

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА ЕКОНОМІЧНОЇ КІБЕРНЕТИКИ, КОМПЮТЕКНИХ НАУК ТА
ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

конспект лекцій
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти ОПП
«Харчові технології» спеціальності 181 «Харчові технології» денної
форми здобуття вищої освіти



Миколаїв
2026

Друкується за рішенням науково-методичної комісії факультету менеджменту Миколаївського національного університету від 05.03.2026 року протокол № 6.

Укладачі:

- О. В. Шибаніна – д-р екон. наук, професор, професор кафедри економічної кібернетики, комп'ютерних наук та інформаційних технологій, Миколаївський національний аграрний університет;
- С. І. Тищенко – канд. пед. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики, комп'ютерних наук та інформаційних технологій, Миколаївський національний аграрний університет;
- О. Ю. Пархоменко – канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики, комп'ютерних наук та інформаційних технологій, Миколаївський національний аграрний університет;
- В. О. Крайній – канд. екон. наук, старший викладач кафедри економічної кібернетики, комп'ютерних наук та інформаційних технологій, Миколаївський національний аграрний університет;
- І. І. Хилько – старший викладач кафедри економічної кібернетики, комп'ютерних наук та інформаційних технологій, Миколаївський національний аграрний університет.

Рецензенти:

Гиль М.І. - доктор сільськогосподарських наук, професор, декан факультету ТВППТСБ, Миколаївський національний аграрний університет

Трибрат Р.О. - заступник завідувача кафедри переробки продукції тваринництва та харчових технологій, кандидат сільськогосподарських наук, доцент, Миколаївський національний аграрний університет

ЗМІСТ

Оглавление

СКЛАДАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО ОПИСУ ОБ'ЄКТІВ АНАЛІТИЧНИМИ МЕТОДАМИ	4
§ 1. Методика складання математичного опису аналітичними методами	4
§ 2. Типові математичні моделі технологічних процесів	22
§ 3. Установлення структури типових математичних моделей	27
§ 4. Класифікація математичних моделей технологічних процесів.....	31
МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ НАГРІВАННЯ Й ОХОЛОДЖЕННЯ ХАРЧОВИХ ПРОДУКТІВ	33
§ 5. Загальні принципи рішення задач розрахунку теплообмінників з використанням моделей	33
§ 6. Модель для визначення кінцевих температур теплоносіїв.....	39
§ 7. Модель встановлення розподілу температур теплоносіїв по довжині теплообмінника	41
§ 8. Моделювання процесів випарювання.....	46
§ 9. Модель технологічного розрахунку режимів випарювання.....	50
§ 10. Модель для визначення динамічних властивостей випарного апарата ..	51
МОДЕЛЮВАННЯ МАСООБМІННИХ ПРОЦЕСІВ ХАРЧОВИХ ВИРОБНИЦТВ	55
§ 11. Особливості складання моделей масообмінних процесів	55
§ 12. Математичні моделі кінетики сушіння.....	57
§ 13. Математична модель оптимізації сушіння	67
§ 14. Моделювання процесів ректифікації	79
МОДЕЛЮВАННЯ ХІМІЧНИХ І БІОХІМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ ХАРЧОВИХ ВИРОБНИЦТВ	87
§ 15. Моделювання кінетики хімічних і біохімічних перетворень	87
§ 16. Математична модель оптимального виходу біомаси.....	98
§ 17. Моделі кінетики гідролізу	108
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	118

СКЛАДАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО ОПИСУ ОБ'ЄКТІВ АНАЛІТИЧНИМИ МЕТОДАМИ

§ 1. Методика складання математичного опису аналітичними методами

У зв'язку із застосуванням методів математичного моделювання в харчовій технології й інших галузях промисловості вироблені певні методичні прийоми, які значно спрощують й упорядковують складання математичних моделей й одержання кількісної оцінки. У достатньому ступені розроблена й загальна формальна процедура складання математичних описів.

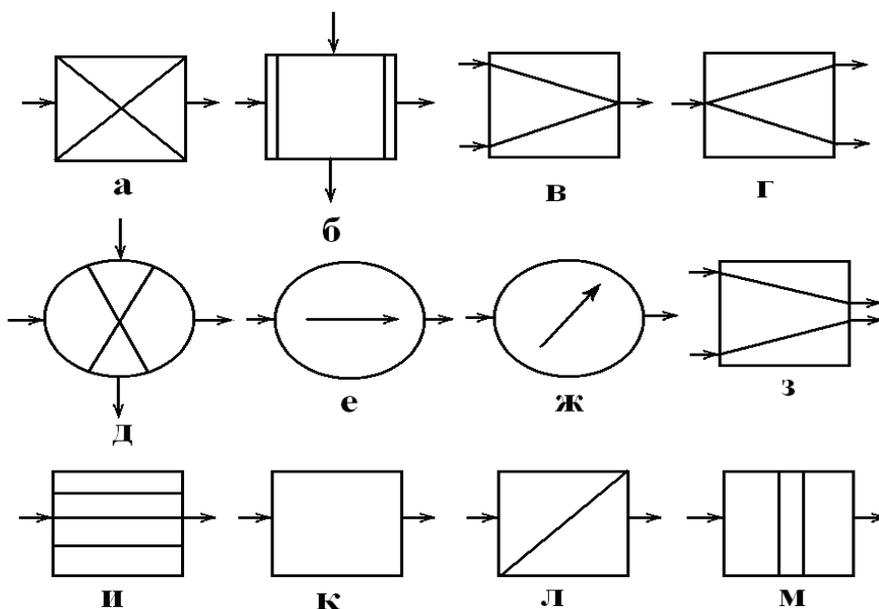


Рис. 1.1 . Позначення операторів, які застосовуються для зображення технологічних схем.

Установлено основні поняття, визначення й термінологія. Це дозволило уніфікувати математичні моделі й процедури їхнього складання. Наприклад, у технології для узагальненого позначення технологічної операції, що приводить до зміни якихось властивостей потоку продукту або робочого агента, з'явився термін «технологічний оператор», схема якого була наведена на мал. (1.1). Він перетворює фізичні характеристики або параметри вхідних потоків основного продукту й робочого агента у фізичні параметри вихідних потоків. Якісне перетворення звичайно пов'язане зі зміною складу потоків, тобто зі зникненням речовин, що надійшли або появою нових речовин або властивостей потоків (параметрів), а кількісне — зі зміною величини

параметрів. Символічну модель j -го багатомірного технологічного оператора можна виразити у вигляді функціональної залежності

$$[Y_{m1}^j] = [F_{mn}^j \{X_{n1}^j [K_{p1}^j]\}], \quad (1.1)$$

де Y_{m1}^j — вектор параметрів виходу; F_{mn}^j — лінійна вектор-функція, що зв'язує вхідні й вихідні параметри потоків; X_{n1}^j — вектор параметрів входу; K_{p1}^j — вектор конструктивних параметрів; n, m, p — кількість вхідних, вихідних і конструктивних параметрів. Технологічний процес будь-якої складності можна представити декількома типовими операторами або елементами, з'єднавши їх відповідними технологічними зв'язками. Умовні позначки основних і допоміжних технологічних операторів наведені на мал. (1.1). До основних відносяться технологічні оператори цільового призначення: a — хімічного й біологічного перетворення, b — міжфазного масообміну, v — змішання без збереження поверхні поділу, z — поділ. Допоміжні технологічні оператори змінюють енергетичне й фазове стани технологічних потоків: d — нагрівання або охолодження, e — стиски або розширення, $ж$ — зміни агрегатного (фазового) стану речовини. Стосовно харчової промисловості можна ввести й інші технологічні оператори: $з$ — з'єднання зі збереженням поверхні розділу, i — ущільнення, $к$ — усереднення, $л$ — розчинення, $м$ — формування й інші види операторів. Залежно від задач дослідження кожен технологічний об'єкт представляють типовим оператором або їхньою сукупністю.

Взаємодії окремих технологічних операторів і зовнішнього середовища зображують технологічними зв'язками або з'єднаннями. Кожну технологічному зв'язку відповідає фізичний технологічний (матеріальний або енергетичний) потік. Типи технологічних зв'язків наведені на мал. (1.2). Основними технологічними зв'язками є: a — послідовна, b — послідовно-обвідна (байпас), v — паралельна, $м$ — зворотна (рецикл) і d — перехресна.

При послідовному технологічному зв'язку потоки проходять через кожен елемент не більше одного разу. Послідовний технологічний зв'язок підвищує ефективність даної групи технологічних операторів. Наприклад, здрібнювання вихідного продукту (проміжних й інших продуктів) з наступним кількарізним сепаруванням продуктів здрібнювання

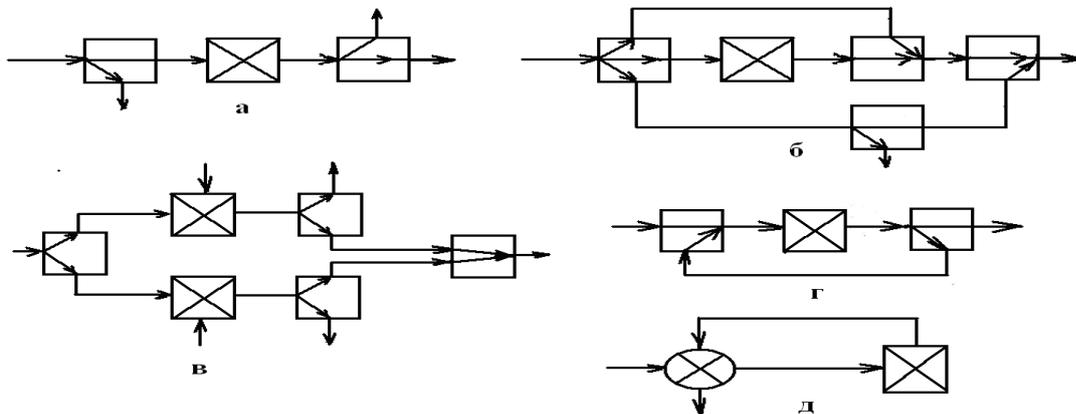


Рис. 1.2. Типи основних технологічних зв'язків між операторами.

застосовують для збільшення ступеня здрібнювання й поділу (збагачення) продуктів.

Послідовно-обвідний технологічний зв'язок є ускладненим варіантом послідовного зв'язку елементів. Її використовують у всіх процесах технології харчових виробництв із метою підвищення продуктивності або якості окремих технологічних операцій, а також коли досить піддати якій-небудь технологічній операції тільки частину загального потоку. Прикладом може бути поділ продуктів здрібнювання зерна на фракції різної технологічної якості (сходу, крупки, борошна) і наступна їхня обробка на різних машинах.

Паралельні технологічні зв'язки застосовують для підвищення продуктивності при одержанні з одного виду сировини декількох видів продукту або з багатьох видів сировини одного цільового продукту (паралельно працюючі теплообмінники, дробарки, екстрактори та ін.). Загальний вхід x_0 дорівнює сумі входів окремих ланок x_i , а загальний вихід y_0 — сумі виходів

$$x_0 = \sum_{i=1}^n x_i \quad , \quad (1.2)$$

$$y_0 = \sum_{i=1}^n y_i \quad . \quad (1.3)$$

Зв'язки x_0 , x_i , y_0 , y_s можуть бути скалярними або векторними величинами. Для використання формул (1.2) і (1.3) складові x_i й y_i представляють в адитивній формі, що допускає підсумовування. Наприклад, при вирішенні задачі оптимального розподілу температури або витрати сушильного агента в стрічкових або шахтних сушарках по зонах припустиме підсумовування ентальпій, але неприпустиме підсумовування температур. Паралельні схеми застосовують не тільки для підвищення продуктивності, але й надійності, гнучкості, а також створення безперервності технологічних потоків при періодично працюючих апаратах.

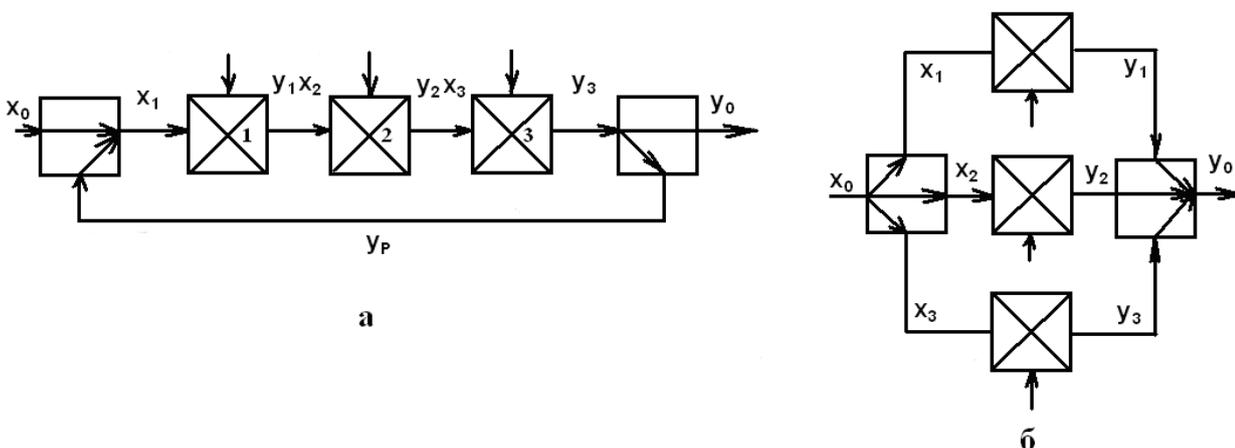


Рис. 1.3 . Зворотні технологічні зв'язки:

a — послідовно й b — паралельно працюючих апаратів

Системи паралельно працюючих машин або апаратів називають іноді *колекторними*. Загальна продуктивність системи паралельних агрегатів лімітується пропускною здатністю ділянки й найменшим запасом виробничої потужності (вхід - один з агрегатів - вихід).

Перехресні технологічні зв'язки застосовують у харчовій промисловості для більш ефективного використання енергії, наприклад, сушіння харчових продуктів з перехресною подачею сушильного агента, пастеризація або стерилізація з використанням для підігріву вихідного потоку та ін. Зокрема, її можна представити оператором між фазного масообміну.

Зворотний технологічний зв'язок характеризується наявністю зворотного технологічного потоку. Він застосовується для вирішення задач найбільш повного використання сировини або енергії, інтенсифікації процесу й створення сприятливих технологічних режимів (сушіння продуктів з рециклом, багаторазове повторне екстрагування, здрібнювання, гранулювання з поверненням крихти та ін.). При розгляді систем зі зворотним технологічним зв'язком розрізняють прямі (вхідні й вихідні), головний (з'єднуючий всі потоки) і зворотний (рецикл) потоки.

Системи зі зворотним зв'язком можуть охоплювати групи послідовно й паралельно працюючих машин й апаратів (мал. 1.2). Для послідовно працюючих машин й апаратів рівняння зворотного зв'язку мають вигляд $x_1 = x_0 + \alpha y_n$, $y_0 = (1 - \alpha) y_n$, а для паралельно працюючих

$$\sum x_i = x_0 + \alpha \sum_{i=1}^n y_i, \quad (1.4)$$

$$y_0 = \sum_{i=1}^n y_i (1 - \alpha)$$

Величина α характеризує частку потоку, що повертає, і її називають *ступенем рециркуляції* ($0 \leq \alpha \leq 1$). Схеми зі зворотним зв'язком застосовують для підвищення якості й економічних показників роботи систем. Відношення зворотного технологічного потоку до головного називають коефіцієнтом відношення рециркуляції

$$R = \frac{y_p}{x_i} = \frac{y_p}{y_i} \quad (I = 1, 2, 3), \quad (1.5)$$

а коефіцієнтом рециркуляції - відношення головного потоку до вхідного або вихідного

$$k_R = \frac{x_1}{x_0} = \frac{x_1}{y_0} = \frac{1}{1 - R}, \quad (1.6)$$

де x_a , y_0 , $x_1 = x_2 = x_3$, y_p — масова витрата прямого вхідного, вихідного, головного й зворотного потоків.

Нами розглянуті різні підходи до складання математичного опису об'єктів технології харчових виробництв, які умовно ділять на

експериментальні й аналітичні. Цей поділ досить умовний тому, що постановці експерименту завжди передують певні теоретичні передумови якісного або кількісного характеру. Чисто аналітичні методи також вимагають експериментального визначення постійних у рівняннях математичного опису. Крім того, у системі рівнянь математичного опису частина рівнянь може бути отримана теоретично.

У загальному випадку при математичному описі технологічних процесів становлять рівняння переносу, збереження кількості руху, маси й енергії, визначають геометричні й фізичні характеристики системи, граничні й початкові умови. Звичайне число величин, що підлягають визначенню, більше числа рівнянь зв'язку між змінними. Тому частину величин варто задавати. Для фізичних систем при математичному описі в граничні умови часто включають й умови рівноваги.

Всі фізико-хімічні процеси в машинах й апаратах, де є потоки рідин або газів, в узагальненому виді можна описати системами рівнянь переносу кількості руху, енергії й маси

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial \tau} = - \left(\omega_x \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial \omega_x}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial \omega_x}{\partial z} \right) + \nu \Delta^2 \omega_x + \left(X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \right) ;$$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = - \left(\omega_x \frac{\partial t}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial t}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial t}{\partial z} \right) + \alpha \Delta^2 t + \frac{q}{\rho c_p} ; \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial c_i}{\partial \tau} = - \left(\omega_x \frac{\partial c_i}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial c_i}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial c_i}{\partial z} \right) + D_i \Delta^2 c_i + r_{iv} ;$$

де ω — проекції швидкостей на координати x, y, z ; P — тиск; Δ^2 — оператор Лапласа; t — температура; c_i — концентрація i -го компонента; ρ — густина речовини; r_{iv} — теплота фазового перетворення i -го компонента при постійному об'ємі; c_p — теплоємність речовини при постійному тиску; q — потік теплоти; α, ν, D_i — відповідно коефіцієнти температуропровідності, в'язкості й дифузії i -го компонента суміші; X — проекція масової сили на вісь x .

Наведені рівняння описують баланс кількості руху, поля температур і концентрацій у середовищі, що рухається. Для практичних розрахунків конкретних машин й апаратів наведену систему необхідно доповнити рівнянням нерозривності й визначити умови однозначності (форму й геометричні розміри системи, фізичні властивості рідини, початкові й граничні умови). Тому повний математичний опис конкретного об'єкта повинен включати системи наведених рівнянь й умови однозначності, що пов'язане зі зміною чисельних значень транспортних коефіцієнтів і фізичних властивостей рідини, швидкостей, температур і концентрацій.

Під системою в технології хімічних і харчових виробництв розуміють сукупність матеріальних тіл, зміна властивостей яких істотно впливає на технологічний процес. Характеристиками системи є експериментально обумовлені величини (об'єм, тиск, температура). Характеристичними функціями (характеристиками, що обчислюються) системи, що визначають її стан, вважають внутрішню енергію U , ентальпію H і енергію Гіббса G . Кожна з цих функцій виражається через незалежні змінні (параметри) системи. Для внутрішньої енергії незалежними параметрами є ентропія S і об'єм V , для ентальпії — ентропія S і тиск P , для енергії Гіббса — температура T і тиск.

Частинні похідні характеристичних функцій по числах молів компонентів N_i при інших постійних параметрах стану називають *хімічними потенціалами* цих компонентів

$$\frac{dU}{dN_i} = \frac{dH}{dN_i} = \frac{dG}{dN_i} = \mu_i, \quad (1.8)$$

де N_i — число молів i -го компонента.

Умови стійкої рівноваги визначаються мінімальними значеннями U , H і G в ізольованій системі. Число незалежних параметрів (число ступенів вільності) відповідно до правила фаз Гіббса дорівнює

$$G = n - \Phi,$$

де n , Φ — число компонентів і фаз системи.

У найбільш загальній формі умову рівноваги системи математично формулюють як рівність нулю повного диференціала параметрів стану, що визначають властивості речовини

$$dT = 0, \quad dP = 0, \quad dc_i = 0,$$

де $dT = 0$, $dP = 0$, $dc_i = 0$ — термічні, механічні й хімічні (концентраційні) рівноваги.

Закон збереження маси дуже часто представляють у вигляді рівняння нерозривності, для двох довільно обраних січних потоку рідини або газу

$$m_1 = m_2 = m = \text{const};$$

$$\rho_1 v_1 F_1 = \rho_2 v_2 F_2 = \rho v F = m = \text{const}. \quad (1.9)$$

Закон збереження енергії виражає й рівняння Бернуллі

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + h_w(m),$$

або в одиницях тиску (тому що $h = \frac{P}{\rho g}$)

$$\rho g z_1 + p_1 + \alpha_1 \frac{\rho v_1^2}{2} = \rho g z_2 + p_2 + \alpha_2 \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h, \quad (\text{Па}) \quad (1.10)$$

де z_1 — геометрична висота, м;

$$\frac{p_1}{\rho g} \text{ — пьезометрична висота, м;}$$

$$z_1 + \frac{p}{\rho g} \text{ — пьезометричний напір, м;}$$

$$\frac{\alpha v^2}{2g} \text{ — швидкісна висота, динамічний напір, м;}$$

$$h_\omega \text{ - втрати енергії, Па;}$$

α — коефіцієнт перерозподілу повітря ($\alpha > 1$).

Без врахування геометричної висоти (для газів) рівняння має вигляд

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + Hn \text{ ,}$$

де p_1 — абсолютний статичний тиск, Па;

$\frac{\rho v_1^2}{2}$ — динамічний тиск, Па;

$p_0 - \frac{\rho v^2}{2} = p_0$ — повний або загальний абсолютний тиск.

Всі мимовільні процеси у відповідності із другим законом термодинаміки супроводжуються збільшенням ентропії системи. В ізольованій системі ентропія в стані рівноваги досягає максимального значення, а $d = 0$. Використовуючи характеристичні функції, умови рівноваги будь-якої фізичної системи математично визначаються системою трьох рівнянь

$$d = Td - Pd + \sum_{i=1}^n \mu_i dN = 0;$$

$$d = Td - Vd + \sum_{i=1}^n \mu_i dN = 0 ; \tag{1.11}$$

$$d = -Sd + Vd + \sum_{i=1}^n \mu_i dN = 0 .$$

Закони Фіка й Фур'є розглядають як окремі випадки застосування загального принципу фізичних процесів, що полягають у роздільному розгляді рушійної сили процесів і його кінетичних характеристик. Наявність рушійної сили визначає можливість протікання процесу. Швидкість процесу (кінетичні характеристики) залежить від властивості системи.

Математичний опис включає теоретичні й емпіричні залежності, що містять такі параметри, які можуть бути невідомі на окремих етапах дослідження або відомі лише приблизно. Визначення граничних умов є фізичною задачею. Опис сам по собі не дає можливості судити про властивості об'єкта моделювання. Як ми вже відзначали, для вивчення об'єкта

варто чітко сформулювати задачу, вибрати метод рішення, скласти алгоритм і програму рішення на обчислювальній машині.

Ефективність функціонування ХТС можна підвищити збільшенням якості функціонування основних технологічних операторів, зміною технологічних зв'язків між існуючими технологічними операторами, введенням додаткових основних і допоміжних технологічних операторів і нових технологічних зв'язків.

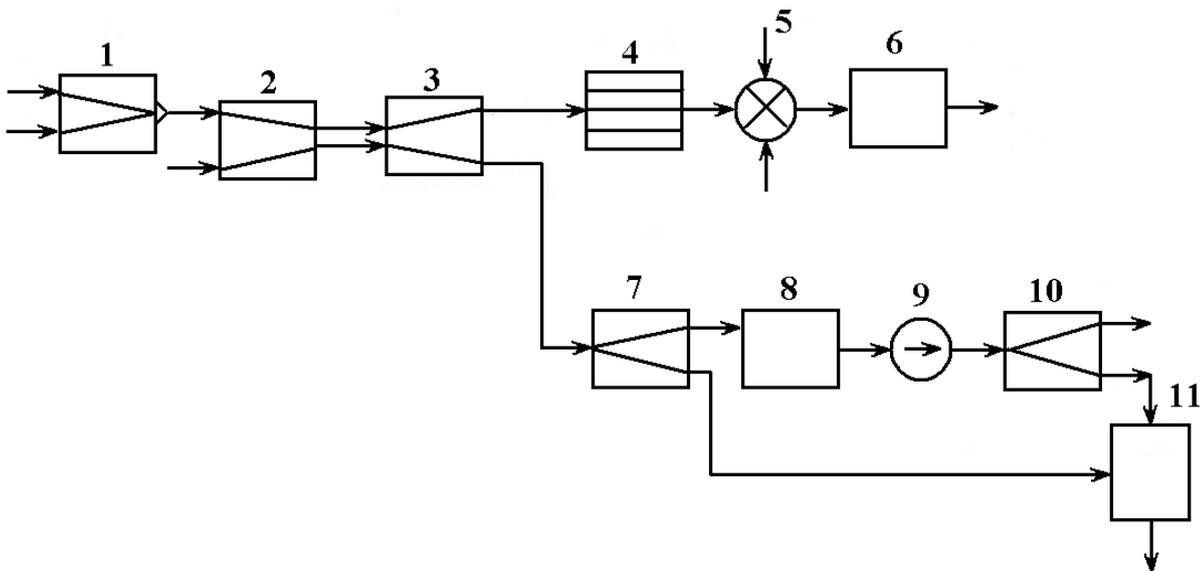


Рис. 1.4. Операторна схема очищення стічних вод млинів:
1,2 — мийна машина; 3 — зерноуловлювач; 4 — шнековий прес; 5 — сушарка; 6 — бункер відходів; 7 — тонкошаровий відстійник; 8 — зрівняльний бак; 9 — відцентровий насос; 10 — фільтр; 11 — мулонакоплювач.

Характер й особливості технологічних зв'язків ХТС зображують за допомогою узагальнених графічних або іконографічних моделей: технологічних, структурних, операторних і функціональних схем, які в узагальненому виді представляють різними видами графів.

Оскільки граф є топологічною фігурою, певні властивості якої інваріанти при взаємонеperервному і взаємооднозначному просторовому перетворенні, це дозволяє шляхом перетворень узагальнити й звести рішення різних технологічних задач до однієї або декількох прийомів і досягти великої наочності в зображенні

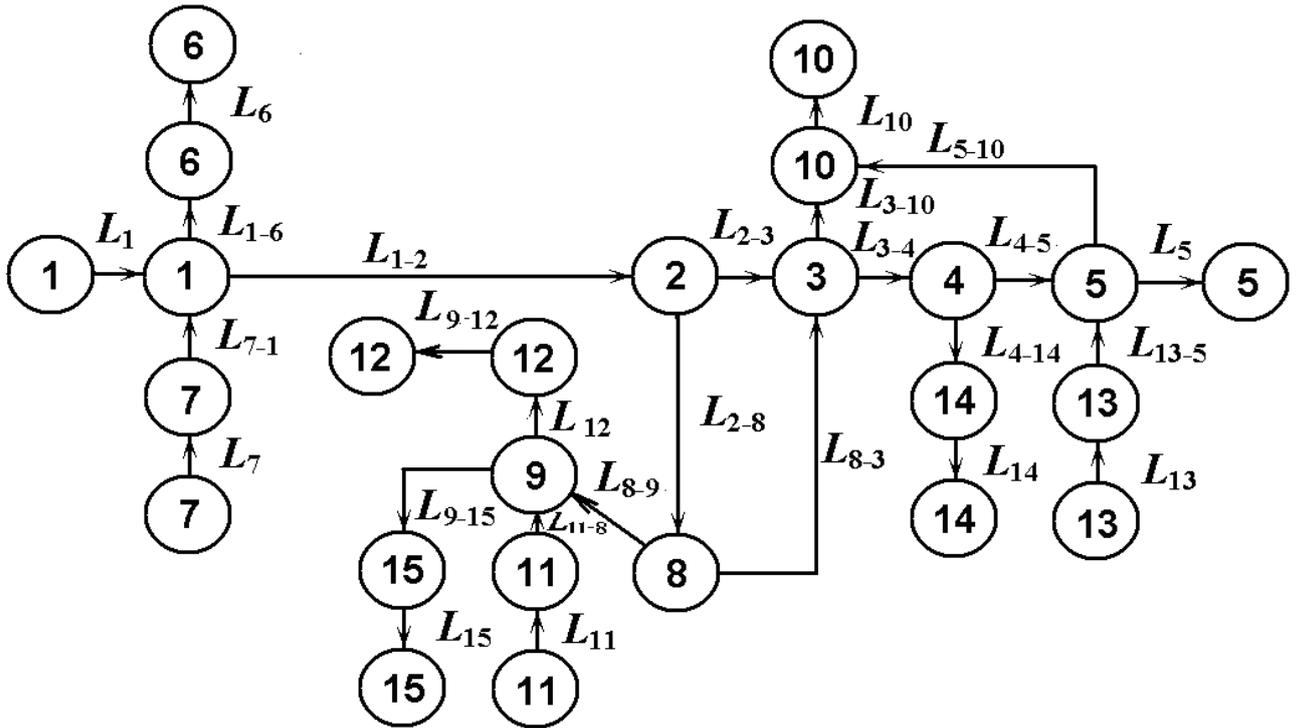


Рис. 1.5. Матеріальний поточковий граф системи очищення стічних вод.

Як приклад, складений математичний опис за допомогою теорії графів. Розглянемо технологічну схему очищення стічних вод млинів, представлену операторами (мал. 1.5). Матеріальний поточковий граф цієї системи (ХТС) сформується з вершин, що відповідають технологічним операторам або апаратам, у яких змінюються характеристики потоків і дуг, що відповідають матеріальним потокам. Матеріальний поточковий граф системи очищення стічних вод представлений на мал. (1.5), для якого складемо рівняння балансів $L_i = G_i c_i$ по потоках, об'єднаним у єдину систему

$$\left. \begin{aligned}
 1) & G_1 c_1 + G_{7-1} c_{7-1} - G_{1-6} c_{1-6} - G_{1-2} c_{1-2} = 0 \\
 2) & G_{1-2} c_{1-2} - G_{2-3} c_{2-3} - G_{2-8} c_{2-8} = 0 \\
 3) & G_{2-3} c_{2-3} + G_{8-3} c_{8-3} - G_{3-10} c_{3-10} - G_{3-4} c_{3-4} = 0 \\
 4) & G_{3-4} c_{3-4} - G_{4-5} c_{4-5} - G_{4-14} c_{4-14} = 0 \\
 5) & G_{4-5} c_{4-5} + G_{13-5} c_{13-5} - G_5 c_5 - G_{5-10} c_{5-10} = 0 \\
 6) & G_{1-6} c_{1-6} - G_6 c_6 = 0 \\
 7) & G_7 c_7 - G_{7-1} c_{7-1} = 0 \\
 8) & G_{2-8} c_{2-8} - G_{8-3} c_{8-3} - G_{8-9} c_{8-9} = 0 \\
 9) & G_{8-9} c_{8-9} - G_{9-15} c_{9-15} - G_{9-12} c_{9-12} - G_{11-9} c_{11-9} = 0 \\
 10) & G_{3-10} c_{3-10} - G_{10} c_{10} - G_{5-10} c_{5-10} = 0 \\
 11) & G_{11} c_{11} - G_{11-9} c_{11-9} = 0 \\
 12) & G_{9-12} c_{9-12} - G_{12} c_{12} = 0 \\
 13) & G_{13} c_{13} - G_{13-5} c_{13-5} = 0 \\
 14) & G_{14-14} c_{14-14} - G_{14} c_{14} = 0 \\
 15) & G_{9-15} c_{9-15} - G_{15} c_{15} = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

У результаті одержали 15 взаємозалежних рівнянь. Для встановлення послідовності їхнього рішення виділимо групи, що підлягають спільному рішення, проведемо декомпозицію матеріального потокового графа на підсистеми більш низького порядку й складемо матрицю суміжності вихідного потокового графа (табл. 1.1).

