МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ МЕНЕДЖМЕНТУ

**Кафедра економічної кібернетики,
комп'ютерних наук та інформаційних технологій**

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

методичні рекомендації
для виконання практичних та індивідуальних завдань для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти ОПП «Комп'ютерні науки» спеціальності F3 (122) «Комп'ютерні науки» денної форми здобуття вищої освіти

Миколаїв
2025

УДК 519.1
Д48

Друкується за рішенням науково-методичною комісією факультету менеджменту Миколаївського національного університету від 18.09. 2025 року протокол № 2.

Укладачі:

О. Ю. Пархоменко – канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет

О. Є. Богатєнкова – асистент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет

Рецензенти:

В. М. Дармосюк – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри фізики та математики Чорноморського національного університету імені Петра Могили

О. В. Бойчук – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського національного аграрного університету

ЗМІСТ

ВСТУП

Дискретна математика є фундаментальною дисципліною в підготовці фахівців у галузі комп'ютерних наук. Вона забезпечує теоретичне підґрунтя для формалізації алгоритмів, структур даних, моделей обчислень і принципів побудови програмних та інформаційних систем. Знання дискретної математики дозволяє майбутнім ІТ-спеціалістам ефективно вирішувати задачі логічного аналізу, системного проектування, оптимізації та забезпечення коректності програмного забезпечення.

Ці методичні рекомендації розроблені для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за освітньо-професійною програмою «Комп'ютерні науки». Матеріал відповідає навчальному плану та структурований відповідно до логіки вивчення основних розділів дисципліни: теорії множин, бінарних відношень, функцій, відображень, відношень еквівалентності та порядку. Значну увагу приділено прикладному аспекту – студенти знайдуть численні приклади використання математичних понять у моделях баз даних, графах, відношеннях між об'єктами, операціях над множинами тощо.

Посібник містить практичні завдання, індивідуальні роботи й тестові питання, які спрямовані на закріплення теоретичних знань та розвиток логічного мислення. Завдання сформульовані з урахуванням сучасних вимог до професійної підготовки ІТ-фахівців, а також орієнтовані на міждисциплінарне поєднання математики, інформатики та економіки.

Мета даних методичних рекомендацій – допомогти студентам не лише опанувати теоретичний матеріал, а й навчитися застосовувати набуті знання при розв'язанні реальних задач, моделюванні об'єктів і процесів у сфері інформаційних технологій. Очікується, що даний матеріал сприятиме формуванню системного математичного мислення, необхідного для подальшої фахової підготовки.

ТЕМА 1. Основні поняття теорії множин

<u>Приклад 1</u>. Наведемо ще кілька прикладів множин:
Множина натуральних чисел, які є меншими за 15. Позначимо її N_1;
Множина цифр десяткової системи. Позначимо її D;
Множина цифр двійкової системи. Позначимо її B;
Множина парних чисел. Позначимо її N_2;
Множина видів навчальних занять студентів. Позначимо її A.
Таким чином, ми дійшли проблеми задання множин. При цьому наведені вище приклади множин задають описи характеристичних властивостей, які повинні мати їхні елементи.

<u>Приклад 2</u>. Стосовно зазначених вище прикладів маємо:

- $N_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$;
- $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
- $B = \{0,1\}$;
- $N_2 = \{2, 4, 6, 8, ...\}$.
- $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, де

a_1 – лекції;
a_2 – лабораторні роботи;
a_3 – практичні заняття;
a_4 – індивідуальна робота;
a_5 – самостійна робота.

3. Предикатний (висловлювальний, породжувальний) за допомогою предиката, тобто множина задається у вигляді $\{x : P(x)\}$ або $\{x \mid P(x)\}$, де $P(x)$ набуває значення «істина» для елементів множини.

<u>Приклад 3.</u> Приклади предикатів:

- $N_1 = \{x \mid x$ – натуральне число, яке менше за $15\}$;
- $D = \{x \mid x$ – цифра десяткової системи$\}$;
- $B = \{x \mid x$ – цифра двійкової системи $\} = \{x \mid x^2 - x = 0\}$;
- $N_2 = \{2, 4, 5, \ldots\} = \{x \mid x$ – парне число $\} = \{x \mid \exists\, n \in N (x = 2n)\}$;
- $A = \{x \mid x$ – від навчальних занять студентів$\}$.

4. За допомогою породжувальної процедури, яка описує спосіб отримання елементів множини із вже існуючих або інших об’єктів, якщо такий спосіб існує. Елементами множини є всі об’єкти, які можуть бути створені за допомогою цієї процедури. Частіше за все породжуюча процедура задається рекурсивними правилами.

<u>Приклад 4</u>. Задамо породжуючі процедури для раніше наведених прикладів:

- для множини N_1:

а) $1 \in N_1$; б) якщо $x \in N_1$, то $y = x+1$ теж $\in N_1$, поки $y < 15$;

• для множини D:

а) $0 \in D$; б) якщо $x \in D$, то $y = x+1$ теж $\in D$, поки $y \le 9$;

• для множини В:

а) $0 \in B$; б) якщо $x \in B$, то $y = x+1$ теж $\in B$, поки $y \le 1$;

• для множини N_2:

а) $2 \in N_2$; б) якщо $x \in N_2$, то $y = x+2$ теж $\in N_2$;

• для множини A породжуючої процедури не існує, тому що не зрозуміло яким чином можна отримати наступний елемент із вже існуючих.

Приклад 5. Наведемо приклади інших множин:

За колишньою марксистською класифікацією функціональною основою розвитку людського суспільства є матеріальне виробництво, яке як множина, позначимо її A, складається з трьох елементів, які теж є множинами: $A = \{A_1, A_2, A_3\}$, де

A_1 – множина робочих ресурсів,

A_2 – множина предметів праці,

A_3 – множина засобів праці.

В свою чергу $C = \{A_1, A_2\}$ множина, яка називається множиною продуктивних сил.

Множина B засобів виробництва складається з двох елементів: B_1 – множини предметів праці і B_2 – множини засобів праці:

$B = \{B_1, B_2\}$.

За ринковою класифікацією, яка панує зараз, множина економічних ресурсів R, тобто ресурсів, які використовуються для виробництва товарів і послуг, складається з двох елементів:

$R = \{R_1, R_2\}$, де

R_1 – множина матеріальних ресурсів,

R_2 – множина людських ресурсів.

Приклад 6. Якщо в задачі мова іде про студентів, то універсумом U може бути множина всіх студентів деякої групи, або факультету, або деякого університету, або всіх ВНЗ України, або всього світу. Наприклад, якщо в задачі підраховується успішність деякого окремого студента групи 1ЕК, то в якості U достатньо обрати множину студентів цієї групи, якщо складається порівняльна таблиця успішності студентів першого курсу КНЕУ або ХДТУ, то в якості універсуму U достатньо розглядати множину всіх студентів першого курсу даних навчальних закладів.

Будь-яку множину розглядатимемо у зв'язку з універсумом, який на колах Ейлера асоціюватимемо з прямокутником на площині, всередині якого зображатимемо множини, як ми робили, починаючи з рис.1.

Нова операція $U - A = \overline{A}$ – (абсолютне доповнення A) – це множина, що містить усі елементи універсуму, за винятком елементів A (рис.5).

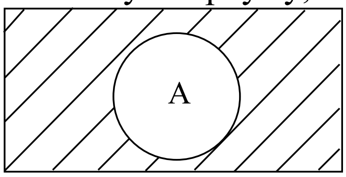


Рис.5

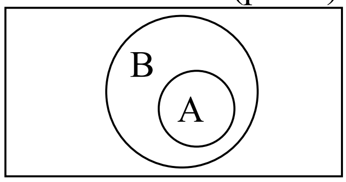


Рис.6

<u>Приклад 7</u>. Якщо розглядати в якості універсуму U множину співробітників деякої фірми та означити літерами:

- A – множину менеджерів цієї фірми;
- B – множину співробітників за віком більш 30 років;
- C – множину співробітників за віком більш 40 років;
- D – множину співробітників, які мають стаж роботи більш за 5 років.

Визначимо зміст множин:

1) $\overline{A}$ – множина співробітників фірми, які не є менеджерами;

2) $\overline{B}$ – множина співробітників фірми, яким за віком не більше 30 років;

3) $A \cap B$ – множина менеджерів фірми, яким за віком більш 30 років;

4) $\overline{B} \cap \overline{D}$ – множина співробітників фірми за віком не більш 30 років, які мають стаж роботи не більш 5 років;

5) $B \cap \overline{D}$ – множина співробітників фірми за віком більш 30 років, які мають стаж роботи не більш 5 років.

<u>Приклад 8</u>. Стосовно вищенаведеного приклада підмножинами множини U співробітників деякої фірми є множини A, B, C, D, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cap B$, $\overline{B} \cap \overline{D}$, $B \cap \overline{D}$. Крім того можна розглядати, що

$C \subset B$ – множина співробітників фірми, яким за віком більш 40 років, є підмножиною множини співробітників за віком більш 30 років.

$\overline{B} \cap \overline{D} \subset \overline{B}$, $\overline{B} \cap \overline{D} \subset \overline{D}$ – множина співробітників фірми за віком не більш 30 років, які мають стаж роботи не більш 5 років, є підмножиною множини співробітників фірми, яким за віком не більш 30, й одночасно є підмножиною множини співробітників фірми, які мають стаж роботи не більш 5 років.

Підкреслимо, що всі наведені приклади підмножин є прикладами істинних підмножин.

Порожня множина не містить елементів. Отже, додаючи до множини A порожню множину, ми фактично нічого не додаємо. Тому завжди можна вважати, що будь-яка множина A містить порожню множину як підмножину.

<u>Приклад 9</u>. Нехай $A = \{x \mid x$ – людська істота$\}$ і $B = \{x \mid x$ – людська істота жіночої статі$\}$; тоді зрозуміло, що $B \subset A$, а B – істинна підмножина A.

Треба бути уважним, щоб розрізняти елементи множини та підмножини цієї множини. Наприклад, коли пишуть $a \in \{a,b,c\}$ це означає, що елемент a є членом множини, що складається з трьох елементів: a, b і c. Коли ж пишуть $\{a\} \subset \{a,b,c\}$, це означає, що множина, що складається з одного елемента a, є підмножиною множини, яка складається з трьох елементів: a, b, c.

Таким чином, якщо Розов А.Ю. є студентом групи 1ЕК, то це означає, що цей студент є елементом множини A студентів групи 1ЕК. Якщо це єдиний студент цієї групи, який склав зимову сесію на "відмінно", то студент Розов А.Ю., є єдиним елементом множини B студентів-відмінників групи 1ЕК за результатами зимової сесії, при чому $B \subset A$.

<u>Приклад 10</u>. Для триелементної множини $A = \{a,b,c\}$ маємо

$$P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}.$$

У разі кінцевої множини A, що складається з n елементів, множина підмножин $P(A)$ містить 2^n елементів. Слід підкреслити відмінності між відношенням належності ($\in$) і відношенням включення ($\subset$). Як уже зазначалося, множина A може бути своєю підмножиною ($A \subset A$), але вона не може входити до складу своїх елементів ($A \notin A$). Навіть у разі одноелементних підмножин потрібно відрізняти множину $A = \{a\}$ та її єдиний елемент а (дивись приклад). Відношення включення має властивість транзитивності, відношення належності цієї властивості не має. Тобто, із того, що $a \in A \wedge A \in B$ не витікає, що $a \in B$, як здається на перший погляд.

<u>Приклад 11</u>. Розглянемо такі множини $A = \{a,b\}$, $B = \{\{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}$. Дійсно $A \in B$, але $a \notin B$.

<u>Приклад 12</u>. Спочатку доведемо тотожність 3а) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap$ $\cap (A \cup C)$, використовуючи твердження про рівність множин.

Доведемо, що $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Для цього візьмемо будь-яке $x \in A \cup (B \cap C)$, тоді за означенням операцій «$\cup$» і «$\cap$», $x \in A \vee$ $\vee (x \in B \wedge x \in C)$. За законом дистрибутивності диз'юнкції відносно кон'юнкції маємо, що $(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in B \vee x \in C)$, тобто $x \in (A \cup B) \wedge x \in (B \cup C)$ або $x \in (A \cup B) \cap (B \cup C)$, що і було потрібно довести.

Доведемо, що $(A \cup B) \cap (B \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$. Для цього візьмемо будь-яке $x \in (A \cup B) \cap (B \cup C)$. Звідси $(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in B \vee x \in C)$ або $x \in A \vee$ $\vee (x \in B \wedge x \in C)$, тобто $x \in A \cup (B \cap C)$, що і було потрібно довести.

Згідно з твердженням про рівність множин 3а) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap$ $\cap (A \cup C)$.

Доведемо, що $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ за означенням рівності множин. Для цього знову візьмемо будь-яке $x \in A \cup (B \cap C)$, тоді за означенням операцій «$\cup$» і «$\cap$», це еквівалентне тому, що $x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$. Це в свою чергу за законом дистрибутивності диз'юнкції відносно кон'юнкції еквівалентне тому, що $(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in B \vee x \in C)$, тобто $x \in A \cup B \wedge x \in B \cup C$ або $x \in (A \cup B) \cap (B \cup C)$. Таким чином ми довели, що

$$\forall\, x\,(x \in A \cup (B \cap C)) \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \wedge x \in C) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in A \cup B \vee x \in A \cup C \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

тобто $\forall\, x\,(x \in A \cup (B \cap C)) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

За означенням рівності двох множин це означає, що $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap \; \cap (A \cup C)$.

Доведемо ту саму тотожність алгебраїчним способом. Нагадаємо, що при цьому ми маємо використовувати основні властивості (тотожності) алгебри множин причому, якщо ми доводитимемо деяку тотожність, то всі інші вважатимемо доведеними.

Адже, треба довести $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Почнемо з правої частини

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \overset{3б)}{=} ((A \cup B) \cap A) \cup ((A \cup B) \cap C) \overset{1б)}{=} (A \cap (A \cup B)) \cup (C \cap (A \cup B)) \overset{3б)}{=}$$
$$\overset{3б)}{=} ((A \cap A) \cup (A \cap B)) \cup ((C \cap A) \cup (C \cap B)) \overset{2a)}{=} (A \cap A) \cup (A \cap B) \cup (C \cap A) \cup (C \cap B) \overset{8б)}{=}$$
$$\overset{8б)}{=} A \cup (A \cap B) \cup (C \cap A) \cup (C \cap B) \overset{9a)1б)}{=} A \cup (A \cap C) \cup (C \cap B) \overset{9a)}{=} A \cup (C \cap B), \text{ і т.д.}$$

ми отримали ліву частину. Тотожність доведено.

Будь-яка теорема алгебри множин виводиться з тотожностей 2а) і 2б),тобто методом алгебраїчних перетворень.

<u>Приклад 13</u>. Доведемо властивість 8а) $A \cup A = A$, послідовно використовуючи властивості 4б), 5а), 3а), 5б), 4а).

$$A \cup A \overset{4б)}{=} (A \cup A) \cap U \overset{5a)}{=} (A \cup A) \cap (A \cup \overline{A}) \overset{3a)}{=} A \cup (A \cap \overline{A}) \overset{5б)}{=} A \cup \varnothing \overset{4a)}{=} A.$$

<u>Приклад 14</u>. Наведемо приклади розбиття множин:

Нехай $A = \{a, b, c, d, e\}$, тоді сукупність множин $B = \{a, b, c\}$ і $C = \{d, e\}$ є розбиттям множини A, тому що $B \cup C = A$, а $B \cap C = \varnothing$.

Нехай A – множина співробітників деякої фірми. Розбиттям цієї множини є сукупність двох множин – множини чоловіків та жінок, які є співробітниками фірми.

Нехай A – множина студентів факультету. Сукупність множин A_i, де A_i – множина студентів i-ї групи факультету, є розбиттям множини A.

<u>Приклад 15</u>. Наведемо приклади декартового добутку:

Якщо $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, тоді

$$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3)\},$$

$$B \times A = \{(b_1, a_1), (b_1, a_2), (b_2, a_1), (b_2, a_2), (b_3, a_1), (b_3, a_2),\}.$$

Якщо є множина прізвищ $X=\{$Стеценко, Чуйко, Козак$\}$ і є множина посад $Y=\{$старший менеджер, менеджер$\}$ філії фірми.

Тоді декартів здобуток $X\times Y=\{$(Стеценко, старший менеджер), (Стеценко, менеджер), (Чуйко, старший менеджер), (Чуйко, менеджер), (Козак, старший менеджер), (Козак, менеджер)$\}$ є множиною всіх можливих варіантів розподілу прізвищ співробітників за всіма посадами даної філії.

Декартів добуток $Y\times X=\{$(Старший менеджер, Стеценко), (Старший менеджер, Чуйко), (Старший менеджер, Козак), (Менеджер, Стеценко), (Менеджер, Чуйко), (Менеджер, Козак)$\}$ є множиною всіх можливих варіантів розподілу посад даної фірми за всіма прізвищами (особами).

Зрозуміло, що в загальному вигляді для двох множин A і B виконується $A\times B\neq B\times A$.

<u>Приклад 16</u>. На колах Ейлера зображено результат операцій з множинами. Виходячи з зображення навести результат в алгебраїчному вигляді.

1. $A\cap\overline{B}\cup C$

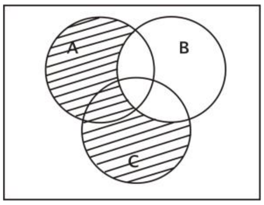


Рис.10.

$$A\cap\overline{B}\cup C=(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap C).$$

Ми використали поняття розбиття універсуму. Але для алгебраїчного вигляду можна знайти і інші варіанти. Наприклад,

$$A\cap\overline{B}\cup C=(A\cup C)-B=(A\cup C\cup B)-B=(A\cup C)\cup\overline{B}\ \text{ і т.д.}$$

2. $(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)$

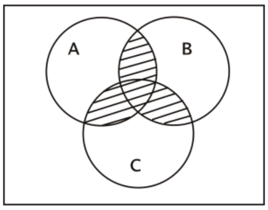


Рис.11.

$$(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)=(A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C)\cup$$
$$(A\cap B\cap C)=C\cap(A\cup B)\cup(A\cap B)=B\cap(A\cup C)\cup(A\cap C)\ \text{ і т.д.}$$

3. $(A\cap B)\cup(A\cap C)$

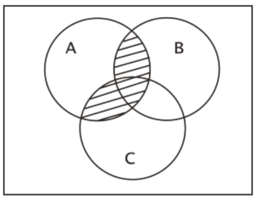


Рис.12.

$$(A\cap B)\cup(A\cap C)=(A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(A\cap B\cap C)=$$
$$=A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)\cup(A\cap B\cap C)$$ і т.д.

