Теорема. Для того, щоб функція $f(x)$ мала в точці x_0 границю, яка дорівнює числу **А**, необхідно і достатньо, щоб в цій точці існували односторонні границі функції, які дорівнюють числу **А**, тобто

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A . \qquad (2)$$

2. Означення неперервної функції.

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0. Функцію $f(x)$ називають **неперервною в точці** x_0**,** якщо

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (3)$$

Дана умова рівносильна умові

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0. \qquad (4)$$

Більш докладно **умову неперервності функції** $f(x)$ у точці x_0 можна записати у вигляді чотирьох вимог:

Функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0, в тому числі і в самій точці x_0.

1. Повинні існувати скінченні односторонні границі.
2. Дані односторонні границі повинні бути рівні $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$.
3. Дані границі дорівнюють значенню функції $f(x)$ в точці x_0:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0). \qquad (5)$$

Використовуючи означення границі функції в точці, можна дати таке означення неперервності функції в точці.

Функція $f(x)$ називається **неперервною в точці x_0,** якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що для всіх x, які задовольняють нерівність $|x - x_0| < \delta$, виконується нерівність

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad (6)$$

3. Точки розриву.

Якщо функція $f(x)$ в точці x_0 не є неперервною, то точка x_0 називається **точкою розриву функції $f(x)$,** а сама функція називається розривною в точці x_0.

Точка розриву x_0 функції $f(x)$ називається **точкою розриву першого роду**, якщо в цій точці існують скінченні лівостороння й правостороння границі.

Якщо в точці x_0 односторонні границі рівні між собою, але не дорівнюють значенню функції $f(x)$ в точці x_0, або значення $f(x_0)$ не існує, то точку x_0 називають **точкою усувного розриву функції** (рис. 1, 2):

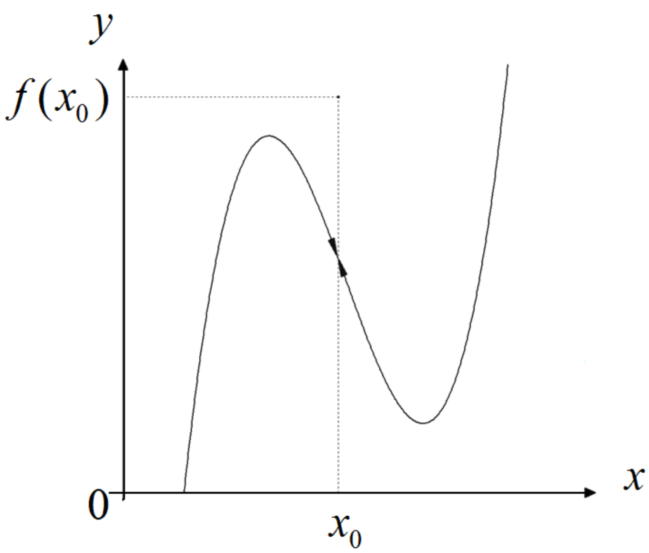


Рис.1

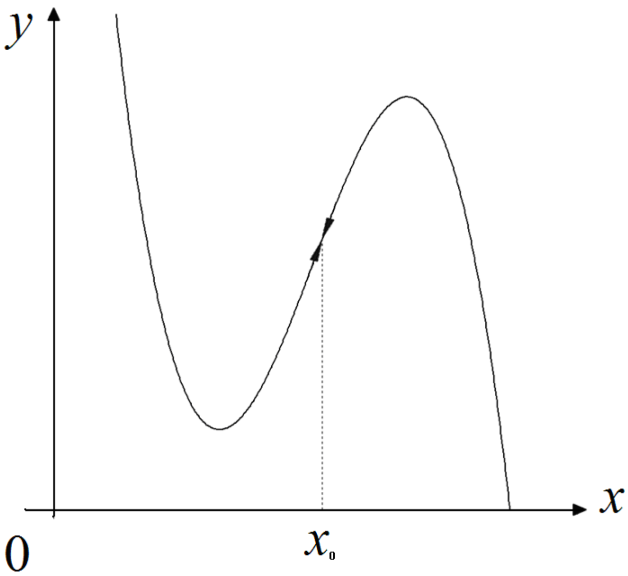


Рис.2

$$f(x_0) \neq f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \tag{7}$$

Така назва пояснюється тим, що функція $f(x)$ стає неперервною в точці x_0, якщо значення функції $f(x)$ в точці x_0 покласти рівним границі функції в даній точці, тобто $f(x_0) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$.

Якщо в точці x_0 функція $f(x)$ має границю зліва і справа, причому

$$f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0) \tag{8}$$

то точку x_0 називають **точкою розриву із скінченним стрибком** (рис. 3).

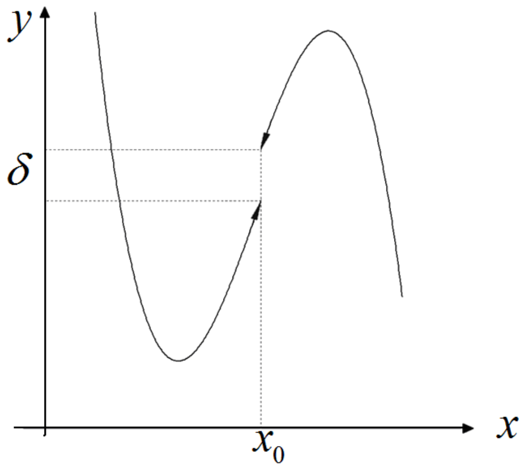
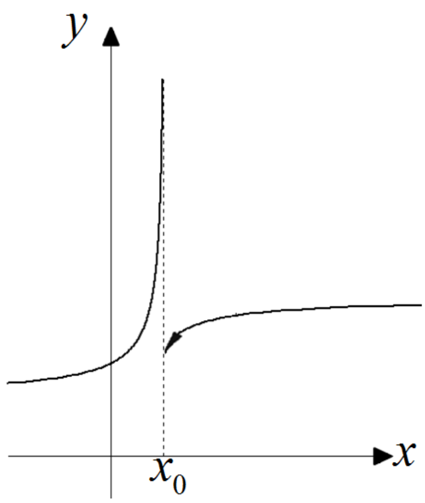
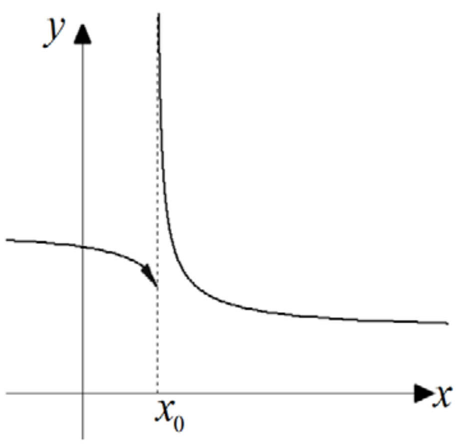


Рис.3

Величину $\delta = \left| f\left(x_0+0\right) - f\left(x_0-0\right) \right|$ називають **стрибком функції** $f\left(x\right)$ **у точці** x_0**.**

Точка розриву x_0 функції $f\left(x\right)$ називається **точкою розриву другого роду**, якщо в цій точці не існує хоча б однієї з односторонніх границь (рис. 4).