Аналіз матриці H показує, що одиничні рецикли відсутні (немає жодного елемента на головній діагоналі матриці).

Таблиця 1.1. Матриця суміжності вихідного потокового графа

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
H=	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	2	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	
	3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
	4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	8	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	
	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	11	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	13	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Рядки 6, 10, 12, 14 й 15 нульові, тобто вершини 6, 10, 12, 14 й 15 не мають зовнішніх вершин - «потоків», а нульові стовпці 7, 9, 11 й 13 означають відсутність внутрішніх вершин - «попередників». На цій підставі можна вважати, що вершини 6, 10, 12, 14 й 15 являють собою самостійні підсистеми, для яких рівняння (6), (10), (12), (14) і (15) розглядаються як початкові кроки обчислювальної процедури рішенням балансових рівнянь системи (1.12), вершини 7, 11, 13 також є самостійними підсистемами, отже, при рішенні системи рівнянь (1.12) рівняння (7), (11) і (13) є другим кроком обчислювальної процедури. З урахуванням цих перетворень матриця суміжності здобуває вид, представлений у табл. (1.2)

Аналіз матриці суміжності показав, що група вершин 2, 3, 4, 5, 8 й 9 утворить самостійну підсистему й наступний крок обчислень полягає в

спільному рішенні рівнянь (2), (3), (4), (5), (8) і (9). Отже, послідовність обчислень буде наступною:

Таблиця 1.2. Матриця суміжності вихідного потокового графа

	1	2	3	4	5	8	9
H=	2	0	1	0	0	1	0
	3	0	0	1	0	0	0
	4	0	0	0	1	0	0
	5	0	0	0	0	0	0
	8	0	1	0	0	0	1
	9	0	0	0	0	0	0

7 - 11 - 13;
 2 - 3 - 4 - 5 - 8 - 9 ;
 6 - 10 - 12 - 14 - 15 .

Рішенням системи рівнянь (1.12) можна визначити необхідний показник характеристик потоків у процесі очищення.

Концентрацію якогось компонента c_{ij} у заданому перерізі визначимо конкретним рівнянням

$$16) c_{1-2} = \frac{G_1 c_1 + G_{7-1} c_{7-1} - G_{1-6} c_{1-6}}{G_{1-2}};$$

$$17) c_{2-3} = \frac{G_{1-2} c_{1-2} - G_{2-8} c_{2-8}}{G_{2-3}};$$

$$18) c_{3-4} = \frac{G_{2-3} c_{2-3} + G_{8-3} c_{8-3} - G_{3-10} c_{3-10}}{G_{3-4}};$$

$$19) c_{4-5} = \frac{G_{3-4} c_{3-4} - G_{4-14} c_{4-14}}{G_{4-5}};$$

$$20) c_5 = \frac{G_{4-5} c_{4-5} + G_{13-5} c_{13-5} - G_{5-10} c_{5-10}}{G_5}$$

Підставляючи по черзі c_i з рівняння (16), (17) і т.д, і зробивши відповідні перетворення, визначимо концентрацію суспензії в будь-якому місці технологічної схеми.

Математичні описи моделей для пошуку оптимальних рішень засновані на принципах теорії оптимізації й будуть розглянуті нижче.

Для складання математичного опису широко використовують кінетичні рівняння, що описують зміни конкретних характеристик процесу в часі, тобто кінетику хімічних і біохімічних перетворень, тепло- і масообміну, здрібнювання, сепарування. Кінетичне рівняння має загальний вигляд

$$I = LX,$$

де I — швидкість процесу, L — кінетичний коефіцієнт; X — потенціал (для окремих класів явищ може бути представлений у вигляді відомих законів).

Для теплопровідності - законом Фур'є

$$Q = \lambda \frac{dt}{dx} \tau.$$

Для молекулярної дифузії – законом Фіка

$$G = D \frac{dc}{dx} \tau.$$

Для фільтраційного переносу - законом Дарси

$$G = k_1 \frac{dp}{dx} \tau \quad \text{або} \quad G = k_2 \frac{dz}{dx} \tau.$$

Для кількості руху (внутрішнє тертя) - законом Ньютона

$$F = \mu \frac{dv}{dx} \tau.$$

Для електропровідності - законом Ома

$$q_e = k_3 \frac{du}{dx} \tau.$$

Перенос кількості руху (внутрішнє тертя) - законом Ньютона

$$f = \mu \frac{dv}{dx} \tau.$$

У цих рівняннях відповідно Q , G , q_e , f кількість теплоти, маси, сили тертя, кількість електрики: λ , D , k_1 , k_2 , k_3 , μ - коефіцієнти теплопровідності, дифузії, фільтрації, тертя та ін. – є кінетичними коефіцієнтами;

$\frac{du}{dx}$; $\frac{dt}{dx}$; $\frac{dc}{dx}$; $\frac{dp}{dx}$; $\frac{dz}{dx}$; $\frac{dv}{dx}$ - градієнти концентрації, температури, швидкості,

напруги, які є потенціалами переносу.

Наведені кінетичні закономірності описують явища переносу тільки в якийсь певний момент часу в певній точці простору, тому що у зв'язку з нестаціонарністю технологічних процесів, що відбуваються у виробничих машинах й установках, градієнти й потенціали не залишаються постійними.

При стаціонарних явищах потенціали є постійними, а величина швидкості протікання явища залежить тільки від координати. Наприклад, при

потенціалі дифузії $\frac{dc}{dx}$ в одновимірному просторі друга похідна дорівнює нулю $\frac{d^2c}{dx^2} = 0$. Тоді відповідно до закону Фіка

$$\frac{dc}{dx} = p \frac{d^2c}{dx^2} ;$$

тобто також дорівнює нулю, що іноді розглядається як більш загальна ознака нестационарності явища.

При нестационарних явищах параметри змінюються в просторі й у часі. Стационарні й нестационарні явища варто відрізнити від сталих і несталих. Стале явище характеризується сталістю параметрів у кожній заданій точці виробничої установки, нестале характерне для періодів настроювання й при переході режимів.

Відзначимо, що знання полів швидкостей, температур, концентрацій і т.д., тобто наявність моделі, представляє принципову можливість рішення практичних задач. Найчастіше рішення настільки складне, що отриманою інформацією скористатися не вдається, оскільки поля ці є складними тривимірними структурами, описи яких містять функції трьох змінних, а при описі нестационарних процесів додається четверта змінна - час.

У нестационарних умовах явище молекулярної дифузії, що, наприклад, має місце при сушінні, описується рівнянням, відомим за назвою другого закону Фіка

$$\frac{dc}{dx} = D \frac{d^2c}{dx^2}. \quad (1.13)$$

Для того щоб одержати залежність концентрації в даній точці системи від часу, координати, фізичних властивостей $c = f(\tau, x, D)$, тобто вирішити це рівняння, треба задатися умовами однозначності. Наприклад, нехай дифузія протікає усередині нескінченної пластини товщиною l , а концентрація речовини в пластині в початковий момент розподілена рівномірно, тобто

$$\tau = 0, \quad c = c_0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (1.14)$$

У будь-який момент часу τ концентрація речовини, що дифундує, на границі поділу фаз дорівнює нулю

$$\tau = \tau_i; \quad x = 0; \quad x = l; \quad c = 0. \quad (1.15)$$

Дифузія в часі протікає при постійній температурі й коефіцієнті дифузії D , не залежить від концентрації й просторової координати (пластина ізотропна). Дифузія усередині пластинки не гальмується відводом речовини від її поверхні. Коефіцієнт дифузії усередині пластинки - істотна фізична константа явища

$$\tau = \tau_i; \quad c = c_0; \quad 0 \leq x \leq l; \quad D = \text{const}. \quad (1.16)$$

При цих умовах однозначності в результаті інтегрування наведеного рівняння одержимо

$$c = \frac{4c_0}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \sin \frac{(2m+1)\pi x}{l} \exp \left[\frac{-(2m+1)^2 \pi^2 D \tau}{l^2} \right]; \quad (1.17)$$

де $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

Загальна форма запису цього рівняння буде мати вигляд

$$c = (x, l, \tau, c_0, D). \quad (1.18)$$

Оскільки аргументи x, l, τ, c_0, D можуть приймати незліченну кількість значень, то значення концентрації будуть різними. Однозначне рішення можливе тільки при відомих значеннях аргументів. Сукупність чисельних значень умов однозначності має ознаку одиничного явища. Символічні позначення умов однозначності виділяють групу явищ, тобто спільність умов однозначності групи явищ.

Єдність механізму протікання - ознака класів явищ, єдність фізичної природи - ознака типу явищ.

При послідовному протіканні декількох явищ кінетичні коефіцієнти перетворюються. Наприклад, тепловіддача від рідини до стінки через одиницю поверхні в одиницю часу описується рівнянням

$$Q_1 = \alpha_1 (t_{\text{жк1}} - t_{\text{ст1}}). \quad (1.19)$$

$$\text{Теплопровідність через стінку} \quad Q_2 = \frac{\lambda}{\delta} (t_{\text{ст1}} - t_{\text{ст2}}). \quad (1.20)$$

$$\text{Тепловіддача від стінки до рідини} \quad Q_3 = \alpha_2 (t_{\text{ст2}} - t_{\text{жк2}}). \quad (1.21)$$

$$\text{Прирівнюючи } Q_1 = Q_2 = Q_3, \text{ одержимо } Q = Q_1 = Q_2 = Q_3 = k (t_{\text{жк1}} - t_{\text{жк2}}); \quad (1.22)$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \lambda$ і $k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}$ відповідно коефіцієнти тепловіддачі,

теплопровідності й теплопередачі.

У цьому випадку коефіцієнт теплопередачі є комбінацією коефіцієнтів тепловіддачі й теплопровідності.

Одночасне протікання декількох типів і класів взаємно впливаючих один на одного явищ, приводить до виникнення складних явищ, досліджуваних термодинамікою необоротних процесів. Накладення явищ різної природи приводить до того, що плин процесу характеризується новими кінетичними коефіцієнтами.

Відповідно до основних положень у термодинаміці необоротних процесів, будь-який потік виникає під дією всіх сил

$$I_i = \sum_{k=1}^n L_{ik} X_k \quad (i=1,2,3,\dots,n) \quad (1.23)$$

де L_{ik} — так звані власні феноменологічні коефіцієнти або взаємні коефіцієнти.

Наприклад, для двох необоротних явищ, що одночасно протікають, дифузії й теплопровідності феноменологічні рівняння мають вигляд

$$\begin{aligned} I_1 &= L_{11} X_1 + L_{12} X_2; \\ I_2 &= L_{12} X_1 + L_{22} X_2 \end{aligned} \quad (1.24)$$

де I_1 й I_2 — потоки маси й теплоти; X_1 і X_2 — градієнти концентрації й температури; L_{11} , L_{12} , L_{21} й L_{22} — коефіцієнти дифузії, термодифузії (ефект Смітті), дифузійної теплопровідності (ефект Дюфе) і теплопровідності.

На підставі теореми Онзагера запишемо

$$L_{ix} = L_{kl} \quad (i, k=l, 2, \dots, n). \quad (1.25)$$

Останнє рівняння називають співвідношенням взаємності Онзагера, з якого випливає, що якщо потік явища зазнає впливу від сили X_k явища k , те й потік явища k також зазнає впливу від сили X_i явища i за посередництвом того ж коефіцієнта L_{ik}

Хімічна кінетика. Швидкістю хімічної реакції називають число молекул, що реагують в одиницю часу. Для можливості порівняння швидкості різних реакцій число молекул відносять до одиниці об'єму. У зв'язку із цим, швидкості й реакції визначають як число молекул або молей даної речовини, що реагують в одиницю часу в одиниці об'єму.

Якщо в об'ємі V перебуває n молей речовини A , то концентрація c дорівнює $\frac{n}{V}$, а швидкість реакції v описується співвідношенням

$$v = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{n}{V} \right). \quad (1.26)$$

Формально швидкість реакції визначають як концентрацію реагуючої речовини за часом, узятую зі знаком «мінус», що означає, що в ході реакції концентрація реагентів убиває. Швидкість реакції вимірюють і по нагромадженню продукту реакції, а тому що в ході реакції концентрація продукту збільшується, то похідна $\frac{d}{d\tau} \left(\frac{n}{V} \right)$ позитивна.

З формули () треба, що

$$v = -\frac{1}{V} \frac{du}{d\tau} + \frac{u}{V^2} \frac{dV}{d\tau} \quad (1.27)$$

Якщо реакція протікає в ізохоричних умовах ($V = \text{const}$), то швидкість реакції визначаємо з виразу

$$v = \frac{1}{V} \left(\frac{dn}{d\tau} \right)_V = - \left(\frac{\partial c_n}{\partial \tau} \right)_V.$$

Якщо ж у ході реакції змінюється об'єм системи, то для розрахунку швидкості реакції необхідно знати явний вид функції $V(\tau)$ для обчислення похідної $\frac{dV}{d\tau}$ у формулі (). При розгляді кінетики хімічних процесів, у результаті яких об'єм реагуючої системи практично не змінюється, швидкість реакції типу $1 \xrightarrow{k} D$ можна записати

$$v = \frac{dc_D}{d\tau} \quad (1.28)$$

де c — концентрація продукту D .

Формула () визначає миттєву швидкість (тобто швидкість у цей момент часу) хімічної реакції.

Миттєву швидкість реакції при $\tau = 0$ називають *початковою*. Швидкості реакції в початковий і довільний моменти часу визначають по тангенсі кута нахилу в даній точці $v = \frac{dc}{d\tau} \tan \alpha$. У хімічній кінетиці іноді користуються поняттям середньої швидкості реакції v за інтервал часу $\Delta\tau$. Якщо в момент часу τ_1 концентрація продукту реакції була рівна c_1 , а в момент часу τ_2 рівнялася c_2 , тоді середня швидкість реакції v за інтервал часу $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$ визначається виразом

$$v = \frac{c_2 - c_1}{\tau_2 - \tau_1} = \frac{\Delta c}{\Delta \tau}. \quad (1.29)$$

Миттєва швидкість реакції являє собою межу значення середньої швидкості при $\tau = 0$, тобто $v = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta c}{\Delta \tau} = \frac{dc}{d\tau}$. (1.30)

Для розрахунку середньої швидкості за повний час протікання реакції τ_n користуються формулою

$$v = \frac{1}{\tau_n} \int_0^{\tau_n} v(\tau) d\tau. \quad (1.31)$$

У цьому випадку необхідно встановити кількісну залежність швидкості реакції від часу, тобто підібрати таку формулу, що правильно відбивала б залежність $v(\tau)$ на всьому протязі реакції.

Закон діючих мас є основним законом хімічної кінетики, відповідно до якого в самому загальному випадку можна прийняти, що швидкість хімічної

реакції v прямо пропорційна концентраціям реагуючих (діючих) речовин у деяких ступенях

$$v = k \prod_{\Delta=1}^m c_i^{r_i} , \quad (1.32)$$

де k — постійна (за даних умов), названа константою швидкості реакції; m — число речовин, що вступають у реакцію; c_i — концентрація i -го реагенту; r_i — порядок реакції по даній i -й речовині; Π — знак добутку.

При вивченні кінетичних закономірностей біохімічного каталізу встановлюють залежність швидкості (ферментативної реакції) від концентрацій ферменту, субстрату, активаторів, інгібіторів, а також фізико-хімічних факторів: температури, тиску, іонної сили, діелектричної проникності та ін.

Якщо виходити із припущення, що фермент спочатку утворить фермент-субстратний комплекс зі своїм субстратом, а потім цей комплекс розпадається зі звільненням фермент-продукта реакції, то рівняння, що враховує зміна концентрації субстрату, має вигляд

$$\frac{S_0 - S}{\tau} = v_{0\max} + \frac{k_m}{\tau} \ln \frac{S}{S_0} , \quad (1.33)$$

де $v_{0\max}$ — теоретична гранична початкова швидкість реакції при нескінченно великій концентрації субстрату; k_m — константа, що характеризує фермент і реакційну систему; S_0, S — відповідно початкова й миттєва концентрації субстрату.

Експериментально підтверджено, що між швидкістю реакції v_0 і концентрацією субстрату S_0 існує залежність

$$(v_{0\max} - v_0)(x + S_0) = const , \quad (1.34)$$

де x — постійна.

Математичне обґрунтування гіпотези про утворення фермент-субстратного комплексу, виходячи із припущення про існування термодинамічної рівноваги між вихідними речовинами (фермент, субстрат) і фермент-субстратним комплексом, було дано Л. Міхаеліса і М. Ментен. Вони розглядали наступну одноступінчасту ферментативну реакцію



Відповідно до принципу збереження концентрації речовини в реакції, загальна концентрація ферменту f_0 дорівнює сумі концентрацій вільного ферменту f і погодженого у вигляді фермент-субстратного комплексу fs

$$f_0 = f + fs , \quad (1.36)$$

а формула для константи рівноваги $k = \frac{k_1}{k_{-1}}$ для реакції $F + S \xrightarrow{k_1} FS$,

$$\text{має вигляд} \quad k = \frac{fs}{fS} \quad (1.37)$$

$$\text{звідки} \quad k = \frac{fs}{(f_0 - fs)S}. \quad (1.38)$$

Тоді для концентрації f фермент-субстратного комплексу одержимо

$$fs = \frac{f_0s}{\frac{1}{k} + S}. \quad (1.39)$$

Відповідно до кінетичної схеми й закону діючих мас, швидкість реакції v пропорційна концентрації фермент-субстратного комплексу, звідки з урахуванням рівняння для швидкості реакції одержимо

$$v = \frac{k_2 f_0 S}{\frac{1}{k} + S}. \quad (1.40)$$

Константа $k_s = \frac{1}{k} = \frac{k_{-1}}{k_1}$ називається константою Міхаеліса, вона має розмірність концентрації (звичайно моль/л). На початку реакції $S = S_0$, отже, $v = v_0$. Тоді рівняння для початкової швидкості реакції запишемо

$$v_0 = \frac{k_2 f_0 + S_0}{k_s + S_0} \quad (1.41)$$

Це рівняння називається рівнянням Міхаеліса—Ментен й є одним із самих фундаментальних рівнянь кінетики ферментативних реакцій.

Для опису біохімічних перетворень крім рівняння Міхаеліса—Ментен використовують й інші кінетичні співвідношення. Найбільше поширення одержали рівняння Моно й Моно - Ієрусалимського та ін.

У моделі Моно

$$\left. \begin{aligned} \frac{dc}{d\tau} &= \mu c \\ c &= c_0 + y(S_0 + S) \\ \mu &= \mu_m \frac{S}{k_s + S} \end{aligned} \right\}, \quad (1.42)$$

де c_0, c — початкова й поточна концентрації біомаси; S_0, S — початкова й поточна концентрації живильних речовин; μ_m, μ — максимальні й поточні питомі швидкості росту; y — емпіричний коефіцієнт; k_s — константа насичення Моно, тобто концентрація субстрату, при якій $\mu = 0,5\mu_{max}$

Модель Моно—Ієрусалимського відрізняється тим, що питома швидкість росту мікроорганізмів описується рівнянням

$$\mu = \mu_m \frac{S}{k_s + S} \frac{k_p}{k_p + P}, \quad (1.43)$$

де k_p — константа, що залежить від структури популяції; P — концентрація інгібруючого метаболіту.

Рівняння Моно - Ієрусалимського трохи модифікував П. И. Ніколаєв

$$\mu = \frac{\mu_{\max} S}{k_s + S} \frac{k_p}{P + k_p} = \frac{\mu_{\max} S}{k_s + S} \frac{k_{ps}}{k_{ps} + (S_0 - S)}, \quad (1.44)$$

де k_p — константа росту субстрату, чисельно рівна такій його кількості, у результаті засвоєння якого в одиниці об'єму живильного середовища утвориться концентрація продуктів обміну, що викликає зменшення швидкості росту мікроорганізмів до величини, рівній половині максимальної ($\mu = 0,5\mu_{\max}$).

Слід зазначити, що математичні описи не завжди з достатньою, для практичних розрахунків, точністю відбивають процеси мікробіологічного синтезу. Ці описи не враховують типу й послідовності апаратів, а також одночасно протікаючих процесів ферментативного гідролізу залишків крохмалю й розвитку популяцій мікроорганізмів, що мають місце в харчовій промисловості.

Кінетичні закономірності представлені у формі звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Однак можуть бути й інші форми рівнянь: алгебраїчні, трансцендентні та ін.

Формальні математичні записи відомих фізико-хімічних явищ можуть служити математичними описами процесів, що модулюються, у даній області рішення задачі, обмеженої в найпростіших випадках початковими й граничними умовами.

§ 2. Типові математичні моделі технологічних процесів

У машинах й апаратах харчових виробництв відбуваються різні явища, що відбивають механічне переміщення потоків, процеси переносу маси й енергії, а також хімічні й біохімічні перетворення. Для опису цих явищ застосовуються типові уніфіковані стандартні форми. У цей час установлено кілька стандартних форм опису гідродинамічних потоків, в основи яких покладені наближені подання про внутрішню структуру різних потоків. Типові математичні моделі мають однакові стандартні характеристики й тому все різноманіття потоків, що виникають у різних апаратах, може бути представлено декількома типовими моделями.

Типові моделі, їхні умовні позначки, математичні описи й характер відгуку на досліджуване східчасте й імпульсне збурювання наведені на мал. (). Типову модель підбирають на підставі попередніх відомостей про технологічні об'єкти. Для того щоб скористатися типовими математичними моделями, необхідно перевіряти адекватність моделі об'єкту. При цьому

знаходять параметри моделі, постійні коефіцієнти, а потім вирішують рівняння моделі при обраних початкових і граничних умовах. Підтвердженням можливості використання моделі є збіг з необхідною точністю даних, отриманих на моделі й об'єкті. Комбінуючи різні типи моделі, можна задовольнити умовам адекватності. Розглянемо типові моделі.

Типові моделі	Умовні позначення	Математичний опис	Характер відгука	
			Ступеневе збурення	Імпульсне збурення
Ідеального витиснення		$\frac{\partial c}{\partial \tau} = -v \frac{\partial c}{\partial x}$		
Ідеального зміщення		$\frac{dc}{d\tau} = \frac{V_c}{V} (c_{вх} - c)$		
Дифузійні однопараметрична		$\frac{\partial c}{\partial \tau} = -v \frac{\partial c}{\partial x} + D_L \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$		
двупараметрична		$\frac{\partial c}{\partial \tau} = -v \frac{\partial c}{\partial x} + D_L \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{D_R}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \frac{\partial c}{\partial R})$		
Коміркова		$\frac{1}{n} \frac{dc}{d\tau} = \tau_n (c_{i-1} - c_i)$		

Рис. 2.1. Типові моделі гідродинамічних потоків

Модель ідеального витиснення представляється як поршневий плин потоків без перемішування уздовж потоку при рівномірному розподілі субстанції (концентрації, температури) у напрямку, перпендикулярному руху.

Рівняння моделі можна одержати з наступних міркувань. Зміна концентрації речовини c в об'ємі ΔV у часі на ділянці $[x, x + \Delta x]$ при постійній швидкості руху потоку ($v = \text{const}$) і $\Delta x \rightarrow 0$ убутої концентрації речовини (знак «-») дорівнює

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = -v \frac{c_x - c_x + \Delta x}{(x + \Delta x) - x} = -v \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta c}{\Delta x}. \quad (2.1)$$

Перейшовши до похідної в правій частині, одержимо $\frac{\partial c}{\partial \tau} = v \frac{\partial c}{\partial x}$,

де c — концентрація речовини, кг/м³; τ — час, с; v — швидкість потоку; x — координата, м.

Модель ідеального витиснення є моделлю з розподіленими параметрами тому, що концентрація $c(\tau, x)$ змінюється в часі й просторі й широко використовується в харчовій технології при описі апаратів, що працюють за принципом витиснення (трубчасті теплообмінники та ін.). Застосування цієї

моделі виправдано при відношенні довжини труби до діаметра $\frac{l}{d} > 20$ і при числі Рейнольдса $Re > 2300$. У цих умовах поздовжнє перемішування незначне, турбулентний рух забезпечує рівномірний розподіл концентрації по перерізу апарата. Перевагою моделі є простота рішення й визначення параметрів моделі в реальних умовах.

В основу моделі ідеального зсуву (перемішування) покладено, що потік, який поступає в апарат, миттєво розподіляється по всьому об'ємі апарата внаслідок повного (ідеального) перемішування часток середовища, тобто $c_{\text{вх}} = c_{\text{вих}} = c$. Математичний опис моделі можна одержати виходячи з наступних припущень. У сталому режимі, коли $c_{\text{вх}} = \text{const}$ й об'ємні витрати речовини дорівнюють: $v_{\text{вх}} = v = v_c$, маса речовини в апараті не накопичується. При зміні концентрації речовини на вході, зміна маси в об'ємі V визначається зі співвідношення

$$\frac{dM}{d\tau} = G_{\text{вх}} - G_{\text{вих}},$$

де $M = cV$ — маса речовини в апараті, кг; V — об'єм апарата, м³; $G_{\text{вх}}$, $G_{\text{вих}}$ — потоки речовини на вході й виході, кг/с; v_c — об'ємна витрата потоку, м²/с.

З урахуванням наведених співвідношень останнє рівняння запишемо

$$V \frac{dc}{d\tau} = v_{c_{\text{вх}}} c - v_{c_{\text{вих}}} c,$$

а при рівних потоках на вході й виході

$$\frac{dc}{d\tau} = \frac{v_c}{V} (c_{\text{вх}} - c_{\text{вих}}).$$

Відношення $\frac{v_c}{V}$ характеризує середній час знаходження часток в апараті.

Модель ідеального змішування є моделлю із зосередженими параметрами, тому що основна змінна змінюється тільки в часі. Прикладом моделей ідеального перемішування можуть бути процеси, що відбуваються в різних машинах й апаратах в умовах інтенсивного перемішування (змішувачі, завантажувальні пристрої, апарати із псевдоожиженим шаром, процеси готування сумішей, розчинів та ін.).

Основою однопараметричної дифузійної моделі є модель ідеального витиснення, ускладнена зворотним перемішуванням, параметром якого служить коефіцієнт турбулентної дифузії або коефіцієнт поздовжнього перемішування D_L , м²/с, обумовлений з досліду. Модель складається при допущеннях, що зміна концентрації субстанції є безперервною функцією координати. Концентрація субстанції в даному перерізі постійна, об'ємна швидкість потоку й коефіцієнт поздовжнього перемішування не змінюються по довжині й перерізі потоку. При цих допущеннях модель описується диференціальним рівнянням виду

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = -v \frac{\partial c}{\partial x} + D_L \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

Двопараметрична дифузійна модель ураховує перемішування в поздовжньому й радіальному напрямках

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = -v \frac{\partial c}{\partial x} + D_L \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{D_R}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial c}{\partial R} \right) \quad (2.2)$$

де D_R — коефіцієнт поперечного перемішування, м²/с; R — лінійний розмір, що характеризує поперечний переріз, м.

При цьому коефіцієнти D_L й D_R не змінюються по довжині й перетину, а швидкість потоку v постійна.

Комірочна модель складається з ряду комірок, розташованих послідовно й без перемішування між комірками. Кожна комірка є моделлю ідеального перемішування. Параметром, що характеризує модель, служить число комірок.

Математичний опис комірочної моделі включає лінійне диференціальне рівняння першого порядку

$$\frac{1}{n} \frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{1}{\tau_i} (c_i - c_{i+1}) \quad ; \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, n,$$

де τ_i — час перебування в i -й комірці, с; c_i — концентрація в $(i - 1)$ -й і i -й комірках, кг/м³.

Число комірок n і коефіцієнт турбулентної дифузії при $n > 10$ зв'язані співвідношенням $n = \frac{vl}{2D_L}$ де l є визначальним лінійним розміром.

При $n = 1$ комірочна модель переходить у модель ідеального перемішування, а при $n = \infty$ — у модель ідеального витиснення.

Іноді більш зручним є опис у вигляді передаточних функцій. Для цього запишемо операторне рівняння, що відповідає моделі ідеального перемішування

$$pc_{\text{вих}}(p) = \frac{1}{\tau} [c_{\text{вх}}(p) - c_{\text{вих}}(p)]$$

або

$$W(p) = \frac{c_{\text{вих}}(p)}{c_{\text{вх}}(p)} = \frac{1}{\tau p + 1}.$$

У технологічних об'єктах відношення об'єму апарата до об'ємної витрати $\frac{V}{v_c}$ визначається як постійна часу, тобто $T = \frac{V}{v_c}$ умовний час зміни вихідної величини від початкового до нового сталого значення, якби ця зміна відбувалася з постійною й максимальною швидкістю для даного процесу.

Тут постійна часу відповідає середньому часу перебування часток в апараті. Тоді останнє рівняння запишеться

$$W(p) = \frac{1}{Tp + 1}.$$

При цьому неважко встановити, що модель ідеального перемішування є інерційною ланкою. Передаточна функція комірочної моделі буде мати вигляд

$$W_n(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p) = \frac{1}{(Tp + 1)^n} \quad (2.3)$$

Таблиця 2.2. Застосування комбінованих моделей

№	Вид моделі	Процес й апарат
1	Ідеальне перемішування із застійною зоною	Перемішування при поділі сипучих на ситах, у циклонах й ін.
2	Ідеальне витиснення із застійною зоною	Самотечі довгі, повітроводи й пневмотруби
3	Ідеальне перемішування із прослизанням	Перемішування з більшими швидкостями надходження речовин, обвідні потоки продуктів
4	Ідеальне витиснення із прослизанням	Насадочні апарати, обвідні потоки
5	Послідовне з'єднання зон ідеального витиснення й перемішування	Потоки в пневмотрубах і повітроводах; псевдоожигненні шари; потоки сипучих і рідких продуктів
6	Паралельно з'єднані зони ідеального витиснення й перемішування	Сушіння сипучих у киплячому шарі, машини й апарати з перемішуванням, системи пневмотранспорту, вентиляційні мережі
7	Різні сполучення ідеальних моделей з обводом і рециркуляцією	Потоки в самопливних трубах й інших видах транспорту при здрібнюванні, поділі сипучих продуктів

Дифузійні і комірочні моделі є нелінійними або реальними, на відміну від ідеальних лінійних моделей ідеального витиснення й ідеального змішування. Якщо не можна описати процеси типовими моделями, тоді застосовують

комбіновані моделі. При цьому приймають, що апарат складається з окремих зон, з'єднаних послідовно або паралельно, у яких спостерігається різна структура потоків: ідеальне витиснення, ідеальне перемішування, зона з поздовжнім перемішуванням та ін. Крім того, можуть спостерігатися різні байпасні й циркуляційні потоки, застійні зони. Наявність зазначених видів потоків установлюється по дослідних кривих залежності вихідної величини від вхідної при нанесенні східчастого, імпульсного або синусоїдального збурень. Збільшенням кількості таких зон можна описати процес будь-якої складності, однак при цьому ускладнюється математична модель. Приклади застосування комбінованих моделей наведені в табл. 2.2.