ТЕМА 2. Бінарні відношення

Приклад 1. Приклади бінарних відношень:

1. входити до складу деякого колективу;
2. відношення належності;
3. включення множин;
4. працювати в одній фірмі;
5. нерівність чисел;
6. бути братом;
7. ділитися на яке-небудь натуральне число.

Для наведених відношень запишемо відповідні їм співвідношення:

1. Розов – староста групи 1ЕК;
2. Коцар і Степаненко вчаться в одній групі;
3. $A \subset B$;
4. Резнік і Тимошенко працюють в одній фірмі;
5. $5 > 2$;
6. Богдан брат Віктора;
7. 6 ділиться на 3.

Приклад 2. Нехай множина $X = \{$Стеценко, Чуйко, Козак$\}$, є деякою множиною прізвищ, а множина $Y = \{$старший менеджер, менеджер$\}$ є множиною посад філії деякої фірми. Декартів добуток $X \times Y$ містить 6 впорядкованих пар. Це пари $X \times Y = \{$(Стеценко, старший менеджер), (Стеценко, менеджер), (Чуйко, старший менеджер), (Чуйко, менеджер), (Козак, старший менеджер), (Козак, менеджер)$\}$. Розглянемо бінарне відношення $A \subset X \times Y$, де $A = \{$(Чуйко, старший менеджер), (Стеценко, менеджер), (Козак, менеджер)$\}$. Це відношення встановлює відповідність прізвищ осіб посадам, які вони займають у філії фірми, тобто є відношенням „займати посаду”.

Приклад 3. Надано дві множини $X = \{2, 3\}$, $Y = \{3, 4, 5, 6\}$.

Нехай A – відношення «бути дільником» від X до Y. Тоді $A = \{(2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6)\}$. Відношення B – « = » від X до Y: $B = \{(3, 3)\}$; відношення C – «>» від X до Y: $C = \varnothing$. $D_0(A) = \{2, 3\} = X$, $D_3(A) = \{3, 4, 6\} \subset Y$, $D_0(B) = \{3\}$, $D_3(B) = \{3\}$, $D_0(C) = \varnothing$, $D_3(C) = \varnothing$.

Приклад 4. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$. Відношення $A = \{(x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_2, y_4), (x_3, y_3), (x_3, y_4), (x_4, y_4), (x_5, y_2), (x_5, y_3), (x_5, y_4)\}$.

Випишемо перерізи за всіма елементами множини X у такому вигляді:

Таблиця 3.1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\{y_1\}$	$\{y_1, y_2, y_4\}$	$\{y_3, y_4\}$	y_4	$\{y_2, y_3, y_4\}$

Об'єднання множин другого рядка утворять фактор-множину Y / A.

Приклад 5. Для наведеного у попередньому прикладі відношення матриця має такий вигляд:

Таблиця 3.2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
y_1	1	1	0	0	0
y_2	0	1	0	0	1
y_3	0	0	1	0	1
y_4	0	1	1	1	1

Розглянемо матриці для окремих випадків відношень в X. Матриця повного відношення – це квадратна матриця, що складається лише з одиниць; матриця тотожного (діагонального) відношення – це квадратна матриця, яка складається з нулів та одиниць на головній діагоналі; матриця порожнього відношення – це квадратна матриця, що складається лише з нулів.

Бінарне відношення можна також зображати за допомогою орієнтованого графа. Його вершини відповідають елементам множин X та Y, а дуга, спрямована від вершини x_i до y_j, означає, що співвідношення $x_i\, A\, y_j$ виконується.

Приклад 6. Граф відношення, наведеного у прикладі 3.5, має вигляд, показаний на рис.3.

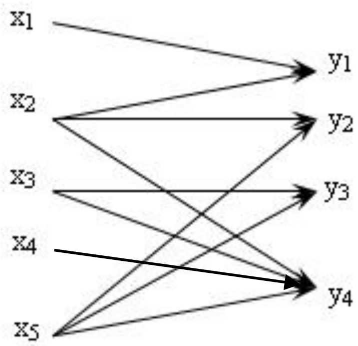


Рис.3

Граф бінарного відношення від X до Y – це дводольний граф. Дводольний граф – це такий граф, множина вершин якого розбита на дві підмножини (долі) таким чином, що ребра з'єднують тільки вершини різних долей (рис.3). Відношення в X зображується графом із вершинами, що відповідають елементам цієї множини. Якщо $x_i\, A\, x_i$ й $x_i\, A\, x_j$, то вершини зв'язуються двома протилежно спрямованими дугами, які умовно можна замінювати однією неспрямованою дугою (ребром). Співвідношенню $x_i\, A\, x_j$ відповідає петля.

Приклад 7. Бінарне відношення

$A = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_1, x_5), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_3, x_4), (x_4, x_4), (x_4, x_5)\}$

подається графом, зображеним на рис.3.4.

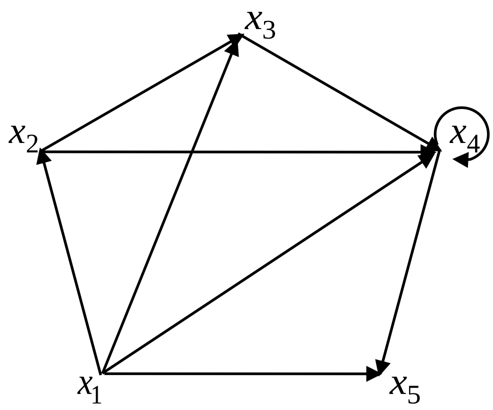


Рис.4

Граф повного відношення $P = X \times X$, де $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, показано на рис.5; граф діагонального відношення – на рис.6, а граф порожнього відношення – на рис.7.

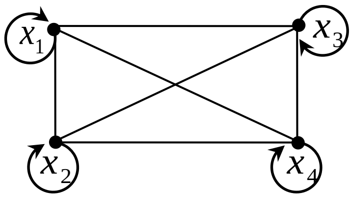


Рис.5

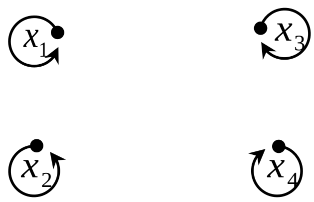


Рис.6

Рис.7

Приклад 8. Нехай відношення «бути матір'ю дочки» визначене на деякій множині жінок $Q_1 = \{$(Оксана, Наталя), (Олена, Надія), (Олена, Ольга), (Катерина, Галина)$\}$. Відношення Q_2 «бути матір'ю сина» задано парами Q2 = {(Оксана, Олег), (Олена, Андрій), (Катерина, Сергій)}.

Відношення $R_1 = Q_1 \cup Q_2$ є відношенням «бути матір'ю», пари цього відношення визначають всіх матерів, які мають дочок або синів.

Відношення $R_2 = Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$, тобто не є змістовним.

Відношення $R_3 = Q_1 - Q_2 = Q_1$, $R_4 = Q_2 - Q_1 = Q_2$.

Відношення $R_5 = Q_1 \oplus Q_2 = Q_1 \cup Q_2$.

Приклад 9. Розглянемо композицію відношення A з прикладу 4, а саме $A = \{(x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_2, y_4), (x_3, y_3), (x_3, y_4), (x_4, y_4), (x_5, y_2), (x_5, y_3), (x_5, y_4)\}$ з відношенням $\mathrm{B} = \{(\mathrm{y}_1, \mathrm{z}_2), (\mathrm{y}_2, \mathrm{z}_1), (\mathrm{y}_2, \mathrm{z}_2), (\mathrm{y}_3, \mathrm{z}_3), (\mathrm{y}_4, \mathrm{z}_3)\}$. Це $C = A \mathrm{o} B =$ $= \{(x_1, z_2), (x_1, z_3), (x_2, z_2), (x_2, z_3), (x_3, z_1), (x_3, z_2), (x_3, z_3), (x_4, z_5), (x_5, z_1), (x_5, z_2),$ $(x_5, z_3)\}$. Візьмемо переріз відношення C за x_3: $C(x_3) = \{z_1, z_2, z_3\}$. З іншого боку, маємо $B(A(x_3)) = B(\{y_1, y_2, y_3\}) = \{z_2\} \cup \{z_1, z_2\} \cup \{z_3\} = \{z_1, z_2, z_3\}$.

<u>Приклад 10</u>. Розглянемо композицію відношення Q_1, з прикладу 8 яке діє з множини $X_1 = \{$Оксана, Олена, Катерина$\}$ в множину $X_2 = \{$(Наталя, Надія, Ольга, Галина)$\}$ з відношенням «бути матір'ю дочки» $Q_3 = \{$(Наталя, Зоряна), (Наталя, Сніжана), (Надія, Юлія), (Ольга, Богдана), (Ольга, Світлана), (Галина, Олена)$\}$, яке діє з множини X_2 в множину $X_3 = \{$(Зоряна, Сніжана, Юлія, Богдана, Світлана, Алла)$\}$. Це відношення $C_1 = Q_3 \mathrm{o} Q_1 = \{$(Оксана, Зоряна), (Оксана, Сніжана), (Олена, Юлія), (Олена, Богдана), (Олена, Світлана), (Катерина, Алла)$\}$, яке є відношенням «бути бабусею онучки» і діє з множини X_1 в множину X_3.

<u>Приклад 11</u>. Розглянемо композицію відношення Q_1 з відношенням «бути матір'ю сина» $Q_4 = \{$(Надія, Олексій), (Галина, Богдан)$\}$, яке діє з множини X_2 в множину $X_4 = \{$Олексій, Богдан$\}$. Це відношення $C_2 = Q_4 \mathrm{o} Q_1 = \{$(Олена, Олексій), (Катерина, Богдан)$\}$, яке є відношенням «бути бабусею онука». Візьмемо перерізи відношення C_1 за всіма елементами множини X_1:

C_1 (Оксана) = $\{$Зоряна, Сніжана$\}$ – перелічені онучки Оксани;

C_2 (Олена) = $\{$Юлія, Богдана$\}$ – онучки Олени;

C_3 (Катерина) = $\{$Алла$\}$ – онучка Катерини.

Фактор-множина X_3 / C_1 – це множина $\{$Зоряна, Сніжана, Юлія, Богдана, Алла$\}$ – множина онучок всіх жінок з множини X_1.

Візьмемо перерізи відношення C_2 за всіма елементами множини X_1:

C_2 (Оксана) = $\{$Олексій$\}$;

C_2 (Олена) = $\{$Богдан$\}$;

C_2 (Катерина) = $\varnothing$.

Фактор-множина X_3 / C_2 – це множина $\{$Олексій, Богдан$\}$ – множина онуків всіх жінок з множини X_1.

Щодо властивостей композиції можна зазначити таке:

1. $B\mathrm{o}A \neq A\mathrm{o}B$, тобто не виконується закон комутативності;
2. $D\mathrm{o}(B\mathrm{o}A) = (D\mathrm{o}B)\mathrm{oA} = \mathrm{DoBoA}$, тобто виконується закон асоціативності;
3. $(B\mathrm{o}A)^{-1} = A^{-1}\mathrm{o}\, B^{-1}$.

Перші дві властивості очевидні, третю проілюструємо на наведеному прикладі відношень Q_1 і Q_3.

<u>Приклад 12</u>. Відношення $(Q_1 \mathrm{o} Q_3)^{-1} = C_1^{-1} = \{$(Зоряна, Оксана), (Сніжана, Оксана), (Юлія, Олена), (Богдана, Олена), (Світлана, Олена), (Алла, Катерина)$\}$, яке є відношенням «бути онучкою бабусі» діє з множини X_3 в множину X_1.

Відношення Q_1^{-1} ми вже знаходили. Це $Q_1^{-1} = \{$(Наталя, Оксана), (Надія, Олена), (Ольга, Олена), (Галина, Катерина)$\}$ і воно діє з множини X_2 в множину X_1

Знайдемо обернене відношення до Q_3.

$Q_3^{-1} = \{$(Зоряна, Наталя), (Сніжана, Наталя), (Юлія, Надія), (Богдана, Ольга), (Світлана, Ольга), (Алла, Галина)$\}$ і це відношення діє з множини X_3 в множину X_2.

Знайдемо композицію відношень $Q_3^{-1} \circ Q_1^{-1} = \{$(Зоряна, Оксана), (Сніжана, Оксана), (Юлія, Олена), (Богдана, Олена), (Світлана, Олена), (Алла, Катерина)$\}$. Як ви бачите, відношення $(Q_1 \circ Q_3)^{-1}$ і відношення $Q_3^{-1} \circ Q_1^{-1}$ збігаються.

<u>Приклад 13</u>. Проілюструємо за допомогою графів рівність
$(Q_3 \circ Q_1)^{-1} = Q_3^{-1} \circ Q_1^{-1}$.

Для цього спочатку побудуємо графи відношень Q_1 і Q_3 (рис.13). Виходячи з цих графів, побудуємо граф композиції $C_1 = Q_3 \circ Q_1$ (рис.14). Побудуємо граф оберненого відношення $C_1^{-1} = (Q_3 \circ Q_1)^{-1}$ (рис.15). Потім побудуємо графи відношень Q_1^{-1} і Q_3^{-1} (рис.16). Нарешті побудуємо граф композиції $Q_3^{-1} \circ Q_1^{-1}$ (рис.14).

Очевидно, що графи на рис. 15 і 17 збігаються.

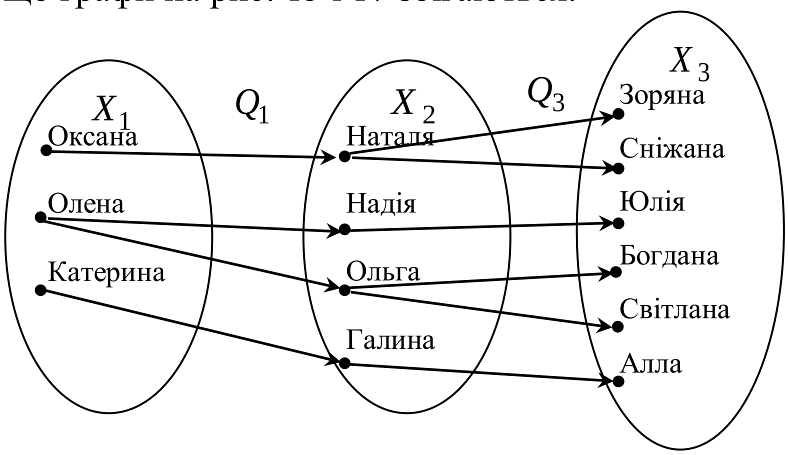


Рис.13

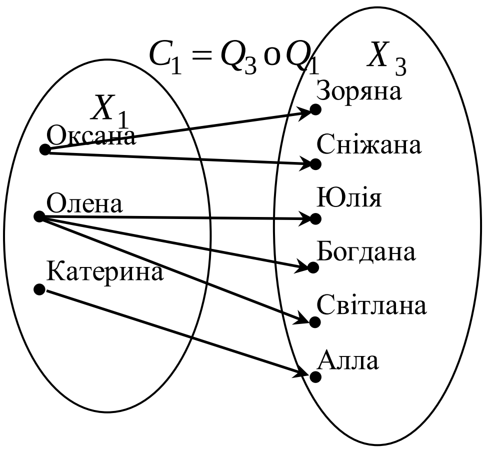


Рис.14

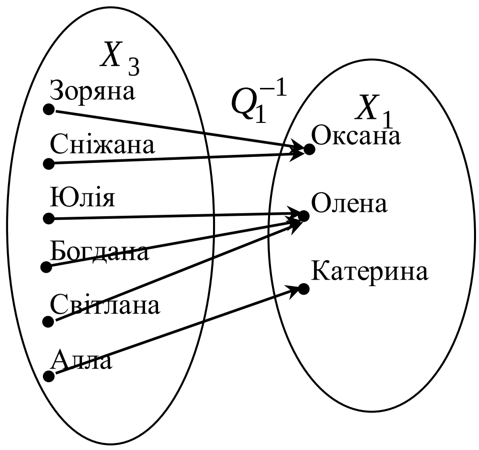


Рис.15

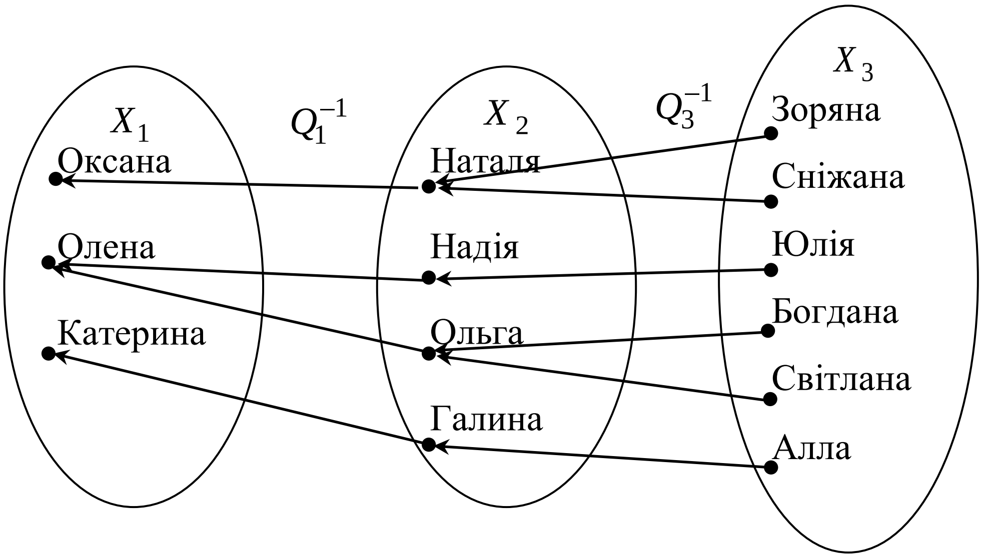


Рис.16

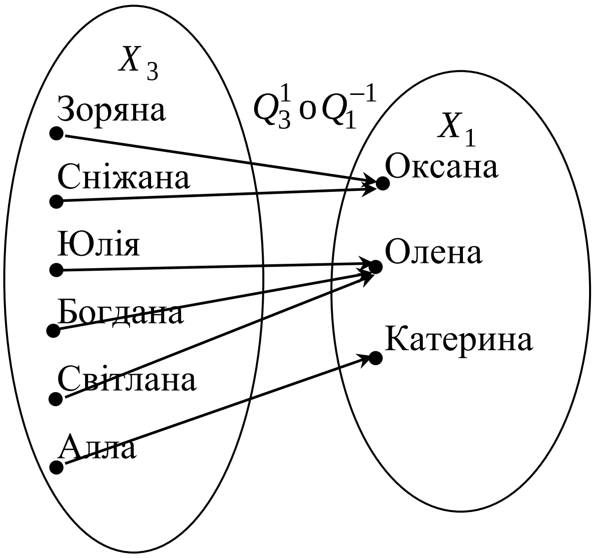


Рис.17

Приклад 14. Знайдемо матрицю композиції відношень A та B із прикладу 14:

$A=$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	0	1	0	0
x_2	0	0	0	0	0
x_3	0	1	0	0	0
x_4	0	0	1	0	1
x_5	0	0	0	0	0

;

$B=$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	0	0	0	0
x_2	1	0	0	0	0
x_3	1	0	0	0	0
x_4	0	0	0	0	0
x_5	0	0	1	0	0

;

$B \times A=$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	0	0	0	0
x_2	0	0	0	0	0
x_3	1	0	0	0	0
x_4	1	0	1	0	0
x_5	0	0	0	0	0

.