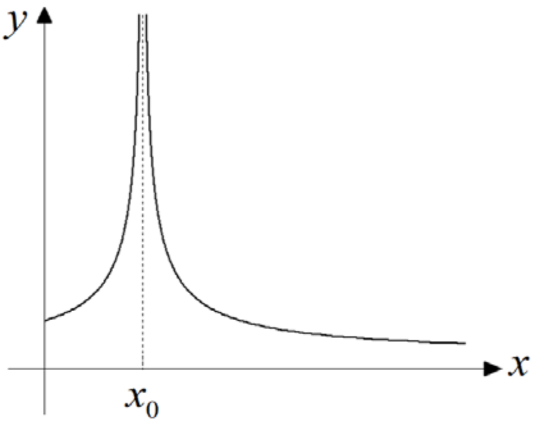


Рис.4

2. Порядок виконання допуску до практичної роботи

a) Запустити систему за допомогою файла «КВМ.exe»;
b) Перейти у розділ «Практичні роботи»;
c) Обрати практичну роботу натиснувши на гіперпосилання «Неперервність функції. розрив функції у точці»;
d) Після ознайомлення з теоретичним матеріалом натиснути кнопку «Розпочати тестування» і при готовності кнопку «Почати»;
e) Виконати запропоновані завдання з урахуванням автоматично згенерованого параметра α і ввести отримані відповіді у відповідні поля (рис. 5). Якщо практична робота виконана не в комп'ютерній системі параметр α призначається викладачем (наприклад номер у списку або дві останні цифри залікової книжки).

1. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\left(\ln\left(x+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)-\ln x\right)\right]$.

2. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\alpha^x-1}{x}}$.

3. Дано $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 1 \\ \alpha-kx^2, & x>1 \end{cases}$ при якому значенні числа k функція $f(x)$ буде неперервною?

4. Яким повинно бути значення функції $f(x)=\frac{x^2-\alpha^2}{x^3-\alpha^3}$, щоб доозначена цим значенням вона стала неперервною при $x=\alpha$?

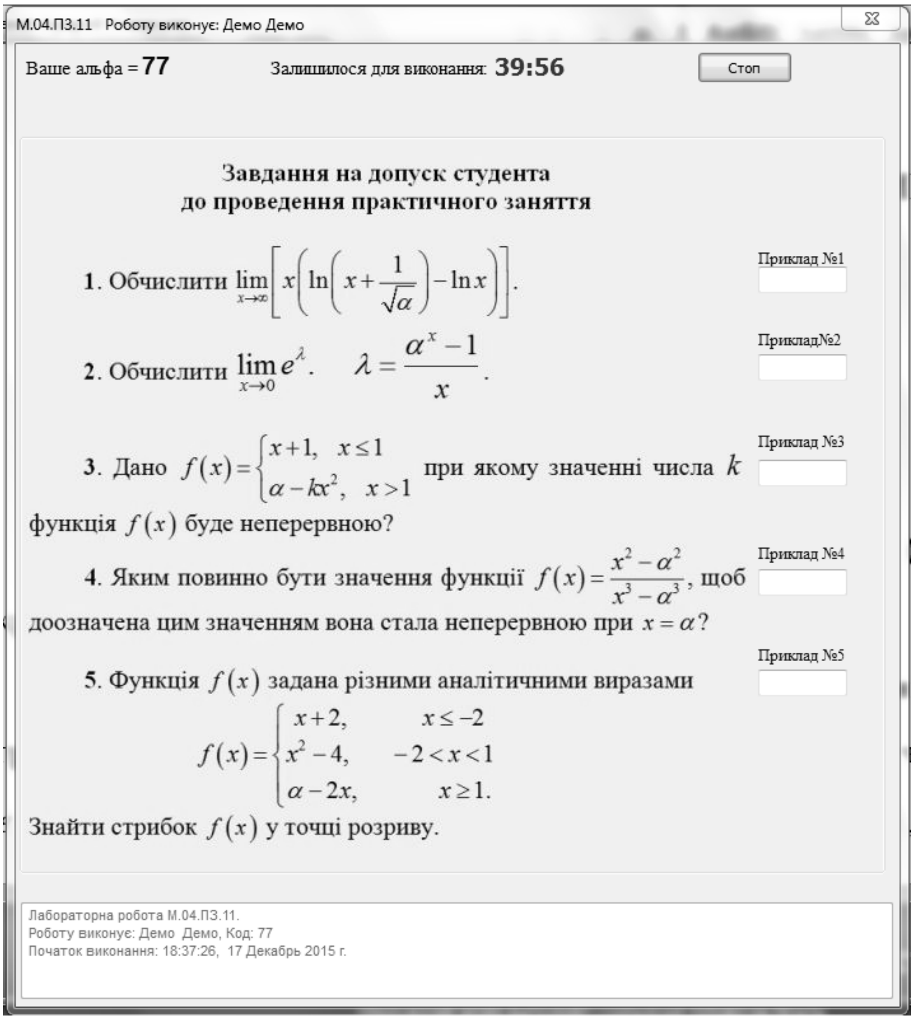


Рис. 5. Вікно для проходження допуску до практичної роботи.

5. Функція $f(x)$ задана різними аналітичними виразами

$$f(x)=\begin{cases} x+2, & x\le -2\\ x^2-4, & -2<x<1\\ \alpha-2x, & x\ge 1.\end{cases}$$

Знайти стрибок $f(x)$ у точці розриву.

3. Приклад виконання завдання на допуск студента до практичного заняття

1. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\left(\ln(x+5)-\ln x\right)\right]$.

Розв’язання:

Використовуючи властивості логарифмів і неперервність логарифмічної функції дістанемо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\left(\ln\left(x+5\right)-\ln x\right)\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\ln\left(\frac{x+5}{x}\right)\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{5}{x}\right)^{x}=\ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{x}=\ln e^{5}=5\ln e=5.$$

Відповідь: 5.

2. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{2^x-1}{x}}$.

Розв'язання:

Використовуючи неперервність показникової функції дістанемо:

$$\lim_{x\to\infty}e^{\frac{2^x-1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^x-1}{x}}.$$

Розглянемо окремо

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}=\left|\begin{array}{c}2^x-1=t,\quad 2^x=1+t,\\ x\to 0\Rightarrow t\to 0\\ x\ln 2=\ln\left(1+t\right),\\ x=\dfrac{\ln\left(1+t\right)}{\ln 2}\end{array}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\dfrac{\ln\left(1+t\right)}{\ln 2}}=$$

$$=\frac{\ln 2}{\lim\limits_{t\to 0}\ln\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}}}=\frac{\ln 2}{\ln\left(\lim\limits_{t\to 0}\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}}\right)}=\frac{\ln 2}{\ln\left(e\right)}=\ln 2.$$

отже,

$$\lim_{x\to 0}e^{\frac{2^x-1}{x}}=e^{\ln 2}=2.$$

3. Дано $f\left(x\right)=\begin{cases}x+2, & x\le 2\\ 7-kx^2, & x>2.\end{cases}$

При якому значенні числа k функція $f\left(x\right)$ буде неперервною?