Використання типових математичних моделей значно скорочує витрати часу й спрощує процес складання математичного опису.

§ 3. Установлення структури типових математичних моделей

Задача оцінки структури моделі зводиться до визначення на виході з апарата кривої зміни концентрації речовини в часі після нанесення збурювання по потоці на вході.

Збурювальною дією може бути введення в апарат разом із поступаючим потоком не реагуючого із середовищем індикатора (трасера). У якості трасерів використовують інертні гази, солі, радіоактивні ізотопи й т.д. У результаті проходження сигналу (трасера) через апарат по реакції на його виході дають оцінку структури потоку і його моделі. Вхідний сигнал подають трьома способами:

1. При східчастому збурюванні змінюють східчасту вхідну величину до нового значення й одержують так звану вихідну *F*-криву.
2. При імпульсному збурюванні, миттєво змінюючи вхідну величину, одержують так звану вихідну *C*-криву.
3. При синусоїдальному збурюванні (зняття частотних характеристик) вхідну величину змінюють за законами гармонійного коливання й одержують на виході змінену по амплітуді й фазі синусоїду.

При стандартному дослідному сигналі на вході, графічне зображення *F*-кривої і *C*-кривої звичайно представляють у безрозмірних координатах. Для цього концентрацію із трасера в потоці на виході відносять до його початкової концентрації й по осі ординат відкладають значення $F_{кр} = \frac{c}{c_0}$.

Вісь абсцис представляє безрозмірний час $\Theta = \frac{\tau}{\tau_c}$, де τ — реальний час, а $\tau_c =$

$\frac{V}{v_c}$ — середній час перебування часток у потоці апарата. Типові форми *F*-кривих і *C*-кривих зображені на мал. (), звідки випливає, що показник $F_{кр}$ у потоці на виході змінюється від 0 до 1. *F*-крива є тимчасовою характеристикою об'єкта і її вид визначається структурою потоку в апараті.

При імпульсній подачі індикатора на вхід, на виході знімається *C-крива* (імпульсна характеристика). Зв'язок між імпульсними характеристиками, представленими в безрозмірному й натуральному часі, визначається співвідношенням $C(\Theta) = \tau_c C(\tau)$. Вид *C-кривої* визначається структурою потоку в апараті.

Функцію розподілу часу перебування $C(\tau)$, що характеризує частку індикатора (трасера) у вихідному потоці, що перебуває у системі менше τ , визначають по формулі

$$C(\tau) = \frac{1}{\tau} \frac{c}{c_0} = \frac{c}{\sum c \Delta \tau} ;$$

де $\Delta \tau$ — інтервал відбору проб; c_0 — початкова концентрація трасера на вході в апарат.

У безрозмірному часі перебування $\Theta = \frac{\tau}{\tau_c}$ *C-криву* будують аналогічно *F-кривій*.

Зв'язок між *F-кривою* й *C-кривою* виражається співвідношенням

$$\frac{dF_{кр}}{d\tau} = C_{кр}(\tau) \quad (3.1)$$

На мал. () представлені характеристики відгуків стандартних збурень, що відповідають типовим моделям потоків.

З аналізу графіків *F-кривій* і *C-кривій* моделі ідеального витиснення випливає:

а) якщо на вхід об'єкта зі структурою ідеального витиснення надійде збурювання у вигляді стандартного сигналу $c_{вх}(\tau) = 1(\tau)$ або $C_{вх}(\tau) = \delta(\tau)$, тоді функція $c_{вх}(\tau)$ відповідно виразиться рівняннями:

$$\begin{aligned} F_{кр}(\tau) &= 1(\tau - \tau_c) \\ C_{кр}(\tau) &= \delta(\tau - \tau_c) \end{aligned}$$

б) якщо при стандартному східчастому $c_{вх}(\tau) = I(\tau)$ або імпульсному $C_{вх}(\tau) = \delta(\tau)$ вхідному сигналі на виході потоку вони повторюються зі зрушенням у часі, те це свідчить про те, що потік відповідає моделі ідеального витиснення.

Для об'єкта, представленого моделлю ідеального перемішування, *F-крива* й *C-крива* мають вигляд:

$$\begin{aligned} F_{кр}(\tau) &= (1 - e^{-\tau/\tau_c}); \\ C_{кр}(\tau) &= \frac{1}{\tau} e^{-\tau/\tau_c} \end{aligned}$$

Для комірочної моделі каскаду реакторів на підставі останнього рівняння одержимо

$$n = 1C_{kp}(\tau) = \frac{1}{\tau_{1c}} e^{-\tau/\tau_{1c}}$$

$$n = 2C_{kp}(\tau) = \frac{1}{1!} \left(\frac{\tau}{\tau_{1c}} \right) \frac{1}{\tau_{1c}} e^{-\tau/\tau_{1c}} ;$$

$$n = 3C_{kp}(\tau) = \frac{1}{2!} \left(\frac{\tau}{\tau_{1c}} \right)^2 \frac{1}{\tau_{1c}} e^{-\tau/\tau_{1c}}$$

У загальному виді для комірочної моделі

$$C_{kp}(\tau) = \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{\tau}{\tau_{1c}} \right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\tau_{1c}} e^{-\tau/\tau_{1c}}$$

Зв'язок між F -кривою й C -кривою визначиться

$$F_{kp}(\tau) = \int_0^{\tau} C_{kp}(\tau) d\tau$$

Частотні характеристики визначаються циклічним введенням в апарат трасера з певною частотою. При цьому на вході й виході синусоїди зрушені по амплітуді й фазі.

Частотний аналіз дозволяє замінити тимчасові функції частотними, за допомогою операторного методу Лапласа. Якщо вихідну змінну, перетворену за Лапласом $C_{вих}(p)$, віднести до перетвореного за Лапласом вхідної змінної $C_{вх}(p)$, то одержимо передаточну функцію об'єкта

$$W(p) = \frac{C_{вих}(p)}{C_{вх}(p)} = \frac{a}{A} e^{-j\varphi}$$

де $\frac{a}{A}$ — відношення амплітуди коливань вихідного й вхідного сигналів; φ — зрушення по фазі вихідного сигналу в порівнянні із вхідним; $j = \sqrt{-1}$ — уявне число.

Побудувавши передаточну функцію в широкому діапазоні частот, можна одержати діаграму частотних характеристик, що порівнюється з діаграмою відомих частотних характеристик типових моделей апаратів.

Для моделі ідеального перемішування, беручи до уваги, що $c_{вх}(\tau) = c_{вих}(\tau)$, одержимо:

$$p c_{вих}(p) = \frac{1}{\tau_c} [c_{вх}(p) - c_{вих}(p)]$$

$$W(p) = \frac{c_{вих}(p)}{c_{вх}(p)} = \frac{1}{\tau_c p + 1} = \frac{1}{Tp + 1}$$

де $T = \frac{V}{v_c}$.

Із цього виразу неважко встановити, що модель ідеального перемішування являє собою періодичну ланку першого порядку.

Застосувавши перетворення Лапласа до рішення рівняння моделі ідеального витиснення, одержимо диференціальне рівняння першого порядку

$$p\Phi(x, p) = -v \frac{d[\Phi(x, p)]}{dx}. \quad (3.2)$$

Загальний вид рішення цього рівняння

$$\Phi(x, p) = \lambda e^{-\frac{p}{v}x};$$

де $\Phi(x, p)$ — зображення рішення вихідного диференціального рівняння за Лапласом; λ — постійна інтегрування.

Записавши початкові й граничні умови $\tau = 0$, $x = 0$ та $x = l$ (довжина апарата) і підставивши їх в останній вираз, одержимо

$$\Phi(x, p) = \Phi(0, p) e^{-p \frac{l}{v}}$$

Це рівняння дозволяє знайти зображення функції в будь-якому перерізі апарата. Зокрема, для $x = l$ з нього можна одержати передаточну функцію моделі ідеального витиснення

$$W(p) = \frac{\Phi(l, p)}{\Phi(0, p)} = e^{-p\tau}$$

яка відповідає ланці чистого запізнювання, з часом запізнювання, рівним $\tau = \frac{l}{v}$ [1].

Типові моделі застосовують до детермінованих процесів та їхніх моделей, тобто до процесів, значення параметрів яких визначаються однозначно в будь-які моменти часу. Для тих процесів, характеристики яких у будь-які моменти часу й у будь-якій точці апарата є випадковими величинами, тобто для індетермінованих процесів, поряд з розглянутими методами й типовими моделями повинні бути застосовані статистичні моделі, засновані на теорії випадкових процесів. При цьому для частини випадкових величин можна застосувати імовірнісний підхід, що дозволяє замінити деяку досить більшу частину випадкових значень величин їхніми ймовірностями. Чисто випадкова частина, що залишилася, індетермінованих значень не визначається й пророчити її значення неможливо.

При розгляді реальних технологічних процесів необхідно враховувати всі три підходи до моделювання: детермінований, імовірнісний і чисто випадковий. У багатьох випадках обмежуються тільки розглядом детермінованої частини процесу, коли імовірнісна й чисто випадкова частина незначні.

Для деяких технологічних процесів харчових виробництв (наприклад, прийом сировини, випуск готової продукції та ін.) елемент чистої випадковості малий й головне значення має імовірнісна частина, на основі якої можна побудувати статистичні математичні моделі технологічних

процесів. Технологічні процеси, для яких мають велике значення чисто випадкові впливи, практично є керованими або некерованими системами.

Реальні технологічні процеси, як правило, завжди комбіновані. Тому для їхнього вивчення поєднують всі три підходи. Детерміновану частину, що піддається точному розрахунку, досліджують теоретичними методами, імовірнісну - визначають за тривалим спостереженням за процесом або спеціальною постановкою експерименту. При цьому необхідно виділити чисто випадкову частину, що принципово не піддається ніякому врахуванню.

Хвилі чисто випадкових впливів визначають спеціальними методами, розгляд яких у нашу задачу не входить. Ці методи застосовують в основному для підвищення надійності систем.

У стаціонарних технологічних процесах імовірнісні характеристики постійні й зі збільшенням проміжку часу мають більш точні значення на відміну від нестаціонарних, у яких імовірнісні характеристики змінюються в часі.

На відміну від детермінованих, імовірнісні характеристики неможливо одержати на підставі прямих вимірювань, а тільки шляхом обробки сукупності випадкових подій.

При математичному моделюванні технологічних процесів харчових виробництв використовують всі перераховані методи й підходи до складання моделей. При цьому детермінований підхід з імовірнісним сполучається, як правило, рідко.

Найбільш ефективні математичні моделі побудовані на модульних принципах. Показник якості модуля може мати наступне вираження

$$R_i = m_1 k_i + m_2 p_i - m_3 l_i$$

де m_1 , m_2 , m_3 — коефіцієнти вагомості, обумовлені кваліметричними методами; k_i — кратність повторення i -го модуля в алгоритмах; p_i — розмірність модуля; l_i — надмірність, з якої покриваються i -м модулем задані алгоритми.

Очевидно, що кращим модулем буде такий, котрий має максимальну розмірність, високу кратність повторення й малу надмірність.

§ 4. Класифікація математичних моделей технологічних процесів

Математичні моделі технологічних процесів можна розділити або класифікувати, тобто визначити їхню належність до якоїсь множини по різних ознаках, що характеризує особливості процесів, характеристики технологічного устаткування, а також загальної й специфічної властивості математичних моделей. Відповідно до вимог теорії класифікації кожного її шабля повинна відповідати якась класифікована ознака, а класифікація повинна бути вичерпною й класифікація, що виключає. Цим вимогам може відповідати кілька класифікаційних схем. Оскільки математичне моделювання в технології в основному має практичну спрямованість, то в основу класифікації повинні бути покладені типи розв'язуваних задач. У

зв'язку із цим викладемо принципи класифікації математичних моделей стосовно до особливостей рішення задач технології харчових продуктів. Відповідно до прийнятих принципів системного підходу математичні моделі по призначенню були розділені на чотири класи: 1) розкриття механізму явищ; 2) удосконалювання технологічних режимів; 3) розробка конструкцій агрегатів; й 4) систем керування [12].

Математичне моделювання застосовують для рішення прямих, зворотних (інверсних) і індуктивних задач. Пряма задача в термінах системного аналізу полягає у визначенні реакції системи (вихідних параметрів) по відомих силах (вхідним параметрам, що збурювальним впливам та ін.). Умовне зображення системи або її елемента (технологічного оператора) наведено на мал. (). Стосовно до технологічних процесів до такого роду задачам віноситься встановлення кінетичних закономірностей, статичних і динамічних характеристик. Під кінетикою розуміють зміну якогонебудь параметра в часі. Статичною характеристикою називають зміну вихідних параметрів від вхідних, динамічною - зміну вихідної характеристики в часі при нанесенні стандартного дослідного збурювання (східчасте, імпульсне та ін.) на вході.

Статичною характеристикою об'єкта називають математичну залежність

$$y(\tau) = f[x(\tau)];$$

між вхідною й вихідною координатами на відріжку часу, коли всі похідні функції $x(\tau)$ і $y(\tau)$ тотожні, дорівнюють нулю (множина статичних або рівноважних станів). Найчастіше статичні характеристики мають таку форму:

$$y_i f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

або

$$y_i = f(x_1) \quad x_2 = \text{const} \dots x_n = \text{const},$$

$$y_2 = f(x_2) \quad x_1 = \text{const} \dots x_u = \text{const} \quad \text{і т.д.}$$

Математичний запис динамічної характеристики визначається видом збурювання. Наприклад, імпульсна, або вагова, функція $K(\tau)$ визначається як зміна в часі вихідної координати $y(\tau)$ при вхідному збурюванні типу дельта-функції $\delta(\tau)$

$$\delta(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \neq 0 \\ \infty, & \tau = 0 \end{cases}.$$

Після перетворення за Лапласом $L\{\delta(\tau)\} = 1$ одержимо передаточну функцію об'єкта, рівну одиниці.

Перехідна функція $h(\tau)$ зв'язана інтегральним співвідношенням з імпульсною функцією $K(\tau)$

$$h(\tau) = \int_0^{\tau} K(\tau) d\tau.$$

Імпульсну функцію $K(\tau)$ обчислюють шляхом диференціювання перехідної функції $h(\tau)$

$$K(\tau) = \frac{dh(\tau)}{d\tau}.$$

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ НАГРІВАННЯ Й ОХОЛОДЖЕННЯ ХАРЧОВИХ ПРОДУКТІВ

§ 5. Загальні принципи рішення задач розрахунку теплообмінників з використанням моделей

Для нагрівання й охолодження рідин, газів і сипучих продуктів у харчовій промисловості широко використовують різні теплообмінні апарати, які можна класифікувати по призначенню, контакту теплоносіїв, принципу дії, конструктивним особливостям, продуктивності, місцю в технологічній схемі та ін. По виду контакту теплоносіїв теплообмінники розділяють на рекуперативні й регенеративні. У рекуперативних теплообмінниках холодний і гарячий теплоносії розділені перегородкою, а в регенеративних - та сама поверхня обмивається поперемінно холодним і гарячим теплоносіями. Стінка при цьому поперемінно нагрівається й охолоджується. Для нагрівання - охолодження сипучих продуктів і газів використовують теплообмінники, які часто є регенеративними.

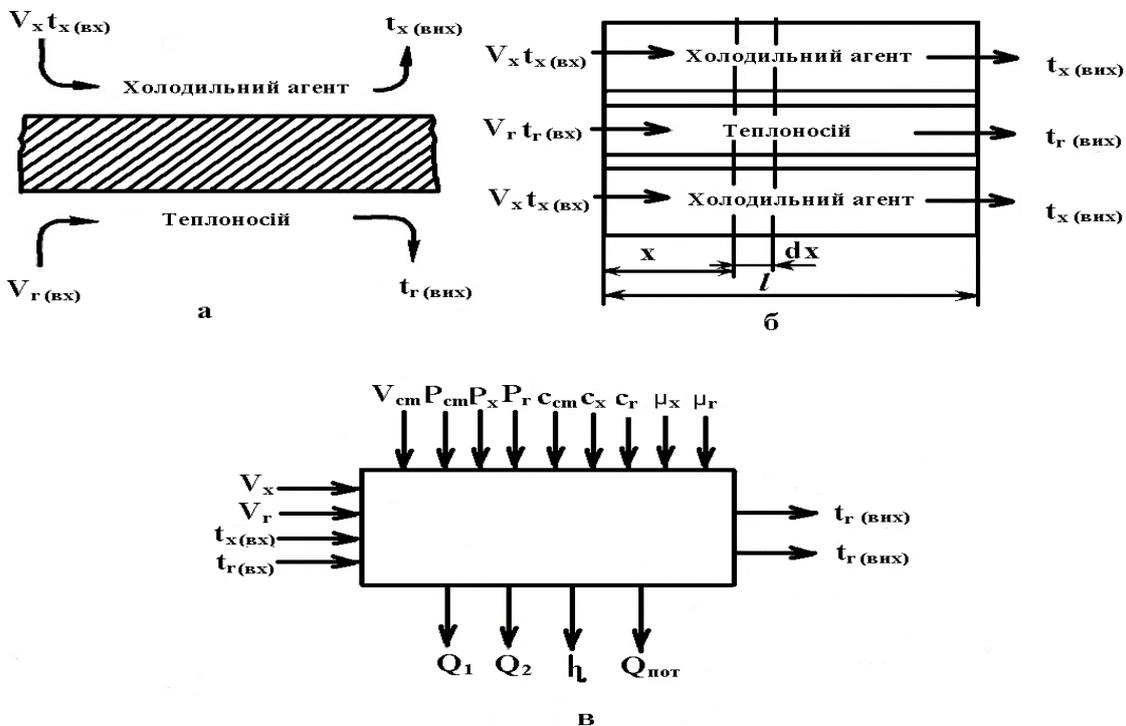


Рис. 5.1. Схеми : а - процесу теплообміну; б - елемента теплообміну; в - параметрична.

При складанні математичних моделей теплообмінники класифікують за формою або видом математичного опису.

Схема процесу теплообміну в рекуперативному теплообміннику з прямотоком наведена на мал. (), схема елемента рекуперативного теплообмінника із прямотоком «труба в трубі» — на мал. (), а параметрична схема — на мал. ()

Процес теплообміну в рекуперативному теплообміннику визначається вхідними параметрами: витратами холодного V_x і гарячого V_r , теплоносія, їхніми температурами t_x (вх) і t_z (вх), а також фізичними властивостями: теплоємністю c_x і c_z , щільністю ρ_x й ρ_r , в'язкістю μ_x й μ_r та ін. На процес теплообміну впливають геометричні характеристики перегородки (стінки): маса G_{CT} , об'єм V_{CT} , густина ρ_{CT} , теплоємність c_{CT} і теплопровідність λ_T . Вихідними характеристиками процесу теплообміну є температури холодного й гарячого агентів $t_{x(вих)}, t_{z(вих)}$ та їхні фізичні властивості, що змінилися в результаті нагрівання - охолодження. Характеристиками процесу можуть бути кількість теплоти, переданої від гарячого теплоносія до стінки Q_1 , втрати теплоти в навколишнє середовище $Q_{ном}$ і кількість теплоти, сприйнята холодним агентом Q_2 , коефіцієнт корисної дії η , вартість нагрівання одиниці маси рідини E_1 та ін.

При математичному описі теплообмінних процесів використовують рівняння матеріального й енергетичного балансів, руху рідинних і газових потоків, а також теплопередачі. Процес теплообміну можна представити типовими математичними моделями: ідеального перемішування, ідеального витиснення, комірочної, дифузійною та їхніми різними комбінаціями.

Рівняння теплообміну використовують для опису передачі теплоти від рідини (газу) до стінки або від стінки до рідини (газу)

$$Q = \alpha F \tau \Delta t ;$$

де τ — час передачі теплоти, с; Δt — різниця температур між стінкою t_{CT} і рідиною (газом) t_z

Рівняння теплопровідності використовують для опису потоку теплоти через перегородку (стінку)

$$Q = \lambda_T F \tau \Delta t ;$$

де λ_T — коефіцієнт теплопровідності, Вт/(м • К).

Рівняння для визначення втрат напору

$$\Delta p = \Delta p_{Tp} + \Delta p_{м.с.} = \left(\frac{\lambda' l}{d} + \sum \xi \right) \frac{\rho v^2}{2} ;$$

де Δp — загальні втрати напору, Па; Δp_{Tp} — втрати напору по довжині труби, Па; $\Delta p_{м.с.}$ — втрати напору місцевих опорів, Па; l — довжина труб, м; ρ — густина теплоносія, кг/м³; d — внутрішній діаметр труб, м; ξ — коефіцієнти місцевих гідравлічних опорів; λ' - коефіцієнт опору, що для шорсткуватих труб визначається по формулі

$$\lambda' = 0,14 \sqrt{\varepsilon \left(\frac{\text{Pr}_{\text{ст}}}{\text{Pr}} \right)^{\frac{1}{3}}};$$

де $\text{Pr}_{\text{ст}} = \frac{\mu c}{\lambda}$ критерій Прандтля при температурі стінки; Pr — критерій Прандтля при середній температурі середовища; μ — коефіцієнт динамічної в'язкості середовища, Па • с; c — питома теплоємність середовища, Дж/(кг • К).

При зображенні теплообмінника моделлю ідеального перемішування приймають, що розподіл температур обох теплоносіїв у повному обсязі рівномірний (зосереджений параметр), тобто

$$t_{\text{cp}} = \frac{(t_{\text{вх}} - t_{\text{вих}})}{2},$$

а залежність між зміною температур кожного теплоносія на вході й виході має вигляд

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial t_r}{\partial \tau} &= \frac{V_r (t_{r(\text{вх})} - t_{r(\text{вих})})}{V_{\text{наг}}}; \\ \frac{\partial t_x}{\partial \tau} &= \frac{V_x (i_{x(\text{вих})} - t_{x(\text{вх})})}{V_{\text{ох}}}; \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

де V_r, V_x — об'ємні витрати гарячого й холодного теплоносіїв, м³/с; $V_{\text{наг}}, V_{\text{ох}}$ — об'єми камер нагрівання й охолодження, м³.

Зображення процесу теплообміну моделлю ідеального перемішування припустимо за умови, якщо відношення різниці температур гарячого й холодного теплоносіїв на вході й виході дорівнює або менше двох

$$\frac{t_{r(\text{вх})} - t_{r(\text{вих})}}{t_{x(\text{вих})} - t_{x(\text{вх})}} \leq 2. \quad (5.2)$$

У цьому випадку при визначенні поверхні теплообміну одержують трохи завищене її значення.

При зображенні теплообмінника моделлю ідеального витиснення враховують зміну температури теплоносіїв по довжині

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = -v \frac{\partial t}{\partial x}; \quad (5.3)$$

де v — швидкість теплоносія, м/с; x — координата (довжина) теплообмінника, м.

При зображенні теплообмінника комірочною моделлю, його розбивають на ділянки (комірки) і кожну ділянку описують моделлю ідеального перемішування. При цьому температури теплоносіїв на межах комірок вважають вхідними й вихідними. Вхід i -ї комірки є виходом для $(i-1)$ -ї комірки. У цьому випадку обов'язково повинне виконуватися для кожної комірки умова, обумовлена рівнянням ().

Для дослідження теплообмінника за допомогою дифузійних багатопараметричних моделей за основу беруть рівняння () з врахуванням граничного й поперечного переносу теплоти. Подання теплообмінника комбінованими моделями вимагає поділу його на окремі з'єднані послідовно або паралельно елементи (зони), кожний з яких представляють однаковими або різними моделями.

При дослідженні процесу теплообміну найчастіше вирішують наступні задачі:

1. Установлюють залежність температур теплоносіїв на виході від зміни температур і витрат теплоносіїв на вході в сталих режимах (ряд послідовно сталих рівноважних станів), тобто встановлюють кінцеві температури теплоносіїв.

2. Визначають залежності вихідних температур теплоносіїв від різних вхідних параметрів, зовнішніх умов, накипу, забруднень при сталих і перехідних режимах.

3. Розраховують величину поверхні теплообміну при заданих межах зміни вхідних і вихідних змінних.

4. Визначають динамічні характеристики теплообмінників, тобто встановлюють закономірності зміни вихідних параметрів (найчастіше температур теплоносіїв) у часі при стандартних дослідних впливах на вході (східчастий, імпульсний та ін.). Ця задача вирішується звичайно при синтезі систем автоматичного керування.

5. Знаходять оптимальні умови роботи теплообмінника залежно від обраного критерію оптимальності.

Остання задача є найбільш складною й відрізняється різноманіттям у зв'язку з вибором різних критеріїв оптимальності, різних форм вихідних рівнянь і методів рішення.

Як критерії оптимальності, можуть бути прийняті площа теплообміну, маса, об'єм, коефіцієнт корисної дії, відношення теплового потоку до енергії, витраченої на подолання гідравлічних опорів. Ці часткові або узагальнені характеристики теплообмінника відбивають окремі сторони процесу нагрівання - охолодження. Основною вимогою до роботи теплообмінників є висока економічність, а критерієм оптимальності можуть бути інтегральні (економічні) показники.

Одним з основних показників порівняльної економічної ефективності технологічних процесів є наведені витрати

$$Z = C_T + KE_H = C_T + \frac{K}{T_H}; \quad (5.4)$$

де C_T — собівартість виробництва готової продукції; K — капітальні вклади у виробничі фонди; $E_H = \frac{1}{T_H}$ — нормативний коефіцієнт ефективності капітальних вкладів; T_H — нормативний строк окупності капітальних вкладень.

Стосовно до процесу нагрівання — охолодження наведені витрати варто віднести до одиниці маси продукту, що підігривається або охолоджуваного

продукту. Тоді вони будуть представляти витрати в рублях на одиницю маси або об'єму продукту, що підігрівається або охолоджуваного на 1°C продукту.

У спрощеному вигляді ці питомі приведені витрати можна визначити по формулі

$$z = \frac{(1 + \alpha)\tau T_c}{G(t_k - t_H)} + \frac{(k_0 + k_a)C_T}{G(t_k - t_H)} + \frac{G_n C_n + G_e C_e + G_B C_B + G_x C_x}{G(t_k - t_H)}; \quad (5.5)$$

де α — загальний норматив відрахувань на премії, заробітну плату й соціальне страхування; τ — період (час) роботи; T_c — середня погодинна тарифна ставка робітників; k_0 — норматив відрахувань на поточний ремонт, зміст й експлуатацію теплообмінника; k_a — норматив амортизаційних відрахувань; C_T — ціна теплообмінника; собівартість C_n , C_e , C_B , C_x — собівартість одиниці пари, електроенергії, води й холоду; G — погодинна витрата охолодженого продукту та продукту, що підігрівається; t_H , t_k — початкові й кінцеві температури охолоджуваного продукту та продукту, що підігрівається.

При розрахунку питомих витрат на охолодження варто поміняти місцями t_k й t_H , тобто знаменник повинен бути позитивним. У цій формулі не враховані капітальні, експлуатаційні витрати на будинки, спорудження й інвентар. При розрахунку витрат на електроенергію, варто ще враховувати плату не тільки за споживану електроенергію, але й за встановлену потужність електродвигунів або інших електроустановок.

З наведеної формули можна встановити, що вона має властивості адитивності, тобто зниження витрат по кожній складовій приводить до зниження наведених витрат. Отже, оптимальних (у цьому випадку найменших) витрат можна досягти на основі оптимізації приватних або узагальнених показників. Тоді оптимізація теплообмінника може бути представлена послідовно й однозначно процедурою, що виконується у вигляді алгоритму.

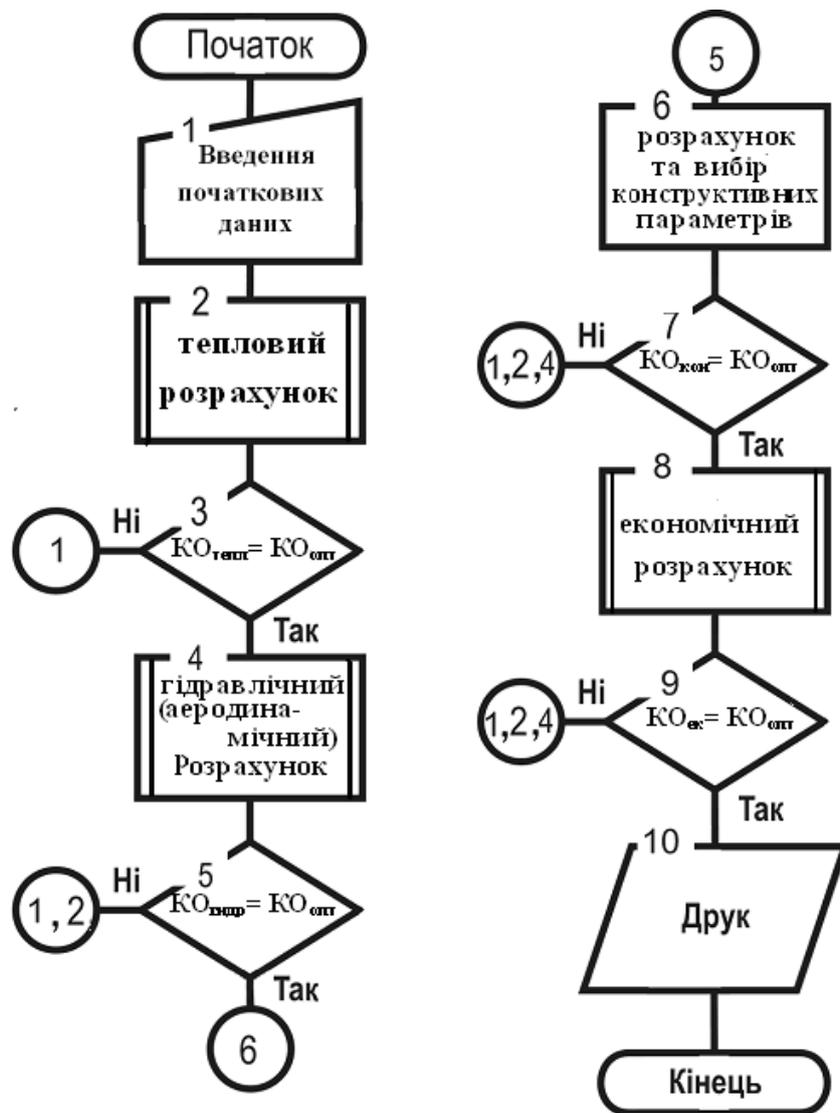


Рис. 5.2. Структурна схема узагальненого алгоритму розрахунку теплообмінника.