Приклад 15. Як приклади тримісного (тернарного) відношення можна навести всі арифметичні операції над числами (в них виділяється перший операнд, другий операнд і результат операції). Так, арифметична операція додавання D, що задана, наприклад, в множині дійсних чисел R, це тримісне відношення $D \subset R \times R \times R$. $D = \{(d_1, d_2, d_3)\}$, де d_1 – перший доданок, d_2 – другий доданок, d_3 – сума.

Ще один приклад тримісного відношення можна навести, використовуючи вже відомі з прикладу 2 множину прізвищ співробітників філії деякої фірми $X = \{$Стеценко, Чуйко, Козак, множину $Y = \{$старший менеджер, менеджер$\}$, а також множину $Z = \{1000, 800\}$, яка є множиною посадових окладів. Тоді тримісне відношення $A \subset X \times Y \times Z$, $A = \{$(Стеценко, старший менеджер, 1000), (Чуйко, менеджер, 1000), (Козак, менеджер, 1000),$\}$ є відношенням, яке надає кожному співробітнику посаду і відповідний посадовий оклад.

Як ще один приклад тримісного (тернарного) відношення можна навести відношення, яке задає зв'язок між батьками і дітьми. Таке відношення є множиною трійок $\{(a, b, c)\}$, де a – ім'я матері, b – ім'я батька, c – ім'я дитини.

Пропорція $\frac{x}{y} = \frac{z}{u}$ ілюструє чотиримісне відношення P, де $P = \{(x, y, z, u)\}$.

Багатомісні відношення (у такому числі і бінарні) мають безпосередній зв'язок з реляційними базами даних, що базуються на основі реляційної алгебри, яка є алгеброю відношень (relation-відношення). Реляційні бази даних ще називають табличними, тому що багатомісні відношення дуже зручно представити у табличному вигляді. Наприклад, відношення A з прикладу 17 можна задати таблицею

Таблиця 3.3

№ п/п	Прізвище	Посада	Посадовий оклад
1	Стеценко І.О.	старший менеджер	1000
2	Чуйко Г.П.	менеджер	800
3	Козак С.Б.	менеджер	800

ТЕМА 3. Відображення

<u>Приклад 1</u>. Дійсно, якщо $f = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$, що діє з множини X у множину Y, є функціональним відношенням, то й обернене (симетричне) $f^{-1} = \{(y_1, x_1), (y_2, x_2), (y_3, x_3)\}$, що діє з множини Y у множину X, є функціональним.

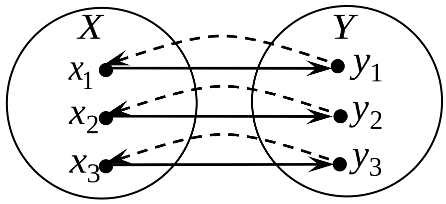


Рис.3.33

На рис.3.33 функціональне відношення f показано суцільною лінією, а обернене f^{-1} – переривчастою.

Розглянемо ще одне функціональне відношення $g = \{(y_1, z_2), (y_2, z_1), (y_3, z_3)\}$, що діє з множини Y у множину Z. Візьмемо композицію відношень f і g:

$g \circ f = \{(x_1, z_2), (x_2, z_1), (x_3, z_3)\}$, що теж є функціональним. Графічне зображення наведено на рис.3.34.

$g \circ f$

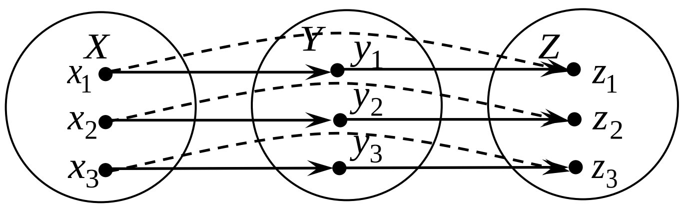


Рис.3.34

Композицію до f наведено переривчастою лінією.

<u>Приклад 2</u>. У функції $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + 7x_3$ перейменування x_3 в x_2 приводить до функції $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + 7x_3 = f_2(x_1, x_2) = x_1 + 9x_2$. Перейменування x_1 та x_3 в x_2 приводить до одномісної функції $f_3(x_2) = 10x_2$ [1].

<u>Приклад 3.</u> Англо-російський словник установлює відповідність між множиною англійських та російських слів. Ця відповідність не є функціональною (оскільки одному англійському слову, як правило, ставляться у відповідність кілька російських слів); крім того, вона практично ніколи не є повністю визначеною: завжди можна знайти англійське слово, що міститься в цьому словнику [1].

Приклад 4. Різні види кодування (кодування літер Морзе, подання чисел у різних системах числення, секретні шифри, вхідні й вихідні номери в діловій переписці тощо) є відповідністю між об'єктами, що кодуються, і кодами, що присвоюються їм. Ця відповідність, як правило, має всі властивості взаємно однозначної відповідності, крім, може бути, однієї – сюр'єктивності. Єдність образу та прообразу в кодуванні гарантує однозначність шифрування і дешифрування . Відсутність сюр'єктивності означає, що не кожний код має значення, тобто відповідає якому-небудь об'єкту. Наприклад, кодування телефонів м. Києва семизначними номерами не є сюр'єктивним , оскільки деякі семизначні номери не відповідають жодним телефонам. Для кодувальної функції оберненою буде декодувальна функція, яка кожному коду ставить у відповідність закодований ним об'єкт. Якщо кодувальна функція не є сюр'єктивною , то декодувальна функція не всюди є визначеною [1].

Приклад 5. Функція $\sin x$ має тип $R \to R$. Відрізок $[-\pi/2, \pi/2]$ вона взаємно однозначно відображає на відрізок [-1,1]. Тому на відрізку [-1,1] для неї існує обернена функція $\arcsin x$.

Приклад 6. Наведемо приклади відношень еквівалентності.

1. «Проживати в одному будинку», де X – множина людей.
2. «Вчитися в одній групі», де X – множина студентів факультету.
3. «Подібність трикутників», де X – множина всіх трикутників на площині.
4. «Паралельність прямих», де X – множина всіх прямих на площині.

Називатимемо класом еквівалентності елемента a множину всіх елементів множини X , які еквівалентні елементу $a : [a]_{\sim} = \{x \in X \mid a \sim x\}$.

Приклад 7. Нехай задана множина X студентів факультету. Можна задати такі бінарні відношення в цій множині:

1. A – «вчитися на одній спеціальності»;
2. B – «вчитися в одній групі»;
3. C – «бути однієї статі».

Очевидно, що всі три відношення A, B і C рефлексивні, симетричні і транзитивні, тобто всі вони є відношеннями еквівалентності. Це означає, що всі вони замінюють своє розбиття множин X на класи еквівалентності. Для відношення A класами еквівалентності є множини студентів, які вчаться за однією спеціальністю (наприклад, на факультеті 4 спеціальності), для відношення B – множини студентів, які вчаться в одній групі (наприклад, на факультеті 8 груп), для відношення C – два класи еквівалентності – множини студентів жіночої та чоловічої статі. Відповідні типи розбиття приведені на рис.3.36.

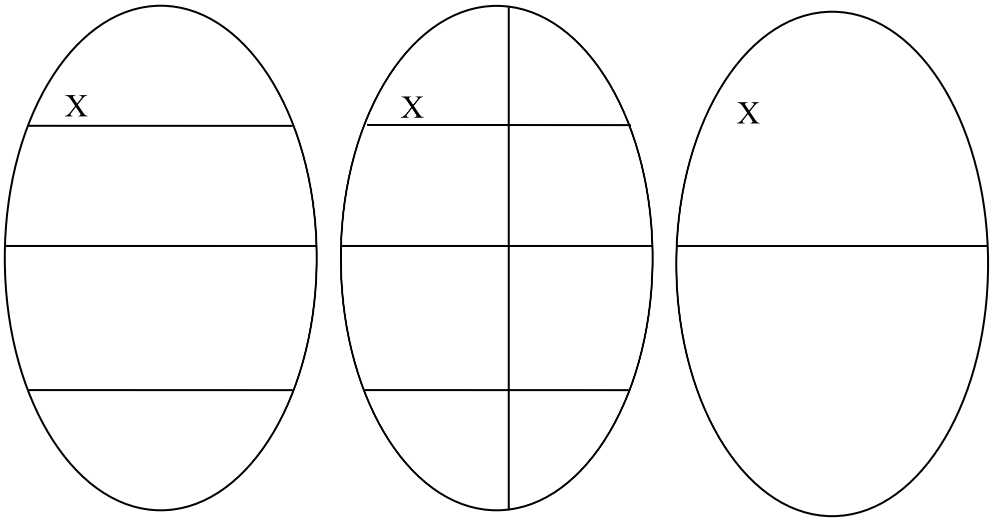


Рис. 3.36

Таким чином, доведено, що класи еквівалентності утворюють розбиття множини X. Залишилось довести єдиність такого розбиття. Припустимо супротивне: розбиття не єдине. Нехай за заданим відношенням еквівалентності існують два різних розбиття R_1 й R_2 ($R_1 \neq R_2$). Це означає, що є така точка $x \in X$, яка належить деякому класу розбиття $[y_1]_\sim$ в R_1 та $[y_2]_\sim$ в R_2 ($[y_1]_\sim \neq [y_2]_\sim$). Оскільки $x \in [y_1]_\sim$ маємо $y_1 \sim x$, а оскільки $x \in [y_2]_\sim$, дістаємо $y_2 \sim x$. Внаслідок симетричності й транзитивності відношення еквівалентності $y_1 \sim y_2$; за твердженням 3.2 це означає, що $[y_1]_\sim = [y_2]_\sim$, а це суперечить умові $[y_1]_\sim \neq [y_2]_\sim$. Одержана суперечність доводить єдиність розбиття.

<u>Приклад 8</u>. Загальновідомо, що у будь-якій фірмі (організації) існує керівництво фірми і існують підлеглі, тобто є розбиття множини X співробітників фірми на дві підмножини: X_1 – множина керівників фірми і множина X_2 підлеглих. спробуємо відшукати відношення, яке спричиняє це розбиття. Це відношення A – „входити в склад керівництва”.

<u>Приклад 9</u>. Відношення «проживати в одному будинку» на множині жителів міста, очевидно, є відношенням еквівалентності й розбиває цю множину на неперерізні підмножини людей, які є сусідами в будинку.

<u>Приклад 10</u>. Розглянемо відношення рівності за $\operatorname{mod} m$ на множині цілих чисел Z. Говорять, що x дорівнює y за $\operatorname{mod} m (0 \leq y < m)$, якщо $(x - y)$ ділиться на m без залишку. Записують це так: $x = y(\operatorname{mod} m)$. Усі цілі числа, які дорівнюють y за $\operatorname{mod} m$, утворюють підмножину цілих чисел, що мають однаковий залишок y при поділі на m. Очевидно, такі підмножини є класами еквівалентності, а як представника кожної з них природно вибрати залишок $y = 0, 1, 2, ..., m-1$. Таким чином, відношення рівності за $\operatorname{mod} m$ означає розбиття множини цілих чисел на m класів $Z_0, Z_1, Z_2, ..., Z_{m-1}$, де $Z_j = \{j, j+m, j+2m, ...\}$ – множина, яка називається класом лишків за $\operatorname{mod} m$.

Наприклад, при $m=4$ маємо $M_0=\{0,4,8,12,...\}$, $M_1=\{1,5,9,13,17,...\}$, $M_2=\{2,6,10,14,...\}$, $M_3=\{3,7,11,15,...\}$.

<u>Приклад 11</u>. Для відношення еквівалентності, заданого класами еквівалентності

$$X_1=\{x_1,x_2,x_4\};\ X_2=\{x_3,x_8\};\ X_3=\{x_5,x_6,x_7,x_9,x_{10}\},$$

матриця матиме такий вигляд (табл.3.4):

Таблиця 3.4

	x_1	x_2	x_4	x_3	x_8	x_5	x_6	x_7	x_9	x_{10}
x_1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
x_2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
x_4	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
x_3	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
x_8	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
x_5	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
x_6	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
x_7	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
x_9	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
x_{10}	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1

Граф відношення еквівалентності також має характерний вигляд. Це граф, кожна компонента з'єднання якого, що відповідає класу еквівалентності, є повним графом із петлями на кожній вершині.

Для цього прикладу граф має вигляд, зображений на рис.3.37.

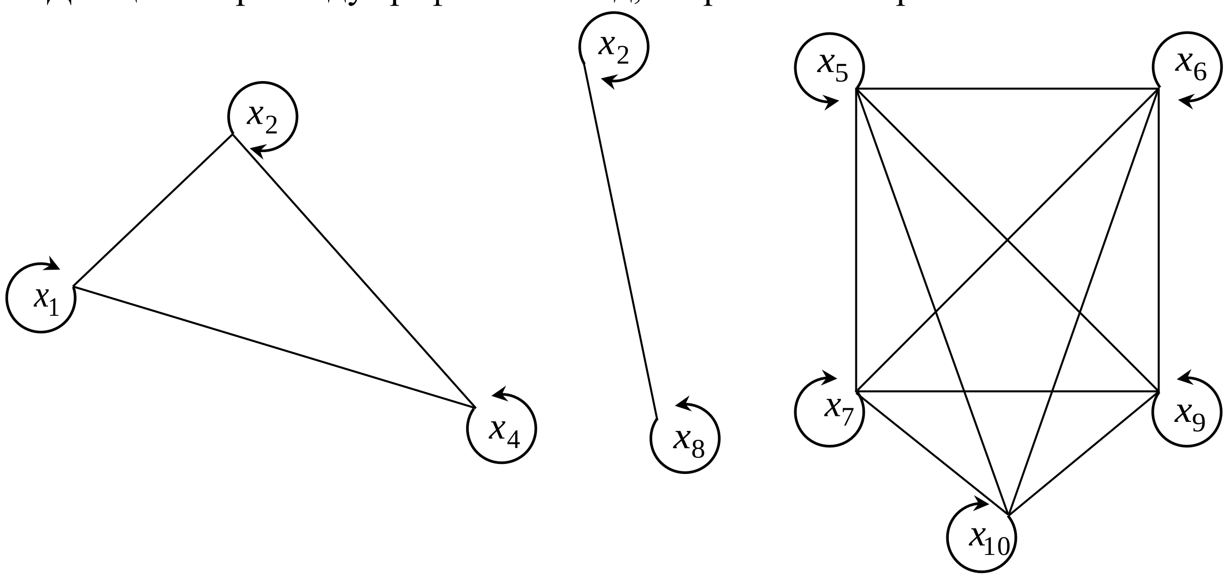


Рис.3.37

<u>Приклад 12</u>. Як приклад відношення строгого порядку можна навести відношення

1) «$>$» або «$<$» у множинах N, Z чи R;
2) відношення «бути молодшим» або «бути старшим» у множині людей;
3) бути прямим «предком» в множині людей.

Якщо виконується співвідношення $x\rho y$ ($x\sigma y$), то кажуть, що елемент x передує y, а y іде за x (y передує x, а x іде за y).

Приклад 13. Розглянемо множину дійсних чисел R і відношенням порядку «$\leq$» (або «$\geq$», «<», «>»). Зрозуміло, що два будь-яких дійсних числа зрівнянні (виконується $a \leq b$ або $b \leq a$). Тому множина R з відношенням нестрогого порядку «$\leq$» («$\geq$») є абсолютно впорядкованою.

Може виявитися, що для деяких пар (x, y) жодне зі співвідношень $x\sigma y$ або $y\sigma x$ ($x\rho y$ або $y\rho x$) не виконується. Такі елементи x й y називаються *незрівнянними*. У цьому випадку кажуть, що множина є частково впорядкованою.