Розв'язання:

Так як в точці $x=2$ функція $f\left(x\right)$ змінює свій аналітичний вираз, то потрібно дослідити функцію на неперервність в даній точці. Знайдемо лівосторонню і правосторонню границі і значення функції в точці 2.

$f(2-0)=\lim\limits_{x\to 2-0}(x+2)=4,$

$f(2+0)=\lim\limits_{x\to 2+0}(7-kx^2)=7-4k,$

$f(2)=(x+2)_{|x=2}=4.$

Згідно означення неперервності (5) повинна виконуватися нерівність $f(2-0)=f(2+0)=f(2)$.

Отже,

$$7-4k=4,$$
$$4k=3,$$
$$k=0,75.$$

Відповідь: $k=0,75$.

4. Яким повинно бути значення функції $f(x)=\dfrac{x^2-12^2}{x^3-12^3}$, щоб доозначена цим значенням вона стала неперервною при $x=12$?

Розв'язання.

Знайдемо границю функції в точці $x=12$.

$$\lim_{x\to 12}\frac{x^2-12^2}{x^3-12^3}=\lim_{x\to 12}\frac{(x-12)(x+12)}{(x-12)(x^2+12x+144)}=$$

$$=\lim_{x\to 12}\frac{x+12}{x^2+12x+144}=\frac{24}{432}=\frac{1}{18}.$$

Для неперервності функції $f(x)$ згідно (5) досить покласти її значення в точці $x=12$ рівним $\frac{1}{18}$, тобто $f(12)=\frac{1}{18}\approx 0,0556$.

Відповідь: $f(12)\approx 0,0556$.

5. Функція $f(x)$ задана різними аналітичними виразами

$$f(x)=\begin{cases} x+3, & x\le -3 \\ x^2-9, & -3<x<2 \\ 7-3x, & x\ge 2 \end{cases}$$

Знайти стрибок $f(x)$ у точці розриву.

Розв'язання:

Дана функція визначена і неперервна в інтервалах $(-\infty;-3)$, $(-3;2)$, $(2;+\infty)$. При $x=-3$ і $x=2$ змінюється аналітичний вираз функції, і тільки в даних точках функція може мати розрив. Визначимо односторонні границі в точці –3:

$$\lim_{x\to -3-0} f(x) = \lim_{x\to -3-0} (x+3) = 0,$$

$$\lim_{x\to -3+0} f(x) = \lim_{x\to -3+0} \left(x^2-9\right) = 0,$$

$$f(-3) = (x+3)_{|x=-3} = 0.$$

Так як односторонні границі рівні і дорівнюють значенню функції в точці, то згідно (5) функція в точці $x=-3$ неперервна. Визначимо односторонні границі в точці $x=2$:

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0} \left(x^2-9\right) = -5,$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0} (7-3x) = 1.$$

Так як односторонні границі існують і не рівні між собою, то в точці $x=2$ існує стрибок функції, а саме $\delta = \left|1-(-5)\right| = 6$.

Відповідь: $\delta = 6$.

4. Порядок виконання завдань і збереження результатів на сервері

a) Перехід до виконання основної частини практичної роботи виконується автоматично системою за умови успішного проходження допуску;

b) У відповідні поля ввести результати розв’язання задач і натиснути кнопку «Завершити тест достроково» для збереження результатів роботи. Якщо час, відведений на виконання, закінчився – система блокується. У будь-якому випадку комп’ютерна система відобразить оцінку виконаної роботи.

1. Обчислити

$$\lim_{x\to\infty}\left[(3x+2)\cdot\left(\ln(2x+\alpha)-\ln(2x+3)\right)\right].$$

2. Яким повинно бути значення функції $f(x)=\dfrac{5x^2-\alpha x}{2x}$, щоб доозначена цим значенням вона була неперервною при $x=0$?

3. Дослідити на неперервність функцію і знайти стрибок $f\left(x\right)$ у точці розриву.

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{1}{7}\left(2x^2+5\right), & x\le 1\\ 5-4x, & 1<x<3\\ x-\alpha, & x\ge 3\end{cases}.$$

4. Дано $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2+2x, & x\le 2\\ 2\alpha-kx^3, & x>2\end{cases}$. При якому значенні числа k функція буде неперервною?

5. Дано функцію $f\left(x\right)=x+\dfrac{x}{\sqrt{\alpha}\cdot x-1}$. Знайти точки розриву другого роду.

5. Приклади розв'язання задач та вправ до самостійної роботи студента на практичному занятті

1. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(5x+1\right)\cdot\left(\ln\left(3x+2\right)-\ln\left(3x-1\right)\right)\right]$.

Розв'язання:

Використовуючи властивості логарифмів, неперервність логарифмічної та показникової функцій, другу чудову границю дістанемо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left(5x+1\right)\cdot\left(\ln\left(3x+2\right)-\ln\left(3x-1\right)\right)\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(5x+1\right)\cdot\ln\left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{(5x+1)}=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{(5x+1)}\right)=\left(1^{\infty}\right)=$$

$$=\ln\left(e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-1}-1\right)(5x+1)}\right)=\ln\left(e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2-3x+1}{3x-1}\right)(5x+1)}\right)=$$

$$=\ln\left(e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{15x+3}{3x-1}}\right)=\ln e^5=5\ln e=5.$$

Відповідь: 5.

2. Яким повинно бути значення функції $f(x)=\frac{7x^2-2x}{3x}$, щоб доозначена цим значенням вона була неперервною при $x=0$?

Розв'язання:

В точці $x=0$ функція $f(x)$ невизначена. Знайдемо границю функції $f(x)$ при $x\to 0$.

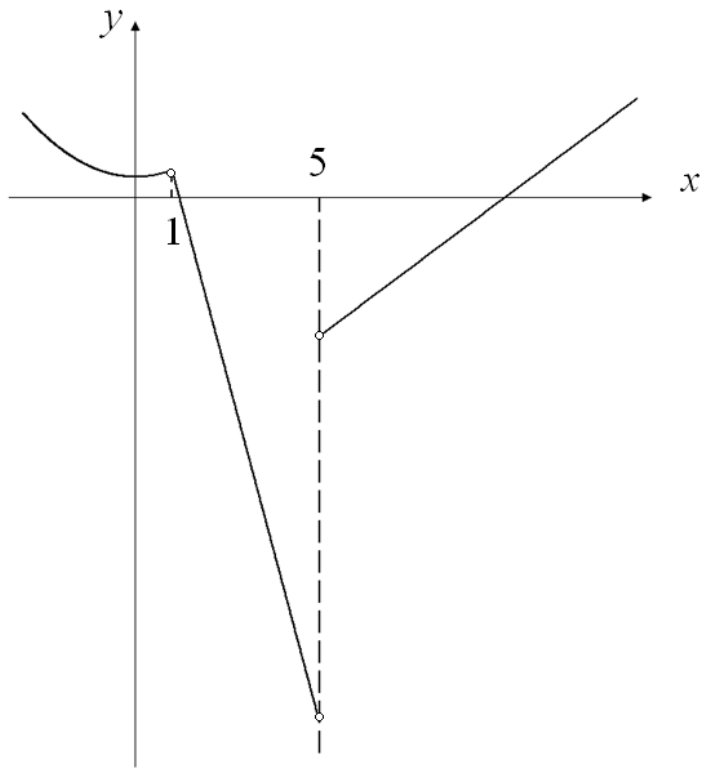
$$\lim_{x\to 0}\frac{7x^2-2x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{7x-2}{3}=-\frac{2}{3}.$$

Отже, для неперервності $f(x)$, досить покласти $f(0)=-\frac{2}{3}\approx -0,6667$.