Структурна схема узагальненого алгоритму оптимізації наведена на мал. (5.2) і включає послідовно виконувані операції теплового, гідравлічного, конструктивного й економічного розрахунку (блоки 2, 4, 6 й 8). Після кожного виду розрахунку виробляються логічні процедури перевірки відповідності кожного виду показників їх оптимальним і заданим значенням (логічні блоки 3, 5, 7 й 9). Наприклад, блоком 3 передбачена перевірка відповідності прийнятого при тепловому розрахунку показника (критерію) якості $KO_{тепл}$ його оптимальному значенню $KO_{опт}$. На цьому етапі розрахунку такими показниками можуть бути питома витрата тепла, ККД та ін. При відповідності розрахованого показника його оптимальному значенню ($KO_{тепл} = KO_{опт}$) переходять до наступного виду розрахунку, а при невідповідності повертаються до первісного розрахунку.

У цьому випадку варто змінити нерегламентовані вихідні дані. Аналогічна роль й інші логічні блоки. Розглянемо складання моделей для визначення різних показників якості процесів нагрівання — охолодження.

§ 6. Модель для визначення кінцевих температур теплоносіїв

Якщо допустити, що зміни температур теплоносіїв по довжині теплообмінника лінійні, а витрати теплоносіїв, коефіцієнти тепловіддачі й теплоємності постійні, можна скласти модель для визначення кінцевих температур теплоносіїв. Процес теплообміну в цьому випадку опишеться системою диференціальних рівнянь

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ_1}{d\tau} &= V_G c_G \rho_G (t_{r(\text{вх})} - t_{r(\text{вих})}); \\ \frac{dQ_2}{d\tau} &= V_X c_X \rho_X (t_{x(\text{вих})} - t_{x(\text{вх})}); \\ \frac{\partial Q_1}{d\tau} - \frac{dQ_2}{d\tau} &= V_{CT} c_{CT} \rho_{CT} \frac{dt_{CT}}{d\tau}; \\ \frac{dQ_1}{d\tau} &= \alpha_1 F_1 \frac{t_{r(\text{вх})} + t_{r(\text{вих})}}{2} - t_{CT}; \\ \frac{dQ_2}{d\tau} &= \alpha_2 F_2 \left(t_{CT} - \frac{t_{x(\text{вх})} + t_{x(\text{вих})}}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

Реалізувавши цю систему диференціальних рівнянь на **ЕОМ**, можна одержати значення кінцевих температур теплоносіїв при різних значеннях вхідних параметрів, не звертаючись до оригіналу. У модель можна вводити змінні шляхом зміни величин напруг, що представляють різні фізичні величини. Для зручності набору структурної схеми моделей на **ЕОМ** необхідно привести вихідну систему рівнянь () до виду, зручному для моделювання,

$$\begin{aligned} \frac{dQ_1}{d\tau} &= V_G c_G \rho_G (t_{r(\text{вх})} - t_{r(\text{вих})}); \\ \frac{dQ_2}{d\tau} &= V_X c_X \rho_X (t_{x(\text{вих})} - t_{x(\text{вх})}); \\ t_{CT} &= \frac{1}{V_{CT} c_{CT} \rho_{CT}} \int_0^\tau \left(\frac{dQ_1}{d\tau} - \frac{dQ_2}{d\tau} \right) d\tau; \\ t_{r(\text{вих})} &= \frac{1}{\alpha_1 F_1} \cdot \frac{dQ_1}{d\tau} - t_{r(\text{вх})} + 2t_{CT}; \\ t_{x(\text{вих})} &= 2t_{CT} - t_{x(\text{вх})} - \frac{2}{\alpha_2 F_2} \frac{dQ_2}{d\tau} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Для конкретних умов роботи даного теплообмінника значення $V_r c_r \rho_r = a_1$; $V_x c_x \rho_x = a_2$; $\frac{1}{V_{CT} c_{CT} \rho_{CT}} = a_3$; $\frac{2}{\alpha_1 F_1} = a_4$; $\frac{2}{\alpha_2 F_2} = a_5$, можна прийняти постійними. Тоді система рівнянь прийме конкретний вигляд

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ_1}{d\tau} &= a_1 (t_{r(\text{ex})} - t_{r(\text{aux})}); \\ \frac{dQ_2}{d\tau} &= a_2 (t_{x(\text{aux})} - t_{x(\text{ex})}); \\ t_{CT} &= a_3 \int_0^\tau \left(\frac{dQ_1}{d\tau} - \frac{dQ_2}{d\tau} \right) d\tau; \\ t_{r(\text{aux})} &= a_4 \frac{dQ_1}{d\tau} - t_{r(\text{ex})} + 2t_{CT}; \\ t_{x(\text{aux})} &= 2t_{CT} - t_{x(\text{ex})} - a_5 \frac{dQ_2}{d\tau} \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

Склавши масштабні рівняння відповідно до раніше викладеного порядку, одержимо систему машинних рівнянь для реалізації на **ЕОМ**

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ_1}{d\tau} &= k_{11} t_{r(\text{ex})} - k_{12} t_{r(\text{aux})}; \\ \frac{dQ_2}{d\tau} &= k_{21} t_{x(\text{aux})} - k_{22} t_{x(\text{ex})}; \\ t_{CT} &= \int_0^\tau \left(k_{31} \frac{dQ_1}{d\tau} - k_{32} \frac{dQ_2}{d\tau} \right) d\tau; \\ t_{r(\text{aux})} &= k_{41} \frac{dQ_1}{d\tau} - k_{42} t_{r(\text{aux})} + k_{43} t_{CT}; \\ t_{x(\text{aux})} &= k_{51} t_{CT} - k_{52} t_{x(\text{ex})} - k_{53} \frac{dQ_2}{d\tau} \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

Початкові й граничні умови

$$\tau_0 = 0 \quad \text{і} \quad x = 0 \quad t_{r0} = t_{r(\text{ex})}; \quad t_{x0} = t_{x(\text{ex})};$$

$$\tau_0 = 0 \quad \text{та} \quad x = l \quad t_{\Gamma l} = t_{r(\text{aux})} = t_{\Gamma(\text{ex})}; \quad (6.5)$$

$$t_{xl} = t_{x(\text{aux})} = t_{x(\text{ex})}$$

Структурна схема наведеної моделі зображена на мал. (). Вирішальні елементи позначені цифрами 1, 2, 3, 4, 5, а інвертори — цифрами 6, 7, 8 й 9. Маючи чисельні значення постійних a_1 , a_2 , a_4 , і a_5 та вибравши масштаби змінних, за викладеними вище правилами обчислюють значення коефіцієнтів k_{ij}

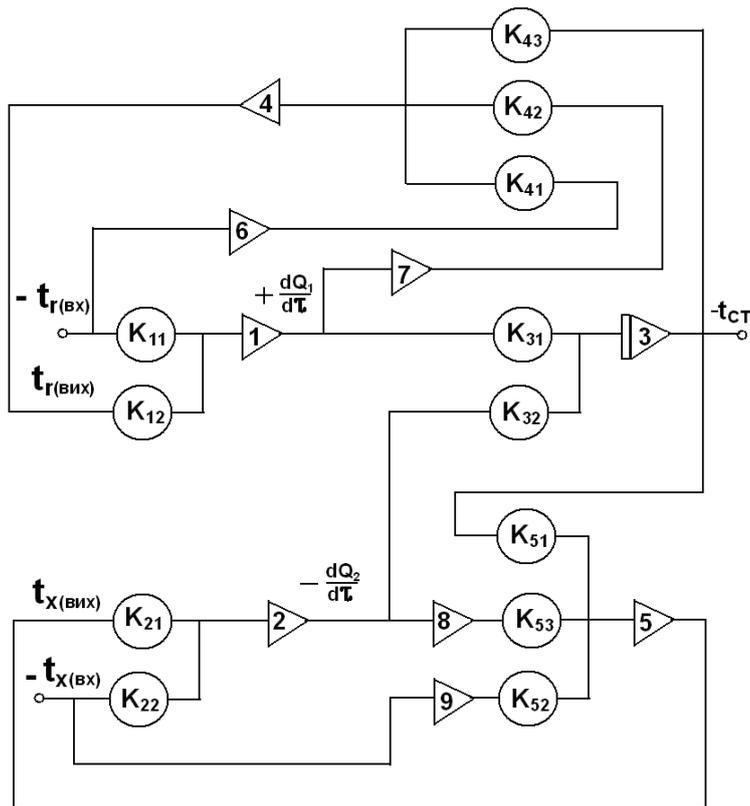


Рис. 6.1. Структурна схема моделі теплообмінника на ЕОМ.

Задаючись різними значеннями температур теплоносіїв на вході, одержують відповідні їм значення температур на виході, а подаючи на входи східчасті або інші збурювання,— і динамічні характеристики по цих каналах. Вплив інших параметрів на кінцеві значення температур теплоносіїв можна встановити, тільки змінюючи значення постійних k_{ij} , що на цій моделі робити незручно й пов'язане зі збільшенням витрат часу.

§ 7. Модель встановлення розподілу температур теплоносіїв по довжині теплообмінника

Для складання моделі встановлення розподілу температур теплоносіїв по довжині теплообмінника варто розглядати теплообмінник як об'єкт із розподіленими параметрами, тобто в основу моделі потрібно покласти опис зміни температур обох теплоносіїв у часі й просторі, тобто по довжині теплообмінника. Як відомо, об'єкти з розподіленими параметрами описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних .

Якщо скласти диференціальні рівняння в частинних похідних, що описують процес теплообміну між двома рідинами, розділеними стінкою, то ці рівняння будуть дуже складними. Спрощений математичний опис такого теплообмінника складено при наступних допущеннях:

у поперечному перерізі труб температури обох теплоносіїв постійні (усереднені) і змінюються тільки по довжині теплообмінника;

вплив розширювання не враховується, розглядається тільки змушена конвекція;

кількість теплоти, що проходить у напрямку потоку, у рідині й стінці труби, не враховується;

ефекти випромінювання й теплопровідності в радіальному напрямку враховуються в загальних коефіцієнтах тепловіддачі;

теплоємність і густина обох теплоносіїв постійні;

форма й переріз потоків незмінні;

коефіцієнти тепловіддачі є функціями температури й швидкості для даних апаратів;

втрати в навколишнє середовище й механічну енергію потоку не враховуються.

При цих допущеннях теплообмінник «труба в трубі» описується наступними трьома рівняннями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial t_r}{\partial \tau} + V_1 \frac{\partial t_r}{\partial x} + a(t_r - t_{CT}) &= 0; \\ \frac{\partial t_x}{\partial \tau} \pm V_2 \frac{\partial t_x}{\partial x} - b(t_{CT} - t_x) &= 0; \\ \frac{\partial t_{CT}}{\partial t} - c(t_r - t_{CT}) + d(t_{CT} - t_x) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

де

$$a = \frac{\pi D_r \alpha_1}{f_r \rho_r c_r}; \quad b = \frac{\alpha_2}{\delta \rho_{CT} c_{CT}}; \quad c = \frac{\alpha_1}{\delta \rho_{CT} c_{CT}}; \quad d = \frac{\pi D_x \alpha_2}{f_x \rho_x c_x};$$

D_r, D_x, f_r, f_x — діаметри й площі поперечних перерізів труб для гарячого й холодного теплоносіїв; x — координата по довжині теплообмінника; c_r, c_x, ρ_r, ρ_x — теплоємності й щільності для гарячого й холодного теплоносіїв.

Для наближеного рішення таких систем рівнянь широко застосовують ЕОМ. Оскільки ЕОМ можуть виконувати тільки елементарні арифметичні й логічні операції, тоді для рішення диференціальних рівнянь необхідно вибрати відповідний чисельний метод, що дозволяє звести всі математичні операції до елементарних арифметичних і логічних дій. Для цього найбільш простим чисельним рішенням звичайних диференціальних рівнянь є метод Ейлера, що впливає зі змісту похідної. Нехай рівняння має вигляд

$$\frac{dt}{dx} \Big|_{x=x_0} = f(x_0, t_0).$$

Вважаючи, що $\Delta x = x_1 - x_0$ — мала величина, одержимо

$$t(x_0 + \Delta x) = t(x_1) = t_1 = t_0 + \Delta t = t_0 + \frac{dt}{dx} \Big|_{x=x_0} \Delta x = t_0 + f(x_0, t_0) \Delta x.$$

Для стислості $f(x_1, t_0) = t'_0$ й $\Delta x = h$, запишемо

$$t_1 = t_0 + t'_0 h.$$

Приймаючи точку (x, t) за вихідну, можна таким же методом одержати

$$t_{i+1} = t_i + t'_i h.$$

Послідовно, крок за кроком, обчислюють значення t при різних x , тобто диференціальне рівняння зводять до системи алгебраїчних. Поряд з викладеним чисельним методом Ейлера і його модифікаціями існують інші методи рішення диференціальних рівнянь: Рунне — Кутта, Адамса, Крилова, Мілна та ін., які хоча й відрізняються більшою точністю, але також дають тільки наближене рішення, тому що похідна фактично не залишається постійною на проміжку Δx . Помилка, що виникає при застосуванні методу Ейлера, обернено пропорційна числу кроків (ділянок) h , на які розбивають інтервал інтегрування, обумовлений крайовими умовами. Оскільки більшу помилку допускають при формулюванні задачі (як і у нашому випадку), чим при її математичному рішенні, чисельні методи досить точні для рішення технічних задач.

Диференціальні рівняння в частинних похідних у загальному випадку мають незліченну множину рішень. Тому якщо фізичний процес описується рівняннями в частинних похідних, то для однозначної характеристики цього процесу необхідно приєднати початкові й граничні умови.

Найпоширенішим методом чисельного рішення диференціальних рівнянь у частинних похідних є метод кінцевих різниць (або метод сіток). В основу методу наближеного рішення крайових задач для двовірних диференціальних рівнянь у частинних похідних типу () покладена заміна безперервної плоскої області сітковою, що складається з однакових комірок і заміна диференціальних рівнянь відповідними кінцево-різницевиими рівняннями. Вирішивши отриману систему кінцево-різницевиих рівнянь (тобто систему алгебраїчних рівнянь із більшим числом невідомих), знаходять значення шуканої функції у вузлах сітки — чисельне рішення задачі.

Граничним випадком методу сіток є метод прямих, тобто коли при застосуванні прямокутної сітки один з лінійних розмірів її прямує до нуля, а множина вузлів на межі заповнює деяку систему прямолінійних паралельних відрізків. Для рішення двовірних диференціальних рівнянь типу (), що описують зміну температур теплоносіїв у теплообміннику з розділяючою перегородкою, застосовують саме цей граничний випадок.

Для теплообмінника з розділяючою стінкою розподіл температур гарячого й холодного теплоносіїв по довжині при сталому режимі буде мати вигляд, показаний на мал. ()

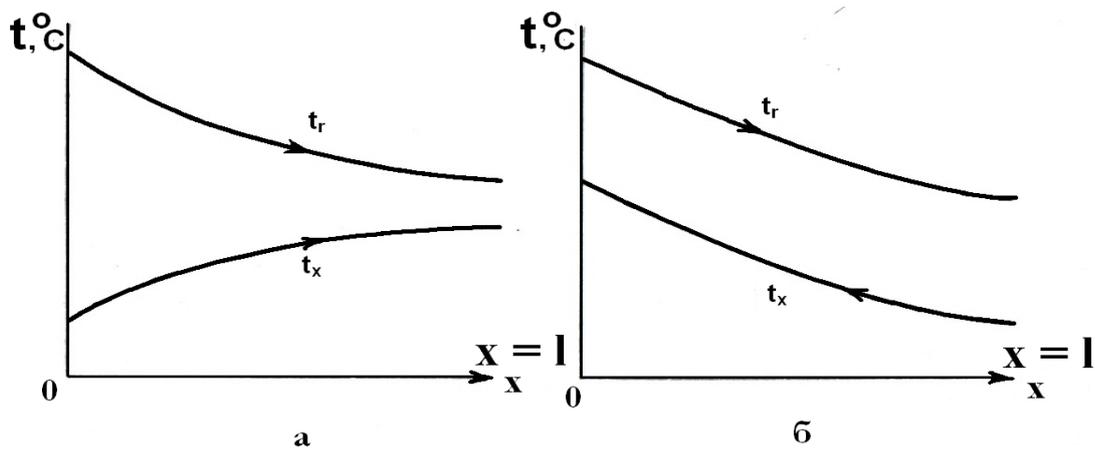


Рис. 7.1. Розподіл температур теплоносіїв по довжині теплообмінника в сталому режимі:
a — при протитоці; *б* — при прямотоці.

При несталих режимах лінії розподілу температур теплоносіїв по довжині будуть зміщатися одна до іншої. Наприклад, якщо в теплообміннику відбулося підвищення температури гарячого теплоносія на вході в момент часу $\tau = 0$, то зміна температур теплоносіїв по довжині теплообмінника в різні моменти часу буде мати вигляд, показаний на мал. ().

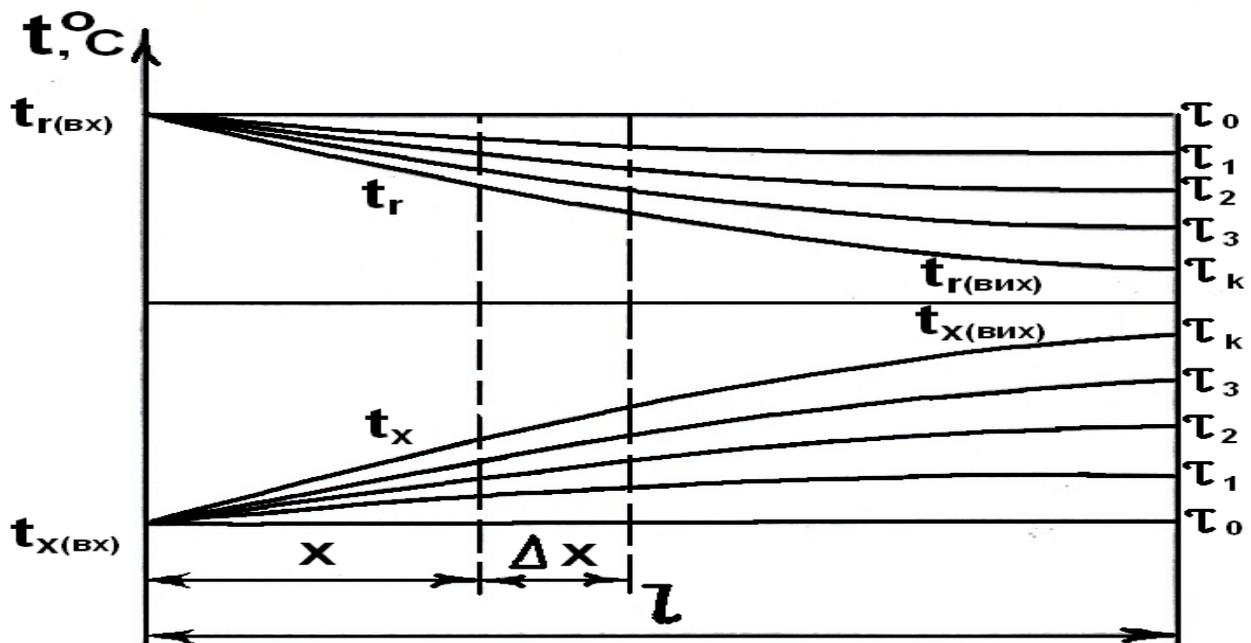


Рис. 7.2. Зміна температур теплоносіїв у часі й по довжині теплообмінника при протитоці

Якщо розділити теплообмінник довжиною l на n ділянок кожен довжиною h і похідні по координаті $\frac{dt_r}{dx}$ й $\frac{dt_x}{dx}$ замінити кінцевими різницями $\frac{t_{r_i} - t_{r_{i-1}}}{h} = t'_{r_i}$;

$$\frac{t_{x_{i+1}} - t_{x_i}}{h} = t'_{x_i} \quad ,$$

тоді рівняння в частинних похідних можна замінити системою звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} t'_{r_{ij}} &= -V_1 \frac{t_{r_{i-1,j}} - t_{r_{i,j}}}{h} - a(t_{r_{i,j}} - t_{CT_{i,j}}) \\ t'_{x_{i,j}} &= \pm V \frac{t_{x_{i,j}} - t_{x_{i-1,j}}}{h} + b(t_{CT_{i,j}} - t_{x_{i,j}}) \\ t'_{CT_{i,j}} &= +c(t_{r_{ji}} - t_{CT_{i,j}}) - d(t_{CT_{i,j}} - t_{x_{i,j}}) \end{aligned} \quad (7.2)$$

де i — номер ділянки по довжині ($i = 1, 2, \dots, n$); j — номер інтервалу часу ($j = 1, 2, \dots, m$).

Замінивши в системі рівнянь () похідні їх кінцевими різницями, одержимо системи алгебраїчних рівнянь для визначення значення температур стінки, гарячого й холодного теплоносіїв у заданий момент часу й у заданому перетині теплообмінника

$$t'_{r_{i,j}} = \frac{(t_{r_{i,j}} - t_{r_{i,j+1}})}{g} ; \quad t'_{CT_{i,j}} = \frac{(t_{CT_{i,j+1}} - t_{CT_{i,j}})}{g}, \quad t'_{x_{i,j}} = \frac{(t_{x_{i,j+1}} - t_{x_{i,j}})}{g} \quad (7.3)$$

де $g = \Delta \tau$ -

обраний крок зміни часу.

Для рішення системи рівнянь () і () необхідно скласти алгоритм і програму рішення на ЕОМ. Початкові й граничні умови визначені системою ().

При використанні кінцево-різницевої схеми для рішення крайових задач виникає важливе питання про стійкість схеми рішення. Схему називають стійкою, якщо малі погрішності, допущені на початку процесів рішення, зменшуються або залишаються такими ж наприкінці рішення. У протилежному випадку схему вважають нестійкою. Обрана нами схема рішення є нестійкою, але досить простою. При розбивці довжини теплообмінника й часу перехідного процесу на невелике число ділянок й інтервалів можна одержати рішення з достатньою для технічних цілей точністю. Структурна схема алгоритму рішення задачі на ЕОМ наведена на мал. (). У результаті рішення одержують закономірності зміни температур холодного й гарячого теплоносіїв у часі по довжині теплообмінника. Геометрично рішення можна інтерпретувати як вибір значень температур на перетинанні меж інтервалів за часом і координатою.

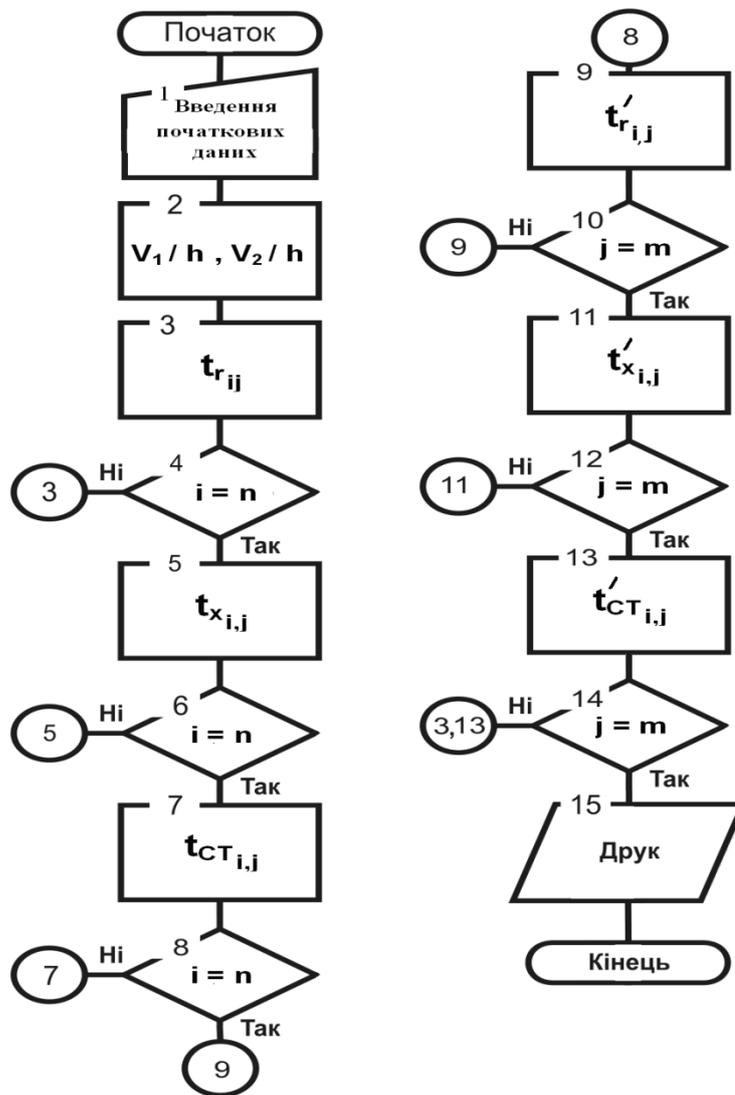


Рис. 7.3 Структурна схема алгоритму рішення задач розподілу температур теплоносіїв по довжині теплообмінника.

§ 8. Моделювання процесів випарювання

Процес випарювання широко застосовують у харчовій промисловості в основному для підвищення концентрації розчиненої речовини в розчині. Звичайно випарюють водяні розчини - бурячні, фруктові й овочеві соки, сиропи, барду, кормові дріжджі, пектиновий клей, молоко та ін. Крім того, випарювання використовують для виділення розчинених речовин у твердому виді, виділення в чистому виді розчинника, поглинання теплоти від охолоджуваного середовища й інших цілей. Випарювання, роблять у випарних апаратах різного призначення й конструктивного оформлення.

Вибір конструкції й технологічної схеми випарних апаратів визначається особливостями технологічної схеми підприємства, властивостями розчину, що випарюється, призначенням процесу випарювання, традиціями в даному виробництві й т.п. Випарні апарати відрізняються режимними характеристиками, статичними й динамічними

властивостями. Робота випарних апаратів технологічно пов'язана з різного роду конденсаторами, теплообмінниками та ін.

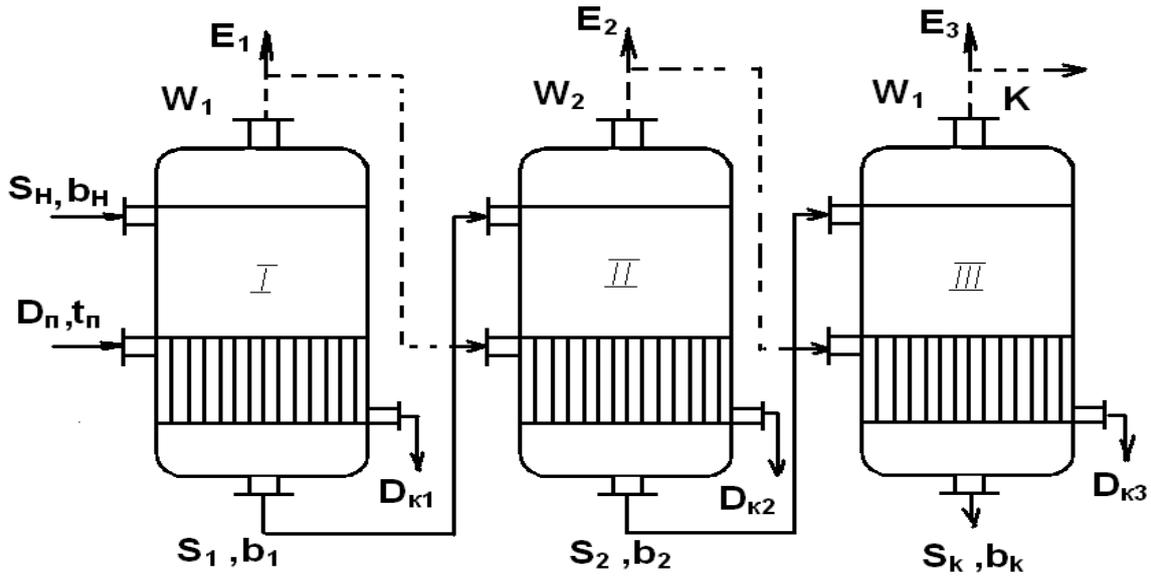


Рис. 8.1. Технологічна схема багатокорпусної випарної установки.

Як приклад на мал. () представлена технологічна схема трьохкорпусного випарного апарата, який застосовується в різних харчових виробництвах. Конструктивні схеми найпоширеніших типів випарного апарата з вертикальними кип'ятильними трубками й внутрішньою циркуляційною трубкою наведені на мал. ().

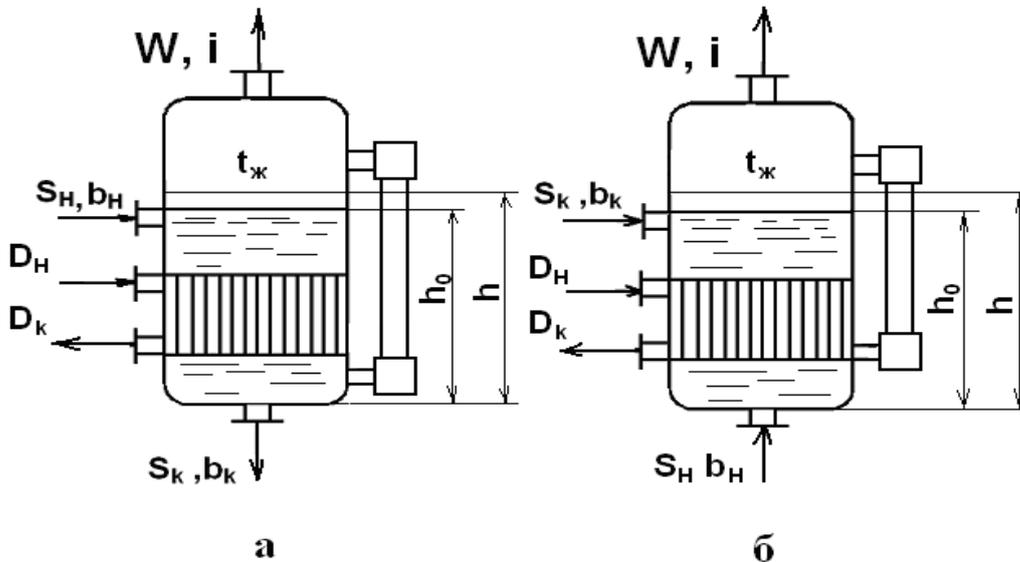


Рис. 8.2. Конструктивні схеми однокорпусного випарного апарата *а* з верхньою й *б* нижньою подачею розчину, що випарюється

У першому випадку (мал. , *а*) свіжий розчин надходить над верхніми трубними ґратами, а згущений — відводиться знизу, у другому (мал. , *б*) —

апарат знизу. Вторинна пара заповнює надрозчинний об'єм і виводиться з апарата через пастку, розташовану у верхній частині випарного апарата.

Рівень киплячого розчину h над нижнім перерізом поверхні розчину вище п'езометричного рівня h_p некиплячої рідини в сокомірному склі апарата внаслідок різниці густини парорідинної емульсії й розчину, тому що густина киплячої емульсії менше щільності розчину.

З наведених конструктивних схем випарного апарата випливає, що його основними елементами є камера, що гріє, простір з киплячою рідиною й простір вторинної пари, а допоміжними - патрубками для підведення й відводу робітничих середовищ конденсату, первинної пари й неконденсуючих газів, сепаратори й пастки для відділення піни й крапель рідини від вторинної пари та ін.