Приклад 14. Розглянемо відношення включення множин на множині всіх підмножин деякого універсумі U. Оскільки для нього виконуються властивості:

1) рефлексивності , тому що $\forall x(X \subset X)$;

2) антисиметричності $(X \subset Y \wedge Y \subset X \Rightarrow X = Y)$ (за теоремою рівності множин);

3) транзитивності $(X \subset Y \wedge Y \subset Z \Rightarrow X \subset Z)$, за теоремою о транзитивності вимочення множин, відношення включення множин є відношенням нестрогого порядку і U є впорядкованою множиною.

Проте очевидно, що серед усіляких підмножин U знайдуться такі множини X й Y, що ні $X \subset Y$, ні $Y \subset X$ не виконуються. Наприклад, закреслені підмножини, які наведені на рис.3.38. Отже, $P(U)$ з відношенням нестрогого порядку «$\subset$ » є частково впорядкованою множиною.

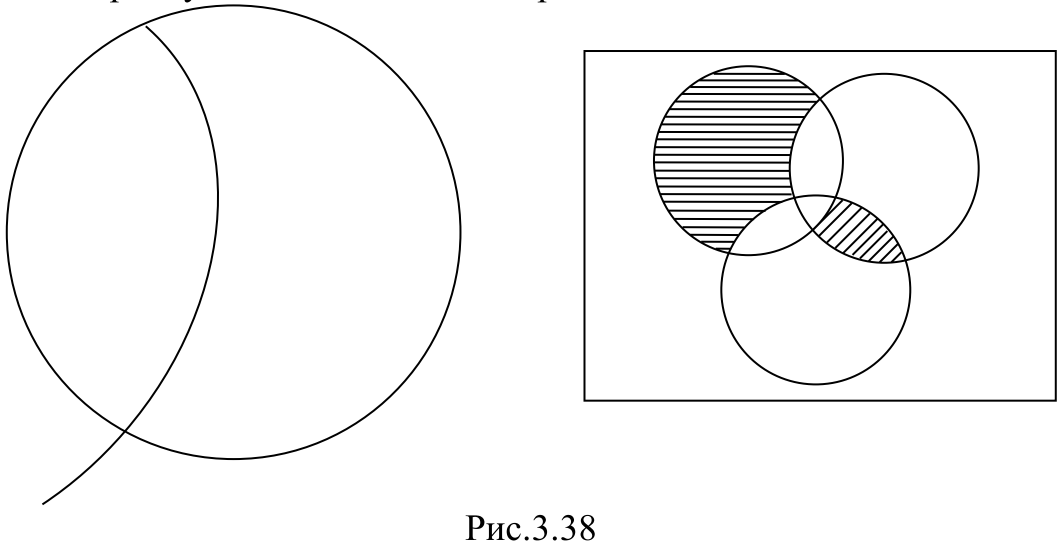


Рис.3.38

Приклад 15. Розглянемо відношення A=«бути керівником» в множині X робітників деякої організації. Оскільки для нього виконуються властивості:

1) асиметричність (якщо x «є керівником» y, то навпаки не виконується)

2) транзитивність (якщо x «є керівником» y), а y «є керівником» z, то x «є керівником» z.

Отже, A є відношенням строгого порядку.

Але це відношення не виконується для співробітників двох різних відділів організації, ці робітники незрівнянні. Тобто відношення «бути керівником» задає строге впорядкування множин співробітників деякої організації.

__Приклад 16__. Як ілюстрацію відношення лінійного порядку можна навести також відношення старшинства на множині офіцерських звань: лейтенант, старший лейтенант, капітан, майор, підполковник, полковник, генерал, маршал. Очевидно, що на заданій множині виконується відношення «бути молодшим за званням», яке описується співвідношенням «x є молодшим за званням, ніж y». Отже, оскільки побудоване відношення є транзитивним і симетричним, це відношення строгого порядку. Крім того, воно виконується для будь-яких елементів множини, які розглядаються. Отже, цей порядок є лінійним [3].

__Приклад 17__. Прикладом абсолютно впорядкованої множини з відношенням строгого порядку, заданим ваговою функцією, може бути множина елементів періодичної системи Менделєєва.

__Приклад 18__. Для порівняння комплексних чисел $z = a + bi$ не підходять звичні відношення порядку $(<, \leq, >, \geq)$. Однак можна ввести квазіпорядок A за правилом $\mathrm{z_k \, A \, z_n}$, якщо $\mathrm{a_k = a_n}$.

При цьому різні комплексні числа з однаковими дійсними частинами об'єднуються в класи еквівалентності, множина яких може бути впорядкована за їхніми представниками.

__Приклад 19__. Як приклад наведемо відомий приклад з підручника [3]. Для відношення нестрогого порядку A=«бути дільником» на множині $X = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84\}$ й $X = \{1, 2, 3, 4\}$ матриці мають такий вигляд [1]:

$$A \subset X \times Y = \begin{array}{c|cccccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 12 & 14 & 21 & 28 & 42 & 84 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 21 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} ;$$

28	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0
42	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0
84	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

$$A \subset X \times Y = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}.$$

Приклад 20. Для відношення строгого порядку «>» на множині $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ матриця має вигляд:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

Приклад 21. Як приклад для побудови графа відношення нестрогого порядку розглянемо відношення з прикладу 3.37. На рис.3.40 зображено його граф редукції з петлями.

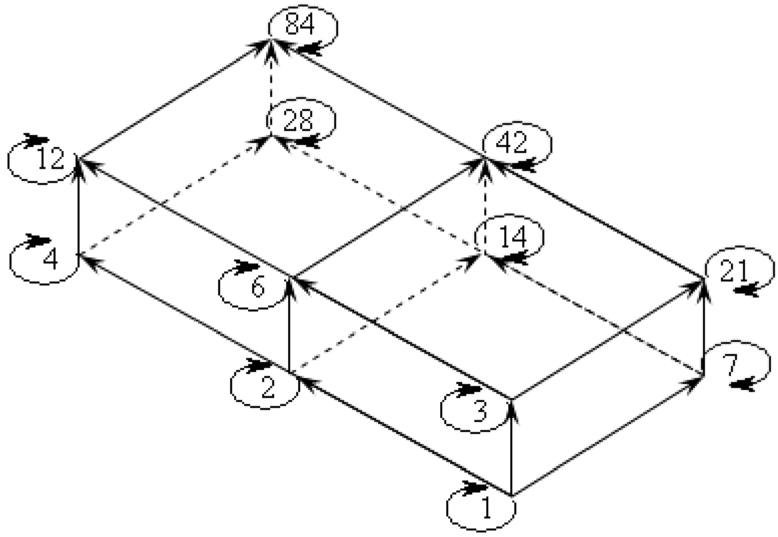


Рис.3.40

Приклад 22. Для побудови графа строгого порядку скористаємося матрицею з прикладу 3.38. Граф відношення строгого порядку «>» на множині $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ має вигляд, показаний на рис.3.41,а. Його граф редукції зображено на рис.3.41,б.

Рис.3.41

Приклад 23. Розглянемо ще раз відношення нестрогого порядку A з прикладу 3.37, граф якого показано на рис.3.40. Нехай $X_1 = \{4, 6, 14, 28, 42\}$ – підмножина множини X. Тоді множина мажорант – $\{84\}$, множина мінорант – $\{1, 2\}$. Мінімального й максимального елементів у множині X_1 немає; тому $\sup(X_1) = 84$, а $\inf(X_1) = 2$.

Для $X_1 = X$ множина мажорант – $\{84\}$, множина мінорант – $\{1\}$, $\max(X) = 84$, $\min(X) = 1$, $\sup(X) = 84$ $\sup(X) = 84$, $\inf(X) = 1$.

Приклад 24. приклад відношення толерантності можна навести відношення «відстань між двома точками не перевищує деякого заданого числа a». Це означає, що толерантними є будь-які дві точки, відстань між якими не перевищує a (очевидно, що це – відношення толерантності).

Приклад 25. Між чотирилітерними словами можна встановити відношення толерантності, якщо вони різняться не більш як однією літерою. Як розважальний приклад у цьому випадку можна навести такий ланцюжок толерантних російських слів із підручника:

муха $\to$ мура $\to$ тура $\to$ тара $\to$ кара $\to$ каре $\to$ кафе $\to$ кафр $\to$ каюр $\to$ каюк $\to$ крюк $\to$ крок $\to$ срок $\to$ сток $\to$ стон $\to$ слон.

ТЕМА 4. Алгебра висловлень

Приклад 1. Чи є наведений вираз простим висловленням? Якщо вираз є висловленням, то вказати, яким саме – істинним чи хибним.

(а) Число 48 є парним.
(б) У цьому абзаці сім слів.
(в) Нехай нам щастить!
(г) Париж – столиця Нідерландів.
(д) Існує нескінченно багато натуральних чисел.
(е) Чи можна поділити 17 на 5 без остачі?
(є) Не розмовляйте під час лекції.
(ж) Сьогодні йде дощ.
(з) Перевірте правильність розв'язку.
(и) Рівність $5 + 7 = 12$ істинна.
(і) Рівність $10 < 4$ істинна.
(ї) Це висловлення є істинним.

У наведених прикладах висловленнями є лише ті речення, зміст яких можна однозначно оцінити як істинний або хибний факт. Істинними є твердження: (а); (д); (и). Хибними є висловлення: (б); (г); (і). Речення (ж) може бути істинним або хибним залежно від обставин, але все ж є висловленням.

Речення, які є наказами, побажаннями або запитаннями ((в), (є), (з)), не відносять до висловлень, оскільки вони не мають істиннісного значення. Вислів (ї) становить логічний парадокс, у якому неможливо встановити істинність без суперечності, тому він також не є висловленням у логічному сенсі.

Зазвичай конкретні елементарні висловлення позначають малими латинськими літерами: a, b, c, … (інколи з індексами), а значення висловлень істинно та хибно – відповідно символами 1 та 0 (або **І** та **Х**, а в англомовній літературі – відповідно **T** і **F**).

Крім того, розглядатимемо **змінні висловлення**, які позначатимемо латинськими літерами x, y, z, … (інколи з індексами) і називатимемо також **пропозиційними** змінними. Після підстановки замість пропозиційної змінної певного елементарного висловлення ця змінна набуде відповідного значення (1 або 0).

Приклад 2. Висловлення *Якщо число 30 кратне 2 і 5, то число 30 кратне 10* має таку логічну структуру: $(a \wedge b) \to c$. Тут пропозиційній змінній *a* відповідає елементарне висловлення *Число 30 кратне 2*, змінній b – висловлення *Число 24 кратне 5*, а змінній c – висловлення *Число 30 кратне 10.*

Приклад 3. Нехай задано елементарні висловлення:

a) 10 – парне число; b) 10 – додатне число;
c) 10 – просте число; d) Число 10 кратне 4.

Сформулювати словами складене висловлення, визначити його істинність чи хибність для таких формул:

(а) $(b \to \neg a) \vee c$; (б) $(\neg a \wedge \neg c) \to d$.

Формула (а) задає складене висловлення *Якщо 10 – додатне число, то 10 – не парне число, або 10 – просте число*. Що є хибним, адже йому відповідає логічний вираз **0 ∨ 0**, який має значення **0**.

Формулі (б) відповідатиме складене висловлення *Якщо 10 – не парне число і 10 – не просте (складене) число, то число 10 кратне 4*, що є істинним, адже **0** → **0** є істинним логічним виразом.

У математичній мові імплікацію $p \to q$ трактують так: твердження p є достатньою умовою для q, а твердження q – необхідною умовою для твердження p. Вираз $p \to q$ інтерпретують ще як q тоді, коли p або p тільки тоді, коли q. В імплікації $p \to q$ операнд p називають **антецедентом**, або засновком, а q – **консеквентом**, або висновком.

Приклад 4. Записати словами у вигляді твердження задане висловлення різними способами, використовуючи вирази: *необхідна умова; достатня умова; тоді, коли; тільки тоді, коли*.

(а) (24 кратне 6) → (24 кратне 3).

Для пункту (а) такими твердженнями будуть:

– висловлення 24 кратне 3 є необхідною умовою для висловлення 24 кратне 6;

– висловлення 24 кратне 6 є достатньою умовою для висловлення 24 кратне 3;

– 24 кратне 3 тоді, коли 24 кратне 6;

– 24 кратне 6 тільки тоді, коли 24 кратне 3.

Задачі для самостійного опрацювання:

1. *Прості висловлення*

1. Які з наведених виразів є висловленнями? Якщо вираз є висловленням, то вказати, яким саме – істинним чи хибним.

1) 15 кратне 3, але не кратне 4.

2) Кожне дійсне число задовольняє нерівність $x^2 \geq 0$.

3) Число 168 кратне 9.

4) Чи існує дійсне число, більше за 3 і менше від $\log_2 9$?

5) Ця задача легка.

6) Існує найбільше просте число.

7) Рівняння $x^2 + 7x + 1 = 0$ має хоч один дійсний корінь.

8) Розв’язати рівняння $x^2 + 7x + 1 = 0$.

9) Кожне парне число, більше за 2, є сумою двох простих чисел.

10) Чи правильна велика теорема Ферма?

11) Розкрийте підручник на сторінці 23.

12) Вчитель сказав: «Розкрийте підручник на сторінці 23».

13) Всі дійсні числа задовольняють нерівність $x^2 \leq 9$.

14) 1 є просте число.

15) Хай живе математика!

16) Якщо $3 < 2$, то $3^2 < 2^2$.

17) На дошці написано лише одне речення: «Те, що написано на дошці,- неправда». Чи є це речення висловленням?

2. ***Операції алгебри висловлень. Складені висловлення***

Символи операцій алгебри висловлень перекладаються на звичайну мову такими виразами:

$\wedge$ – *і*; *а*; *але*; *хоч*; *незважаючи на ...*;

$\vee$ – *або*; *чи*; *хоч одне з ...*;

$\neg$ – *не*; *неправильно, що ...*;

$\rightarrow$ – *якщо ..., то ...*; *... імплікує ...*; *з ... слідує ...*;

$\leftrightarrow$ – *... тоді і тільки тоді, коли ...*; *... якщо і тільки якщо...*; *... еквівалентне ... .*

Примітка. *Слово «або» як назва символу «$\vee$» вживається в нероздільному смислі — «хоч одне», «або перше, або друге, або обидва разом». У звичайній мові «або» вживається і в роздільному смислі – «рівно одне з двох», а також коли пов'язуються між собою два синоніми.*

2. Визначити істинність чи хибність складених висловлень, вважаючи відомими значення істинності простих висловлень, з яких вони складаються:

1) 171 кратне 11, але не кратне 7.

2) $-2>-3$ і $-1/2>-1/3$.

3) $-2>-3$, але $(-2)^2<(-3)^2$.

4) $5\geq5$.

5) $2\leq3$.

6) Якщо $\pi<3$, то $\pi^2<3^2$.

7) 96 кратне 24 тоді і тільки тоді, коли 96 кратне 8 і 96 кратне 3.

8) 96 кратне 48 тоді і тільки тоді, коли 96 кратне 8 і 96 кратне 6.

9) 72 кратне 48 тоді і тільки тоді, коли 72 кратне 8 і 72 кратне 6.

10) 198 кратне 11 і 18 і не кратне 7.

11) Неправильно, що хоч одне з чисел 21, 51, 91 є простим.

3. Записати логічну структуру складених висловлень та оцінити їхню істинність:

1) Якщо $7 > 6$, то $7 \geq 6$.

2) 2) Якщо числова послідовність є обмеженою, але не є збіжною, то вона не є монотонною.

3) Задане число кратне 10001 тоді і тільки тоді, коли воно кратне 73 і 137.

4) Якщо 4-кутник не є ромбом, то його діагоналі не взаємно перпендикулярні.

5) Число *n* кратне 48 тільки тоді, коли *n.* кратне 6 і кратне 8.

6) Неправильно, що задане число не кратне 15 тоді і тільки тоді, коли воно не кратне 5 і не кратне 3.

7) 2385 кратне 117 тоді і тільки тоді, коли 2385 кратне 13 і кратне 9, але 2385 не кратне 117 тоді і тільки тоді, коли 2385 не кратне 13 або не кратне 9.

8) Незважаючи на те що прогноз погоди на сьогодні був «без опадів», випав сильний дощ.

9) Якщо m і n – дійсні числа, то неправильно, що з того, що не справджується нерівність $m > n$, випливає, що $m < n$.

4. Чи правильне твердження: «Якщо логічні структури двох складних висловлень співпадають, то вони мають одні й ті самі значення істинності»? В разі позитивної відповіді – доведіть, а в разі негативної – спростуйте це твердження контрприкладом.

ТЕМА 5. Числення висловлень

Приклад 1.

Визначити, чи є послідовність символів формулою алгебри висловлень.

(а) $(((x \to y) \land z) \sim ((\neg x) \to (y \lor z)))$.

Для цього за допомогою індексів спочатку занумеруємо по рядок виконання операцій у першій послідовності символів (у багатьох випадках ця процедура виконується неоднозначно).

Матимемо такий вираз: $(((x \to_1 y) \land_2 z) \sim_6 ((\neg\ 3x) \to 5\ (y \lor_4 z)))$ (зручно відповідний номер записувати над операцією).

Подамо його у вигляді

$$(F_1 \sim_6 F_2),\text{ де } F_1 = ((x \to_1 y) \land_2 z) \text{ і } F_2 = ((\neg\ 3x) \to_5 (y \lor_4 z)).$$

У свою чергу, формула F1 має вигляд (F11 ∧2 F12) і розкладається на підформули $F_{11} = (x \to_1 y)$ і $F_{12} = z$, а формула F_2 має вигляд $(F_{21} \to_5 F_{22})$ і розкладається на підформули $F_{21} = (\neg\ 3x)$ і $F_{22} = (y \lor_4 z)$.

Вираз F_{12} є формулою згідно з п. 1) в означенні пропозиційної формули. А кожна з решти підформул F_{11}, F_{21} та F_{22} утворюється відповідно до п. 2) цього означення:

$$F_{11} = (F_{111} \to_1 F_{112}),$$

де $F_{111} = x$ і $F_{112} = y$,

$$F_{21} = (\neg_3 F_{211}),$$

де $F_{211} = x$ і, нарешті,

$$F_{22} = (F_{221} \lor_4 F_{222}),$$

де $F_{221} = y$ та $F_{222} = z$.