Відповідь: $f(0)\approx -0,6667$.

3. Дослідити на неперервність функцію і знайти стрибок у точці розриву

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{8}\left(2x^2+6\right), & x<1\\ 6-5x, & 1<x<5.\\ x-10, & x>5\end{cases}$$



Розв'язання:

Дана функція визначена і неперервна в інтервалах $(-\infty;1)$, $(1;5)$, $(5;+\infty)$. При $x=1$ і $x=5$ змінюється аналітичний вираз функції і тільки в даних точках функція може мати розрив.

Визначимо односторонні границі функції в точці $x=1$:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{1}{8}\left(2x^2+6\right) = 1,$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} (6-5x) = 1,$$

$$f(1) = \frac{1}{8}\left(2\cdot 1^2+6\right) = 1.$$

Так як односторонні границі рівні, то згідно (5) функція в точці $x=1$ неперервна. Визначимо односторонні границі функції в точці $x=5$:

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 5-0} f(x) = \lim_{x\to 5-0} (6-5x) = -19, \\ &\lim_{x\to 5+0} f(x) = \lim_{x\to 5+0} (x-10) = -5 \end{aligned}.$$

Так як односторонні границі існують і не рівні між собою, то в точці $x=5$ існує стрибок функції, а саме $\delta = \left|-5-(-19)\right| = 14$.

Відповідь: $\delta = 14$.

4. Дано $f(x) = \begin{cases} x^2+5x, & x\le 3 \\ 5x+kx^3, & x>3 \end{cases}$. При якому значенні числа k функція $f(x)$ буде неперервною?

Розв'язання:

Для неперервності функції потрібно, щоб односторонні границі і значення функції в точці $x=3$ були рівні, отже:

$$f(3-0) = \lim_{x\to 3-0}\left(x^2+5x\right) = 24,$$

$$f(3+0) = \lim_{x\to 3+0}\left(5x+kx^3\right) = 15+27k,$$

$$f(3) = \left(x^2+5x\right)_{|x=3} = 24.$$

Тоді дістанемо:

$$15+27k = 24,$$

$$27k = 9,$$

$$k = \frac{9}{27} = \frac{1}{3} \approx 0,333.$$

Відповідь: $k \approx 0,333$.

5. Дано функцію: $f\left(x\right)=\dfrac{3x}{2x+5}$. Знайти точки розриву другого роду.

Розв'язання:

Функція $f\left(x\right)$ може мати точки розриву другого роду тільки в тих точках, в околі яких вона необмежено зростає (спадає). У випадку дробово-раціональної функції це можливо, коли знаменник прямує до нуля. Отже,

$$2x+5=0$$

$$x=-2,5.$$

Дійсно,

$$\lim_{x\to-2,5-0} f\left(x\right)=\lim_{x\to-2,5-0}\frac{3x}{2x+5}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to-2,5+0} f\left(x\right)=\lim_{x\to-2,5+0}\frac{3x}{2x+5}=-\infty.$$

Відповідь: $x=-2,5$.

6. Питання до самоконтролю

1. Означення правосторонньої границі.
2. Означення лівосторонньої границі.
3. Необхідна і достатня умова існування границі функції.
4. Означення неперервності функції в точці.
5. Що називається точкою розриву?

ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ

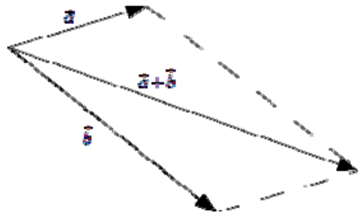
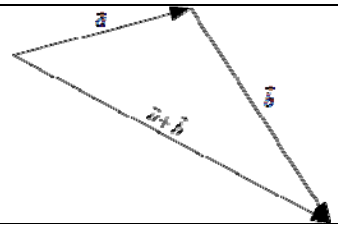
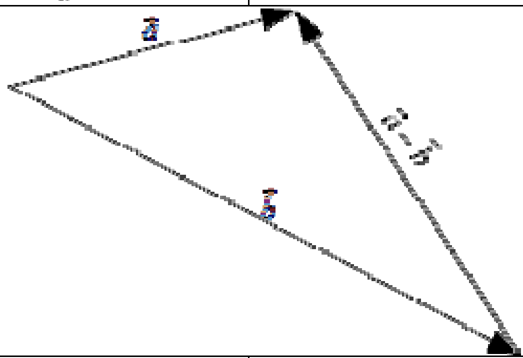
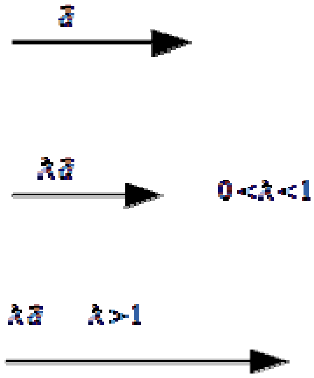
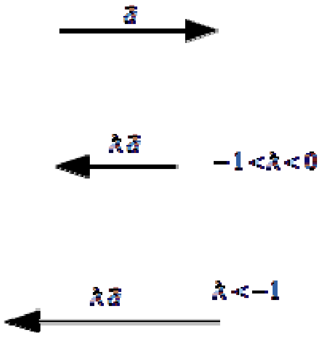
Ранг матриці А

Значення мінорів	Ранг
Усі $M^{(1)}=0$ (A – нульова матриця)	$r(A)=0$
Усі $M^{(2)}=0$ і хоча б один з $M^{(1)}\neq 0$	$r(A)=1$
Усі $M^{(3)}=0$ і хоча б один з $M^{(2)}\neq 0$	$r(A)=2$
....	....
Усі $M^{(r+1)}=0$ і хоча б один з $M^{(r)}\neq 0$	$r(A)=r$

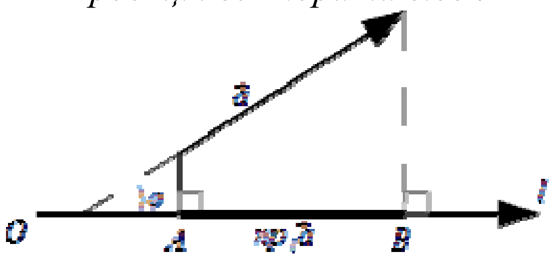
Узагальнені поняття та формули з теми

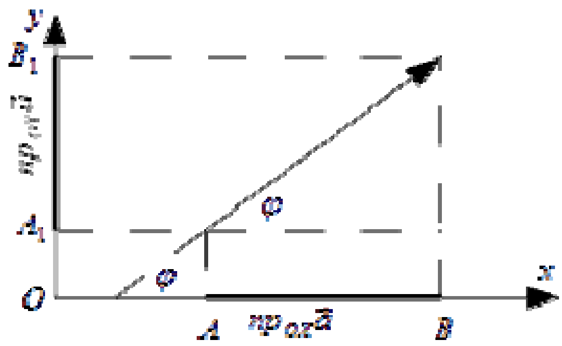
Назва	Формули та позначення
Визначник другого порядку	$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$
Визначник третього порядку	$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1b_3c_2$
Алгебраїчне доповнення елемента a_{ij}	$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$
Мінор елемента $\boldsymbol{a_{ij}}$	$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$
Обернена матриця A^{-1}	$A^{-1} = \dfrac{\tilde{A}}{\lvert A \rvert}$, де $\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \quad \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots A_{nn} \end{bmatrix}$.