Незалежно від конструкції й призначення, кожен випарний апарат характеризується наступними вхідними параметрами: витратою рідини, що випарюється, S_H та її первісною концентрацією b_H , теплоємністю c_H і густиною ρ_H , витратою пари, що *гріє*, D_p і її *температурою* t_p або ентальпією i_p , *теплоємністю* c_p , *густиною* ρ_p . Ці параметри, що характеризують вхідні потоки, можуть бути керуючими. Процес випарювання визначається й конструктивними параметрами: масою металу корпуса G_M , площею поверхні нагрівання F , об'ємом апарата V , масою ізоляції G (мал.).

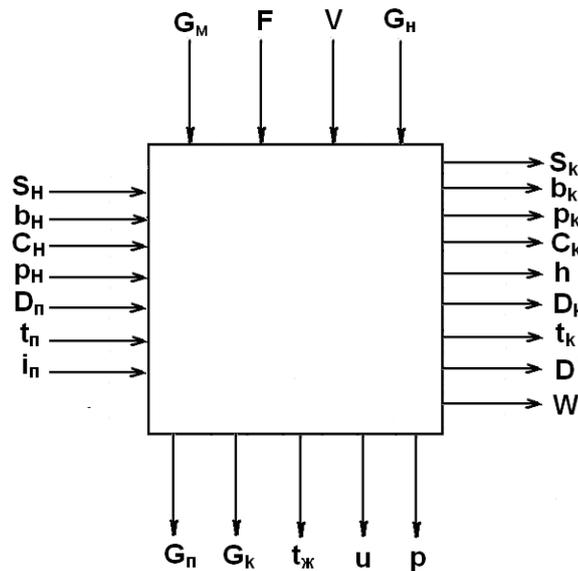


Рис. 8.3. Параметрична схема випарного апарата

Вихідними параметрами є витрата концентрованого розчину S_K і його концентрації b_k , густина ρ_k й теплоємність c_k , рівень киплячої рідини h , витрата конденсату D_K і її температура t_k , витрата вторинної пари W і витрата пари на відвід газів, що не конденсують, D' .

Внутрішніми параметрами можуть бути маса пари в апараті або в камері, що гріє, G_p , маса конденсату G_k , температура киплячої рідини $t_{ж}$, внутрішня енергія рідини або окремих частин апарата u , їхньої температури t , тиск в апараті та ін.

Основні рівняння, що зв'язують вхідні й вихідні характеристики процесу випарювання, що впливають:

а) рівняння матеріального балансу розчину, що випарює

$$S_n = S_k + W ; \quad (8.1)$$

б) рівняння балансу сухих речовин

$$S_H CB_H = S_k CB_k ; \quad (8.2)$$

в) рівняння теплового балансу

$$S_H c_H t_H + Q_n = W_i + S_k c_k t_k + Q_{nom} ; \quad (8.3)$$

або

$$Q_n = W(i - c_B t_k) + S_k c_k t_k - S_H c_H t_H + Q_{nom} ; \quad (8.4)$$

г) рівняння для визначення витрати пари, що гріє

$$D = W \frac{i - c_B t_k}{i'' - i'} + S_H c_H \frac{t_k - t_H}{i'' - i'} + \frac{Q_n}{i'' - i'} ; \quad (8.5)$$

де c_B — теплоємність води; Q_n — теплоємність пари; Q_{nom} — втрати теплоти; i, i', i'' - відповідно ентальпія вторинної пари, конденсату й пари, що гріє.

Основною технологічною метою процесу випарювання в харчових виробництвах є забезпечення заданої концентрації розчину, що випарюється. Наприклад, концентрація дифузійного соку, що випарюється, цукрових заводів після багатокорпусної установки повинна бути 65 % CB_k . Основна узагальнена оцінка процесу випарювання — це питомі витрати на випарювання 1 м^3 води. Окремими оцінками є питомі витрати або витрати пари, теплової або електричної енергії, капітальні, експлуатаційні або інші витрати, які характеризують окремі сторони цього складного процесу.

Узагальнений критерій техніко-економічної ефективності процесу випарювання являє собою вираз

$$Z_P = C_Q Q_T + C_{el} Q_{el} + (1,56 p_a + p_H)(C_F F + K_{уд}) \epsilon_{np}$$

де Z_P — розрахункові витрати на випарювання 1 м^3 води; C_Q, C_F, C_{el} — відповідно вартість (ціна) теплоти, поверхні нагрівання й електроенергії; Q_T, Q_{el} — витрати теплоти й електроенергії; $p_a + p$ — надлишковий тиск у парорідинному просторі; F - величина площі поверхні нагрівання; $K_{уд}$ — питомі наведені капітальні витрати; ϵ_{np} — наведені експлуатаційні витрати.

При процесі випарювання значно змінюються витрата й характеристики розчину, що випарюється, витрата і тиск вторинної пари. Ці зміни характеризуються періодичними збурюваннями безперервної дії (від споживачів), а також впливами при аварійних ситуаціях. Внутрішні збурювання визначаються зміною термічного опору через утворення накипу, властивостей розчину в процесі випарювання, а також нагромадженням газів, що не конденсуються та інших неконтрольованих впливів.

Найважливішими задачами керування випарюванням є забезпечення на виході розчину заданої концентрації й забезпечення теплових споживачів пором із заданими характеристиками. Окремими задачами керування можуть бути стабілізація рівня в апаратах, вакууму в концентраторі, одержання

необхідної кольоровості розчину та ін. Кінцева мета керування - забезпечення мінімальних витрат на процес випарювання, тобто мінімальних значень техніко-економічних критеріїв.

Математичні моделі випарних установок використовують для встановлення зв'язків між вхідними й вихідними параметрами, визначення режимів роботи існуючих установок і конструктивних параметрів проєктованих. Крім того, математичне моделювання широко використовують для визначення динамічних характеристик МВУ. Це дозволяє значно скоротити витрати на вибір й обґрунтування режимних і конструктивних параметрів і системи керування випарюванням. Розглянемо складання математичних моделей для вибору режимів роботи й визначення динамічних властивостей випарного апарата.

§ 9. Модель технологічного розрахунку режимів випарювання

Моделювання процесу випарювання в харчових виробництвах має особливості, зв'язані із властивостями розчинів, що випарюються. Наприклад, при випарюванні дифузійного соку цукрового виробництва у вторинній парі є інертні гази, що складаються в основному з вуглекислого газу, аміаку та всіх компонентів повітря, що помітно впливають на технологічні режими процесу випарювання.

Утворення аміаку й вуглекислого газу пов'язане з тим, що дифузійний сік до випарювання піддається дефекації (обробка CaO), сатурації (обробка CO_2) і сульфітації (обробка SO_2). У результаті цієї обробки утворюються аміак і вуглекислий газ.

Кількість аміаку визначається вмістом у буряку аміачного й амідного азоту, а кількість вуглекислого газу — окисів калію і натрію K_2O , Na_2O , які при сатурації окисляються до бікарбонатів. Кількість повітря, що потрапляє у вторинну пару визначається режимами роботи випарної установки. По відомим концентраціям цих компонентів у соці, можна розрахувати частку інертних газів G_{in} у вторинній парі.

На перших щаблях деяких випарних установок застосовуються прямоточні апарати, що працюють практично без циркуляції і які забезпечують найменші втрати цукру.

Сульфітований сік надходить під нижню трубну решітку апарату, проходить через трубки, де закипає за рахунок грюючої пари, що підводить тепло. На виході із труб частина води із соку випаровується і разом з газами розкладання уходить через надсоковий простір апарату. При цьому частково розкладається цукор. Враховуючи ці особливості зв'язку між вхідними й вихідними параметрами випарного апарата, в статистиці можна приблизно описати системою рівнянь

$$S_H = S_K + W;$$

$$S_H c_H t_H + Q = S_K c_K t_K + W_i;$$

$$W^D = \frac{18 P_w}{P - P_w} S_{in} \quad (9.1)$$

$$S_k = \frac{\psi_2(CB_k)}{(gP_w - \psi_1(CB_k))} + \frac{G_k^{nec}}{G_k^{god}} (6,81 - 0,056 CB_k) - c \quad (9.2)$$

де P_w - парціальний тиск вторинної пари, що визначається співвідношенням

$$LgP_w = \psi_1(CB_k) + \frac{\psi_2(CB_k)}{C_{ik}}$$

де $\Psi_1(CB_k)$, $\Psi_2(CB_k)$ — величини, що залежать від масової концентрації сухих речовин на виході з апарату (CB_k); C — постійна; t_K — температура кипіння соку, °C; G_{in} — молярна витрата інертних газів, кмоль/год; G_k^{nec} , G_k^{god} — витрати нецукрів і води на виході з апарату; P — тиск в апараті; Q — теплота, яка підводиться в апарат з парою, що гріє.

Наведена система складається з рівнянь матеріального й теплового балансів апарату, закону Дальтона () і рівняння для визначення температури соку на виході.

§ 10. Модель для визначення динамічних властивостей випарного апарата

Для складання такого типу моделей випарний апарат розділяють на гріючу камеру, поверхню нагрівання й парорідинний простір. Потім розглядають динамічні властивості цих елементів. Оскільки перехідні процеси відбуваються в часі, тоді найбільш зручною формою запису є диференціальні рівняння. Наближене значення рівняння матеріального балансу для гріючої камери, у диференціальній формі має вигляд

$$\frac{d(G_H + G_k)}{d\tau} = D_n - D_k - D_H; \quad (10.1)$$

де G_H , G_k — маса пари й конденсату в гріючій камері; D_n , D_k , D_H — витрати гріючої пари, конденсату й пари, що витрачається на відвід газів, що не конденсуються.

Внутрішня енергія u випарної установки приблизно визначається рівнянням

$$u = M_n u_n + M_k c_k t_k + M_c c_c t_c + M_u c_u t_u; \quad (10.2)$$

де M_n, M_c, M_i — маса пари, стінок й ізоляції; u_n — внутрішня енергія пари; $c_k, c_c, c_w, t, t_c, t_w$ — відповідно, теплоємність і температури конденсату, стінок й ізоляції.

Вважають, що ентальпія грючої пари і пари, що витрачається на відвід газів, що не конденсуються, приблизно однакові $i_n = t_n$, а зміна внутрішньої енергії визначається тільки підведенням і відводом теплоти. Продиференціювавши це рівняння, одержимо наближену залежність зміни основних характеристик апарата в часі

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{DM_n u_n}{d\tau} + \frac{dM_k c_k t_k}{d\tau} + M_c c_c \frac{dt_t}{d\tau} + M_n c_u \frac{dt_u}{d\tau} = (D - D_H) i_n - D_k i_k - Q_n - Q_{nom}. \quad (10.3)$$

Виражаючи маси пари й конденсату через їхні об'єми й густини і з огляду на те, що внутрішня енергія, густина й теплоємність пари і води є функціями температури. Е.Н.Таубман одержав наближене диференціальне рівняння для грючої камери, дозволене щодо температури грючої пари

$$a_1 \frac{dt_n}{d\tau} = -a_2 t_n + a_3 t_c + a_4 (D - D_n) + a_5; \quad (10.4)$$

де a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 — постійні, обумовлені співвідношеннями величин, що характеризують режими роботи конкретного апарата. Наприклад,

$$a_2 = a_3 = \frac{F_1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_c}{2\lambda_c}}; \quad a_4 = i_H - i_k; \quad a_5 = D_H;$$

де α_1 — коефіцієнт тепловіддачі від грючої пари до стінок труб; F_1 - поверхня конденсації; t_n, t_c — температура грючої пари і поверхні нагрівання (стінки); δ_c, λ_c — товщина і коефіцієнт теплопровідності стінки.

Рівняння () описує закономірність зміни температури грючої пари у часі. Простим перерахуванням одержимо рівняння для встановлення закономірностей зміни тиску грючої пари.

Оскільки рівняння в правій частині містить ще одну змінну — температуру поверхні нагрівання t_c , тоді необхідно одержати закономірність її зміни в часі. Для цього використаємо рівняння енергетичного балансу

$$M_c c_c \frac{dt_c}{d\tau} = Q_1 - Q_2. \quad (10.5)$$

Кількість теплоти, підведеної до труб грючої камери визначається рівнянням

$$Q_1 = \frac{F_1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_c}{2\lambda_c}} (t_n - t_c); \quad (10.6)$$

а кількість теплоти, переданої від труб грюючої камери до рідини, що нагрівається, -рівнянням

$$Q_2 = \frac{F_2}{\frac{1}{\alpha_2} + \frac{\delta_c}{2\lambda_c} + \frac{\delta_H}{\lambda_H}} (t_c - t_{жс}) ; \quad (10.7)$$

де F_1, F_2 — зовнішня й внутрішня поверхні труб; $t_{жс}$ — температура киплячої рідини; α, α_2 — коефіцієнти внутрішньої й зовнішньої тепловіддачі; δ_c, δ_H — товщина стінок металу й накипу; λ_c, λ_H — коефіцієнти теплопровідності для стінок металу й накипу.

Перетворивши рівняння () і вирішивши його щодо основної змінної з врахуванням () і (), одержимо диференціальне рівняння, що описує закономірність зміни температури поверхні нагрівання в часі

$$c_1 \frac{dt_c}{d\tau} = -c_2 t_c + c_3 t_n + c_4 t_{жс} ; \quad (10.8)$$

де

$$c_1 = c_c M_c ; \quad c_2 = c_3 + c_4 ; \quad c_3 = \frac{F_1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_c}{2\lambda_c}} ; \quad c_4 = \frac{F_2}{\frac{1}{\alpha_2} + \frac{\delta_c}{2\lambda_c} + \frac{\delta_H}{\lambda_H}} .$$

Парорідинний простір випарного апарата можна розглядати як три послідовно зосереджені ємності: кипляча рідина, пара під дзеркалом випаровування й простір вторинної пари. Рівняння матеріального балансу для трьох ємностей у диференціальній формі запишемо в наступному вигляді:

$$\frac{d(M_{жс} + M'_n + M''_n)}{d\tau} = S_H - S_k - W ; \quad (10.9)$$

де $M_{жс}, M'_n, M''_n$ — маси рідини в апараті, пари під і над дзеркалом випаровування.

З огляду на те, що температура вторинної пари дорівнює температурі кипіння рідини ($t_w \approx t_{жс}$), а зміна внутрішньої енергії і густини пари є функцією температури (тиску), нехтуючи масою пари в порівнянні з масою рідини й зробивши ряд алгебраїчних перетворень, одержимо диференціальне рівняння, що описує зміну температури киплячої рідини

$$d_1 \frac{dt_{жс}}{d\tau} = -d_2 t_{жс} + d_3 t_c - d_4 W + d_5 ; \quad (10.10)$$

де

$$d_1 = \rho_{жс} c_{жс} V_{жс} + c_c \sum M_c ; \quad d_2 = c_4 + S_H c_{жс} ; \quad d_3 = d_4 = i_n ; \quad d_5 = S_H c_H t_H - Q_{ном} .$$

Об'єм рідини в апараті визначається п'єзометричним рівнем

$$V_{жс} = V_{жс.о} + \eta h ; \quad (10.11)$$

де $V_{жс.о}$ — об'єм рідини, обмежений площиною, від якої відраховується рівень; η - площа поперечного перерізу апарата.

Зміна рівня рідини в апараті визначається рівнянням

$$\frac{d(V_{жс} \rho_{жс})}{d\tau} = e \frac{dh}{d\tau} = S_H - S_k - W ; \quad (10.12)$$

де $e = \rho_{жс} \eta$.

Для забезпечення постійної кількості рідкої фази й температурного режиму в апараті необхідно дотримуватися двох умов:

$$\Delta Q = 0 \quad \text{й} \quad S_H - S_k - W = 0.$$

Рівняння для концентрації розчину в апараті одержимо з матеріального балансу сухих речовин у диференціальній формі

$$\frac{d}{d\tau} (M_{жс} b + M_n \varepsilon) = b_H S_H + b_k S_k - W \varepsilon ; \quad (10.13)$$

де b_H , b_k , b — концентрації на вході, виході й у паровому просторі (у частках одиниці); ε - частка сухих речовин у вторинній парі.

Виразивши масу рідини $M_{жс} = V_{жс} \rho_{жс}$ і вважаючи, що віднесення рідини пором незначний $\varepsilon = 0$, а концентрація - зосереджений параметр, продиференціювавши рівняння, одержимо

$$V_{жс} \rho_{жс} \frac{db}{d\tau} + \rho_{жс} b \frac{dV_{жс}}{d\tau} = b_H S_H - b_k S_k$$

$$V_{жс} = V_{жс.о} + \eta h (M_{жс} + \eta \rho_{жс} h) \frac{db}{d\tau} + \eta \rho_{жс} b \frac{dh}{d\tau} = b_H S_H + b_k S_k$$

Підставивши останню рівність у рівняння (), одержимо

$$f \frac{db}{d\tau} + b_H S_H - b(S_k - W) ; \quad (10.14)$$

де

$$f = M_{жс.о} + \eta \rho_{жс} h .$$

В результаті отримали систему диференціальних рівнянь, що описує сталі й перехідні процеси в одноступінчастому випарному апараті

$$\left. \begin{aligned}
 a_1 \frac{dt_n}{d\tau} &= -a_2 t_n + a_3 t_c + a_4 (D - D_H) + a_5 \\
 c_1 \frac{dt_c}{d\tau} &= -c_2 t_c + c_3 t_n + c_4 t_{ж} \\
 d_1 \frac{dt_{ж}}{d\tau} &= -d_2 t_{ж} + d_3 t_c + d_4 W + d_5 \\
 f \frac{db}{d\tau} &= -(S_H - W) b_H + S_H b_H \\
 e \frac{dh}{d\tau} &= S_H - S_k - W
 \end{aligned} \right\} (10.15)$$

Ця система рівнянь встановлює зв'язки між температурами пари t_n , стінок t_c , рідини, що кипить $t_{ж}$, її концентрацією b і рівнем h при різних збуреннях і спрощуючих впливах (подача пари в грючу камеру, витрата пари на відвід газів, що не конденсуються, підведення й відвід рідини, що випаровується, початкова концентрація, утворення накипу та ін.).

МОДЕЛЮВАННЯ МАСООБМІННИХ ПРОЦЕСІВ ХАРЧОВИХ ВИРОБНИЦТВ

§ 11. Особливості складання моделей масообмінних процесів

У харчовій технології масообмінні процеси мають величезне значення. Ступінь їхньої досконалості визначається досконалістю всієї технологічної лінії. До масообмінних відносять процеси сушіння, екстрагування, кристалізації, сорбції й перегонки (ректифікації). Загальним для них усіх є наявність двох станів або фаз компонентів і перенесення компонентів з однієї фази в іншу. Перенесення речовин здійснюється спочатку в межах однієї фази (внутрішнє перенесення), потім речовина переборює поверхню поділу фаз (зовнішнє перенесення) і розподіляється в межах другої фази. В середині кожної фази речовини переносяться, головним чином, молекулярною дифузією й конвективним перенесенням. Кожна фаза може складатися з одного або декількох компонентів.

Основні закономірності перенесення речовин з однієї фази в іншу визначає теорія масопереносу, відповідно до якої швидкість масопередачі пропорційна рушійній силі. Її величину можна визначити на основі законів фазової рівноваги. Рушійними силами масопереносу вважають різниці концентрацій, температур і тисків. Загальні принципи опису цих закономірностей були викладені в (§ гл. .)

Кількість речовини, що переходить у межах однієї фази до границі поділу фаз через поверхню F , перпендикулярну дифузійному потоку, визначається законом Фіка

$$M = -DF\Delta c\tau ;$$

де D — коефіцієнт пропорційності (дифузії); Δc - різниця концентрацій (рушійна сила); τ - час перенесення.

Сумарне перенесення кількості речовини до межі (або від межі) поділу фаз визначається рівнянням масопередачі

$$M = \beta F(c_r - c_y)\tau ;$$

де β — коефіцієнт пропорційності (масовіддачі); c_r , c_y — концентрації на межі поділу фаз й всередині (ядрі) потоку.

Коефіцієнт масовіддачі, на відміну від коефіцієнта дифузії, є кінетичною характеристикою й залежить від коефіцієнта дифузії D (фізичної константи), швидкості потоку v , густини ρ і в'язкості μ речовини, геометричних розмірів часток l_1 , апаратів l_2 та ін. В узагальненій формі ця залежність може бути представлена функцією

$$\beta = f(D, v, \rho, \mu, l_1, l_2 \dots) ;$$

або в критеріальній формі

$$Nu_D = A Re^m Pr_D^n ;$$

де $Nu_D = \frac{\beta l}{D}$, $Pr_D = \frac{\nu}{D}$ — дифузійні числа Нуссельта та Прандля; $Re = \frac{vD}{\nu}$ число Рейнольдса; l — визначальний геометричний розмір; ν - коефіцієнт кінематичної в'язкості.

Наведені співвідношення свідчать про аналогії процесів тепло- і масопередачі, що дозволяє узагальнити й методи складання математичних моделей.

Для аналізу роботи масообмінних процесів дуже важливими є кінетичні закономірності, які для кожного виду масообміну мають свою специфічну форму.

Оскільки масообмінні процеси призначені для поділу або виділення (очищення) якого-небудь компонента (речовини) із суміші, тоді основну технологічну задачу цих процесів можна сформулювати як отримання заданої кількості певної речовини необхідного ступеня чистоти (96 % спирту, 8 % вологості дріжджів та ін.). У деяких випадках (наприклад, при очищенні) задача може бути сформульована по-іншому; зміст шкідливого компонента в основному продукті або зміст корисного компонента у відходах не повинен перевищувати заданого (припустимого).

Якість масообмінного процесу, за умови досягнення основної технологічної задачі, оцінюють витратами теплоти, води, електроенергії, капітальними, експлуатаційними та ін. Найбільш загальною оцінкою є наведені витрати на виробництво одиниці готової продукції.

На цій підставі можна сформулювати й загальні цілі вдосконалювання масообмінних процесів: підвищення ступеня чистоти поділу й зниження питомих витрат на одиницю продукції. Ця мета може бути досягнута рішенням багатьох окремих задач по вдосконаленню існуючої й розробці нових апаратів, вибору оптимальних режимів, підвищенню стійкості й надійності роботи апаратів, автоматизації процесів керування та ін. Такі окремі задачі в багатьох випадках можна вирішувати за допомогою математичних моделей. Із всіх масообмінних процесів одним з розповсюджених на харчових підприємствах є процес сушіння. На прикладі розглянемо рішення деяких задач удосконалення масообміну методами математичного моделювання, а також особливості моделювання процесу перегонки у зв'язку зі специфікою масообміну рідкої й газової фаз.

§ 12. Математичні моделі кінетики сушіння

Сушіння є типовим масообмінним процесом, при якому волога переміщається від матеріалу, що висушується, до сушильного агента. Сушінню піддають різні харчові продукти, напівфабрикати й сировини (зерно, солод, барду, кормові й харчові дріжджі, крохмаль та ін.). У деяких харчових виробництвах сушіння - основний технологічний процес (виробництво сухарів, сухого молока, яєчного порошку, сухих фруктів й овочів). Процес сушіння обумовлений підведенням теплоти до продукту,

що висушується, завдяки якому відбувається випаровування вологи. Як сушильний агент, застосовується повітря, перегріта пара й топкові гази, які насичуються вологою, що випаровується, з матеріалу, що висушується.

Сушіння харчових продуктів роблять у барабанних, стрічкових, шахтних, розпилюючих, коридорних, камерних сушіннях, в установках з падаючими і киплячими шарами та ін. Ці апарати відрізняються конструктивними параметрами, напрямком сушильного агента й продукту, що висушується, тиском у сушильній камері. Незалежно від способу сушіння й конструкції апарата сушильну установку представимо структурною схемою, наведену на мал. ().

Обов'язкові елементи сушильної установки: підігрівник (топка, калорифер та ін.) повітря 1, змішувач 2,

сушильна камера 3, пристрій для подачі в сушильну камеру або бункер-накопичувач матеріалу, що висушується 4, бункер-накопичувач сухого продукту 5. У деяких випадках застосовують процеси сушіння з рециркуляцією матеріалу, що висушується, або з рециркуляцією сушильного агента.

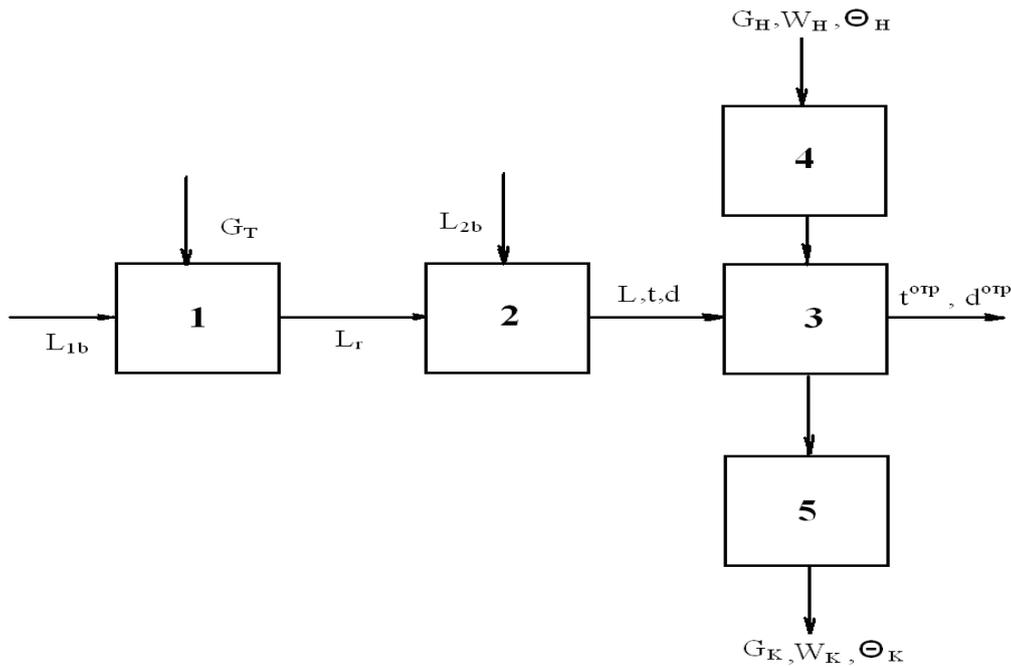


Рис. 12.1. Структурна схема сушильної установки

У цьому випадку сушильна установка оснащується для змішування вихідного й рециркуляційного матеріалу й сушильного агента. Найбільш складний елемент з точки зору складання математичних моделей — сушильна камера, де відбувається процес сушіння, що складається з трьох етапів: підігріву, сушіння й охолодження. У деяких типах сушильних установок кожен етап реалізується окремими пристроями. У підігрівник надходять паливо G_T і повітря L_{1b} , у результаті згоряння палива утворяться гарячі гази, які змішуються з атмосферним повітрям L_{2a} й утворюють сушильний агент із витратою L , температурою t_{ca} і вологовмістом d .

Основними параметрами процесу сушіння є характеристики матеріалу, що висушується, і сушильного агента (мал.): витрата G_H , початковий вологовміст матеріалу u_H (або вологість W_H), його температура t_H , швидкість руху v_M , товщина шару h_M у сушильній камері і його якісні показники k_H . Сушильний агент характеризується витратою L , температурою t_{ca} , вологовмістом d та ін. На процес впливають також характеристики навколишнього середовища: відносна вологість φ_0 , температура t_0 , тиск P_0 .

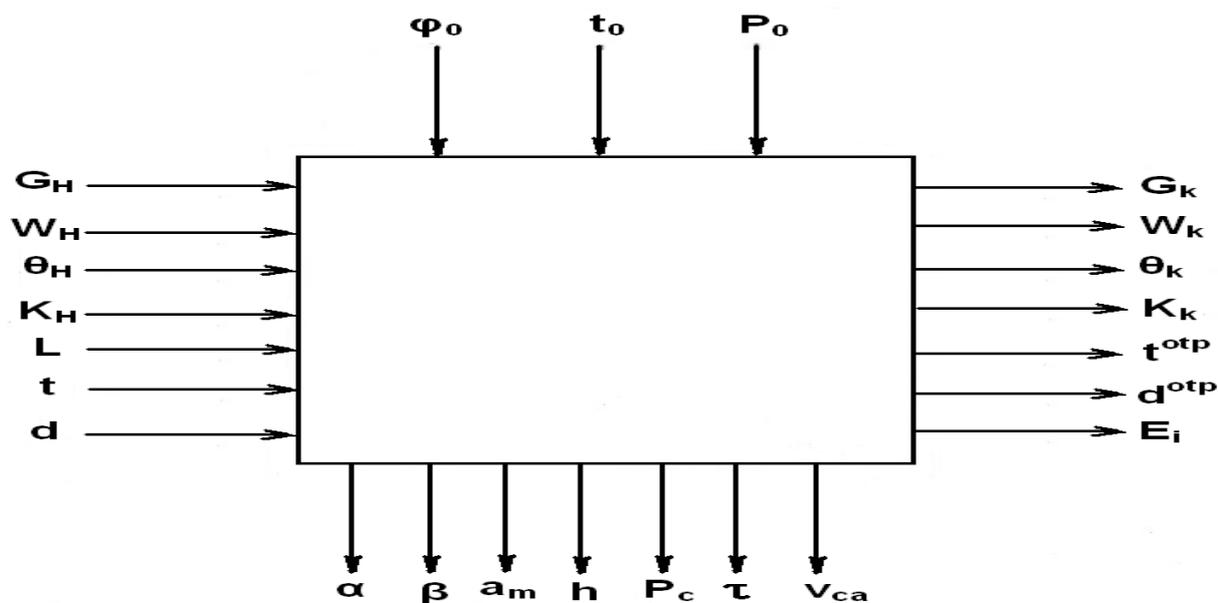


Рис. 12.2. Параметрична схема процесу сушки.

Вихідними параметрами є характеристики висушеного матеріалу після сушіння й сушильного агента, що відпрацював: кінцевий вологовміст u_K (вологість W_K), температура t_K , якість сухого продукту k_H , температура $t_{c.a}^{omp}$, вологовміст d^{omp} сушильного агента, що відпрацював. Вихідними параметрами можуть бути також різні характеристики (коефіцієнти) процесів обміну тепла й вологи α , β , α_T , експозиція τ , тиск P_c , швидкості сушильного агента в шарі $v_{c.a}$ та ін. Вихідними характеристиками є також витрати на сушіння, які визначаються різними критеріями ефективності E_i : питомими витратами палива, електроенергії, праці й т. д.

Основною технологічною метою процесу сушіння є забезпечення заданого значення вологості продукту, що висушується, при збереженні якості. Якість процесу оцінюють питомими витратами на одиницю маси вилученої вологи. Вибір керованих параметрів і керуючих впливів визначають задачами дослідження. Найчастіше керованими параметрами приймають вологість і витрати на сушіння. Якість висушеного матеріалу є, як правило, обмеженням. Оскільки якість продукту при сушінні визначається температурою нагрівання матеріалу та експозицією, тоді ці параметри - основні обмеження. Керуючими впливами приймають параметри сушильного агента: витрату (швидкість) і температуру, а іноді - витрату матеріалу, що висушується. Інші вхідні параметри стабілізують на вході або відносять до збурюючих впливів.