Отже, ми продемонстрували, що ця формула побудована із пропозиційних змінних

$$F_{12} = z,\ F_{111} = x,\ F_{112} = y,\ F_{211} = x,\ F_{221} = y,\ F_{222} = z$$

за викладеними вище правилами. При спробі аналогічно розкласти другу послідовність символів на певному кроці отримаємо вираз (F1 ~ F2, який не має закриваючої дужки. Отже, ця послідовність не є пропозиційною формулою.

Нехай $\mathbf{p_1, p_2, \ldots, p_n}$ – це всі пропозиційні змінні, що входять до формули А; позначатимемо цей факт $\mathbf{A(p_1, p_2, \ldots, p_n)}$. Формулі $\mathbf{A(p_1, p_2, \ldots, p_n)}$ поставимо у відповідність функцію $\mathbf{f\ (p_1, p_2, \ldots, p_n)}$, що означена на множині впорядкованих наборів $\mathbf{(p_1, p_2, \ldots, p_n)}$, де кожне $\mathbf{p_i}$ набуває значення у множині $\mathbf{B = \{0, 1\}}$, і значенням функції **f** є **0** або **1**. Значення функції f на наборі значень $a_1, a_2, \ldots, a_n$ її змінних $p_1, p_2, \ldots, p_n$ дорівнює значенню формули $A(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ при підстановці до неї замість пропозиційних змінних $p_1, p_2, \ldots, p_n$ значень $a_1, a_2, \ldots, a_n$, відповідно. Зауважимо, що **кількість елементів в області визначення функції f** дорівнює $\mathbf{2^n}$.

Функцію f називають **функцією істинності** для формули А або відповідного складеного висловлення. Для функції істинності f можна побудувати таблицю істинності (табл. 2.3). Традиційно набори значень змінних розташовують у цій таблиці в лексикографічному порядку.

Таблиця 2.3

$p_1\, p_2 \ldots p_{n-1}\, p_n$	$f(p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n)$
0 0 ... 0 0	$f(\mathbf{0, 0, \ldots, 0, 0})$
0 0 ... 0 1	$f(\mathbf{0, 0, \ldots, 0, 1})$
0 0 ... 1 0	$f(\mathbf{0, 0, \ldots, 1, 0})$
0 0 ... 1 1	$f(\mathbf{0, 0, \ldots, 1, 1})$
....	....
1 1 ... 1 0	$f(\mathbf{1, 1, \ldots, 1, 0})$
1 1 ... 1 1	$f(\mathbf{1, 1, \ldots, 1, 1})$

Приклад 2. Побудувати таблицю істинності для формули:

$$(((a \to_4 (\neg_1 b)) \to_7 (b \wedge_6 ((\neg_2 c) \to_5 a))) \sim_8 (\neg_3 a))$$

У першому рядку кожного стовпця останньої таблиці записано вираз (підформулу) і номер відповідної операції.

Наприклад, запис (a→(1)) (4) означає, що результатом операції із номером 4 є імплікація значення пропозиційної змінної *a* та результату операції з номером 1, а запис ((4)→(6)) (7) означає, що результатом операції з номером 7 є імплікація значення операції із номером 4 і результату операції із номером 6 тощо.

$a\ b\ c$	$(\neg b)$ (1)	$(\neg c)$ (2)	$(\neg a)$ (3)	$(a \to (1))$ (4)	$((2) \to a)$ (5)	$(b \wedge (5))$ (6)	$((4) \to (6))$ (7)	$((7) \sim (3))$ (8)
0 0 0	1	1	1	1	0	0	0	0
0 0 1	1	0	1	1	1	0	0	0
0 1 0	0	1	1	1	0	0	0	0
0 1 1	0	0	1	1	1	1	1	1
1 0 0	1	1	0	1	1	0	0	1
1 0 1	1	0	0	1	1	0	0	1
1 1 0	0	1	0	0	1	1	1	0
1 1 1	0	0	0	0	1	1	1	0

Формулу алгебри висловлень **A(p_1, p_2, …, p_n)** називають **тавтологією**, коли їй відповідає функція істинності, що тотожно дорівнює 1. Те, що формула A є тавтологією, позначають як $\models$ A.

Тавтології ще називають **тотожно істинними формулами**, або **законами алгебри висловлень**.

Наведемо приклади деяких важливих тавтологій:

$(p \vee (\neg p))$ – закон виключення третього;

$(\neg (p \wedge (\neg p)))$ – закон виключення суперечності;

$(p \to p)$ – закон тотожності.

Переконатись у тому, що ці формули є тавтологіями, можна за допомогою відповідних таблиць істинності.

Іноді перевірку того, що певна формула є тавтологією, виконують за допомогою **способу відшукання контрприкладу** (або методу від супротивного). Пояснимо його на прикладі.

Приклад 3. Перевірити, чи є тавтологією формула

$$A = (((a \rightarrow \neg b) \wedge (b \rightarrow (a \wedge c))) \wedge (\neg c \rightarrow \neg a)) \rightarrow (a \vee \neg c).$$

Припустимо, що формула A не є тавтологією. Тоді принаймні на одному наборі значень формула A набуває значення **0**. Спробуємо відшукати цей набір. Оскільки останньою (головною) операцією формули A є імплікація, то її консеквент має дорівнювати нулю, а антецедент – одиниці. Консеквент $(a \vee \neg c)$ дорівнює нулю, коли $a = \mathbf{0}$ та $c = \mathbf{1}$. Звідси $(a \rightarrow \neg b) = \mathbf{1}$ та $(\neg c \rightarrow \neg a) = \mathbf{1}$. Залишилось з'ясувати, чи може за цих умов вираз $(b \rightarrow (a \wedge c))$ дорівнювати одиниці. Відповідь позитивна (для $b = \mathbf{0}$). Отже, ми знайшли набір **(0, 0, 1)**, на якому формула A на буває значення 0, тобто відшукали контрприклад, який свідчить, що формула A не є тавтологією.

Приклад 4. Проаналізувати структуру формули

$$(a \rightarrow (b \rightarrow (((\neg b) \wedge a) \rightarrow (c \vee (a \wedge (\neg c)))))).$$

Головною буде перша імплікація (позначаємо головну операцію зірочкою *). Маємо такий запис:

$$(a \rightarrow^{*} (b \rightarrow (((\neg b) \wedge a) \rightarrow (c \vee (a \wedge (\neg c)))))).$$

Далі аналізуємо підформули.

Підформули a та $(b \rightarrow (((\neg b) \wedge a) \rightarrow (c \vee (a \wedge (\neg c)))))$ задають перший і другий аргументи цієї операції.

Для другої підформули головною буде перша імплікація, тобто

$$(b \rightarrow^{*} (((\neg b) \wedge a) \rightarrow (c \vee (a \wedge (\neg c))))).$$

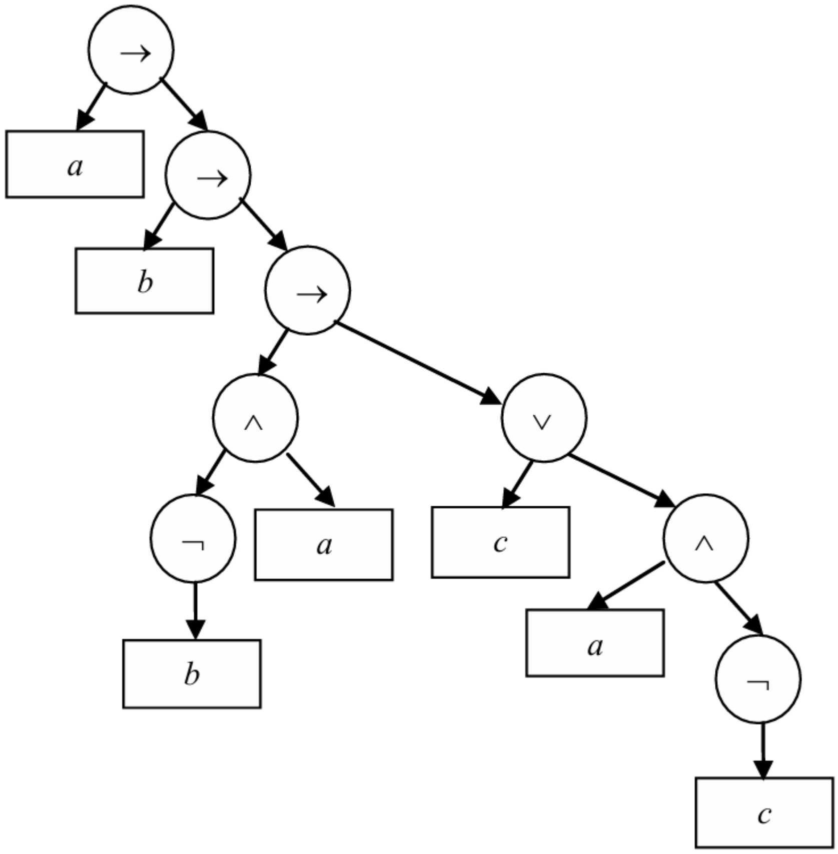
Далі, у підформулі $(((\neg b) \wedge a) \rightarrow (c \vee (a \wedge (\neg c))))$ головною є імплікація, тому отримуємо $(((\neg b) \wedge a) \rightarrow^{*} (c \vee (a \wedge (\neg c))))$.

Аргументами є підформули $((\neg b) \wedge a)$ та $(c \vee (a \wedge (\neg c)))$.

Подаємо першу підформулу у вигляді

$((\neg b) \wedge^{*} a)$, а другу – $(c \vee^{*} (a \wedge (\neg c)))$.

Продовжуючи таким чином, підійдемо до найпростіших підформул a, b, c. Структуру формули часто подають **деревом синтаксичного аналізу формули**. У ньому дужки не вказують. Для проаналізованої формули дерево синтаксичного аналізу має вигляд:



Наведене дерево дає наочне уявлення про порядок виконання операцій, оскільки спочатку виконуються операції, записані внизу дерева, а потім ті, які йдуть вище.

Приклад 5. Побудувати ДДНФ логічної функції, таблицю істинності якої отримано вище.

Ця функція набуває значення 1 на наборах (0,1,1), (1,0,0) і (1,0,1), тому її ДДНФ – це

$$x^0y^1z^1 \lor x^1y^0z^0 \lor x^1y^0z^1 \text{ або } (\neg x\ y\ z) \lor (x\ \neg y\ \neg z) \lor (x\neg\ y\ z).$$

2. Побудувати ДДНФ логічної функції *f(x, y, z)* від трьох змін них, яка набуває такого самого значення, як і більшість її змін них (функція голосування).

Функція голосування є істинною на наборах (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0) та (1,1,1), тому її ДДНФ – $(\neg x\ y\ z) \lor (x\ \neg y\ z) \lor (x\ y\neg\ z) \lor (x\ y\ z)$.

Алгоритм побудови ДДНФ для логічних функцій від двох, чотирьох, п'яти та більшої кількості змінних аналогічний.

Досконала кон'юнктивна нормальна форма (ДКНФ).

За допомогою тих самих операцій кон'юнкції, диз'юнкції і заперечення можна побудувати іншу формулу, що реалізує певну логічну функцію.

Нехай $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), \ldots, (a_k, b_k, c_k)$ – це всі набори значень змінних, для яких логічна функція f(x, y, z) хибна (набуває значення 0). Тоді формула

$$(x^{\neg a_1} \vee y^{\neg b_1} \vee z^{\neg c_1}) \wedge (x^{\neg a_2} \vee y^{\neg b_2} \vee z^{\neg c_2}) \vee \ldots \vee (x^{\neg a} y^{\neg b_k} z^{\neg c_k}) \qquad (1.2)$$

реалізує функцію *f*.

Аналогічно вищенаведеним міркуванням можна обґрунтувати, що для будь-якого набору (a_i, b_i, c_i), $i = 1, 2, \ldots, k$ значенням формули (1.2) буде 0, а для будь-якого іншого набору, що не увійшов до цього списку, (1.2) дорівнюватиме 1. Пропонуємо переконатись у цьому самостійно.

Формулу (1.2) називають **досконалою кон'юнктивною нормальною формою (ДКНФ)** відповідної логічної функції *f(x, y, z)*.

Приклад 6. Побудувати ДКНФ для логічної функції *f(x, y, z)* із прикладу вище.

Ця функція набуває значення 0 на наборах (0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,1,0) і (1,1,1), тому її ДКНФ має вигляд

$$(x^{\neg 0} \vee y^{\neg 0} \vee z^{\neg 0}) \wedge (x^{\neg 0} \vee y^{\neg 0} \vee z^{\neg 1}) \wedge (x^{\neg 0} \vee y^{\neg 1} \vee z^{\neg 0}) \wedge$$
$$\wedge (x^{\neg 1} \vee y^{\neg 1} \vee z^{\neg 0}) \wedge (x^{\neg 1} \vee y^{\neg 1} \vee z^{\neg 1}) \text{ або}$$
$$(x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \neg z) \wedge (x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg z).$$

Завдання для самостійного опрацювання:

1. ***Правила утворення і перетворення***

1. Нехай є $2n$ дужок (n лівих і n правих) і вони розташовані лінійно зліва направо. Дві пари дужок $(_i)$ і $(_j)$ розділяють одна одну тоді і тільки тоді, коли вони зустрічаються в такому порядку: $(_i(_j)_i)_j$. Взаємно-однозначна відповідність між n лівими і n правими дужками називається *власним спарюванням*, якщо кожній лівій дужці ставиться у відповідність деяка права дужка, яка знаходиться правіше, причому жодні дві пари спарених дужок не розділяють одна одну. Доведіть, що при всякому власному спарюванні $2n$ дужок (n=1,2,...) є хоч одна пара дужок, між якими немає інших. (Застосувати метод зворотної індукції по n).

2. Доведіть, що кожна множина із $2n$ дужок (n лівих і n правих) допускає не більш ніж одне власне спарювання. (Застосувати метод індукції по n).

3. Провести розбиття дужок на пари (власне спарювання) і вказати область дії кожного оператора у формулах:

1) $((A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to (B \wedge C))))$;

2) $((((\neg A) \to (B \vee C)) \wedge ((\neg C \to D)) \to (((A \wedge (\neg B)) \wedge (C \vee (\neg D)))))$.

4. Відновити всі дужки в скорочених записах формул і вказати область дії кожного оператора:

1) $A \vee B \to ((A \to C) \wedge (B \to C) \to C)$;

2) $(\neg A\to B)\wedge(\neg B\to C)\to(A\to C))$;

3) $(A\wedge B\vee C\neg D\to\neg C\wedge D)\to(C\vee\neg D\to(\neg A\vee\neg B)\wedge\neg C\wedge D)$.

5. Записати без дужок формули числення висловлень:

1) $A\to(B\to C)$;

2) $(\neg A\vee B)\wedge(C\to\neg B)$;

3) $(A\to C)\to((B\to C)\to(A\vee B\to C))$

4) $(B\to C)\vee((A\vee\neg B\to C)\to(A\wedge B\to C))$.

6. Перевірити за індуктивним означенням, що ці вирази є формулами числення висловлень:

1) $(((\neg A)\to B)\vee((\neg B)\wedge C))$;

2) $(((A\wedge(\neg B))\vee C)\vee(A\to B))$

7. Чи є формулами числення висловлень запропоновані вирази? Відповідь обґрунтувати за означенням формули:

1) $((A\vee((\neg B)\to C))\to(\neg A))$;

2) $((A\wedge B)\vee(C\wedge D)\to(A\wedge C))$;

3) $(A\to C)\leftrightarrow((\neg C)\to(\neg A)))$;

4) $(((A\wedge B)\wedge C)\to((B\vee C)\vee(\neg D)))$.

8. Виразити складні (одночасні) підстановки через послідовність простих підстановок (які дозволяються правилом підстановки):

1) складну підстановку $A\to B$ замість A і A замість B в аксіому $(A\to(B\to A))$;

2) складну підстановку $B\to C$ замість A, $A\to B$ замість B, B замість C в аксіому $(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$;

3) складну підстановку $(A\to(B\to C))$ замість A, $(B\to C)\to A$ замість B в аксіому $(A\to B)\to(\neg B\to\neg A)$;

4) складну підстановку $A\vee B$ замість A, $A\to B$ замість B, $A\to\neg B$ замість C в аксіому $(A\to B)\to((A\to C)\to(A\to B\wedge C))$.

9. Перевірити, чи правильно виконано підстановку в прикладах (результат підстановки в 1. записано як 2.; підстановка вказана в дужках).

1) 1. $A\to(B\to A)$ 2. $(B\to A)\to(B\to(B\to A))$: $S_A^{B\to A}1$;

2) 1. $A\to(B\to A)$ 2. $(B\to A)\to(B\to A)$: $S_A^{B\to A}1$;

3) 1. $(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C)$ 2. $(A\to C)\to((A\to B)\to(A\to C))$: $S_C^{B\to C}1$;

4) 1. $(A\to B)\to(\neg B\to\neg A)$ 2. $(A\to B)\to(\neg B\to(B\to A))$: $S_{\neg A}^{B\to A}1$.

У випадку неправильного виконання підстановки вказати, в чому саме полягає помилка.

10. Знайти значення істинності формули:

(а) $(a \sim b) \wedge ((\neg c \to b) \vee (\neg a \wedge c) \vee (a \wedge \neg b))$ при $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$;

(б) $((b \to a) \wedge (\neg c \vee (a \sim \neg b))) \to (a \wedge (d \vee \neg b))$ при $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 1$;

(в) $\neg a \wedge (a \sim c) \wedge (\neg b \vee (\neg c \to a))$ при $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$.

11. Знайти значення істинності складеного висловлення:

(а) Якщо ми успішно складемо іспити (a), то поїдемо відпочивати до моря (b), і ми або успішно складемо іспити, або здійснимо турпохід у Карпати (c) тоді й тільки тоді, коли погода буде хорошою (d). Значення істинності елементарних висловлень такі: $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 1$.