Лінійні дії над векторами, заданими геометрично

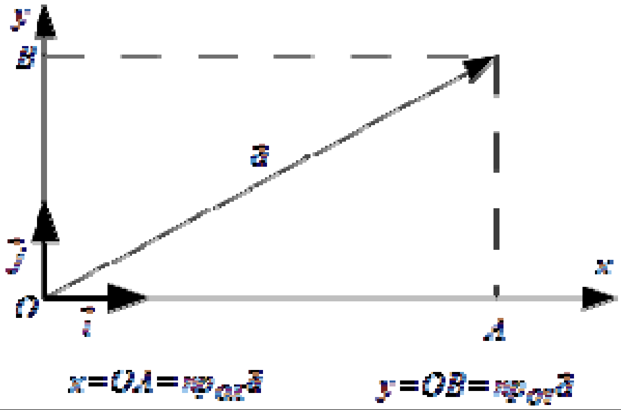
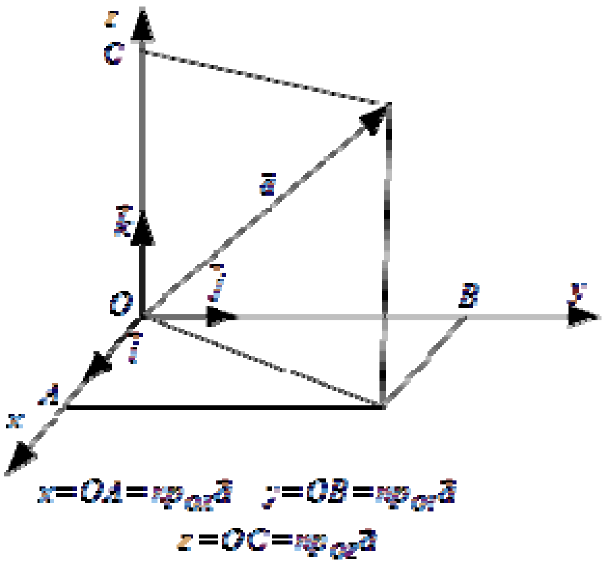
Операція	Виконання операції	
	Правило паралелограма	Правило трикутника
Додавання векторів $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$		
Віднімання векторів $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$		
Множення вектора $\vec{a}$ *на скаляр* λ		

Проекція вектора на вісь

Назва і геометрична ілюстрація	Формули для знаходження
1	2
*Проекція вектора на вісь **l*** 	$np_l\vec{a} = \lvert\vec{a}\rvert\cos\varphi$

Проекція вектора на координатні осі 	$np_{OX}\vec{a}=\lvert\vec{a}\rvert\cos\varphi$ $np_{OY}\vec{a}=\lvert\vec{a}\rvert\cos\varphi$

Розклад вектора за координатним базисом

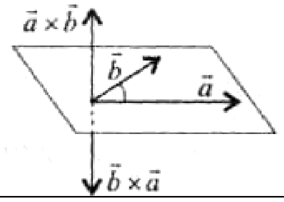
Алгебраїчний запис	Геометрична ілюстрація
1	2
$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}$. $\vec{a}=\{x;y\}$; $x;y$ – координати вектора на площині $\vec{i}=\{1;0;0\}$; $\vec{j}=\{0;1;0\}$.	
$\vec{a}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}=\{x;y;z\}$ *x, y, z* – координати вектора в просторі $\vec{i}=\{1;0;0\}$; $\vec{j}=\{0;1;0\}$; $\vec{k}=\{0;0;1\}$.	

Лінійні дії з векторами, заданими в координатній формі

Назва операції	Формули для знаходження
1	2
Додавання векторів $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ *і* $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$	$\vec{a}+\vec{b}=(x_1;y_1;z_1)+(x_2;y_2;z_2)=$ $=(x_1+x_2;y_1+y_2;z_1+z_2)$
Віднімання векторів $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ *і* $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$	$\vec{a}-\vec{b}=(x_1;y_1;z_1)-(x_2;y_2;z_2)=$ $=(x_1-x_2;y_1-y_2;z_1-z_2)$
Множення вектора $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ *на скаляр* λ	$\lambda\vec{a}=\lambda(x_1;y_1;z_1)=(\lambda x_1;\lambda y_1;\lambda z_1)$
Лінійна комбінація векторів $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ *і* $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$	$\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}=\lambda_1(x_1;y_1;z_1)+\lambda_2(x_2;y_2;z_2)=$ $=(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2;\lambda_1y_1+\lambda_2y_2;\lambda_1z_1+\lambda_2z_2)$

Види добутків векторів

Назва та позначення	Означення	Координатна форма	Результат
1	2	3	4
Скалярний добуток векторів $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$: $(\vec{a}\cdot\vec{b})$	$\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\cos(\alpha)$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert np_{\vec{a}}\vec{b}$ або $\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{b}\rvert np_{\vec{b}}\vec{a}$	$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$	Число
Векторний добуток векторів $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$:	1. $\vec{c}=\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\sin(\alpha)$ 2. $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$. 3. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – права трійка векторів.	$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$ або	Вектор

$\vec{c}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{a}\times\vec{b}$		$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i}-$ $-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}$	
Мішаний добуток векторів: $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$, $\vec{c}=(x_3;y_3;z_3)$: $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$	$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$	$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$	Число

Основні формули векторної алгебри

$(\vec{a}=(x_1;y_1;z_1),\ \vec{b}=(x_2;y_2;z_2),\ \vec{c}=(x_3;y_3;z_3))$

Назва	**Формули для знаходження**	
	Векторна форма	**Координатна форма**
1	2	3
Довжина вектора $\vec{a}$	$\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}=\sqrt{\vec{a}^2}$	$\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$
Напрямні косинуси вектора $\vec{a}$ *(косинуси кутів, які утворює вектор* $\vec{a}$ *з координатними осями:* α *– з віссю* OX, β *– з віссю* OY, γ *– з віссю* OZ*)*	$\cos\alpha=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{i}}{\lvert\vec{a}\rvert}$, $\cos\beta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{j}}{\lvert\vec{a}\rvert}$, $\cos\gamma=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{k}}{\lvert\vec{a}\rvert}$. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+$ $+\cos^2\gamma=1$	$\cos\alpha=\dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}$ $\cos\beta=\dfrac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}$ $\cos\gamma=\dfrac{z_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}$.
Косинус кута між векторами $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$	$\cos(\alpha)=\dfrac{\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)}{\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert}$	$\cos(\alpha)=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$
Площа трикутника ABC	$S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert$, *де* $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$; $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$	$S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2}$