Для встановлення зв'язків між вхідними й вихідними параметрами застосовуються різні підходи й методи. Ці зв'язки можуть бути встановлені аналітично на основі використання рівнянь матеріального й енергетичного балансу, законів гідромеханіки, тепло- і масообміну та ін. Наприклад, для встановлення зв'язку між початковою й кінцевою вологістю матеріалу, що висушується, використовують рівняння кінетики сушіння, для встановлення

залежності між температурою сушильного агента й висушеним матеріалом, - рівняння теплообміну. Для більш складних моделей, що встановлюють зв'язки між більшим числом параметрів, необхідно спільно розглядати всі перераховані аналітичні й експериментальні залежності. Експериментальні методи встановлення зв'язків між параметрами вимагають створення фізичної або натурної моделі, по різних планах, активними й пасивними методами.

Економічні показники процесу сушіння можуть бути розраховані на основі технічних характеристик, отриманих прямим вимірюванням або обчисленням на основі різних моделей з урахуванням вартості устаткування, існуючих норм і розцінок на виконання робіт.

Оскільки сушіння складається з трьох етапів, то при складанні математичних моделей нагрівання, сушіння й охолодження матеріалу, що висушується, використовують основні закони передачі маси й енергії. Через те, що при сушінні має місце в основному конвективний масообмін, тоді необхідно враховувати й основні закономірності гідродинаміки.

При складанні математичних моделей нагрівання, сушіння й охолодження матеріалу, що висушується, рівняння, що описують ці закономірності, використовують у різній формі.

Для аналізу процесу сушіння за основу звичайно приймають систему диференціальних рівнянь, що описують тепло- і вологоперенесення у вологих тілах.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} &= k_{11} \nabla^2 u + k_{12} \nabla^2 t + k_{13} \nabla^2 P; \\ \frac{\partial t}{\partial \tau} &= k_{21} \nabla^2 u + k_{22} \nabla^2 t + k_{23} \nabla^2 P; \\ \frac{dP}{d\tau} &= k_{31} \nabla^2 u + k_{32} \nabla^2 t + k_{33} \nabla^2 P \end{aligned} \right\} \quad (12.1)$$

Коефіцієнти k_{ij} визначаються сполученням термодинамічних і теплофізичних характеристик вологого тіла

$$\begin{aligned} k_{11} &= a_m; & k_{12} &= a_{m\delta}; & k_{13} &= \frac{k_p}{\rho_0}; & k_{21} &= \frac{2\varepsilon}{c} a_m; & k_{22} &= a + \frac{\varepsilon r}{c} a_m \delta; \\ k_{23} &= \varepsilon r = \frac{a_m}{c} \delta_p; & k_{31} &= \frac{-\varepsilon a_m}{c_p}; & k_{32} &= \frac{-\varepsilon a_m}{c_p} \delta; & k_{33} &= \left(a_p - \frac{\varepsilon a_m}{c_p} \delta_p \right). \end{aligned}$$

Тут додатково наведені наступні позначення: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа; $a = \frac{\lambda}{c_p}$ — коефіцієнт температуропровідності; a_m — коефіцієнт дифузії вологи; δ — відносний коефіцієнт термодифузії вологи; δ_p — термоградієнтний коефіцієнт; ε — критерій фазового перетворення; r — питома теплота фазового перетворення; k_p — коефіцієнт фільтраційного переносу вологи; c — наведена питома теплоємність матеріалу; c_p —

коефіцієнт ємності вологого повітря в пористому тілі; x, y, z — координати; ρ_0 — густина сухого скелету вологого тіла.

Для одномірних задач при відсутності градієнта загального тиску система рівняння спрощується

$$\begin{aligned} c\rho_i \frac{\partial t}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{dt}{dx} \right) + \varepsilon r \rho_0 \frac{\partial u}{\partial \tau} \\ \frac{\partial u}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(a_m \frac{\partial u}{\partial x} + a_m \delta \frac{\partial t}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad ; \quad (12.2)$$

Всі теплофізичні й термодинамічні характеристики $a_m, \delta, \lambda, c, r, \varepsilon$ є функціями температури t і вологовмісту.

В наведених рівняннях іноді вологовміст u заміняють потенціалом вологоперенесення $du = ct$, тоді відповідні термодинамічні й теплофізичні характеристики ділять на величину масоємності.

Для рішення системи наведених рівнянь необхідно знати розподіл температур і вологовмістів усередині тіла в початковий момент часу (початкові умови), геометричну форму тіла й закон взаємодії між навколишнім середовищем і поверхнею тіла (граничні умови). Сукупність початкових і граничних умов становить у найпростішому випадку крайові умови.

Граничні умови можуть бути задані чотирма способами. Гранична умова першого роду складається в завданні розподілу температури на поверхні тіла t_n у часі, тобто $t_n(\tau) = f(\tau)$ (задача Діріхле), другого роду — у заданні щільності теплового потоку (похідна від температури) для кожної точки поверхні тіла як функції часу $q_n(\tau) = f(\tau)$ (задача Неймана), третього роду — у заданні температури навколишнього середовища й закону теплообміну між поверхнею тіла й навколишнім середовищем (змішані умови)

$$q_n = \alpha [t_n(\tau) - t_c(\tau)] \quad ; \quad (12.3)$$

де t_c — температура навколишнього середовища.

Гранична умова четвертого роду відповідає теплообміну тіла з навколишнім середовищем за законом теплопровідності або випадку теплообміну дотичних твердих тіл, коли їх температури поверхонь однакові (ідеальний тепловий контакт).

Розподіл температури всередині тіла в початковий момент часу задається початковою умовою

$$t = (x, y, z, 0) = f(x, y, z).$$

При рівномірному розподілі температури початкова умова приймає вид

$$t = (x, y, z, 0) = t_0 = \text{const.}$$

Відповідно до теореми про єдиність рішень, якщо деяка функція $f(x, y, z, \tau)$ задовольняє диференціальному рівнянню, початковим і граничним умовам, то вона є єдиним рішенням задачі.

Наявність заданих крайових умов дозволяє в найпростіших випадках одержати аналітичні рішення прямої задачі теплопровідності, тобто знайти функцію

$$t_n = f(x, y, z, \tau).$$

Аналогічно граничним умовам теплообміну, взаємодія поверхні тіла з навколишнім середовищем, при масообміні, також може бути описано граничними умовами чотирьох родів. Граничні умови першого роду відповідають випадку, коли потенціал дифузійного масоперенесення на поверхні тіла дорівнює потенціалу масоперенесення в навколишньому середовищі; другого роду — випадку масообміну при сушінні вологих тіл, коли в першому періоді інтенсивність сушіння постійна, а в другому зменшується. Отже, у граничних умовах задається густина потоку маси речовини як функція часу $g_m = f(\tau)$. В окремому випадку $g_m = \text{const}$.

Граничні умови третього роду аналогічні граничним умовам теплообміну, а четвертого роду характеризують молекулярний теплообмін між двома середовищами. У загальному випадку граничні умови для одномірного потоку запишемо

$$\left. \begin{aligned} -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)_n + q_n(\tau) - r(1 - \varepsilon)q_n(\tau) &= 0 \\ a_m \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_n + a_m \rho_0 \delta \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)_n + q_m(\tau) &= 0 \end{aligned} \right\}; \quad (12.4)$$

де q_n, q_m — питомий потік відповідно тепла й вологи на поверхні.

Початкові умови для одномірного потоку при $\tau = 0$ мають вигляд

$$m = f(x) \quad \text{и} \quad t_M = f_1(x)$$

Система рівнянь () і граничні умови становлять математичний опис тепло- і масообміну у вологих тілах і в бінарному паро газівому середовищі (сушильний агент) при конвективній дифузії в рідинах та ін. Для рухливих середовищ у рівняння необхідно ввести член, що містить швидкість руху середовища. Форма запису граничних умов залежить від виду тепло- і масообміну, геометричної форми середовища й обраної системи координат.

При побудові математичних моделей нагрівання, сушіння й охолодження матеріалу наведені математичні залежності спрощують введенням різних допущень, які хоча й знижують точність математичних моделей, але дозволяють представити складні процеси порівняно простими й доступними для рішення методами й засобами.

Такими допущеннями можуть бути заміна складних багатомірних тіл та просторів одномірними: поділ просторів і тіл складної форми на прості елементи; незмінність теплофізичних і термодинамічних характеристик у розглянутих діапазонах зміни температур і вологовмістів; виключення з рівнянь членів, що незначно впливають на кінцеві результати; перетворення системи координат для спрощення форми запису.

У зв'язку зі складністю й недостатньою точністю такого роду описів, а також відсутністю або складністю методу рішення систем рівнянь найчастіше використовують більш прості форми опису процесів сушіння.

Кінетику сушіння представляють різними формами кривої сушіння. Найпоширенішою формою є рівняння А. В. Ликова

$$W = W_p + (W_H - W_p) \exp(-k\tau), \quad (12.5)$$

де W , W_p , W_H — поточна, рівноважна й початкова вологості матеріалу; k — коефіцієнт сушіння, що є функцією температури й вологості середовища, $k = f(t, \varphi)$.

У деяких випадках раціонально застосовувати таку форму запису:

$$W = W_p - (W_H - W_p) \exp\left(-a + \frac{b}{2}\tau\right)\tau ;$$

де a , b — коефіцієнти, що характеризують зв'язок вологи з матеріалом.

Рівноважна вологість для даного матеріалу є функцією температури й відносної вологості сушильного агента $W_p = f(t, \varphi)$. Тому, використовуючи позначення $W_{y,H} = W_H - W_p$ та $W_y = W - W_p$ (вилучена волога), кінетику сушіння представляють рівнянням виду

$$W_y = W_{y,H} \exp\left\{-k(t, \varphi)\left(a + \frac{b}{2}\tau\right)\tau\right\}. \quad (12.6)$$

У цьому рівнянні $k(t, \varphi)$ характеризує режим, а $\left(a + \frac{b}{2}\tau\right)\tau$ — зв'язок вологи з матеріалом. Обидві ці характеристики встановлюють експериментально, вважаючи, що опис кривої сушіння відомий. При відомих описах кінетичних закономірностей і чисельних значеннях, постійних для дослідження, можна використовувати аналогові й цифрові обчислювальні машини.

Представивши рівняння () або () у диференціальній формі й склавши структурну схему набору цього диференціального рівняння на АОМ, можна одержати модель для дослідження кінетики. Для рішення цієї порівняно простої задачі в системах автоматичного керування застосовують спеціалізований обчислювальний пристрій, що дозволяє багаторазово вирішувати задачі розрахунку кінетики сушіння при зміні вихідної вологості продукту.

Більш складними є моделі, засновані на математичних описах полів вологовмісту й температури продукту й сушильного агента типу системи рівнянь (). Як приклад складання такого роду математичних моделей розглянемо задачу визначення вологості зерна в процесі сушіння по математичному описі поля вологовмісту й температур, складеному В.И. Жідко та А. С. Бомко. Це опис разом з початковими й граничними умовами має вигляд

$$\left. \begin{aligned} & m \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0 \\ & \frac{\partial u}{\partial \tau} + v_3 \frac{\partial u}{\partial x} - a \frac{\partial t}{\partial \tau} + v_3 \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{A(v_{c.a})}{c_3 \rho} (t - t_{c.a}) - \frac{\rho_3}{c_3} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} + v_3 \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \\ & u(\tau, x) = \frac{2}{R^2} \int_0^R u(\tau, x, r) r dr \end{aligned} \right\} \quad (12.7)$$

з початковими

$$\left. \begin{aligned} & t(\tau, 0) = f(\tau); \\ & t(\tau, 0) = f(\tau); u(0, x, r) = u_0(x, r); \\ & t(0, x) = f_2(x) \end{aligned} \right\} \quad (12.8)$$

і граничними умовами $u(\tau, 0, r) = u^o(\tau, r)$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(\tau, x, R) = \begin{cases} -\frac{B(t, v_{c.a})}{a_m(t)} (u_R - u_p), u_R \leq u_r \\ -\frac{B(t, v_{c.a})}{a_m(t)} (u_R - u_p), u_R > u_r \end{cases} \quad (12.9)$$

де $\frac{\partial u}{\partial r}(\tau, x, R) = 0$ — умова симетрії; R — радіус частинки; A, B — емпіричні коефіцієнти, x, r — координати по довжині сушильної камери й радіусу зерновки. Наведена система двох рівнянь описує процес сушіння зерна в щільному й киплячому шарах за умови перехресного руху матеріалу й сушильного агента. Якщо режим не порушується, тобто процес сушіння відбувається в стаціонарному стані й $\frac{\partial u}{\partial \tau} = 0$; $\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$ — тоді рівняння буде

мати вигляд

$$\left. \begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial r} \right); \\ & \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a_m(t)}{v_3} \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{A v_{c.a}}{c_3 \rho_3 v_3} (t_{c.a} - t) - \frac{2 \rho B(t, v_{c.a})}{c_3 v_3 R} (u_R - u_p) \\ & \frac{\partial u}{\partial r}(x, 0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (12.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(x,0) = 0 \quad (\text{умова симетрії}) \quad \text{з початковими} \\ u(0, r) = u_0(r); \quad t(0) = t_0; \quad (12.11)$$

і граничними умовами

$$\frac{\partial u}{\partial r}(x, R) = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{B(t, v_{c.a})}{a_m(t_3)}(u_R - u_p), u_R \leq u_r \\ -\frac{B(t, v_{c.a})}{a_m(t)}(u_r - u_p), u_R > u_r \end{array} \right\} \quad (12.12)$$

При переході до системи рівнянь (-) врахований зв'язок середньої швидкості сушіння з поверхневим вологовмістом

$$\Delta u = \frac{2}{R^2} \int_0^R r \Delta u \, dr = \frac{2}{R} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} \equiv \frac{2}{R} \frac{\partial u}{\partial R} \cdot \frac{\partial u}{\partial \tau} + v_3 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2B}{R}(u_R - u_p).$$

Використовуючи метод прямих, застосований раніше для рішення задачі розподілу температур теплоносіїв, систему рівнянь в частинних похідних приведемо до системи звичайних диференціальних рівнянь, записавши кінцево-різницеві співвідношення

$$\frac{\partial u_k}{\partial r} = \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2h}; \\ \frac{\partial^2 u_k}{\partial r^2} = \frac{u_{k+1} + 2u_k + u_{k-1}}{R^2},$$

де $k = 1, 2, 3, \dots, n-1$; n — номер прямої, що відноситься до $r = R$; h — інтервал по радіусу висушуваного матеріалу.

З огляду на те, що $r = kh$, одержимо

$$(\Delta u)_k = \frac{1}{2h^2k} [(2k+1)u_k - 4ku_k + (2k-1)u_{k-1}],$$

а для прямої з останнім номером $k = n$

$$(\Delta u)_n = \frac{2}{n} \left(\frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u_n - u_{n-1}}{n} \right) + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial u}{\partial r},$$

де n — номер прямої, що відноситься до $r = R$.

Якщо покласти $n = R/4$, то система рівнянь буде мати вигляд

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{a_m(t)}{v_3 R^2} (24u_2 - 24u_1);$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_2}{\partial x} &= \frac{a_m(t)}{\nu_3 R^2} (20u_3 - 32u_2 - 12u_1); \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} &= \frac{a_m(t)}{\nu_3 R^2} \left(\frac{5}{3}u_4 - 32u_3 - \frac{40}{3}u_2 \right); \\ \frac{\partial u_4}{\partial x} &= -\frac{9B(t_1, \nu_{c.a})}{\nu_3 R} (u_4 - u_p) + \frac{32a_m(t)}{\nu R^2} (u_3 - u_4); \\ \frac{\partial t}{\partial x} &= \frac{A(\nu_{c.a})}{c_2 \rho_3 \nu_3} (t_{c.a} - t) - \frac{2\rho B(t_1, \nu_{c.a})}{c_3 \nu_3 R} (u_4 - u_5); \end{aligned} \quad (12.13)$$

з початковими умовами

$$\begin{aligned}u(0) &= u; \\ t(0) &= t; \\ i &= 1, 2, 3, 4.\end{aligned}$$

Застосувавши кінцево-різницевий метод для координати часу, одержимо

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \tau} &= \frac{u_{k+1} - u_k}{g} + 0(g); \\ \frac{\partial t}{\partial \tau} &= \frac{t_{k+1} - t_k}{g} + 0(g)\end{aligned}$$

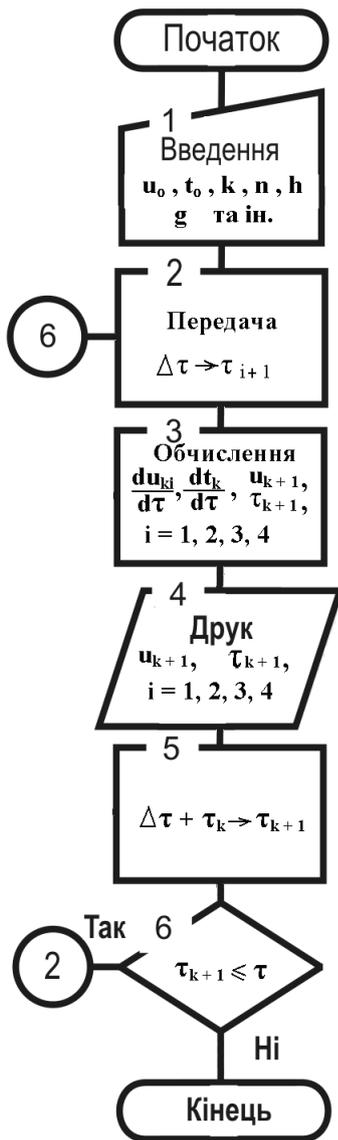
де g — інтервал часу.

Після підстановок система рівнянь матиме вигляд

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_{k,1}}{\partial \tau} &= -\frac{\nu}{g} (u_{k,1} - u_{k-1,1}) + \frac{a_m t_3}{R^2} (24u_{k,2} - 24u_{k,1}); \\ \frac{\partial u_{k,2}}{\partial \tau} &= -\frac{\nu}{g} (u_{k,2} - u_{k-1,2}) + \frac{a_m t_3}{R^2} (20u_{k,3} - 32u_{k,2} + 12u_{k,1}); \\ \frac{\partial u_{k,3}}{\partial \tau} &= -\frac{\nu}{g} (u_{k,3} - u_{k-1,3}) + \frac{a_m t_3}{R^3} \left(\frac{56}{3}u_{k,4} - 32u_{k,3} + \frac{40}{3}u_{k,2} \right); \\ \frac{\partial u_{k,4}}{\partial \tau} &= -\frac{\nu}{g} (u_{k,4} - u_{k-1,4}) + \frac{9b(t_3 \nu_{c.a})}{R} (u_{k,4} - u_k) + \frac{32a_m}{R^2} (u_{k,3} - u_{k,4}); \\ \frac{\partial t_k}{\partial \tau} &= -\frac{\nu}{g} (t_k - t_{k-1}) + \frac{A(\nu_c)}{c_3 \rho_3} (t_{c.a}^k - t_3) - \frac{2\rho B(t_3, \nu_{c.a})}{c_3 R} (u_{k,4} - u_p).\end{aligned} \quad (12.14)$$

Вирішивши цю систему рівнянь при початкових умовах

$$\begin{aligned}u_{k,1}(0) &= u_{0,k}; \\ t_{k,i}(0) &= t_{0,k};\end{aligned}$$



$i = 1, 2, 3, 4$,
 одержимо розподіл температури й вологовмісту по довжині сушильної камери та у часі.

Систему рівнянь () можна реалізувати на ЕОМ за допомогою алгоритму, наведеного на мал. ().

Для кроку інтегрування по змінній x , рівній $0,1l$, отримали наступний розподіл вологовмісту по довжині сушильної камери:

$$u = \frac{2}{R^2} \int_0^R u_r \partial_r \approx \frac{2}{R^2} \cdot \frac{h}{2} (r_0 u_0 + 2r_1 u_1 + 2r_2 u_2 + 2r_3 u_3 + 2r_4 u_4) = \frac{1}{8} (u_1 + 2u_2 + 3u_3 + 2u_4)$$

Вихідними даними для рішення задачі прийняті:
 $a_m = 0,622 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{с}$; густина $\rho_3 = 750 \text{ кг}/\text{м}^3$; $\text{про}_3 = 1,85 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$; $R = 0,0015 \text{ м}$; $u_p = 0,1 \text{ кг}/\text{кг}$; $u_r = 0,33 \text{ кг}/\text{кг}$; $r = 2400 \text{ кДж}/\text{кг}$; $A = 0,26 \text{ в. а}$; $B = 0,86 \cdot 10^{-8} \text{ т}_3$; $v_{c.a} = 0,4 \text{ м}/\text{с}$; $N = 2n$; поперечний переріз повітряного потоку $s = 0,1 \text{ м}^2$.

Рис. 12.3. Структурна схема алгоритму визначення кінетичних закономірностей сушіння

§ 13. Математична модель оптимізації сушіння

Застосування математичних методів оптимізації процесів сушіння ускладнюється відсутністю закономірностей зміни коефіцієнтів у системах рівнянь, що описують процес сушіння, характеристиками матеріалу й сушильного агента, ускладненням рівнянь при підстановці наявних закономірностей і т.п. Це приводить іноді до того, що застосовувати точні методи оптимізації неможливо. Заміна змінних коефіцієнтів системи константами знижує точність математичного опису процесу, а в ряді випадків приводить до втрати зв'язку між керованими й керуючими параметрами, що виключає можливість оптимізації за допомогою моделі, заснованої на прийнятій формі математичного опису.

У деяких випадках можна вирішувати конкретні прямі задачі, розподіл полів температур і вологості, використовуючи системи рівнянь (), доповнені відповідними крайовими умовами, щодо змінних u , t і P за умови сталості коефіцієнтів k_{ij} і коефіцієнтів крайових умов. Одна з таких задач розглянута була в попередньому параграфі. При оптимізації системи рівнянь виду () разом із крайовими умовами необхідно вирішити її щодо обраного критерію оптимальності, а потім вибрати один з існуючих методів оптимізації. Можна також використати існуючі описи процесу сушіння зернистих матеріалів у шарі, використовуючи поняття «тонкого шару». У цьому випадку опис представляють у вигляді багатомірної системи алгебраїчних рівнянь. При цьому труднощі оптимізації не знижуються.

Таким чином, проблеми оптимізації процесу конвективного сушіння пов'язані з необхідністю рішення систем диференціальних рівнянь у частинних похідних, що описують процес сушіння, наявністю технологічних та інших обмежень, тобто складністю математичної моделі процесу сушіння й труднощами експериментального визначення постійних у рівняннях математичного опису. Оптимізація процесів сушіння з використанням відомих кінетичних закономірностей спрощує пошук оптимальних рішень незалежно від властивостей і характеристик матеріалу, що висушується, тобто є універсальним методом.

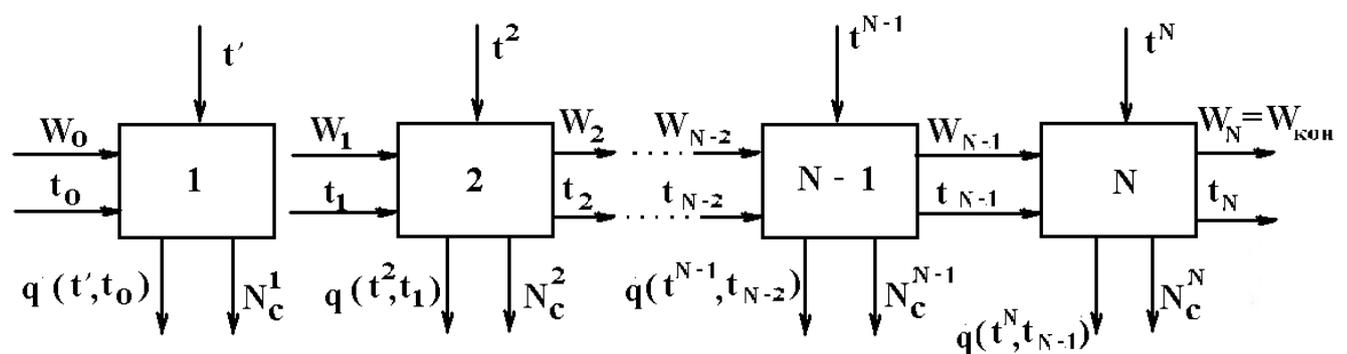


Рис. 13.1. Дискретний багатостадійний процес сушіння.

Кінетика сушіння визначається рядом параметрів — температурою $t_{c.o}$, відносною вологістю ϕ_1 , швидкістю сушильного агента $v_{c.a}$, початковою вологістю W_0 і товщиною шару h . Для даного способу сушіння або конкретного типу сушильної установки, при заданих конструктивних параметрах, кількість факторів, що визначають кінетику сушіння, можна зменшити. Наприклад, при сушінні зернистих матеріалів у щільному шарі параметри h та $v_{c.a}$ визначені конструкцією сушильної установки, а t — способом сушіння й родом матеріалу. Процес вологовилучення залежить тільки від W_0 та $t_{c.a}$, тобто в цьому випадку вологість є збуджуючим параметром, а $t_{c.o}$ — керуючим.

Звичайно експериментально обумовлені криві сушіння можна представити як граничний випадок дискретного багатостадійного процесу, якщо як окрему стадію прийняти досить малий проміжок часу. Тоді для рішення задачі оптимізації такого процесу застосовують метод динамічного програмування або дискретний принцип максимуму.

У загальному виді багатостадійний процес сушіння може бути представлений схемою, наведену на мал. (). Кожна стадія, що представляє собою плин процесу за відносно малий проміжок часу, характеризується певним значенням вологості матеріалу на вході й виході з неї. Керуючий параметр $t_{c.a.}$ на кожній стадії може приймати ряд значень у деякому інтервалі температур. За допомогою цього параметра оптимізуються змінні W_i та $q(t_N)$. Змінна $q(t_N)$ — критерій оптимізації, може характеризувати витрати на N -й стадії при належному виборі керуючого параметра t_N при зміні вологості в межах від W_H (W_0) до $W_{кін}$. Як критерій оптимальності можна прийняти, наприклад, витрати енергії на видалення вологи.

Спроби розробки алгоритмів оптимізації режимів сушіння з використанням кривої сушіння відомі. Проте цими алгоритмами користуватися важко або неможливо через відсутність необхідних зв'язків між параметрами процесів у прийнятній для розрахунку формі.

Для розробки алгоритмів оптимізації по визначенню енерговитрат необхідно представити зміну вологості у вигляді функції від параметрів сушильного агента.

Крім того, розпочались спроби застосувати ощадливі методи багатофакторного планування експериментів для одержання цих залежностей. Зокрема, цими методами отримані закономірності зміни коефіцієнта сушіння для першого й другого періодів від деяких режимних параметрів у вигляді лінійних регресійних залежностей. Ці формули дозволяють встановити значення вологості матеріалу в часі. Для розрахунків кінетики багатозонного (східчастого) сушіння та інших умов, ці методи неприйнятні й широке поширення для опису кінетики не одержали. У зв'язку із цим складемо таку форму опису, що спростила б процедуру оптимізації й підвищила точність розрахунку.

У загальному випадку кінетичні криві сушіння або нагрівання продукту представимо як функцію параметрів, що визначають початковий стан зерна (вологість W_0 і температуру Θ_0), значення керуючого параметра (температура сушильного агента t) і поточної координати (часу τ). Оскільки витрата звичайно постійна, тоді функції мають вигляд

$$\begin{aligned} W &= f(W_0, \Theta_0, t, \tau); \\ \Theta &= f(W_0, \Theta_0, t, \tau). \end{aligned} \tag{13.1}$$

Такі залежності дозволяють для заданих W_0 , t й Θ_0 розрахувати значення вологості або температури матеріалу в будь-який момент часу.

Застосування багатофакторних планів експериментів для одержання кінетичних закономірностей нагрівання й сушіння пов'язане з деякими особливостями. Наприклад, не завжди враховується поява в планах експериментів несумісних сполучень на окремих рівнях (початкова вологість

не може бути нижче поточної та ін.). Крім того, тривалість сушіння до заданої кінцевої вологості, в дослідях з різними початковими значеннями вологості й температури продукту, змінюється в таких межах, при яких факторні плани стають неефективними, а отримані рівняння регресії неадекватними. Експозиція сушіння при визначенні її режимів й інших розрахунків найчастіше невідома. Ці труднощі можна перебороти, якщо при відомій кінцевій вологості в якості основного кінетичного параметра прийняти поточну вологість продукту W , виражену у відносних одиницях

$$W^* = \frac{(W_0 - W)}{(W_0 - W_k)} ; \quad (13.2)$$

З урахуванням цих особливостей кінетичні закономірності представимо у вигляді залежності середньої швидкості сушіння N і температури продукту t від наступних параметрів:

$$\begin{aligned} N &= f(W_0, \Theta_0, t, W^*); \\ \Theta_0 &= f(W_0, \Theta_0, t, W^*); \end{aligned} \quad (13.3)$$

і складемо відповідний план експериментів.

Експозиція сушіння при цьому визначається з виразу

$$\tau = \frac{(W_0 - W)}{N} ; \quad (13.4)$$

Використання залежностей для розрахунку експозиції сушіння й температури продукту можливо тільки при постійній температурі сушильного агента при сушінні від W_0 до W (тобто від 0 до τ). Якщо ж сушарка має кілька сушильних зон, тобто температура сушильного агента в кожній зоні змінюється, тоді опис з ростом числа зон значно ускладнюється й пов'язане з більшою кількістю дослідів, а також ускладнює вибір і складання процедури оптимізації режимів сушіння.

Вирішити задачу багатоступінчастого сушіння дозволяє включення в рівняння () ще одного параметра W_i — початкової точки відліку, тобто точки на кривій сушіння, що є початком кожної стадії (зони) процесу, де i — номер сушильної зони. Замість початкової температури зерна Θ_0 варто включити Θ_i . Крім того, у план експерименту варто включити не абсолютні W , а відносні, тобто інтервал W_0 — W_1 виражений у відносних одиницях (частках)

$$W_i^* = \frac{(W_0 - W_i)}{(W_0 - W_k)} ; \quad (13.5)$$

Аналогічно фактор W^* буде мати вигляд

$$W^* = \frac{(W_0 - W)}{(W_i - W_k)} ; \quad (13.6)$$

Таким чином, кінетику сушіння й нагрівання продуктів представимо у вигляді рівняння типу

$$y = f(W_0, W_i^*, \Theta_i, t, W^*) ; \quad (13.7)$$

При цьому середня швидкість сушіння розраховується від вологості W_0 до поточної вологості W :

$$N = \frac{(W_i - W)}{(\tau - \tau_i)} ; \quad (13.8)$$

де τ_i — час сушіння, що відповідає вологості W_i .