(б) Якщо ми успішно виконаємо домашнє завдання з математичної логіки (a), то ми отримаємо заліковий бал (b) або візьмемо участь у науковому семінарі (c), водночас якщо ми візьмемо участь у науковому семінарі й отримаємо заліковий бал, то достроково складемо іспит з математичної логіки (d). Значення істинності елементарних висловлень: $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 1$.

12. Скласти таблицю істинності для формули алгебри висловлень:

(а) $(a \to \neg (b \wedge c)) \to (c \to \neg a)$;

(б) $((\neg a \vee b) \sim (a \wedge \neg c)) \vee (a \to b)$;

(в) $((a \to b) \sim (b \to \neg c)) \to (c \wedge a)$;

(г) $(a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c))$;

(д) $((a \wedge b) \vee (b \wedge c)) \leftrightarrow \neg (a \sim c)$.

13. Способом відшукання контрприкладу встановити, що наведена формула алгебри висловлень є тавтологією:

(а) $((a \to b) \wedge (c \to d)) \to ((a \vee c) \to (b \vee d))$;

(б) $(a \to (b \to c)) \to ((d \to b) \to (a \to (d \to c)))$;

(в) $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c))$;

(г) $(a \to b) \to ((a \to c) \to (a \to (b \wedge c)))$.

14. Розставити дужки у формулах:

(а) $a \wedge b \to c \to (a \to c \wedge (b \to c))$;

(б) $a \wedge c \vee b \wedge d \to (a \vee b) \wedge c \vee d$;

(в) $a \wedge b \vee c \wedge d \to a \vee b \wedge c \vee d$;

(г) $(a \sim b) \to (c \sim d) \to a \vee c \sim b \vee d$;

(д) $a \to b \wedge a \wedge b \sim (a \to b) \wedge a$;

(е) $\neg a \vee b \wedge \neg b \vee c \wedge a \to \neg c$.

15. Скласти ДДНФ та ДКНФ для таблиць істинності (а), (б), (в), (г) із завдання 1.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ 1

В-1.

Знайдіть $A\bigcap B, A\bigcup B, A\setminus B, A\Delta B, \overline{A}, \overline{B}\ A\bigcup\overline{B}, \overline{A}\bigcap\overline{B}, \overline{A\bigcup\overline{B}}, \overline{A}\bigcup\overline{B}, \overline{\overline{A}\bigcup B}, A\times B.$

1) $A=\left\{x \mid x\in R, -\frac{1}{4}<x\le\frac{8}{3}\right\}\ B=\left\{x \mid x\in R, 1{,}3\le x<7\right\}.$

2) $A=\left[-3\frac{1}{2};5\right)\ B=\left(-2;3\frac{1}{2}\right].$

3) $A=\left\{x \mid x\in R, |x|<5\right\}\ B=\left\{x \mid x\in R, |x|\ge 2\right\}.$

Побудувати множину точок, задовольняють наступним співвідношенням:

4) $\begin{cases} 2x-y-2\le 0 \\ -x-y+2\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2+y-9<0 \\ x^2-5x-y+6\le 0 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x+3y+6\ge 0 \\ x+3y-9\le 0 \\ x-4\le 0 \\ x+y+1\ge 0 \end{cases}$

7) $\begin{cases} xy-4<0 \\ x+4\ge 0 \\ y+3\ge 0 \end{cases}$ 8) $\frac{x}{y}>3$ 9) $3|x|+|y|<5$ 10) $\left[\begin{array}{l} x^2+y^2\le 4 \\ \begin{cases} x>y \\ x<-y \end{cases} \end{array}\right.$

11) $\left[\begin{array}{l} 2x+3y>2 \\ x-y<4 \end{array}\right.$ 12) $x^2+y^2\le 2\left(|x|+|y|\right)$ 13) $\begin{cases} y\ge\sqrt{1-x^2} \\ y+|x|\le 4 \end{cases}$

Утворити всі підмножини даної множини:

14) $A=\left\{m,\{3\},\varnothing\right\}$

Знайти декартовий добуток $A\times B$ та $B\times A$:

15) $A=\left(-2;5\right],\ B=\left\{-1;2;4\right\}.$

B-2.

Знайдіть $A\bigcap B, A\bigcup B, A\setminus B, A\Delta B, \overline{A}, \overline{B}\ A\bigcup\overline{B}, \overline{A}\bigcap\overline{B}, \overline{A\bigcup\overline{B}}, \overline{A}\bigcup\overline{B}, \overline{\overline{A}\bigcup B}, A\times B.$

1) $A=\left\{x \mid x\in R, -2\frac{2}{3}<x\le 6\right\}$ $B=\left\{x \mid x\in R, -4{,}5\le x<3\right\}$.

2) $A=\left[2{,}1;5\right]$ $B=\left(-3{,}2;\infty\right)$.

3) $A=\left\{x \mid x\in R, \left|x\right|>6\right\}$ $B=\left\{x \mid x\in R, \left|x\right|\le 8\right\}$.

Побудувати множину точок, задовольняють наступним співвідношенням:

4) $\begin{cases} 3x+2y-1\le 0 \\ x+1\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2+y^2-4\le 0 \\ 2x-y+5>0 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x+2y+2\ge 0 \\ x+2y-4\le 0 \\ x-2\le 0 \\ 3x+y+1\ge 0 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2-5x+4<0 \\ x^2+5x+4\ge 0 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} xy-4\le 0 \\ x+2\ge 0 \\ y+4\ge 0 \end{cases}$ 9) $\left|xy\right|<3$ 10) $\left[\begin{array}{l} 2y-x^2<0 \\ x^2-y^2\ge 0 \end{array}\right.$

11) $\frac{y}{x}>5$ 12) $3\left|x+y\right|+2\left|x-y\right|<2$ 13) $3\left|x\right|+\left|y\right|<5$

Утворити всі підмножини даної множини:

14) $A=\left\{9,\left\{9\right\},\varnothing\right\}$.

Знайти декартовий добуток $A\times B$ та $B\times A$:

15) $A=\left\{7,8\right\}$, $B=\left\{-1;2;4\right\}$.

B-3.

Знайдіть $A\bigcap B, A\bigcup B, A\setminus B, A\Delta B, \overline{A}, \overline{B}\ A\bigcup\overline{B}, \overline{A}\bigcap\overline{B}, \overline{A\bigcup\overline{\overline{B}}}, \overline{A}\bigcup\overline{B}, \overline{\overline{A}\bigcup B}, A\times B.$

1) $A=\left\{x\mid x\in R, -2\frac{1}{3}\le x<\frac{7}{4}\right\}\ B=\left\{x\mid x\in R, -\frac{1}{3}<x\le 4\right\}.$

2) $A=\left[-\frac{3}{4};\frac{9}{4}\right]\ B=\left(-\frac{1}{4};\frac{7}{4}\right).$

3) $A=\left(-\infty;5,2\right]\ B=\left(-7;\infty\right).$

Побудувати множину точок, задовольняють наступним співвідношенням:

4) $\begin{cases} x-y+1>0 \\ x+y-3\le 0 \\ x+3y+1\ge 0 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2+y^2\le 9 \\ |x|\le 2 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} y\ge x^2-4x+3 \\ y-x-2<0 \end{cases}$

7) $\begin{cases} xy-3\le 0 \\ x+3>0 \\ y+4>0 \end{cases}$ 8) $x^2-x<y-xy$ 9) $|xy|\ge 4$ 10) $|x+y|>2x-4$

11) $|x|+x=|y|+y$ 12) $\left[\begin{array}{l} 5x+4y>4 \\ 2x-3y<5 \end{array}\right.$ 13) $\begin{cases} |x+y|+|x-y|\le 4 \\ |x|\le 1 \\ y\ge\sqrt{x^2-2x+1} \end{cases}$

Утворити всі підмножини даної множини:

14) $A=\left\{a,\{a\},\varnothing\right\}.$

Знайти декартовий добуток $A\times B$ та $B\times A$:

15) $A=\left\{1,2,3,4\right\},\ B=\left\{a;b;c\right\}.$

B-4.

Знайдіть $A\bigcap B, A\bigcup B, A\setminus B, A\Delta B, \overline{A}, \overline{B}$ $A\bigcup\overline{B}, \overline{A}\bigcap\overline{B}, \overline{A\bigcup\overline{\overline{B}}}, \overline{A}\bigcup\overline{B}, \overline{\overline{A}\bigcup B}, A\times B.$

1) $A=\left\{x \mid x\in R, -3\frac{2}{3}<x\le 7\right\}$ $B=\left\{x \mid x\in R, -4\frac{1}{3}\le x<2\right\}.$

2) $A=\left(-\frac{1}{2};3\right]$ $B=\left[\frac{1}{4};2\frac{1}{2}\right).$

3). $A=\left\{x \mid x\in R, |x|<3\right\}$ $B=\left\{x \mid x\in R, |x|\ge 5\right\}.$

Побудувати множину точок, задовольняють наступним співвідношенням:

4) $\begin{cases} x-2y+4>0 \\ 3x+y-9\le 0 \\ x+4y\ge 0 \\ x\ge 0 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2+y^2\le 9 \\ |x|\ge 1 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} xy+6<0 \\ -x+2y-9\le 0 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2+y-2\le 0 \\ x^2-2x-y-3\le 0 \end{cases}$ 8) $|xy|<8$ 9) $\left[\begin{array}{l} 5x+4y>3 \\ 2x-y<3 \end{array}\right.$ 10) $|x+y|>3x-2$

11) $|x|+|y|<7$ 12) $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3x-y>2 \\ 3x-y<-2 \end{array}\right. \\ 2y-x<4 \\ 2y-x>-4 \\ -2<y<2 \end{cases}$ 13) $\left|\frac{x+2y}{x+3y}\right|<2$

Утворити всі підмножини даної множини:

14) $A=\left\{m,\{2\},\Delta\right\}.$

Знайти декартовий добуток $A\times B$ та $B\times A$:

15) $A=\left\{a,b,c,d\right\}$, $B=\left\{9;10\right\}.$

В-5.

Знайдіть $\mathrm{A}\bigcap \mathrm{B}, \mathrm{A}\bigcup \mathrm{B}, A\setminus B, A\Delta B, \overline{A}, \overline{B}\ A\bigcup \overline{B}, \overline{A}\bigcap \overline{B}, \overline{A\bigcup \overline{\overline{B}}}, \overline{A}\bigcup \overline{B}, \overline{\overline{A}\bigcup B}, A\times B.$

1) $A=\left\{x \mid x\in R, -1\frac{1}{2}<x\le 6\right\}\ B=\left\{x \mid x\in R, -3{,}5\le x<4\right\}$.

2) $A=\left[-1\frac{1}{5};5\right)\ B=\left(-\frac{1}{2};4\frac{1}{3}\right]$.

3). $A=\left\{x \mid x\in R, \left|x\right|\le 2\right\}\ B=\left\{x \mid x\in R, \left|x\right|>3\right\}$.

Побудувати множину точок, задовольняють наступним співвідношенням:

4) $\begin{cases} x-y+2\ge 0 \\ 3x-y-4\le 0 \\ x+1\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2+y^2-4\le 0 \\ y-x^2+2<0 \\ x\ge 0 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} xy-5<0 \\ x+2y-4\le 0 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2+y<0 \\ 2x^2+y-1\le 0 \end{cases}$ 8) $\left|xy\right|<1$ 9) $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x+y>1 \\ x+y<-1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x-y>1 \\ x-y<-1 \end{array}\right. \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x^2+y^2\le 9 \\ x+y>0 \\ x-2y<0 \end{cases}$

11) $\left|x+y\right|<x-y+1$ 12) $\left|3x+y\right|<1$ 13) $\left|x^2+y^2-2\right|\le 2\left(x+y\right)$

Утворити всі підмножини даної множини:

14) $A=\left\{4,\left\{4\right\},a\right\}$.

Знайти декартовий добуток $A\times B$ та $B\times A$:

15) $A=\left\{a,b,c\right\},\ B=\left\{2;3;4\right\}$.

B-6.

Знайдіть $\mathrm{A} \bigcap \mathrm{B}, \mathrm{A} \bigcup \mathrm{B}, A \setminus B, A \Delta B, \overline{A}, \overline{B}\ A \bigcup \overline{B}, \overline{A} \bigcap \overline{B}, \overline{A \bigcup \overline{B}}, \overline{A} \bigcup \overline{B}, \overline{\overline{A} \bigcup B}, A \times B.$

1) $A = \left\{ x \mid x \in R, -\frac{1}{3} < x \le 4 \right\}\ B = \left\{ x \mid x \in R, -1\frac{2}{3} \le x < 2 \right\}.$

2) $A = \left(-\frac{1}{3}; \frac{7}{3} \right)\ B = \left[\frac{1}{2}; 1\frac{1}{4} \right].$

3). $A = \left\{ x \mid x \in R, |x| > 3 \right\}\ B = \left\{ x \mid x \in R, |x| \le 1 \right\}.$

Побудувати множину точок, задовольняють наступним співвідношенням:

4) $\begin{cases} x + 4y + 4 \ge 0 \\ x + 4y - 8 \le 0 \\ x - 3 \le 0 \\ x + y + 2 \ge 0 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 9 < 0 \\ y - x^2 + 5 \le 0 \\ x \le 0 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} xy + 6 < 0 \\ x - 2y + 8 < 0 \end{cases}$

7) $|xy| > 5$ 8) $\left[\begin{array}{l} 3x + 2y > 3 \\ x - 2y < 4 \end{array} \right.$ 9) $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < -1 \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} y > 1 \\ y < -1 \end{array} \right. \end{cases}$ 10) $|2x - y| - x < 3$

11) $\begin{cases} x^2 + y - 2 < 0 \\ x^2 - 2x - y - 3 \le 0 \end{cases}$ 12) $|y| + 2|x| \le x^2 + 1$ 13) $|x| - x = |y| - y$

Утворити всі підмножини даної множини:

14) $A = \left\{ a, \{a, b\}, \varnothing \right\}.$

Знайти декартовий добуток $A \times B$ та $B \times A$:

15) $A = \{1,2;5\}$, $B = \{-3,6;2,4\}$.

B-7.

Знайдіть $A\bigcap B, A\bigcup B, A\setminus B, A\Delta B, \overline{A}, \overline{B}$ $A\bigcup\overline{B}, \overline{A}\bigcap\overline{B}, \overline{A\bigcup\overline{B}}, \overline{A}\bigcup\overline{B}, \overline{\overline{A}\bigcup B}, A\times B.$

1) $A=\{x\mid x\in R, -4{,}5\le x\le 3\}$ $B=\left\{x\mid x\in R, -2\dfrac{2}{3}<x\le 6\right\}.$

2) $A=[-1{,}8;6)$ $B=(-1;4{,}5].$

3). $A=\{x\mid x\in R, |x|\le 4\}$ $B=\{x\mid x\in R, |x|>6\}.$

Побудувати множину точок, задовольняють наступним співвідношенням:

4) $\begin{cases} x-y+2\ge 0 \\ x-y-1\le 0 \\ y+1\ge 0 \\ y-3\le 0 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2+y^2-4\le 0 \\ y-x^2+3<0 \\ x\ge 0 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} xy+3\le 0 \\ x+4>0 \\ y+3>0 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x>0 \\ \dfrac{1}{x}\le y\le -x+\dfrac{1}{3} \end{cases}$ 8) $\left[\begin{array}{l} x^2+y^2\le 4 \\ \begin{cases} x<y \\ x>-y \end{cases} \end{array}\right.$ 9) $\left[\begin{array}{l} x+y+1>0 \\ x-y+2<0 \end{array}\right.$ 10) $|xy|<4$

11) $x^2+y^2\le 2|x|+2|y|$ 12) $|2x+y|+y>2$ 13) $|x-y|=|-y+x+1|$

Утворити всі підмножини даної множини:

14) $A=\{5,\{5\},\Delta\}.$

Знайти декартовий добуток $A\times B$ та $B\times A$:

15) $A=\{3;a;b\}$, $B=\{5;\Delta\}.$

В-8.

Знайдіть $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, A \Delta B, \overline{A}, \overline{B}\ A \cup \overline{B}, \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cup \overline{B}}, \overline{A} \cup \overline{B}, \overline{\overline{A} \cup B}, A \times B.$

1) $A = \left\{ x \mid x \in R, -1\dfrac{1}{4} < x \le 7 \right\}\ B = \left\{ x \mid x \in R, -3\dfrac{1}{2} \le x < 3 \right\}.$

2) $A = (\infty; 2,7]\ B = [-5,2; 1,5).$

3). $A = \left\{ x \mid x \in R, |x| > 7 \right\}\ B = \left\{ x \mid x \in R, |x| \le 3 \right\}.$

Побудувати множину точок, задовольняють наступним співвідношенням:

4) $\begin{cases} x + y + 1 \ge 0 \\ x + y - 3 \le 0 \\ x + 1 \ge 0 \\ x - 3 \le 0 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} y > x^2 - 5x + 6 \\ y \le x^2 + 5x + 6 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} xy - 7 < 0 \\ x + 4 \ge 0 \\ y + 5 \ge 0 \end{cases}$

7) $|xy| < 3$ 8) $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4 \\ y > x \\ y > 0 \end{cases}$ 9) $\left[\begin{array}{l} |x| > 3 \\ |x - 1| < 1 \end{array} \right.$ 10) $3|x + y| + 2|x - y| < 2$

11) $\left| \dfrac{2x - y}{2x + y} \right| > 3$ 12) $\left[\begin{array}{l} (x-1)^2 + (y+5)^2 < 4 \\ y + x + 5 > 0 \end{array} \right.$ 13) $|y| + 2|x| \le x^2 + 1.$

Утворити всі підмножини даної множини:

14) $A = \left\{ a, \{1; a\}, \Delta \right\}.$

Знайти декартовий добуток $A \times B$ та $B \times A$:

15) $A = \{m; n; p\},\ B = \{5; 6; 7\}.$

B-9.