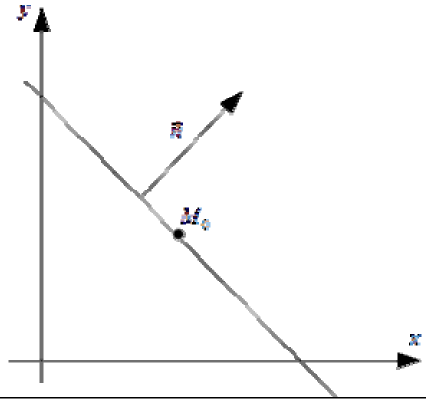
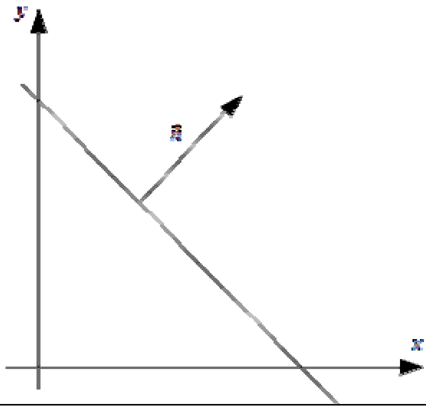
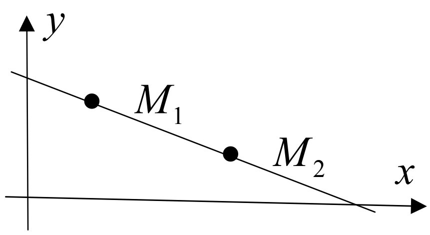
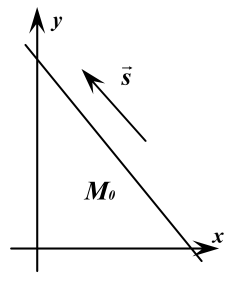
Площа паралелограма ABCD, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$	$S_{ABCD}=\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|$, *де* $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$; $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$	$S_{ABCD}=\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2}$
Об'єм трикутної піраміди SABC, побудованої на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$	$V_{\text{пір}}=\frac{1}{6}\left\|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right\|$, *де* $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$; $\vec{c}=\overrightarrow{AS}$	$V_{\text{пір}}=\frac{1}{6}\left\|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}\right\|$
Об'єм паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, *побудованого на векторах* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$	$V_{\text{пар}}=\left\|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right\|$, *де* $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$; $\vec{c}=\overrightarrow{AA_1}$;	$V_{\text{пір}}=\left\|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}\right\|$

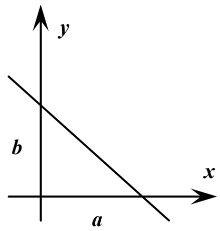
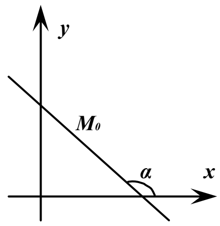
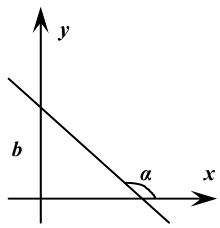
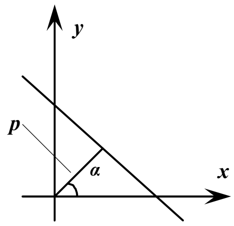
Умови взаємного розміщення векторів

$$\vec{a}=\left(x_1;y_1;z_1\right),\ \vec{b}=\left(x_2;y_2;z_2\right),\ \vec{c}=\left(x_3;y_3;z_3\right)$$

Опис взаємного розміщення	**Умова**	
	Векторна форма	**Координатна форма**
1	2	3
Перпендикулярність векторів $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$	*Скалярний добуток дорівнює нулю* $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$	$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$
Колінеарність векторів $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$	*Векторний добуток дорівнює нулю* $\vec{a}\times\vec{b}=0$	$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$
Компланарність векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$	*Мішаний добуток дорівнює нулю* $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$	$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0$

Різні інтерпретації рівняння прямої

Вид рівняння	Назва та позначення	Геометрична ілюстрація
1	2	3
$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$	*Рівняння прямої, що проходить через точку* $M_0(x_0;y_0)$ перпендикулярно $\vec{n}(A;B)$.	
$Ax+By+C=0$	*Загальне рівняння прямої.* Коефіцієнти A, B – координати вектора $\vec{n}$, перпендикулярного до прямої.	
$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$	*Рівняння прямої, що проходить через дві точки:* $M_1(x_1;y_1)$ та $M_2(x_2;y_2)$	
$\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}$	*Канонічне рівняння прямої.* Точка $M_0(x_0;y_0)$ належить даній прямій. $\vec{S}(l;m)$ – напрямний вектор, який паралельний до даної прямої.	

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$	*Рівняння прямої у відрізках.* a – відрізок, який відтинає пряма на осі OX; b – відрізок, який відтинає пряма на осі OY.	
$y-y_0=k\left(x-x_0\right)$	*Рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0\left(x_0;y_0\right)$ з кутовим коефіцієнтом k.* $k=tg\alpha$, α – кут нахилу прямої до осі OX.	
$y=kx+b$	*Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k.* $k=tg\alpha$, b – відрізок, який відтинає пряма на осі OY.	
$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$	*Нормальне рівняння прямої.* p – довжина перпендикуляра від початку координат до прямої; α – кут між цим перпендикуляром і додатнім напрямом осі OX.	

Взаємне розміщення двох прямих на площині

Вихідні дані	Кут між прямими	Умова паралельності прямих	Умова перпендикулярності прямих
1	2	3	4
$\vec{S}_1(l_1;m_1)$, $\vec{S}_2(l_2;m_2)$ – напрямні вектори прямих: $\frac{x-x_0}{l_1}=\frac{y-y_0}{m_1}$ $\frac{x-x_1}{l_2}=\frac{y-y_1}{m_2}$	$\cos\theta=\frac{l_1l_2+m_1m_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2}}$	$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}$	$l_1l_2+m_1m_2=0$
$\vec{n}_1(A_1;B_1)$, $\vec{n}_2(A_2;B_2)$ – нормальні (перпендикулярні) вектори прямих: $A_1x+B_1y+C_1=0$ $A_2x+B_2y+C_2=0$	$\cos\theta=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$	$A_1A_2+B_1B_2=0$
$k_2;k_1$– кутові коефіцієнти прямих: $y=k_1x+b_1$ $y=k_2x+b_2$	$tg\theta=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$	$k_2=k_1$	$k_2k_1=-1$

Лінії другого порядку

Кривими лініями другого порядку називають лінії, координати точок яких задовольняють рівняння другого степеня.

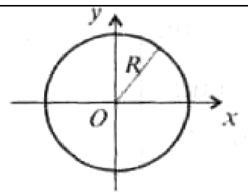
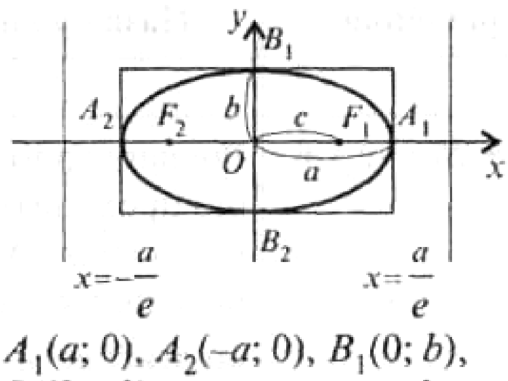
Такими лініями є *коло, еліпс, гіпербола* і *парабола*.