Для підвищення точності, а також для зручності розрахунків у лівій частині рівняння () доцільніше використати не середні швидкості сушіння й нагрівання продукту від W_i до W , а величини

$$A = \frac{1}{N} = \frac{(\tau - \tau_i)}{(W_i - W)} \quad \text{хв}/\% ; \quad (13.9)$$

$$B = \frac{(\Theta - \Theta_i)}{(W_i - W)}, \quad ^\circ\text{C}/\% ; \quad (13.10)$$

Величина B являє собою відношення середньої швидкості нагрівання продукту від Θ_i до Θ до середньої швидкості сушіння від W_i до W . Експозиція сушіння й температура продукту при цьому визначаються по рівняннях

$$\tau = \tau_i + A(W_i - W); \quad (13.11)$$

$$\Theta = A_i + B(W_i - W); \quad (13.12)$$

Із врахуванням викладеного, для одержання кількісних закономірностей при сушінні зерна кукурудзи в щільному шарі була проведена серія дослідів по D — оптимальному плані типу B_5 . Товщина шару зерна $\delta = 200$ мм, швидкість сушильного агента $v = 0,4$ м/с. Область зміни факторів W_0, W_i^*, Θ, t і W^* обмежена нерівностями (тут і далі вологість виражена на а. с. масу)

$$23 \% \leq W_0 \leq 57 \%, \quad 0 \leq W_i^* \leq 0,8; \quad 45 ^\circ\text{C} \leq \Theta_i \leq 65 ^\circ\text{C}, \quad (13.13)$$

$$80 \% \leq t \leq 200 \%, \quad 0,1 \leq W^* \leq 1,0.$$

Після обробки отриманих експериментальних даних були отримані рівняння регресії й проведені їхній статистичний аналіз (обчислення дисперсій, перевірка значимості коефіцієнтів, оцінка адекватності моделей й ін.). Рівняння в натуральних значеннях факторів мають вигляд

$$A = 14,0099 + 0,06155 W_0 + 7,92264 W_i^* - 0,28261 \Theta_i; \\ - 0,05372 t + 4,15838 W^* - 0,00130 W_0^2 - 0,71225 (W_i^*)^2 + 0,00176 \Theta_i^2 + \\ 0,0000972 t^2 + \\ + 0,38312 (W^*)^2 + 0,03975 W_0 W_t + 0,000132 W_0 \Theta_i + 0,000106 W_0 t + \\ 0,01230 W_0 W^* + 0,04803 W_i^* \Theta_i - 0,03953 W_i^* t + 1,84424 W_i^* W^* + 0,000196 \Theta_i t \\ + 0,2414 \Theta_i W^* - 0,02160 t^*; \quad \text{хв}/\%;$$

$$B = -10,33849 + 0,05881 W_0 + 15,03633 W_i^* - 0,05705 \Theta_i + 0,09091 t + \\ 7,60176 W^* + 0,000441 W_0^2 - 6,98867 (W_i^*)^2 - 0,00015 \Theta_i^2 - 0,0000368 t^2 - \\ 1,27952 (W^*)^2 - 0,09451 W_0 W_i^* + 0,000131 W_0 \Theta_i - 0,00096 W_0 t - 0,04535 W_0 W^* + \\ 0,03172 W_i^* \Theta_i - 0,00159 W_i^* t + 5,41831 W_i^* W^* - 0,000278 \Theta_i t + 0,00854 \Theta_i W^* - \\ 0,00368 t W^*; \quad ^\circ\text{C}/\%. \quad (13.14)$$

Отримані інтерполяційні формули є зручною формою для розробки процедури оптимізації, оскільки така форма запису інваріантна щодо початкових умов і кінетичних параметрів.

Розрахунки, наведені з використанням рівнянь () і (), показали задовільну збіжність із експериментальними даними. Із цього випливає, що подання кінетики сушіння в безрозмірних координатах, інваріантних щодо початкових параметрів продукту й кінетичних параметрів, дозволяє застосувати для опису кінетики багатоступінчастих режимів сушіння, що забезпечують мінімальне число дослідів.

Інтерполяційні формули, що описують кінетику нагрівання й сушіння в безрозмірних координатах, є не тільки заощадливою й зручною формою подання граничних умов, але дозволяють скласти алгоритми оптимізації багатоступінчастих режимів сушіння.

Викладемо порядок складання одного з можливих алгоритмів оптимізації процесу сушіння зерна з використанням наведених описів кінетики.

Для розробки алгоритму багатостадійний процес сушіння представимо схемою (див. мал.). Кожна стадія характеризується певними значеннями вологості продукту на вході й виході. Керуючий параметр - температура сушильного агента - на кожній стадії може приймати ряд значень у деякому інтервалі температур.

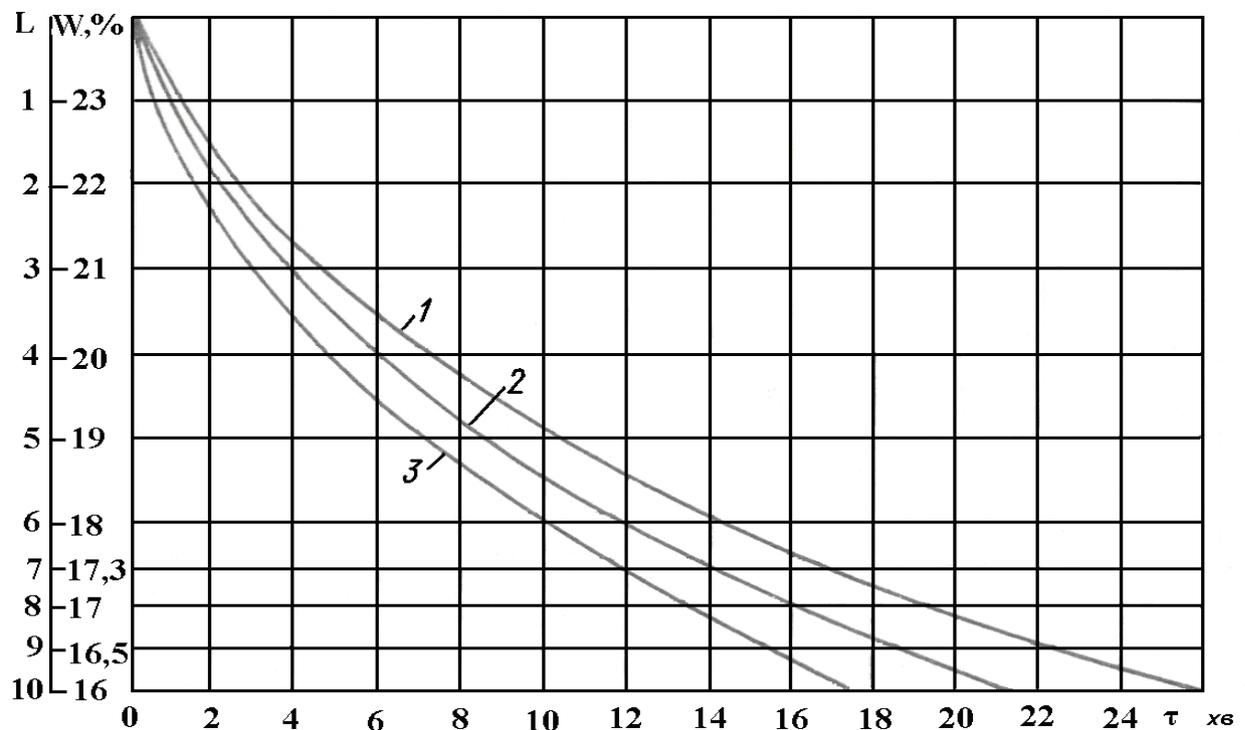


Рис. 13.2. Криві сушіння при різних температурах сушильного агента.

Задачу оптимізації сушіння сформулюємо в такий спосіб: при заданій експозиції сушіння визначити такі значення параметра станів (вологість продукту) і керуючого параметра (температура сушильного агента) на кожній стадії процесу, щоб витрати теплоти були мінімальними. Для рішення задачі використаємо криві сушіння $W = f(\tau)$ (мал.).

Для визначення функції $W = f(\tau)$, що відповідає оптимальному режиму, площину $W - \tau$ розбиваємо по осі часу на N частин (стадій) лініями

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_j < \dots < \tau_{N-1} < \tau_N = \tau_k$$

Тоді графіки функцій $W = f(\tau)$ можна представити графічно у вигляді (мал.) ламаних ліній з вершинами на лініях $\tau_j = \text{const}$.

Для прямих, що з'єднують точки $(W_{i, j-1}; \tau_{i, j-1})$ та $(W_{s, j}; \tau_{s, j})$ (i — номер входу, s — номер виходу з j -ї стадії),

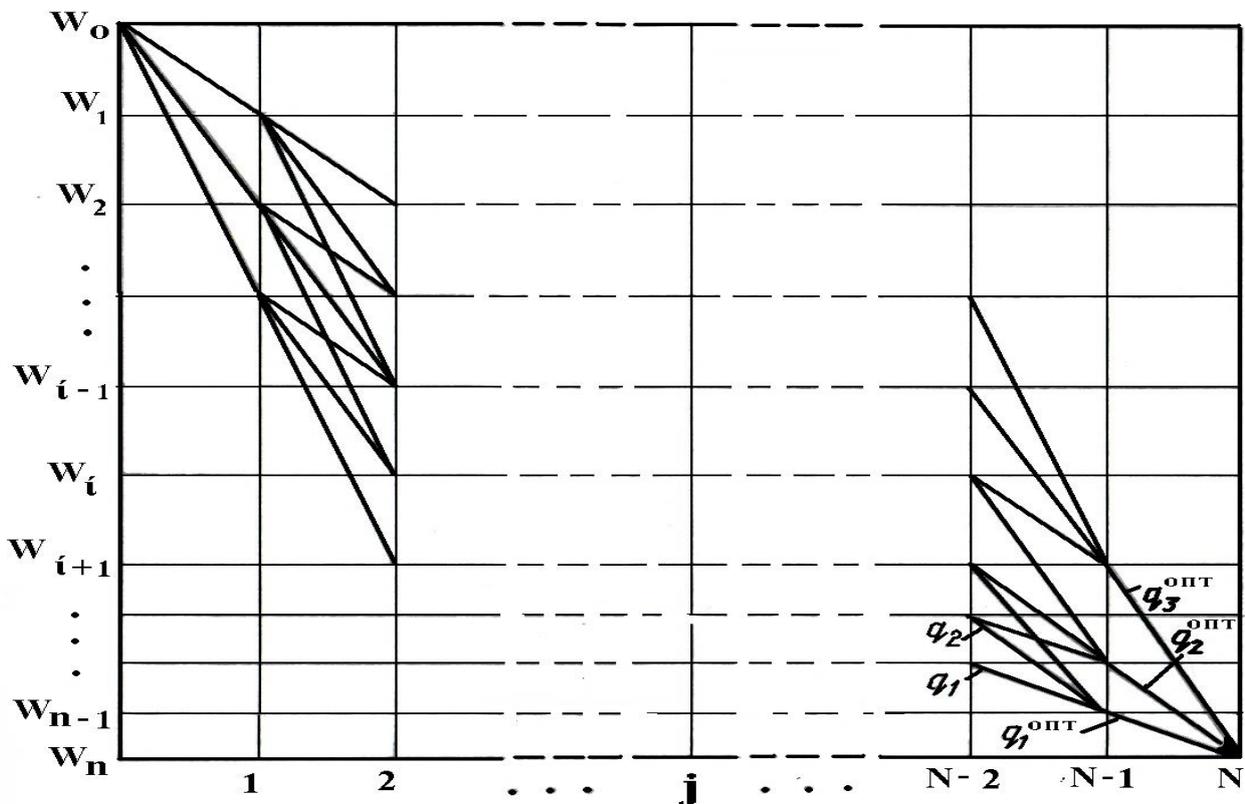


Рис. 13.3 . Побудова сітки на площині $W(\tau)$ для подання кінетики сушіння в табличній формі.

можна визначити скалярні величини $q_{i,s}(j)$, що виражають витрати теплоти на зниження вологості від W_i до W_s ($W_i > W_s$) на j -ї стадії процесу сушіння. У випадку рівномірної розбивки по осі τ значення $\tau_{i,s}(j)$ залежать від швидкості сушіння $N = \frac{dW}{d\tau}$ і температури сушильного агента t і не залежать від номера стадії.

Витрати теплоти на кожній j -ї стадії визначаємо з виразу

$$q = LJ\Delta\tau ; \text{кДж},$$

де L, J — витрата й ентальпія агента сушіння, кг/хв і кДж/кг с. в; τ — тривалість сушіння, хв.

Значення L визначається по формулі

$$L = 60Fv\rho, \quad \text{кг/хв,}$$

де F — площа перерізу сушильної камери (касета), м²; v і ρ — швидкість і густина агента сушіння, м/с і кг/м³.

Густина агента сушіння з достатньою, для практичних розрахунків, точністю визначаємо по формулі

$$\rho = (1,293 \cdot 273)/(273 + t), \quad \text{кг/м}^3.$$

Значення ентальпії можна обчислити по відомій формулі

$$J = 1,004e + 0,001d(2500 + 1,84t) \quad \text{кДж/кг, с. в.,}$$

де d — вологовміст агента сушіння, г/кг с. в. ($d = 10$ г/кг с. в.).

Після підстановки параметрів сушильної установки й значень L, ρ і J з відомих співвідношень формула для визначення витрат теплоти має вигляд

$$Q = \frac{(1662,578 + 67,993)}{273 + t} ; \quad \text{кДж.}$$

Для конкретної j -ї стадії $\Delta\tau = \tau_j - \tau_{j-1}$ задано, тому $q_{i,s} = (j) = f(t)$. Для визначення температури агента сушіння t при переході від вологості $W(i)$ до вологості $W(s)$ необхідне рівняння, що зв'язує інтенсивність вологообміну на стадії з основними параметрами перенесення, тобто рівняння $A = f(W_0, W_i, \Theta_i, t, W_s)$, конкретним видом якого є ().

У рівнянні () A має вигляд

$$A = \frac{(\tau_j - \tau_{j-1})}{(W_i - W_s)} ; \quad \text{хв/\%}$$

де W_0 — початковий вологовміст продукту, % ;

W_{ij}^*, W_s^* , — відносні вологоз'єми, що залежать від W_i та W_s ;

$$W_i^* = \frac{(W_0 - W_i)}{(W_0 - W_k)} ; \quad W_s^* = \frac{(W_i - W_s)}{(W_i - W_k)} ;$$

де W_k — кінцевий вологовміст, % ; Θ_i — температура зерна на вході в стадію, °С.

Рівняння () справедливо в діапазоні $W_0 = 23...57$ %; $W_i^* = 0...0,8$; $\Theta_i = 45...65$ °С, $t = 80...200$ °С, $W_s^* = 0,1...1,0$.

Після обчислень і підстановки значення A в рівняння () визначаємо температуру агента сушіння, а потім — витрати теплоти $q_{i,s}$. Аналогічно

визначаємо витрати теплоти при переходах між іншими точками. При обчисленні Q враховують температуру зерна на вході — j -у стадію, обумовлену на попередній стадії з рівняння типу

$$\Theta_s = \Theta_i + B(W_i - W_s) ; \quad ^\circ\text{C}$$

$$\text{де } B = f(W_0, W_i, \Theta_i, t, W_s), \quad ^\circ\text{C}/\% .$$

Значення B визначається з рівняння (), у якому

$$B = \frac{(\Theta_i - \Theta_s)}{(W_i - W_s)} ; \quad ^\circ\text{C}/\%$$

Область зміни факторів аналогічна рівнянню ().

Опис кінетики в безрозмірних координатах спрощує процедуру оптимізації й підвищує точність розрахунків на заключній стадії.

Результуючі витрати теплоти Q усього багатостадійного процесу визначаються як адитивна функція витрат, одержаних підсумовуванням $q_{i,s}$ всіх стадій

$$Q = \sum_{j=1}^N q_{i,s(j)} .$$

Відповідно до принципу оптимальності, покладеним в основу динамічного програмування, оптимізацію починають зі стадії, за межами якої процес відсутній. У нашому випадку такими стадіями є перша ($j = 1$) і остання ($j = N$). Оптимізація сушіння можлива тільки з першої стадії, тому що значення вхідних параметрів W_i й Θ_i кожної наступної стадії можуть бути визначені тільки при збіжності напрямку розрахунків з напрямком процесу. Після визначення оптимального керування для всіх можливих станів виходу цієї стадії приступають до визначення оптимального рівняння для наступної стадії. Оскільки для стадії $j = 1$ попередньої стадії не існує, тоді із принципу оптимальності випливає, що будь-який вибір на першій стадії може бути оптимальним

$$q_{0,s}^{om} = q_{0,s} ; \quad (1 \leq s \leq n) .$$

На стадії $j = 2$ оптимальний перехід із точки (W_0, τ_0) у точку (W_s, τ_j) буде відбуватися при витратах тепла, рівних мінімальному із чисел $[q_{i,s}(2) + q_{0,s}^{om}(1)]$. Тоді для всіх наступних стадій запишемо рекурентне співвідношення

$$q_{0,s}^{om}(j) = \min [q_{i,s}(j) + q_{0,s}^{om}(1)] \quad (j = 1, 2, \dots, N) .$$

Точки (i, s) , отримані при пошуку мінімуму витрат, визначають траєкторію оптимального переходу на j -й стадії, початого в точці (W_0, τ_0) .

Таким чином, для кожної стадії можна знайти оптимальне значення $q_{0,s}^{opt}(j)$ й точки (i, s) , що відповідають цієї оптимальної траєкторії процесу. Це дозволяє проводити оптимізацію процесів сушіння по кінетичних закономірностях, представленим у вигляді інтерполяційних формул.

Структурна схема алгоритму оптимізації процесу сушіння по кінетичних закономірностях при одному керуючому параметрі наведена на мал. (). Порядок реалізації цього алгоритму має свої особливості.

Перед початком рішення в ЕОМ вводиться вихідна інформація (блок 1), що містить дані про початкові параметри продукту (W_0 й Θ_0), обмеження по температурі агента сушіння (t_{min} і t_{max}) і температурі продукту (Θ_g), кількості стадій (N) і тривалості кожної з них (для конкретної сушарки), необхідної точності обчислень та інші дані ϵ .

Така організація програми дозволяє істотно скоротити необхідний об'єм пам'яті машини. Для зберігання проміжної інформації в цьому випадку використовуються лише два масиви комірок пам'яті q_j й q_{j-1} , необхідних для заповнення результатів оптимізації на розглянутій і попередній стадіях.

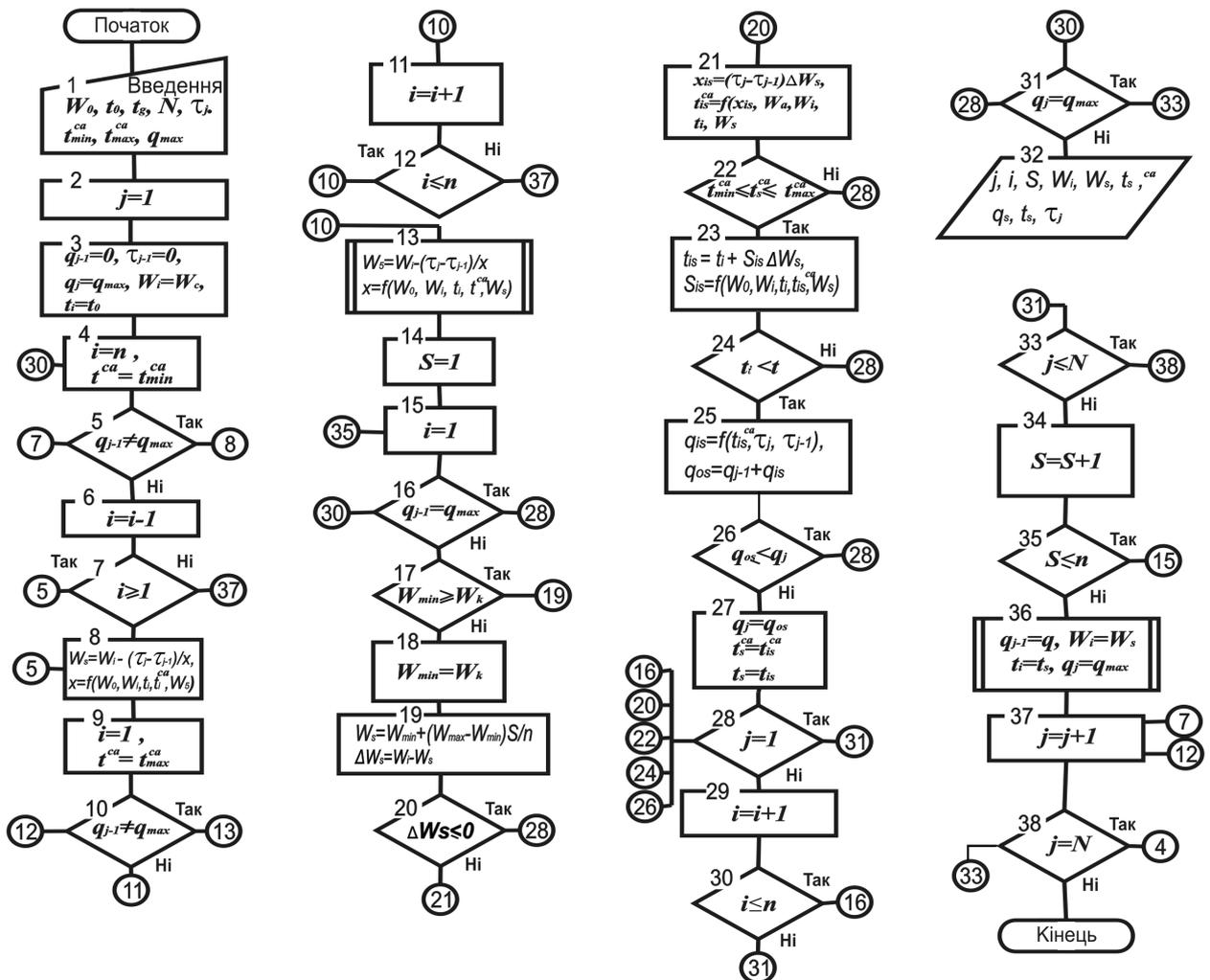


Рис. 13.4. Структурна схема алгоритму оптимізації процесу сушіння.

Функції блоків програми наступні. Блоки 2—12 призначені для підготовки програми оптимізації до підрахунку, для чого в комірку лічильника стадій засилається одиниця (блок 2). Блок 3 підготовлює масив $[q_{j-1}]$, у якому зберігаються результати розрахунків попередньої стадії й куди перед початком рішення засилаються нульові значення, що відповідає відсутності процесу за межами першої стадії (тобто умовно $f_0(x_0) = 0$).

Блоком 3 привласнюються значення початкових параметрів матеріалу W_0 й t_0 всім j -м значенням входу першої стадії й засилаються в масив q_j , а також значення $q_{max} = 10^9$ кДж, у якому розміщуються мінімальні значення критерію оптимальності оптимізуючої стадії.

У блоках 4—13 обчислюються максимальне W_s^{max} й мінімальне W_s^{min} значення вологості, які необхідні для визначення меж зміни W_s й інтервалу розбивки по осі вологості. Для визначення верхньої межі (W_s^{max}) у блоках 4—6 по осі вологості на вході в j -у стадію визначається точка i , у яку є оптимальний перехід із точки (W_0, t_0) , а потім у блоці 8 обчислюється значення $W_s^{max} = \frac{f}{t_{min}^{ca}}$. Аналогічно обчислюються W_s^{min} (блоки 9—13).

У блоках 14 й 15 підготовлюються до розрахунку перші із всіх можливих станів входу (точка i) і виходу (точка s) на стадії j . При цьому, якщо в точці $i = 1$ (вихід попередньої стадії) був відсутній оптимальний перехід, то керування із блоку 15 передається в блок 28, тут до розрахунку підготовлюються наступні значення параметрів матеріалу на вході в стадію (наступна точка i). У протилежному випадку в блоці 19 обчислюється значення вологості на виході W_s^j **вологоз'єм** ΔW_s^j й якщо $\Delta W_s^j > 0$ (блок 20), те підпрограмою блоку 21 по рівнянню $x = f(W_0, W_f, t_i, t^{ca}, W_s)$ обчислюється температура сушильного агента t_{is}^{ca} при переході від точки i у точку s (сушіння з вологості W_i до вологості W_s).

Після обчислення t_{is}^{ca} блоком 22 перевіряється, чи не вийшло розраховане t_{is}^{ca} значення температури за межі області визначення ($t_{min}^{ca} \leq t_{is}^{ca} \leq t_{max}^{ca}$). Якщо t_{is}^{ca} перебуває в межах допустимої області, тоді блоком 23 по рівняннях

$$S = f(W_0, W_i, t_i, t_{is}, W_s) \quad \text{і} \quad t_{is} = t + S_{is} \Delta W_s$$

обчислюється температура матеріалу наприкінці стадії (у точці s)

$$t_s = f(W_0, W_i, t_i, t^{ca}, W_s).$$

Отримане значення t_s у блоці 24 порівнюється із гранично допустимим нагріванням $t_{доп}$. Якщо $t_s \leq t_{доп}$, тоді блоком 25 обчислюються витрати тепла $q_{is} = f(t_{is}^{ca}, \Delta\tau)$. Якщо **вологоз'єм** між i та s відсутній ($\Delta W_s^i = 0$), температура агента сушіння t_{is}^{ca} виходить за межі області визначення, а нагрівання зерна t_s перевищує допустиму температуру $t_{доп}$, тоді керування із блоків 20, 22 й 24

передається в блок 28, де до розрахунку підготовлюються наступні значення входу стадії (W_i). Виключення становлять перша стадія ($j = 1$, блок 28), на якій цикли обчислень організовані відповідно до принципу оптимальності тільки за значеннями виходу стадії W_s при $W_i = W_0 = \text{const}$, і остання стадія ($j = N$, блок 33), на якій обчислення проводяться тільки для одного значення $W_s = W_k = 16 \%$ при переборі всіх W_i . За значенням i у блоці 25 виробляється крім обчислення q_{is} вибірка з масиву q_{j-1} мінімального значення критерію оптимальності попередньої стадії, що визначає в сумі з оцінкою q_{is} величину критерію оптимальності й даної стадії, тобто процесу, що включає поряд з попередніми стадіями, й оптимізовану в цей момент. Отриманий результат $q_{is}^j + q_{0i}^{j-1}$ у блоці 26 порівнюють зі значенням q_{0s}^j , що зберігалось до цього моменту у відповідній комірці масиву q_l .

Якщо знову знайдена величина $q_{0s}^j = q_{is}^j + q_{0i}^{j-1}$ менше колишньої, то це означає, що керування t_{is}^j краще того, при якому отримане колишнє значення q_{0s}^j , і нове значення q_{0s}^j записується в масив q_j на місце попереднього в блоці 27. Одночасно в цьому ж блоці виробляється запам'ятовування керування t_{is}^{ca} , що виводиться потім на друк в блоці 32. У цьому ж блоці друкуються значення W_i, W_s, t_{is}^{ca} числа j, i, s та відповідне їм значення витрат теплоти q_{0s} .

У тому випадку, коли знову знайдена величина критерію оптимальності $q_{is}^j + q_{0i}^{j-1}$ виявиться більше попередньої, то керування програмою обчислень із блоку 26 передається в блок 28, де до розрахунку підготовлюється наступне значення входу j -ї стадії — W_i . Якщо для всіх $i - s$ -переходів (при $W_s = \text{const}$) не виконуються умови блоків 16, 20, 22 й 24, тобто не обчислюється q_j , тоді результати не друкуються й керування із блоку 31 передається в блок 33 для підготовки до розрахунку наступного значення W_s .

Після завершення перебору за всіма значеннями виходу W_s і виводу на друк значень $j, i, s, W_i, W_s, t_s, t_{is}^{ca}, q_{0s}$, у блоці 35 відбувається пересилання значень виходу стадії s у значення входу i наступної стадії ($W_i^{j-1} = W_s^j$; $t_i^{j-1} = t_s^j$; $q_{0i}^{j-1} = q_{0s}^j$) і потім у блоці 37 змінюється лічильник кількості стадій і цикл розрахунків повторюється для нової j -ї стадії. Якщо всі стадії вже оптимізовані ($j = N$), то рішення задачі закінчується.

У результаті розрахунку оптимального режиму сушіння для заданої експозиції $\tau_{\text{кін}} = 20$ хв отримані наступні розподіли температури сушильного агента:

Час τ , хв	Температура $t_{c.a.}$, °C
0—8	140
8—15	120
15-20	100

Аналогічний розрахунок може бути проведений при інших значеннях експозиції сушіння, тобто викладений метод дозволяє проводити оптимізацію

процесів сушіння по кінетичних залежностях, представленим в аналітичному, графічному й табличному видах.

§ 14. Моделювання процесів ректифікації

При ректифікації взаємодія рідких і парових фаз багаторазово повторюється. Це дозволяє розглядати ректифікацію як багатостадійний процес, кожену стадію якого можна описати моделями із зосередженими параметрами. За стадію приймають тарілку ректифікаційної колони. Іноді поділ роблять по конструктивних елементах апарата (тарілка, куб, дефлегматор, холодильник). У цьому випадку ректифікаційні колони представляють сукупністю технологічних операторів міжфазного обміну й поділу. Вона може бути розглянута й одним оператором поділу. На живильну тарілку ректифікаційної колони з номером $i = f$ надходить потік розділяючої бінарної суміші F з концентрацією легколетючого компонента x . У результаті підведення тепла Q , потоком гострої пари V , у нижню частину колони (куб) 2 утворюються колони потоків пари, що піднімаються вгору, V з концентрацією легколетючого компонента y_i , значення якої змінюються на кожній тарілці ($i = 0, 1, 2, \dots, f, \dots, n$) у результаті взаємодії з потоком, що опускається, L_i рідини з концентрацією легколетючого компонента x_i . Потік пари, що утворився, $V_i - L_i = V$ з концентрацією легколетючого компонента у надходить у дефлегматор 3, де за рахунок підведення потоку охолоджуючої води L_b з температурою t_b утвориться конденсат, що надалі розділяється на потік дистилату D і потік флегми G з концентраціями легколетючого компонента x_D й x_G . З куба колони виводиться потік кубового залишку W з концентрацією легколетючого компонента x_w . Основну мету ректифікації можна сформулювати в такий спосіб: одержати дистилат із заданою концентрацією легколетючого компонента x_D при мінімально припустимому його змісті в кубовому залишку x_w . Основними керуючими впливами вважають витрати живильної суміші, води й потоку пари, тобто F , L_b та V .