Знайдіть $A\cap B, A\cup B, A\setminus B, A\Delta B, \overline{A}, \overline{B}$ $A\cup\overline{B}, \overline{A}\cap\overline{B}, \overline{A\cup\overline{B}}, \overline{A}\cup\overline{B}, \overline{\overline{A}\cup B}, A\times B.$

1) $A=\left\{x\mid x\in R, -3\dfrac{1}{2}<x\le 7\right\}$ $B=\left\{x\mid x\in R, 1\le x<8\dfrac{1}{3}\right\}.$

2) $A=[-4,5;\infty)$ $B=(-2,2;6,8).$

3). $A=\left\{x\mid x\in R, |x|\le 7\right\}$ $B=\left\{x\mid x\in R, |x|>9\right\}.$

Побудувати множину точок, задовольняють наступним співвідношенням:

4) $\begin{cases}3x-2y+6\ge 0\\ 3x-2y\le 0\\ 2y-9\le 0\\ x+y+2\ge 0\\ x\ge 0\end{cases}$ 5) $\begin{cases}y\le x^2-5x+6\\ y>x^2+5x+6\end{cases}$ 6) $\begin{cases}xy+4\ge 0\\ x-2y+1<0\end{cases}$

7) $|xy|>2$ 8) $\dfrac{y-1+|x-1|}{y-x^2+2x}\le 0$ 9) $\begin{cases}y-x^2+6x\ge 0\\ y+\dfrac{1}{2}x^2+3<0\end{cases}$ 10) $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-y\le 1\\ x+2y\le 2\end{cases}\\ \begin{cases}x+y<5\\ 3x+3y>6\end{cases}\end{array}\right.$

11) $\begin{cases}y-\sqrt{x+4}<0\\ y\ge 0\\ x-y-2<0\end{cases}$ 12) $|x|+|y|+|x-y|=2$ 13) $\begin{cases}|x-y|\ge 2\\ |2x+y|\le 3\\ |y|<3\end{cases}$

Утворити всі підмножини даної множини:

14) $A=\left\{3,\{1;2\},b,\Delta\right\}.$

Знайти декартовий добуток $A\times B$ та $B\times A$:

15) $A=\{a;d;t\}$, $B=\{1;2;3\}.$

В-10.

Знайдіть $A \bigcap B, A \bigcup B, A \setminus B, A \Delta B, \overline{A}, \overline{B}\ A \bigcup \overline{B}, \overline{A} \bigcap \overline{B}, \overline{A \bigcup \overline{B}}, \overline{A} \bigcup \overline{B}, \overline{\overline{A} \bigcup B}, A \times B.$

1) $A = \left\{ x \mid x \in R, -2\frac{1}{2} < x \leq 3 \right\}\ B = \left\{ x \mid x \in R, -4 \leq x < 2{,}3 \right\}.$

2) $A = \left(-\infty; 5{,}6 \right]\ B = \left[-2\frac{1}{2}; 3\frac{1}{3} \right).$

3). $A = \left\{ x \mid x \in R, \left| x \right| < 2 \right\}\ B = \left\{ x \mid x \in R, \left| x \right| \geq 6 \right\}.$

Побудувати множину точок, задовольняють наступним співвідношенням:

4) $\begin{cases} x + y - 1 \geq 0 \\ y - x + 4 \geq 0 \\ 5x + 4y - 38 \leq 0 \\ 2x - y + 3 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} xy + 6 \geq 0 \\ x - 2y + 10 < 0 \end{cases}$ 6) $\left| xy \right| < 2$

7) $\begin{cases} y \geq 3x + 2 \\ \left[\begin{array}{l} y \leq -x + 1 \\ x > -2 \end{array} \right. \end{cases}$ 8) $\frac{\left| y \right|}{x} > 3$ 9) $\left| x \right| + \left| y \right| < 5$ 10) $\begin{cases} \left| x + y \right| + \left| x - y \right| \leq 4 \\ \left| x \right| \leq 1 \\ y \geq \sqrt{x^2 - 2x + 1} \end{cases}$

11) $\begin{cases} y - x^2 + 3x > 0 \\ y + x^2 + 3 \leq 0 \end{cases}$ 12) $\left[\begin{array}{l} 2x + y + 3 \geq 0 \\ x - 2y + 2 < 0 \end{array} \right.$ 13) $\begin{cases} \sqrt{x + y} \geq x \\ y \leq 2 \end{cases}$

Утворити всі підмножини даної множини:

14) $A = \left\{ 2, \left\{ 2; 3 \right\}, a, \varnothing \right\}.$

Знайти декартовий добуток $A \times B$ та $B \times A$:

15) $A = \left\{ 3; 4; 5 \right\},\ B = \left\{ a; m; c \right\}.$

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ 2

В-1

1. Дано: А = $[-1\frac{1}{3}; \frac{5}{4})$; В = $(-\frac{1}{4}; 5]$. Знайти $A\cap B$; $A\cup B$; $A\setminus B$; $A\Delta B$; $\overline{A}$; $\overline{A\cap B}$; $\overline{A}\cap\overline{B}$; $\overline{A\cup\overline{B}}$; AxB; $A\cup\overline{B}$.
2. Побудувати множену точок площини, яка задовольняє співвідношенням:

а) $\begin{cases} xy-3>0, \\ x\geq -4, \\ y+3\geq 0. \end{cases}$ б) $\left[\begin{array}{l} x^2+y^2\leq 4, \\ |y|<1. \end{array}\right.$ в) $|x| + |y-3| \leq 2$.

3. Створіть всі підмножини даної множини: M = {m,{m},Δ}.
4. Запишіть у вигляді прямокутної таблиці множену AxB і BxA, якщо А = {1,3,5,7}; В = {x,y,z}.
5. Задача. В спортивному таборі 75% дітей уміють грати у футбол; 65% у волейбол, 70% у баскетбол. Яке найменше число дітей вміють грати і у футбол, і у волейбол, і у баскетбол?

В-2

1. Дано: А = $(-2\frac{2}{3}; 8]$; В =$[-4\frac{1}{2}; 2)$. Знайти $A\cap B$; $A\cup B$; $A\setminus B$; $A\Delta B$; $\overline{A}$; $\overline{A\cap B}$; $\overline{A}\cap\overline{B}$; $\overline{A\cup\overline{B}}$; AxB; $A\cup\overline{B}$.
2. Побудувати множену точок площини, яка задовольняє співвідношенням:

а) $x^2 - x < y - xy$ б) $\begin{cases} xy+6\geq 0, \\ x-2y+8\leq 0. \end{cases}$ в) $\left[\begin{array}{l} |x|>1, \\ |y|\geq 2. \end{array}\right.$.

3. Створіть всі підмножини даної множини: M = {a,{a}, Ø}.
4. Запишіть за допомогою фігурних дужок декартовий добуток множин AxB і BxA, якщо А = {a,b,c,d}; В = {1,2}.
5. Задача. На уроці літератури вчитель вирішив дізнатися, хто з 40 учнів читав книги А, В і С. Результати опитування були такі: книгу А читало 25 учнів, книгу В – 22, книгу С – 20. Книги А або В читали 33 учні, А або С – 30, В або С – 31, всі три книги прочитали 10 учнів. Скільки учнів прочитало тільки по 1 книзі? Скільки не читало жодної з трьох книг.

В-3

1. Дано: А = $(-1\frac{3}{4}; 7]$; В = [-3,5;4). Знайти $A\cap B$; $A\cup B$; $A\setminus B$; $A\Delta B$; $\overline{A}$; $\overline{A\cap B}$; $\overline{A}\cap\overline{B}$; $\overline{A\cup\overline{B}}$; AxB; $A\cup\overline{B}$.
2. Побудувати множену точок площини, яка задовольняє співвідношенням:

а) $\begin{cases} x^2+y^2-6\leq 0, \\ y-x^2+3<0, \\ x\geq 0. \end{cases}$ б) $\left[\begin{array}{l} 2x+y>2x+5, \\ 3x-y>x+1-y. \end{array}\right.$ в) $|x - 2| + y < 2$.

3. Створіть всі підмножини даної множини: М = {a,Ø,Δ}.
4. Побудуйте у прямокутній системі координат множену XxX , якщо Х = {x|x∈R; -1,5 ≤ x <6}.
5. Задача. Кожен з учнів класу у зимові канікули два рази був в театрі, при цьому вистави А, В, і С бачили відповідно 25, 12, 23 учні. Скільки учнів в класі? Скільки з них бачили спектаклі А і В, А і С, В і С.

В-4

1. Дано: А = $(-2\frac{1}{2}; 6]$; В = $[-1; 2\frac{1}{3})$. Знайти $A\cap B$; $A\cup B$; $A\backslash B$; $A\Delta B$; $\overline{A}$; $\overline{A\cap B}$; $\overline{A}\cap\overline{B}$; $\overline{A\cup\overline{B}}$; AxB; $A\cup\overline{B}$.
2. Побудувати множену точок площини, яка задовольняє співвідношенням:

а) $\begin{cases} x+2y+2\geq 0, \\ x+2y-4\leq 0, \\ x-2\leq 0, \\ x+y+1\geq 0. \end{cases}$ б) $\left[\begin{array}{l} y>\frac{4}{9}x^2, \\ x^2\leq 9-y^2. \end{array}\right.$ в) |xy| < 2.

3. Створіть всі підмножини даної множини: М = {3,{3},a}.
4. Побудуйте у прямокутній системі координат множену MxN , якщо М = {3,5,4}; N = [1;3].
5. Задача. В олімпіаді з математики приймало участь 40 учнів. Їм було запропоновано розв’язати одну задачу з геометрії, одну задачу з алгебри, одну по тригонометрії. Результати перевірки розв’язків записані в таблиці:

розв’язані задачі:	кількість розв’язавших:
з алгебри	20
з геометрії	18
з тригонометрії	18
з алгебри та геометрії	7
з алгебри і тригонометрії	8
з геометрії і тригонометрії	9

Відомо, що ні одної задачі не розв’язало троє. Скільки учнів розв’язали три задачі? Скільки учнів розв’язало рівно 2 задачі?

В-5

1. Дано: А = [-3,5;6); В = (-2;3,7). Знайти $A\cap B$; $A\cup B$; $A\backslash B$; $A\Delta B$; $\overline{A}$; $\overline{A\cap B}$; $\overline{A}\cap\overline{B}$; $\overline{A\cup\overline{B}}$; AxB; $A\cup\overline{B}$.
2. Побудувати множену точок площини, яка задовольняє співвідношенням:

а) $\begin{cases} x-2y+1\geq 0, \\ 3x+y-11\leq 0, \\ x+4y>0, \\ x>0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>2, \\ x<-2, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y>1, \\ y<-1. \end{array}\right. \end{cases}$ в) $\begin{cases} |x+y|\leq 1, \\ |x-y|\leq 1. \end{cases}$.

3. Створіть всі підмножини даної множини: М = {3,{3},a}.

4. Запишіть за допомогою фігурних дужок декартовий добуток множин AхB і BхA, якщо А = {a,b,c,d}; В = {1,2}.
5. Задача. В звіті об обстеженні 100 студентів повідомлено, що кількість студентів, які вивчають різні язики така: французький, англійський, німецький –5, французький і англійський –8, німецький і англійський –10, німецький і французький –20, англійський –30,немецький –23, французький –50. Звіт не був прийнятий. Чому?

В-6

1. Дано: А = [1,2;3); В = (-2,5;+∞). Знайти $A\cap B$; $A\cup B$; $A\backslash B$; $A\Delta B$; $\overline{A}$; $\overline{A\cap B}$; $\overline{A}\cap\overline{B}$; $\overline{A\cup\overline{B}}$; AхB; $A\cup\overline{B}$.
2. Побудувати множену точок площини, яка задовольняє співвідношенням:

а) $\begin{cases} 3x+5y\ge 4, \\ 2y-x\le 6, \\ 9x+4y\le 56. \end{cases}$ б) $\dfrac{x}{y}>2$ в) |2x-y| > y-1.

3. Створіть всі підмножини даної множини: М = {m,{5},5}.
4. Запишіть за допомогою фігурних дужок декартовий добуток множин AхB і BхA, якщо А = {a,b,c,d}; В = {1,2}.
5. Задача. Серед абітурієнтів, які витримали приймальні іспити в ВНЗ оцінку “відмінно” отримали: з математики – 48 осіб, з фізики – 37, з укр. мови – 42, з математики або фізики – 75, з математики або укр. мови – 76, з фізики та укр. мови - 66, з усіх трьох предметів – 4. Скільки абітурієнтів отримали хоча б одну п’ятірку? Скільки серед них отримали тільки одну п’ятірку.

В-7

1. Дано: А = А = $[-\frac{2}{3};\frac{7}{4}]$; В = $(-\frac{1}{4};2)$. Знайти $A\cap B$; $A\cup B$; $A\backslash B$; $A\Delta B$; $\overline{A}$; $\overline{A\cap B}$; $\overline{A}\cap\overline{B}$; $\overline{A\cup\overline{B}}$; AхB; $A\cup\overline{B}$.
2. Побудувати множену точок площини, яка задовольняє співвідношенням:

а) $\begin{cases} xy<1, \\ x+y\ge 0, \\ -x+y\le 0. \end{cases}$ б) $\left[\begin{array}{l} 5x+8y>2, \\ x-y<4. \end{array}\right.$ в) |x| + |y| ≤ 3.

3. Створіть всі підмножини даної множини: М = {a,Ø,4}.
4. Побудуйте у прямокутній системі координат множену AхB і BхA, якщо А = {1,3,2}; В = {а,в,с}.
5. Задача. Зі 100 студентів англійську мову вивчають – 28, німецьку – 30, французьку – 42, англійську і німецьку –8, англійську і французьку – 10, німецьку і французьку – 5, і німецьку, і англійську, і французьку – 3. Скільки студентів не вивчають жодної мови? Скільки студентів вивчають тільки одну мову?

В-8

1. Дано: А = $(-\frac{1}{3};\frac{5}{3})$; В = $(\sqrt{2};\frac{40}{27}]$. Знайти $A\cap B$; $A\cup B$; $A\backslash B$; $A\Delta B$; $\overline{A}$; $\overline{A\cap B}$; $\overline{A}\cap\overline{B}$; $\overline{A\cup\overline{B}}$; AxB; $A\cup\overline{B}$.

2. Побудувати множену точок площини, яка задовольняє співвідношенням:

а) $\begin{cases} y^2 \le 4-x^2, \\ 3x+2y-3<0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy \le 7, \\ x+2\ge 0, \\ y+4>0. \end{cases}$ в) $|y| - |x| \ge 0$.

3. Створіть всі підмножини даної множини: M = {7,Ø,Δ}.

4. Побудуйте у прямокутній системі координат множену MxM і MxN, якщо N={ 1,3,5}, M=[2;4).

5. Задача. A∈N. Кожен елемент множини А, є число кратне 2, або 3, або 5. Знайти число елементів множини А, якщо серед них є 90 чисел кратних 2, 70 чисел кратних 3, 80 чисел кратних 5, 30 чисел кратних 6, 37 чисел кратних 10, 32 числа кратних 15, 20 чисел кратних 30.

В-9

1. Дано: А = $(-\frac{1}{3};3]$; В = [-1;2). Знайти $A\cap B$; $A\cup B$; $A\backslash B$; $A\Delta B$; $\overline{A}$; $\overline{A\cap B}$; $\overline{A}\cap\overline{B}$; $\overline{A\cup\overline{B}}$; AxB; $A\cup\overline{B}$.

2. Побудувати множену точок площини, яка задовольняє співвідношенням:

а) $\begin{cases} x-2y\le 2, \\ 2x+y\le 1, \\ y-2\le 0, \\ x>-3. \end{cases}$ б) $\left[\begin{array}{l} x^2+y-1\le 0, \\ x^2-2x-y-3<0. \end{array}\right.$ в) $x^2 + y^2 \le 2|x| + 2|y|$.

3. Створіть всі підмножини даної множини: M = {5,{5},a}.

4. Запишіть у вигляді прямокутної таблиці множену MxN ,NxM якщо M = {7,8,9}; N ={а,б,в,г}.

5. Задача. В школі 1000 учнів. Вміють грати в шашки –830, в шахи –650. Ні в шашки ні в шахи не вміють грати 40 учнів. Скільки учнів вміють грати і в шахи і в шашки? Скільки учнів вміють грати тільки в одну гру.

В-10

1. Дано:А = {x|x∈R; |x| <6}; В = {x|x∈R; |x| ≥ 2}. Знайти $A\cap B$; $A\cup B$; $A\backslash B$; $A\Delta B$; $\overline{A}$; $\overline{A\cap B}$; $\overline{A}\cap\overline{B}$; $\overline{A\cup\overline{B}}$; AxB; $A\cup\overline{B}$.

2. Побудувати множену точок площини, яка задовольняє співвідношенням:

а) $\begin{cases} xy+5\ge 0, \\ x+y+1>0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2\le 9, \\ x+y>0, \\ x-2y\le 0. \end{cases}$ в) $\left[\begin{array}{l} |x|>3, \\ |x-1|<1. \end{array}\right.$

3. Створіть всі підмножини даної множини: M = {a,{b,c},d}.

4. Побудуйте у прямокутній системі координат множену AxB і BxA, якщо А = (-3;∞);В = [2;4).
5. Задача. З 90 школярів 50 грають у футбол, а 55- у волейбол. Яке може бути число школярів, які грають в обидві гри? Хоча б в одну з цих ігор?

В-11

1. Дано: А = $(-3\frac{1}{2}; 5]$; В = $[1; 3\frac{1}{3})$. Знайти $A \cap B$; $A \cup B$; $A \backslash B$; $A \Delta B$; $\overline{A}$; $\overline{A \cap B}$; $\overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cup \overline{B}}$; AxB; $A \cup \overline{B}$.
2. Побудувати множену точок площини, яка задовольняє співвідношенням:

а) $\begin{cases} x+y+1 \geq 0, \\ x+y-3 \leq 0, \\ x+1 \geq 0, \\ x-3 \leq 0. \end{cases}$ б) $\left[\begin{array}{l} x+2y-3<0, \\ |y|-3 \geq 0. \end{array}\right.$ в) $|x| + |y| \geq 2$.