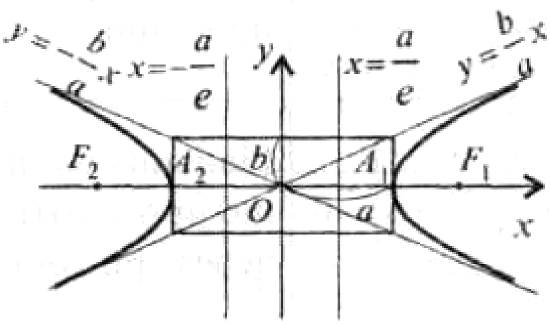
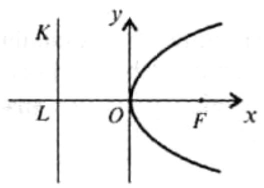
Коло – геометричне місце точок, кожна з яких рівновіддалена від однієї і тієї ж точки, яка називається центром кола.

Еліпс – геометричне місце точок, для кожної з яких сума відстаней від двох фіксованих точок площини, які називаються фокусами, є величина стала (необхідно, щоб ця стала була більша за відстань між фокусами).

Гіпербола – геометричне місце точок, для кожної з яких різниця відстаней від двох фіксованих точок площини, які називаються фокусами, є величина стала (необхідно, щоб ця стала не дорівнювала нулю і була б менша за фокалькну відстань).

Парабола – геометричне місце точок, для кожної з яких відстань до деякої фіксованної точки площини, яка називається фокусом, дорівнює відстані до деякої фіксованої прямої, яка називається директрисою (ця пряма не повинна проходити через фокус).

Назва кривої	**Геометрична ілюстрація**	**Канонічне рівняння і основні залежності між параметрами**
Коло	 O — центр кола; R — радіус кола	$\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2=R^2$ R – радіус; $\left(x_0;y_0\right)$ – координати центра кола.
Еліпс	 $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$ — вершини еліпса; $F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$ — фокуси еліпса	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ a – велика піввісь, b – мала піввісь $\left(a>b\right)$; c – фокальна піввісь: $c^2=a^2-b^2$; ексцентриситет еліпса: $\varepsilon=\frac{c}{a}$, $\left(0<\varepsilon<1\right)$**;** рівняння директрис: $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$

Гіпербола	 $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$ — вершини гіперболи; $F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$ — фокуси гіперболи	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ a – дійсна піввісь, b – уявна піввісь; c – фокальна піввісь: $c^2=a^2+b^2$; Ексцентриситет: $\varepsilon=\frac{c}{a}$, $(\varepsilon>1)$; рівняння директрис: $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$; рівняння асимптот: $y=\pm\frac{b}{a}x$
Парабола	 $O(0;0)$ — вершина параболи; $F(\frac{p}{2};0)$ — фокус параболи; KL — директриса параболи	$y^2=2px$, $p=FL$ – параметр параболи; ексцентриситет $\varepsilon=1$; рівняння директриси: $x=-\frac{p}{2}$.

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ В ПРОСТОРІ

Види рівнянь площини

Вихідні дані	Вид рівняння	Назва рівняння
1	2	3
$M_0(x_0;y_0;z_0)$ – точка площини; $\vec{n}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$ – вектор нормалі площини.	$A(x-x_0)+B(y-y_0)+$ $+C(z-z_0)=0$	Рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\vec{n}$.
	$Ax+By+Cz+D=0$	Загальне рівняння площини.
$M_1(x_1;y_1;z_1), M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$ – три точки площини	$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$	Рівняння площини, що проходить через три точки.
$A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ – точки перетину площини з координатними осями	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$	Рівняння площини у відрізках на осях
p – відстань від початку координат до площини; $\vec{n}_0=\vec{i}\cos\alpha+\vec{j}\cos\beta+$ $+\vec{k}\cos\gamma$ орт вектора нормалі площини	$x\cos\alpha+y\cos\beta+$ $+z\cos\gamma-p=0$	Нормальне рівняння площини

Види рівняннь прямої в просторі

Вихідні дані	Вид рівняння	Назва рівняння
1	2	3
$M_0(x_0;y_0;z_0)$ – точка прямої; $\vec{s}(l;m;n)$ – напрямний вектор прямої	$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$	Канонічне рівняння прямої
	$\begin{cases} x=x_0+tl \\ y=y_0+tm, -\infty<t<+\infty \\ z=z_0+tn \end{cases}$	Параметричне рівняння прямої
$M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ – дві точки прямої	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$	Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки
$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ площини, лінією перетину яких є пряма	$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$	Загальне рівняння прямої

Взаємне розміщення прямої $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$

і площини $Ax+By+Cz+D=0$

Взаємне розміщення прямої і площини	**Основні характеристики**	**Аналітичний вираз**
1	2	3
Пряма перетинає площину	Кут між прямою і площиною	$\sin\theta=\frac{\lvert Al+Bm+Cn\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$
	Координати ***x, y, z***– точки перетину прямої з площиною	$\begin{cases} x=x_0+tl \\ y=y_0+tm \\ z=z_0+tn \\ Ax+By+Cz+D=0 \end{cases}$
Пряма перпендикулярна до площини	Умова перпендикулярності прямої і площини	$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$
Пряма	Умова	$Al+Bm+Cn=0$

паралельна площині	паралельності прямої і площини	
Пряма належить площині	Умова належності прямої до площини	$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \\ Al + Bm + Cn = 0 \end{cases}$

Взаємне розміщення двох площин

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ і } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Кут між площинами	Умова паралельності площин	Умова перпендикулярності площин
1	2	3
$\cos\theta = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$	$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$	$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

Взаємне розміщення двох прямих у просторі

Вихідні дані	Кут між прямими	Умова паралельності прямих	Умова перпендикулярності прямих
1	2	3	4
$\vec{S}_1(l_1;m_1;n_1)$, $\vec{S}_2(l_2;m_2;n_2)$ –напрямні вектори прямих ***L_1, L_2***	$\cos\theta = \dfrac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$	$\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$	$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$

Основні властивості границь

Формулювання теореми за умови існування $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ і $\lim\limits_{x\to a}\phi(x)$	Аналітичний запис
1. Границя алгебраїчної суми двох (або скінченної кількості) функцій дорівнює алгебраїчній сумі границь цих функцій	$\lim\limits_{x\to a}\left(f(x) \pm \phi(x)\right) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a}\phi(x)$

2. Границя добутку двох (або скінченної кількості) функцій дорівнює добутку границь цих функцій	$\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\cdot\phi(x)\right)=$ $=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}\phi(x)$
3. Границя частки двох (або скінченної кількості) функцій дорівнює частці границь цих функцій за умови, що границя дільника не дорівнює нулю.	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\phi(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\phi(x)}$ $\left\{\lim\limits_{x\to a}\phi(x)\neq 0\right\}$
4. Сталий множник можна виносити за знак границі	$\lim\limits_{x\to a}cf(x)=c\lim\limits_{x\to a}f(x)$, $c=const$
5. Границя цілого додатнього степеня функції дорівнює тому ж степеню границі функції	$\lim\limits_{x\to a}f(x)^n=\left[\lim\limits_{x\to a}f(x)\right]^n$

Основні властивості нескінченно малих функцій

Властивість	Аналітичний запис
1. Алгебраїчна сума двох (або скінченної кількості) нескінченно малих функцій $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ є нескінченно малою функцією	Якщо $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ та $\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=0$, то $\lim\limits_{x\to a}(\alpha(x)\pm\beta(x))=0$
2. Добуток обмеженої функції на нескінченно малу функцію є нескінченно малою функцією	Якщо $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ та $\lvert f(x)\rvert<M$, то $\lim\limits_{x\to a}f(x)\alpha(x)=0$
3. Якщо $\alpha(x)$ – нескінченно мала функція при $x\to a$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ – нескінченно велика функція при $x\to a$	Якщо $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{\alpha(x)}=\infty$

Основні властивості нескінченно великих функцій.

Властивість	Аналітичний запис
1. Алгебраїчна сума двох (або скінченної кількості) нескінченно великих функцій однакового знаку є нескінченно великою функцією	Якщо $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\pm\infty$ та $\lim\limits_{x\to a}\phi(x)=\pm\infty$, то $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm\phi(x))=\pm\infty$

2. Добуток обмеженої функції на нескінченно велику функцію є нескінченно великою функцією	Якщо $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right) = \pm\infty$ та $\left\|\phi\left(x\right)\right\| < M$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)\phi\left(x\right) = \infty$
3. Якщо $f\left(x\right)$ – нескінченно велика функція при $x \to a$, то $\dfrac{1}{f\left(x\right)}$ – нескінченно мала функція при $x \to a$	Якщо $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f\left(x\right)} = 0$

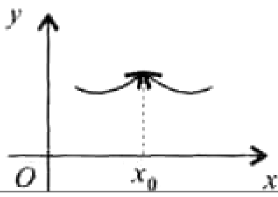
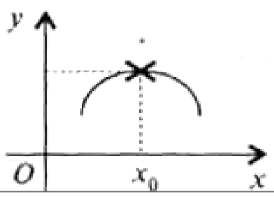
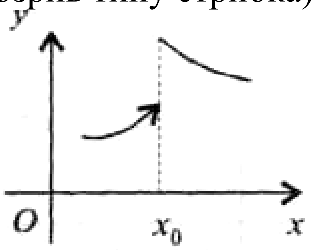
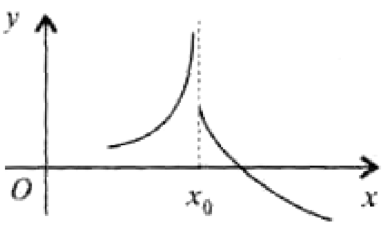
Важливі границі та їх наслідки

Назва	Аналітичний запис
1	2
Перша важлива границя	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$
Наслідки	1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x} = k, \quad k \neq 0$
	2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x} = 1$
	3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgkx}{x} = k, \quad k \neq 0$
	4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x} = 1$
	5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx}{x} = 1$
Друга важлива границя	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = e, \quad e = 2,7182...$
Наслідки	1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
	2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{x} = e^{k}$

НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ В ТОЧЦІ

Назва поняття	Означення
x_0 – точка неперервності функції $f(x)$	1. $f(x)$ визначена в точці x_0 і в деякому її околі. 2. Існує $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. 3. Виконується рівність: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
x_0 – точка розриву функції $f(x)$	Не виконується одна з умов 1 – 3

Класифікація точок розриву функції

Назва	Означення
x_0 – **точка розриву першого роду** а) усувний розрив   	$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, але $f(x_0)$ невизначена або $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$
б) неусувний розрив (розрив типу стрибка)  	$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$
x_0 – **точка розриву другого роду**  	Хоча б одна з границь $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ не існує або дорівнює нескінченості

Список використаної літератури

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман – М. : Наука, 1985.-416 с.
2. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии / Н. В. Ефимов – М. : Наука, 1986. -272 с.
3. Дубовик В. П. Вища математика / В. П. Дубовик, І. І. Юрик – К. : Вища школа, 1993. – 647 с.
4. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д. В. Клетеник – М. : Наука, 1986.-224 с.
5. Вища математика / М. І. Шкіль М. Л. Шкіль, Т. В. Колесник, В. М. Котлова: в 3-х ч. – ч. 1 – К. : Либідь, 1994. – 276 с
6. Вища математика / М. І. Шкіль М. Л. Шкіль, Т. В. Колесник, В. М. Котлова: в 3-х ч. – ч. 2 – К. : Либідь, 1994. – 351 с
7. Вища математика / М. І. Шкіль М. Л. Шкіль, Т. В. Колесник, В. М. Котлова: в 3-х ч. – ч. 3 – К. : Либідь, 1994. – 351 с
8. Барковський В. В. Основи елементарної математики / В. В. Барковський, Н. В. Барковська – К. : НАУ, 1999. – 236 с.
9. Барковський В.В. Математика для економістів. / В. В. Барковський, Н. В. Барковська : в 2-х ч. – ч. 1 – К. : Національна академія управління, 1999. – 399 с.
10. Бугір М. К. Математика для економістів : посібник / М. К. Бугір – К. : Академія, 2003. – 520 с.
11. Валєєв К.Г. Вища математика: навч. посібник / К. Г. Валєєв, І. А. Джаладова: в 2-х ч. – ч. 1 – К. : КНЕУ, 2001. – 546с.
12. Соколенко О. І. Вища математика / О. І. Соколенко – К. : Академія, 2002. – 432 с.
13. Вища математика для економістів. / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, Н. М. Тришин, М.Н.Фридман, — М. : Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997.
14. Высшая математика. Общий курс. / А.В.Кузнецов, Л.Ф.Янчук, С. А. Мызгаева [и др.] — Минск: Высшая школа, 1993.
15. Тевяшев А. Д. Вища математика. Загальний курс: збірник задач та вправ / А. Д. Тевяшев, О. Г. Литвин. — Х. : Рубікон, 1999.
16. Бугір М. К. Математика для економістів : підруч. / М. К. Бугір. - Тернопіль, 1998.
17. Сборник задач по курсу высшей математики. / под ред. Г. И. Кручковича — М. : Высшая школа, 1978.
18. Запорожець Г. И. Руководство к решению задач по

математическому анализу. / Г. И. Запорожець — М. : Высшая школа, 1966.
19. Каилан И. А. Практические занятия но высшей математике. / И. А. Каилан. — Х. : Харьковский университет, 1972.
20. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике / В. П. Минорский. — М. : Наука, 1975.

Предметний покажчик

Для нотаток

Навчальне видання

Шебанін В'ячеслав Сергійович
Шебаніна Олена В'ячеславівна
Атаманюк Ігор Петрович та ін.

ПРАКТИКУМ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ.
Комп'ютерна система
для дистанційного навчання.
Частина I

Навчальний посібник

Технічний редактор: І. П. Атаманюк
Комп'ютерна верстка: С. В. Євстрат'єв
Дизайн обкладинки: В. Ю. Іванов

Формат 60х84/16 Ум. друк.арк.. 13,75
Тираж 300 прим. Зам. № ___

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул Паризької Комуни, 9
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013р