3. Створіть всі підмножини даної множини: М = {1,{1},в}.
4. Побудуйте у прямокутній системі координат множену AxB і AxA, якщо А = (-2,5;∞); В = R.
5. Задача. На вступних іспитах в ВНЗ, відмітку “5” отримали: з математики – 148, з фізики –139, з української мови – 142, з математики і фізики – 75, з математики і української мови – 76, з фізики і укр. мови -66, з усіх трьох предметів – 4. Скільки абітурієнтів отримали хоча б одну “5”? Скільки серед них отримали тільки одних “5”?

В-12

1. Дано: А = $[4\frac{1}{2}; \infty)$; В = (-∞;7). Знайти $A \cap B$; $A \cup B$; $A \backslash B$; $A \Delta B$; $\overline{A}$; $\overline{A \cap B}$; $\overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cup \overline{B}}$; AxB; $A \cup \overline{B}$.
2. Побудувати множену точок площини, яка задовольняє співвідношенням:

а) $\begin{cases} x^2+y-1 \leq 0, \\ x^2-2x-y-3 \leq 0. \end{cases}$ б) $\left[\begin{array}{l} 2x+y>1, \\ x-y>3. \end{array}\right.$ в) $|x\ y| \leq 2$.

3. Створіть всі підмножини даної множини: М = {{a},Ø,Δ}.
4. Запишіть у вигляді прямокутної таблиці множену PxP, PxQ якщо Q = {7,8,9,10}; Р ={a,m,n}.
5. Задача. У класі 40 дітей. Грають в баскетбол – 25, займаються плаванням - 26, ходять на лижах – 27. Одночасно займаються плаванням і баскетболом – 15, баскетболом і лижами – 16, лижами і плаванням – 18. Один звільнений от занять з фізкультури. Скільки дітей займаються усіма видами спорту? Скільки дітей займаються тільки одним видом спорту?

В-13

1. Дано:А = {x|x∈R; $-\frac{7}{4}<x\le\frac{7}{4}$}; В = {x|x∈R; $-\frac{2}{3}\le x<2$}. Знайти $A\cap B$; $A\cup B$; $A\backslash B$; $A\Delta B$; $\overline{A}$; $\overline{A\cap B}$; $\overline{A}\cap\overline{B}$; $\overline{A\cup\overline{B}}$; AxB; $A\cup\overline{B}$.

2. Побудувати множену точок площини, яка задовольняє співвідношенням:

$$\text{а) }\begin{cases} xy-6\ge 0, \\ x+2y-14\le 0. \end{cases}\qquad \text{б) }\left[\begin{array}{l} x^2+y^2\le 4, \\ \begin{cases} x>y, \\ x<-y. \end{cases}\end{array}\right.\qquad \text{в) }\begin{cases} |x|\le 1, \\ y\ge\sqrt{x^2-2x+1}\end{cases}.$$

3. Створіть всі підмножини даної множини: М = {8,Ø,{8}}.

4. Побудуйте у прямокутній системі координат множену MxM і MxN, якщо М = {1,3,5,7}; N = [-2;3].

5. Задача. На протязі тижня в кінотеатрі демонструвалися фільми А,В,С. З 40 школярів, кожен з яких подивився або всі три фільми, або один з трьох. Фільм А бачили 13, фільм В – 16, фільм С – 19 школярів. Скільки учнів бачили всі три фільми?

В-14

1. Дано: А = {x|x∈R; |x| ≤ 6}; В = {x|x∈R; |x| > 4}. Знайти $A\cap B$; $A\cup B$; $A\backslash B$; $A\Delta B$; $\overline{A}$; $\overline{A\cap B}$; $\overline{A}\cap\overline{B}$; $\overline{A\cup\overline{B}}$; AxB; $A\cup\overline{B}$.

2. Побудувати множену точок площини, яка задовольняє співвідношенням:

$$\text{а) }\begin{cases} y\ge x^2-5x+6, \\ y<x^2+5x+6. \end{cases}\qquad \text{б) }\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>2, \\ x<-2, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y>2, \\ y<-2. \end{array}\right.\end{cases}\qquad \text{в) }\frac{y-|x|}{x}\ge 0\ .$$

3. Створіть всі підмножини даної множини: М = {2,{2},d}.

4. Побудуйте у прямокутній системі координат множену AxB і BxA, якщо А = (-3,5;1];В = (2;+∞).

5. Задача. В магазині покупці покупають або один торт, або одну коробку цукерок, або один торт і коробку цукерок. В один з днів було продано 57 тортів та 36 коробок цукерок. Скільки було покупців, якщо 12 людей купили і торт і коробку цукерок?

В-15

1. Дано: А = $(-5\frac{1}{2};4]$; В = (-∞; $2\frac{1}{3}$). Знайти $A\cap B$; $A\cup B$; $A\backslash B$; $A\Delta B$; $\overline{A}$; $\overline{A\cap B}$; $\overline{A}\cap\overline{B}$; $\overline{A\cup\overline{B}}$; AxB; $A\cup\overline{B}$.

2. Побудувати множену точок площини, яка задовольняє співвідношенням:

$$\text{а) }\begin{cases} x-2y+4\ge 0, \\ 3x+y-11<0, \\ x+4y\ge 0, \\ x<0. \end{cases}\qquad \text{б) }\left[\begin{array}{l} 3x+4y>2, \\ x-y<3. \end{array}\right.\qquad \text{в) } |x\cdot y|\ge 2.$$

3. Створіть всі підмножини даної множини: М = {Ø,{в},а}.
4. Запишіть за допомогою фігурних дужок декартовий добуток множин AхB і BхB, якщо А = {21,22,23,24}; В = {а,в}.
5. Задача. На аркуші паперу накреслили круг, площа якого 78 см² та квадрат, площа якого 55 см². Площа перетину круга та квадрата дорівнює 30 см². Не зайнята кругом і квадратом частина аркуша має площу 150 см². Знайти площу аркуша.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДО ТЕМИ «МНОЖИНИ»

1. Як називаються об'єкти, з яких складається задана множина?
А) частинки
Б) підмножина
В) елементи
Г) фрактали

2. Знак належності елемента певній множині позначається:
А) $\varnothing$
Б) $\in$
В) $\subset$
Г) $\subseteq$

3. Якщо кількість елементів множини скінченна, то таку множину називають:
А) скінченою
Б) обмеженою
В) дискретною
Г) граничною

4. Як позначають кількість елементів множини A?
А) (A)
Б) $\{A\}$
В) $|A|$
Г) $[A]$

5. Якщо дві множини складаються з одних і тих самих елементів, їх називають:
А) рівними
Б) рівнопотужними
В) симетричними
Г) паралельними

6. Як називається множина, яка не містить жодного елемента?
А) елементарна
Б) унарна
В) порожня
Г) базова

7. Яким символом позначається порожня множина?
А) Δ
Б) $\forall$
В) $\varnothing$
Г) $\oplus$

8. Тоді і тільки тоді, коли кожний елемент множини A належить також множині B, множина A називається:
А) частиною множини B
Б) підмножиною множини B
В) доповненням до множини B
Г) половиною множини B

9. Якщо $A \subseteq B$, але $A \neq B$, то пишуть:
А) $A \in B$
Б) $A \subset B$
В) $A \subseteq B$
Г) $A \oplus B$

10. Як називають операцію над множинами A та B, в результаті якої отримують множину тих елементів, які належать принаймні одній із множин A чи B?
А) перетином множин A та B
Б) різницею множин A та B
В) симетричною різницею множин A та B
Г) об'єднанням множин A та B

11. Як називають операцію над множинами A та B, в результаті якої отримують множину тих елементів, які належать множині A та не належать множині B?
А) перетином множин A та B
Б) різницею множин A та B
В) симетричною різницею множин A та B
Г) об'єднанням множин A та B

12. Як називають операцію над множинами A та B, в результаті якої отримують множину, що складається із тих і тільки тих елементів, які належать множинам A та B одночасно?
А) перетином множин A та B
Б) різницею множин A та B
В) симетричною різницею множин A та B
Г) об'єднанням множин A та B

13. Як називають операцію над множинами A та B, в результаті якої отримують множину, що складається зі всіх елементів множини A, які не містяться у B, а також усіх елементів множини B, які не містяться в A?
А) перетином множин A та B
Б) різницею множин A та B
В) симетричною різницею множин A та B
Г) об'єднанням множин A та B

14. Як позначають об'єднання множин A та B?
А) $A \oplus B$

Б) $A \cup B$
В) $A \cap B$
Г) $A \setminus B$

15. Як позначають перетин множин A та B?
А) $A \oplus B$
Б) $A \cup B$
В) $A \cap B$
Г) $A \setminus B$

16. Як позначають різницю множин A та B?
А) $A \oplus B$
Б) $A \cup B$
В) $A \cap B$
Г) $A \setminus B$

17. Як позначають симетричну різницю множин A та B?
А) $A \oplus B$
Б) $A \cup B$
В) $A \cap B$
Г) $A \setminus B$

18. Якщо зафіксовано універсальну множину U, то множину всіх елементів універсальної множини, що не належать множині A називають
А) перетином з множиною A
Б) доповненням множини A
В) різницею множини A
Г) потужністю множини A

19. Множину усіх пар (a, b), у яких перша компонента належить множині A, а друга – множині B, називають:
А) декартовим добутком множин A та B
Б) перетином множин A та B
В) канторовим добутком множин A та B
Г) доповненням множин A та B

20. Декартів добуток множин A та B позначається:
А) $A \oplus B$
Б) $A \cup B$
В) $A \times B$
Г) $A \otimes B$

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДО ТЕМИ «ВІДНОШЕННЯ»

1. Підмножину R декартового степеня M^n деякої множини M називають:
А) кортежем
Б) n-місним відношенням на множині M
В) вектором
Г) елементом множини R

2. Унарне відношення $R = \{7k | k \in N\}$ виділяє із множини N натуральних чисел ознаку:
А) степені 7
Б) непарності
В) кратності 7
Г) парності

3. Якщо елементи $a, b \in M$ перебувають у відношенні R, тобто $(a, b) \in R$, то це часто записують також у вигляді:
А) aRb
Б) $a = b$
В) $R = (a, b)$
Г) $a \times b$

4. Яке з наведених бінарних відношень на множині натуральних чисел N є відношенням *ділиться на*:
А) $24R3, 49R7, 12R2$
Б) $24R5, 49R8, 12R5$
В) $25R3, 48R7, 11R2$
Г) $25R7, 45R3, 10R8$

5. Яке з наведених бінарних відношень на множині натуральних чисел N є відношенням *складаються з однакових цифр*:
А) $245R543, 491R184, 125R527$
Б) $243R342, 491R941, 123R321$
В) $250R134, 481R174, 127R723$
Г) $254R257, 451R134, 108R832$

6. Яке з наведених бінарних відношень на множині натуральних чисел N є відношенням *лежать на однаковій відстані від початку координат*:
А) $(1; -3)R(3; 2)$
Б) $(2; -4)R(3; 2)$
В) $(2; -3)R(4; 2)$
Г) $(2; -3)R(3; 2)$

7. Яке з наведених бінарних відношень на множині натуральних чисел N є відношенням є *взаємно простими*:
А) $18R10$
Б) $45R8$
В) $15R9$
Г) $12R8$

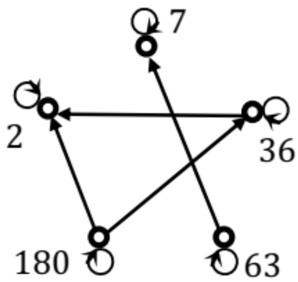
8. Квадратна матриця C порядку n, у якій елемент c_{ij}, що стоїть на перетині i-го рядка та j-го стовпчика, позначають так: $c_{ij} = 1$, якщо $a_i R a_j$ і $c_{ij} = 0$ – в іншому разі, називається:
А) одиничною матрицею
Б) матрицею відповідності
В) матрицею бінарного відношення
Г) діагональною матрицею

9. Для множини $M = \{2, 7, 36\}$ матриця відношення *менше чи дорівнює* має вигляд:

А) $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **В)** $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

Б) $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **Г)** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

10. Граф якої відповідності для множини $M = \{2, 7, 36, 63, 180\}$ наведено нижче?



А) менше чи дорівнює
Б) є взаємно простими
В) більше чи дорівнює
Г) ділиться на

11. Якщо $bR^{-1}a$ тоді і тільки тоді, коли aRb, то відношення R^{-1} до відношення R називають:
А) симетричним
Б) оберненим
В) транзитивним
Г) рефлексивним

12. Таке відношення R на множині M, що aRb тоді і тільки тоді, коли існує елемент $c \in M$, для якого виконується aR_1c і cR_2b називається:
А) композицією відношень R_1 і R_2
Б) симетрією відношень R_1 і R_2
В) добутком відношень R_1 і R_2
Г) різницею відношень R_1 і R_2

13. Якщо для всіх $a \in M$ виконується aRa, то відношення R називається:
А) антирефлексивним
Б) рефлексивним
В) симетричним
Г) транзитивним

14. Якщо для жодного $a \in M$ не виконується aRa, то відношення R називається:
А) антирефлексивним
Б) рефлексивним
В) симетричним
Г) транзитивним

15. Якщо для всіх $a, b \in M$ таких, що aRb, маємо bRa, то відношення R називається:
А) антирефлексивним
Б) рефлексивним
В) симетричним
Г) транзитивним

16. Якщо для всіх $a, b \in M$ таких, що aRb і bRa, маємо $a = b$, то відношення R називається:
А) антирефлексивним
Б) рефлексивним
В) симетричним
Г) антисиметричним

17. Якщо із співвідношень aRb і bRc випливає aRc, відношення R називається:
А) антирефлексивним
Б) рефлексивним
В) симетричним
Г) транзитивним

18. Якщо відношення R на множині M рефлексивне й симетричне, його називають:
А) транзитивним
Б) толерантним
В) одиничним

Г) комплексним

19. Якщо відношення R на множині M рефлексивне, симетричне й транзитивне, його називають:

А) транзитивним відношенням

Б) відношенням еквівалентності

В) одиничним відношенням

Г) комплексним відношенням

20. Якщо відношення R на множині M рефлексивне, антисиметричне й транзитивне, його називають:

А) відношенням часткового (нестрогого) порядку

Б) відношенням еквівалентності

В) транзитивним відношенням

Г) комплексним відношенням

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Балога С.І. Дискретна математика. Навчальний посібник / С.І. Балога. Ужгород: ПП: «АУТОДОР-Шарк», 2021. 124 с.
2. Борисенко О. А. Дискретна математика : підручник. Суми : Університетська книга, 2023. 255 с.
3. Висоцька В. А., Литвин В. В., Лозинська О. В. Дискретна математика. Практикум : навчальний посібник. Львів: Новий Світ – 2000, 2024. 575 с.
4. Гавриленко О. В., Клименко О. М., Рибачук Л. В. Дискретна математика : навчальний посібник. Київ : КПІ, 2020. 76 с. URL: https://ela.kpi.ua/handle/123456789/38770.
5. Дармосюк В. М. Комбінаторика: практикум з розв’язання задач Комбінаторика: практикум з розв’язання задач : посібник для самостійної та дистанційної роботи студентів. Миколаїв: Миколаївський національний університет ім. В. О. Сухомлинського, 2022. 78 с.
6. Дискретна математика (частина 1) : навчальний посібник / уклад. В. М. Пивоварчик, О. М. Яковлєва, О. М. Болдарєва. Одеса : ПНПУ імені К. Д. Ушинського, 2022. 145 с.
7. Дискретна математика : конспект лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти ОПП «Комп’ютерні науки» спец. 122 «Комп’ютерні науки» денної форми здобуття вищої освіти / уклад. О. Ю. Пархоменко. Миколаїв : МНАУ, 2025. 60 с. https://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/22002
8. Дискретна математика : навчальний посібник / уклад. С. І. Балога. Ужгород : АУТДОР-ШАРК, 2021. 124 с. URL: https://www.uzhnu.edu.ua/uk/infocentre/get/42936.
9. Дискретна математика. Збірник індивідуальних завдань : навчальний посібник / уклад.: І. Спекторський, О. Стусь, В. Статкевич. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 88 с. URL: https://ela.kpi.ua/handle/123456789/50767.
10. Ємець О. О., Парфьонова Т. О. Дискретна математика : навчальний посібник для самостійного вивчення навчальної дисципліни студентами денної форми навчання спеціальності 122 Комп’ютерні науки освітня програма «Комп’ютерні науки» ступеня бакалавра. Полтава : ПУЕТ, 2023. 282 с. URL: https://files.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi73/0053713.pdf.
11. Ліхоузова Т. А. Дискретна математика. Практикум : навчальний посібник. Київ : КПІ ім. І. Сікорського, 2020. 62 с. URL: https://ela.kpi.ua/handle/123456789/33702
12. Новотарський М. А. Дискретна математика : навчальний посібник. Київ : КПІ, 2020. 278 с.
13. Пасічник В.В., Нікольський Ю.В., Щербина Ю.М. Дискретна математика : підручник. Львів : ПП "Магнолія 2006", 2025. 432 с
14. Пивоварчик В. М., Яковлєва О. М., Болдарєва О. М. Дискретна математика (частина 1) : навчальний посібник. Одеса, 2022. 145 с. URL: dspace.pdpu.edu.ua/jspui/handle/123456789/14760.
15. Сергієнко А. М., Молчанова А. А., Романкевич В. О. Комп'ютерна

дискретна математика : навчальний посібник. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 189 с. URL: https://ela.kpi.ua/handle/123456789/52232.

16. Темнікова О. Л. Дискретна математика. Частина 1 : конспект лекцій. Київ : КПІ ім. І. Сікорського, 2021. 154 с. URL: https://ela.kpi.ua/server/api/core/bitstreams/990893b6-f853-408a-8476-d3dd7c89d2a1/content.

Навчальне видання

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

методичні рекомендації

Укладач: **Пархоменко** Олександр Юрійович

Богатєнкова Олександра Євгенівна

Формат 60х84 1/16. Ум. друк. арк. 10,06
Тираж 50 прим. Зам. № __

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.