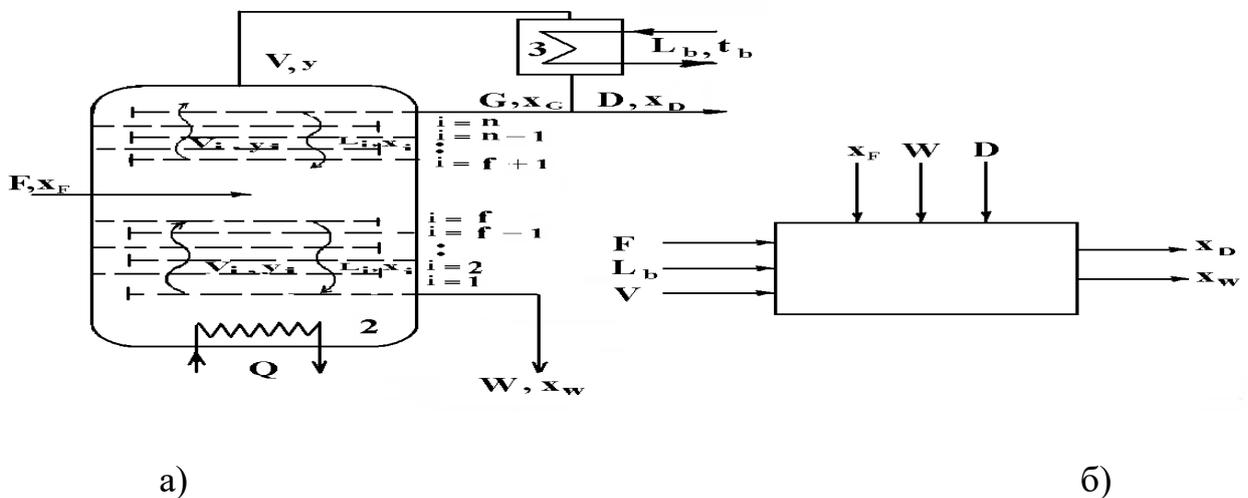


Рис. 14.1. Схеми одностарілкової ректифікаційної колони: а — структурна й б — параметрична.

Відповідно до цієї мети модель процесу ректифікації бінарної суміші на багатотарілчатій колоні (мал.) складена при наступних допущеннях: бінарна суміш має постійну відносну летючість (склад пари, що залишає тарілку, дорівнює складу рідини, що йде із цієї тарілки); запізнювання потоку рідини на тарілці на порядок більше запізнювання потоку пари; рідина в тарілці ідеально перемішується, і тарілка являє собою об'єкт із зосередженими параметрами; у паровій фазі має місце повне витиснення потоку. Колона працює адиабатично: склад пари, що йде з останньої тарілки, дорівнює складу рідини, що повертається з дефлегматора; масопередача на тарілках еквімолярна; тиск однаковий по всій висоті колони; віднесення рідини з тарілок не перевищує 10 %; склад парової й рідкої фаз у кубі колони рівний, тобто $x_w = y_0$. Збурюючими впливами є склад живильної суміші x_f й витрати дистилляту D і кубової *остачі* W . Вихідні суміш і флегма подаються при температурі кипіння. Показником фази є q ($0 \leq q \leq 1$). Якщо $q = 1$, то суміш складається тільки з рідини, а якщо $q = 0$, то з пари. У нашому випадку $q = 1$.

Рівняння матеріального балансу по загальному потоці наступне:

$$F = D + W ;$$

а по легколетючому компоненті

$$Fx = Wx + Dx. \quad (14.1)$$

З огляду на **наведені** позначення номерів тарілок на мал. (), запишемо співвідношення для всіх потоків **зміцнювальної** ($i = f + 1, \dots, n$) і **вичерпної** ($i = 1, \dots, f$) частин колони [13]

$$V_i = D + G - Fq \quad (i = 0, \dots, f);$$

$$V_i = D + G \quad (i = f + 1, \dots, n);$$

$$L_i = V_i + W \quad (i = 1, \dots, f)$$

$$L_i = V - D \quad (i = f + 1, \dots, n) ()$$

(14.2)

Концентрації легколетючого компонента в рідкій і паровій фазах визначаємо з наступних співвідношень:

$$x_i = \frac{1}{W + V_{i-1}} (Vy_{i-1} + Wx_w + V_{i-1}x_{i-1}) \quad (i = 1, \dots, f);$$

$$x_i = \frac{1}{W - F + V_{i-1}} (Vz_{i-1} - Dx_0 + V_{i-1}x_{i-1}) \quad (i = f + 1, \dots, n);$$

$$y_i = y_{i-1}(1 - \eta_i) + y_i^* \eta_i \quad (i=0, \dots, (f-1) \text{ (} f+1), \dots, n);$$

$$y_f = \frac{1}{V} \{ [(1 - \eta_f) y_f + y_f^* n_f] V_1 + F q y_f \} \quad (i=f) \dots\dots$$

Коефіцієнт корисної дії i -ї тарілки обчислюють по **рівнянню**

$$\eta_i = 1 - \exp \left[\frac{k_{vi} S_{ef}}{V_i} \right] \quad (i = 0, \dots, n), \quad (14.3)$$

де

$$k_{vi} = \frac{S_{ef}}{\frac{2}{k_{yi}} + \frac{m_i}{k_{xi}}} \quad (i = 1, \dots, n);$$

$$k_{yi} = k_{yi}(V_i, L_i, x_i, y_i) \quad (i=0, \dots, n);$$

$$k_{xi} = k_{xi}(V_i, L_i, x_i, y_i) \quad (i=0, \dots, n);$$

$$y_i^* = y_i(x_i) \quad (i=0, \dots, n); \quad (14.4)$$

$$m_i = \left(\frac{\partial y^*}{\partial x} \right) \quad (i=0, \dots, n); \quad (14.5)$$

$$y_F = \frac{(\alpha - 1)(x_F + q + 1) - \sqrt{[(\alpha - 1)(x_F + q) + 1]^2 - 4\alpha(\alpha - 1)x_F q}}{2q(\alpha - 1)}; \quad (14.6)$$

де k_{xi} , k_{yi} — коефіцієнти масовіддачі по рідкій і паровій фазах на i -ї тарілці; α — відносна летючість компонентів; S_{ef} — ефективна площа тарілки; η — ККД тарілки; y^* — рівноважна концентрація легколетючого компонента в паровій фазі.

Обмеження

$$(14.7) \quad \begin{aligned} & y = 0; \quad 0 < x < 1; \\ & 0 < y < 1; \quad 0 \leq f \leq n; \end{aligned}$$

$$0 < D < F; \quad 0 < W < F,$$

при $q = 0$ $y_F = 0$, при $q = 1$ $y_F = x_F$.

Наведена система нелінійних алгебраїчних рівнянь є математичним описом статички ректифікаційної колони, що встановлює зв'язок між концентраціями легколетючого компонента на виході x_w й x_D і режимними параметрами F , x , q , G , D . Рівняння отримані з умов матеріального балансу.

Рівняння () виражає ККД тарілки, а рівняння () і () представляють криву рівноваги й тангенс кута нахилу дотичної до кривої рівноваги. Рівняння () отримано спільним рішенням рівняння

$$y_F = \frac{q-1}{q} x_F + \frac{x_F}{q}$$

і рівняння кривої рівноваги

$$y^* = \frac{\alpha x}{(\alpha-1)x+1}.$$

Коефіцієнти масовіддачі k_{yi} й k_{xi} визначаються експериментально.

Для колони, що розділяє водно-спиртову суміш, із числом тарілок $n = 66$, номер живильної тарілки $f = 16$, $S_{эф} = 15$ м і коефіцієнтом віднесення рідини $k = 0,1$, що має постійну витрату пари V та еквімолярне масоперенесення ($U_i = 0$), загальна форма опису конкретизується

$$W = F + V - D; \quad (14.8)$$

$$Wx = Fx - Dx. \quad (14.9)$$

Помноживши рівняння () на x , одержимо

$$Wx = Fx + Vx - Dx.$$

Віднявши від цього виразу рівняння (), одержимо

$$W(x_D - x_w) = F(x_D - x_F) + Vx_D.$$

Склад рідкої й парової фаз визначаються при цих умовах співвідношеннями

$$x_{i+1} = \frac{1}{W} (Vy_i + Wx_w); \quad i = 1, \dots, f;$$

$$x_{i+1} = \frac{1}{W-F} (Vy_i - Dx_D); \quad i = f+1, \dots, n;$$

$$y_i = y_{i-1} = \exp\left(-\frac{k_V}{V}\right) + y^* \left[1 - \exp\left(\frac{k_{V_i}}{V}\right)\right];$$

$$kV_i = \frac{S_{эф}}{\frac{1}{k_{x_i}} + \frac{m_i}{k_{y_i}}};$$

$$W = \frac{F(x_D - x_F) - Vx_D}{x_D - x_w};$$

$$D = F + V - W \dots$$

Звичайно задаються величини F , x_W, x_F, x_D , а необхідно визначити витрати пари V , дистилляту D і кубового залишку W . Для спрощення розрахунків криву рівноваги апроксимують відрізками прямих.

У науково-виробничому об'єднанні «Пищепромавтоматика» при кривій рівноваги $y^* = f(x)$ в області $0 \leq x \leq 0,9$ отримані наступні значення коефіцієнтів m_i і залежності $y_1^* = f(x)$ представленої п'ятьма відрізками прямої:

$$0 \leq x_1 \leq 0,0025; \quad m_1 = 12,86; \quad y_1^* = 12,86x;$$

$$0,0025 \leq x_2 \leq 0,02; \quad m_2 = \frac{0,793}{(1,32x + 0,0793)};$$

$$y_2^* = \frac{x}{1,32x + 0,0793};$$

$$0,02 \leq x_3 \leq 0,35; \quad m_3 = \frac{0,0792}{(1,48x + 0,0792)};$$

$$y_3^* = \frac{x}{1,48x + 0,0792};$$

$$0,35 \leq x_4 \leq 0,61; \quad m_4 = \frac{0,2439}{(1,04x + 0,2439)};$$

$$y_4^* = \frac{x}{1,04x + 0,2439};$$

$$0,61 \leq x_5 \leq 0,90; \quad m_5 = \frac{0,6174}{(0,4348x + 0,6174)};$$

$$y_5^* = \frac{x}{0,4348x + 0,6174}$$

Область відповідності моделі об'єкту обмежена наступними нерівностями (граничні умови):

$$0,75 \leq F \leq 155 \text{ кмоль/год}; \quad 70 \leq V \leq 700 \text{ кмоль/год}; \quad 0,15 \leq x \leq 0,30 \text{ мол. частки};$$

$$0 \leq x_i \leq 0,05; \quad 0 \leq y_i \leq 0,25;$$

$$0,429 \leq x \leq 0,90; \quad 5 \cdot 10^{-6} \leq x_n \leq 5 \cdot 10^{-4};$$

$$y_n = x_D$$

Постійні в рівнянні $k_{y_i} = a_i V + b_i$; $k_{x_i} = c_i$; мають значення

$$a_1 = 4,5 \quad (i = 1, 2, \dots, 16);$$

$$a_i = 0,61 \quad (i = 17, 18, \dots, 66);$$

$$b_i = 33 \quad (i = 1, 2, \dots, 66);$$

$$c_i = 4500 \quad (i = 1, 2, \dots, 16);$$

$$c_i = 925 \quad (i = 17, 18, \dots, 66).$$

Реалізація на ЕОМ наведеної системи алгебраїчних рівнянь складності не представляє й не вимагає спеціальних перетворень. Використовуючи метод послідовних наближень, тобто задаючись послідовно значеннями (наприклад, $F = 100$; $x_D = 0,826$ й $x_W = 47 \cdot 10^{-6}$ і т.д.), можна визначити величини витрат пари V , дистилляту D і кубового залишку W , що відповідають прийнятним значенням витрати живильної суміші й заданих концентрацій легколетючого компонента на вході й виході з колони, тобто її статичні характеристики. Схема алгоритму обчислення наведена на мал. ().

Тут також наведені й чисельні позначення величин. Розрахунок ведеться послідовно по номерах тарілок. Процедура розрахунку полягає в наступному.

Вводимо значення F , x_W , x_F , x_D , ε , V_{min} , S_{eq} . Приймаємо значення $y_0 = x_W$.

Обчислюємо витрату пари по кроках, починаючи від V_{min} до V_{max} , по тарілках. Потім обчислюємо витрати кубового залишку й дистилляту по формулах () і ().

Залежно від величини x розрахунок ведеться по одному з п'яти відрізків, що апроксимують криву рівноваги. При цьому обчислюємо тангенс кута нахилу m_i і рівноважне значення y^* (блок 8, 10, 12, 14 й 16). Логічні блоки (7, 9, 11, 13 й 15) перемикають процедуру розрахунку залежно від ділянки апроксимації кривої рівноваги. У випадку $x_i > 0$ друкується ознака відсутності y^* для даного x_i і рахунок припиняється. Далі ведуть потарілковий розрахунок для колони. Залежно від номера i обчислюють загальний коефіцієнт масовіддачі k_{v_i} (блоки 19, 20, 21, 22) і концентрацію спирту в паровій фазі на кожній тарілці (блоки 25, 26). Потарілковий розрахунок концентрації спирту в рідкій фазі виконують спочатку для вичерпної ($i < 16$), а потім для зміцнювальної ($i > 16$) частини колони (блоки 27 й 28).

Для кожного значення V визначають концентрацію спирту в парах на останній тарілці y_n і порівнюють із чисельним значенням концентрації спирту в дистилляті x_D . Інша частина процедури обчислень забезпечує необхідну точність обчислень залежно від прийнятого ε і не має потреби в особливих

$$L - Vy_i - Wx_w = G_k \frac{dx_w}{d\tau},$$

де G_T , G_D й G_K — маса рідини на тарілці, у дефлегматорі й кубі колони.

Подібну систему рівнянь можна вирішити за умови, що залежність $y = f(x)$ і рівняння рівноваги $y^* = f(x)$ відомі. У загальному випадку вони є нелінійними й для рішення звичайно застосовують АОМ. Якщо розглядати колони з n тарілок, то динамічна характеристика потоку рідини в колоні для i -ї тарілки описується рівнянням

$$T_i \frac{dL_i}{d\tau} = G_T - L_i + qF$$

де T_i — постійна часу.

Динамічна характеристика потоку пари у колоні для i -ї тарілки описується рівнянням такого ж типу

$$T_i \frac{dV}{d\tau} = -(1 - q)F,$$

яке в подальших розрахунках можна не враховувати, тому що запізнювання рідини на тарілках на порядок більше запізнювання потоків пари.

Витрата пари в колоні V визначається кількістю підведеного нагрівачем теплоти Q , що повинно бути враховане при складанні рівняння у вигляді функції $f(Q)$

$$T_Q \frac{dV}{d\tau} = V + f(Q).$$

Пара з верхньої тарілки надходить у конденсатор (дефлегматор), де потік конденсату перед надходженням у флегмовідокремлювач затримується. Затримку продукту в конденсаторі наближено визначаємо з рівняння транспортного запізнювання

$$L(\tau) = G(\tau - \tau_{\text{зап}}),$$

де $\tau_{\text{зап}}$ — час запізнювання.

Підставляючи в друге рівняння системи () флегмове число, рівне відношенню кількості флегми до кількості дистилляту $R = \frac{G}{D}$, можна послідовно обчислити значення витрат флегми й дистилляту. Виходячи з наведеного опису, структурна схема моделі повинна бути розділена на ділянки, що відповідають елементам колони: нагрівач, введення харчування, тарілка, куб, кип'ятильник, дефлегматор. Тоді модель колони повинна буде мати чотири введення. Напруги, що подаються на ці входи, моделюють

флегмове число R , кількість поступаючої суміші F та її склад x_F і кількість теплоти Q , підведеного до кип'ятильника колони.

Функцію $f(Q)$ варто відтворювати на лінійних блоках. Пара, що піднімається з куба, проходить через тарілку із затримкою T_V . Затримку пари при проходженні через тарілку не враховують, а затримка рідини моделюється ланкою запізнювання.

Для сталого стану можна прийняти $f(Q) = 2Q$, де $0 \leq Q \leq Q_{max}$. Якщо прийняти $Q = 5$ кВт, то на АОМ це зручно представити 50 Вт. Тоді Q_{max} , або відповідна йому кількість пари представиться напругою в 100 В. Повернення флегми G на тарілку можна представити підсилювачем. Надходження рідини в кип'ятильник моделюється відповідно до системи рівнянь (). Для рішення третього рівняння системи () варто використати інтегросуматор, множний пристрій і функціональний перетворювач, що повинен представити лінію рівноваги відповідно до рівнянь:

$$y_i = 3,85 \quad (\text{при } x \leq 0,13);$$
$$y_i = 0,5 + 0,423 x_i \quad (\text{при } x > 0,13).$$

Використовуючи модель, реалізовану на АОМ, при сталості витрати розділюваної суміші F та її складу x_F одержимо значення витрати дистилляту D заданого складу x_D при варіюванні флегмового числа R і кількості підведеного до кип'ятильника тепла Q .

Великі дослідження з економічного аналізу процесу ректифікації проведені в роботі [19], де узагальнені дані про залежності собівартості спирту від його вмісту у вихідному продукті, у кубовому залишку й дистилляті, а також від флегмового числа одиниць переносу (тарілок). Дані, отримані підбором значень цих величин у робочих діапазонах їхньої зміни, представлені у вигляді номограм, які дозволяють вибрати режими роботи ректифікаційних колон, що забезпечують найменші витрати на виробництво спирту.

МОДЕЛЮВАННЯ ХІМІЧНИХ І БІОХІМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ ХАРЧОВИХ ВИРОБНИЦТВ

§ 15. Моделювання кінетики хімічних і біохімічних перетворень

Хімічні процеси в харчовій промисловості здійснюються при очищенні дифузійного соку, освітлінні цукрового сиропу, фруктових соків і вина, гідрогенізації жирів, рафінації рослинного масла, гідролізі крохмалю, очищенню стічних вод та ін.

У галузях харчової промисловості біохімічні процеси мають велике значення. Вони засновані на застосуванні дріжджів (етилловий спирт,

гліцерин, хлібопекарські дріжджі, квас, пиво), бактерій (ацетоно-бутилове виробництво, виробництво оцту, молочної та інших кислот), цвілевих грибів (лимонної, глюконової, фумарної, ітколової кислот, пеніциліну, стрептоміцину). Ці продукти бродильних виробництв одержують у результаті каталітичної дії ферментів мікроорганізмів.

Хімічна кінетика вивчає закономірності протікання хімічних процесів у часі й вплив різних умов на хімічні перетворення (концентрації реагуючих речовин, температури, тиску, наявності каталізаторів і т.п.). Біологічна кінетика вивчає закономірності явищ, що протікають у живій природі. Із всіх видів біологічної кінетики (біохімічна, біофізична, мікробіологічна й популяційна) для харчових виробництв найбільше значення має кінетика популяцій.

Біохімічна кінетика має свої особливості, пов'язані з особливостями ферментативних реакцій. Ферменти не порушують рівноваги реакції, і в цьому вони не відрізняються від звичайних каталізаторів абіогенної природи. Ферментативні реакції приводять до повного виходу продуктів без утворення побічних речовин. Швидкість їхнього протікання при м'яких фізіологічних умовах ($pH = 7$; $t = 37\text{ }^{\circ}\text{C}$) в 10^{12} — 10^{18} разів більше, ніж без ферменту.

Ці особливості біохімічних реакцій відбиває форма рівнянь біохімічної кінетики, що трохи відрізняється від форми рівнянь хімічної кінетики. Вивчення кінетичних закономірностей біохімічного каталітичного процесу полягає у встановленні впливу концентрацій ферменту, субстрату, активаторів, інгібіторів, а також фізико-хімічних факторів (температури, іонної сили, діелектричної проникності, тиску) на швидкість ферментативної реакції без врахування характеру рушійних сил.

Кількісно швидкість хімічної реакції визначають числом молекул, що реагують в одиницю часу. Для того щоб можна було порівнювати швидкості різних реакцій, число молекул відносять до одиниці об'єму. У зв'язку із цим швидкість реакції визначають як число молекул або молей даної речовини, що реагують в одиницю часу в одиниці об'єму.

Застосування методів математичного моделювання значно полегшує й прискорює вивчення кінетики. Для відомого механізму реакції можна легко скласти математичний опис. Для кожного компонента, що входить у реакцію, можна записати лінійне або нелінійне диференціальне рівняння. Це так звані кінетичні рівняння, які в сукупності дають повне подання про швидкості хімічних перетворень компонентів при вивченні складної реакції. Ці системи рівнянь іноді мають складне аналітичне рішення. Якщо точне рішення неможливо, то застосовують наближені методи обчислень, які забезпечують для технічних розрахунків необхідну точність.

Для моделювання процесу на АОМ спрощувати рівняння, що описують кінетику хімічних реакцій, не потрібно. Навпаки, моделювання можна робити в строгій відповідності з описом, що складається на основі експериментальних даних. Досліди проводять у стаціонарних ізотермічних умовах й одержують об'єктивні відомості про стан системи в різних точках. При цьому число експериментів скорочується тому, що після реалізації

математичного опису на АОМ дослідження можна продовжити на моделі. Модель удосконалюється й вважається задовільною, якщо дані, отримані на моделі і дані експерименту в подібних точках збігаються.

Швидкість хімічної реакції не завжди зручно визначати зміною концентрації реагуючих речовин в одиницю часу і в одиниці об'єму. Тому для гетерогенних процесів зміну концентрації відносять до поверхні. Відношення кінцевої різниці концентрацій до відповідного проміжку часу — це середня швидкість реакції. Для системи, об'єм якої із часом залишається постійним, швидкість реакції по заданому компоненту A визначається нескінченно малою зміною концентрації цього компонента dc_A за час $d\tau$

$$v_A = \frac{dc_A}{d\tau} \quad (15.1)$$

Відповідно до закону діючих мас, швидкість даної реакції пропорційна добутку концентрацій, що вступають у реакцію речовини. Причому кожна з концентрацій бере участь у степені, рівної стехнометричному коефіцієнту в рівнянні реакції, а коефіцієнтом пропорційності служить константа швидкості реакції.

Це правило обмежене областю застосування законів ідеальних газів або розведених розчинів.

У деяких випадках замість концентрацій використовують активність. Однак задовільні результати можна одержати тільки при заданих зовнішніх умовах (температурі, тиску, середовищі, у якій відбувається процес). При цьому швидкість реакції є функцією концентрації реагуючих речовин

$$v_A = kc_A^a c_B^b, \quad (15.2)$$

де k — константа швидкості хімічної реакції, що залежить від температури; c_A, c_B — концентрації реагуючих речовин A і B ; a, b — порядки реакції по даному компоненту; $n = a + b$ — сумарний порядок реакції.

Якщо протікання хімічної реакції не пов'язане з переносом маси й енергії, то ці закономірності відносять до мікрокінетики, якщо при протіканні хімічної реакції враховується перенос маси й енергії, те - до макрокінетики. Це ділення трохи умовно, однак воно дозволяє дати досить точну кількісну оцінку різним сторонам складного хімічного процесу. У цей час макрокінетика оформилася в спеціальний розділ хімічної кінетики, що став основою розрахунку хімічних реакторів.

Мікрокінетика вивчає взаємодії в хімічному процесі на рівні молекул у масштабах, не перевищуючих масштабів вільного пробігу молекул, макрокінетика - на рівні агрегатів молекул у масштабах вихрів, крапель або газових міхурів (макрочасток).

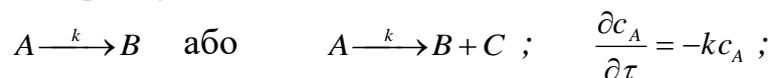
При розгляді хімічних процесів мікро- і макрокінетики являють собою єдине ціле. У лабораторних умовах досліджують мікрокінетику процесу - встановлюють механізм реакції й кінетичні рівняння, тобто становлять

математичний опис хімічної реакції. Потім на досвідченій установці визначають параметри моделі, що характеризують макрокінетику процесу (коефіцієнти поздовжнього й радіального перемішування, тепло- і масообміну, режими плинну та ін.). Потім описи мікро- і макрокінетики поєднують у повну математичну модель, з якої можна одержати чисельні залежності між всіма параметрами процесу.

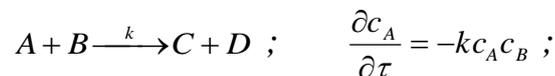
Залежно від впливу дифузійних факторів хімічні процеси протікають у кінетичній, дифузійній і змішаній областях. Для хімічних процесів, що протікають у кінетичній області, швидкість хімічної реакції лімітує весь процес, а швидкості руху потоків й їхні фізичні властивості помітно не впливають на процес. Для хімічних процесів, що протікають у дифузійній області, що лімітує є швидкість дифузії реагентів у зоні реакції, що залежить від швидкостей руху потоків й їхніх фізичних властивостей. Для процесів, що відбуваються в змішаній області, швидкості хімічного перетворення й дифузії порівнянні. При цьому лімітуючою завжди буде найбільш повільна стадія послідовного процесу.

Вид кінетичного рівняння визначається механізмом реакції. По типі механізму розрізняють реакції прості й складні. Простими називаються такі реакції, які протікають в одну стадію й в одному напрямку. Кінетичні рівняння простих реакцій можуть мати такий вигляд:

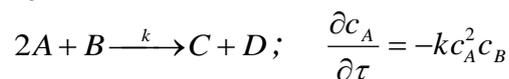
реакції першого порядку



реакції другого порядку

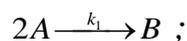


реакції третього порядку

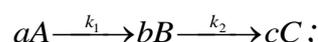


Більшість хімічних реакцій є складними. Їх можна класифікувати в такий спосіб:

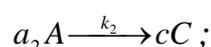
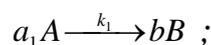
оборотні реакції



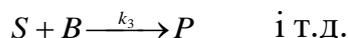
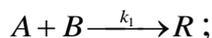
послідовні реакції



паралельні реакції



змішані реакції



У складній реакції те саме речовина може брати участь у якості вихідного або кінцевого реагенту в декількох стадіях. При цьому кожна стадія складного процесу протікає за законом реакцій простих типів й, використовуючи закономірності простих реакцій, можна написати вираження для швидкості утворення або зникнення (розкладання) будь-якого компонента в цій стадії. Повна (результуюча) швидкість його утворення або розкладання дорівнює алгебраїчній сумі швидкостей всіх стадій.

Наприклад, кінетичні рівняння змішаної реакції мають вигляд

$$\frac{dc_A}{d\tau} = -k_1 c_A c_B ;$$

$$\frac{dc_B}{d\tau} = -k_1 c_A c_B - k_2 c_R c_B - k_3 c_S c_B ;$$

$$\frac{dc_R}{d\tau} = k_1 c_A c_B - k_2 c_R c_B ;$$

$$\frac{dc_S}{d\tau} = k_2 c_R c_B - k_3 c_S c_B ;$$

$$\frac{dc_P}{d\tau} = k_3 c_S c_B - k_4 c_P c_B \quad \text{і т.д.}$$

Для паралельної реакції рівняння кінетики наступне:

$$\frac{dc_A}{d\tau} = -k_1 c_A^{a_1} - k_2 c_A^{a_2}$$

Таким чином, кінетичні закономірності хімічних реакцій можуть бути описані за допомогою одного або системи звичайних диференціальних рівнянь, дозволених відносно похідних $\frac{dc_A}{d\tau}$; $\frac{dc_B}{d\tau}$; $\frac{dc_C}{d\tau}$ та ін. Праві частини таких рівнянь є статичними функціями шуканих концентрацій реагентів системи c_A, c_B, c_C, \dots . В умовах постійної температури й середовища, константи швидкості, які входять в рівняння, k_1, k_2, k_3 можна розглядати як постійні величини.

При вивченні кінетики хімічних реакцій найчастіше вирішують одну з наступних трьох задач:

1. Розрахунок концентрації компонентів системи в певний момент часу або часу, протягом якого буде досягнутий заданий ступінь перетворення реагентів, при відомій схемі реакції й величинах констант швидкостей окремих стадій процесу (тобто відомо кінетичне рівняння реакції).

2. Визначення константи швидкостей окремих елементарних стадій за відомою схемою процесу й знайденим дослідним шляхом кінетичним кривим компонентів реакції.

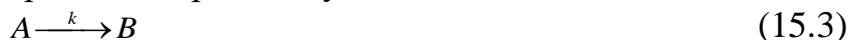
3. На підставі наявних експериментальних даних перевірка правильності запропонованої схеми складної реакції, якщо механізм процесу носить гіпотетичний характер.

Для рішення цих задач необхідно проінтегрувати систему диференціальних рівнянь, що описує кінетичні закономірності досліджуваної реакції. У зв'язку з тим, що метод чисельного інтегрування вимагає великого об'єму обчислювальної роботи, для цих цілей широко використовують цифрові обчислювальні машини.

Переваги методу моделювання хімічних реакцій на АОМ полягає в простоті програмування, наочності отриманих результатів, а також у можливості швидко змінювати в широких межах параметри й вид кінетичних рівнянь реакції.

Розглянемо докладніше методику моделювання хімічних реакцій на аналогових обчислювальних машинах.

Необоротні реакції першого порядку. Речовина A в ізотермічних умовах перетворюється в речовину B



Нехай c_{A_0}, c_{B_0} — початкові концентрації компонентів A і B , а c_A, c_B — поточні значення концентрацій. Оскільки при **математичному** моделюванні кінетики найбільш зручною формою опису є звичайні диференціальні рівняння, те, скориставшись **наведеними** вище формулами закону **діючих** мас, **одержимо** наступні рівняння:

$$v_A = -kc_A; \quad v_B = +kc_A.$$

Знаки швидкостей (+) і (—) **указують** на те, що концентрація компонента A в цієї реакції спадає, а концентрація компонента B зростає. Таким чином, розглянута хімічна реакція описується системою звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dc_A}{d\tau} = -kc_A; \quad \frac{dc_B}{d\tau} = +kc_A \quad (15.4)$$

при початкових умовах $c_{A_0} = A$ й $c_{B_0} = B$.

Кінетичні криві, тобто тимчасові залежності концентрацій компонентів системи, знаходять за допомогою АОМ при рішенні цієї системи рівнянь. Побудова моделі кінетики хімічних реакцій на АОМ вимагає вибору

маштабів для концентрацій всіх компонентів і часу, а також розрахунку коефіцієнтів передачі вирішальних елементів.

Необоротні реакції другого порядку. Реагують дві речовини A і B з утворенням речовин C і D



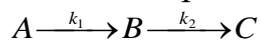
Диференціальні рівняння для концентрацій всіх компонентів складаються відповідно до закону діючих мас

$$\frac{dc_A}{d\tau} = -k_1 c_A c_B; \quad \frac{dc_B}{d\tau} = -k_2 c_A c_B; \quad \frac{dc_C}{d\tau} = k_3 c_A c_B; \quad \frac{dc_D}{d\tau} = k_4 c_A c_B;$$

Отримані рівняння нелінійні, тому що в кожне з них входить добуток двох змінних c_A й c_B . Початкові умови наступні:

$$c_{A_0} = A; \quad c_{B_0} = B; \quad c_{C_0} = C; \quad c_{D_0} = D$$

Необоротна молекулярна послідовна реакція типу



Кінетичні рівняння цієї реакції мають вигляд

$$\frac{dc_A}{d\tau} = -k_1 c_A; \quad \frac{dc_B}{d\tau} = k_1 c_A - k_2 c_B; \quad \frac{dc_D}{d\tau} = k_2 c_B$$

Початкові умови при $\tau = 0$, $c_{A_0} = A$; $c_{B_0} = B$; $c_{D_0} = D$

При рішенні на АОМ можна одержати сімейство кінетичних кривих, що характеризують зміну концентрації реагентів системи в часі. Для досліджуваної реакції вид цих кривих залежить від початкових концентрацій компонентів і визначається чисельним значенням констант швидкостей окремих стадій реакції k_1 й k_2 і їхнім співвідношенням $\frac{k_1}{k_2}$.

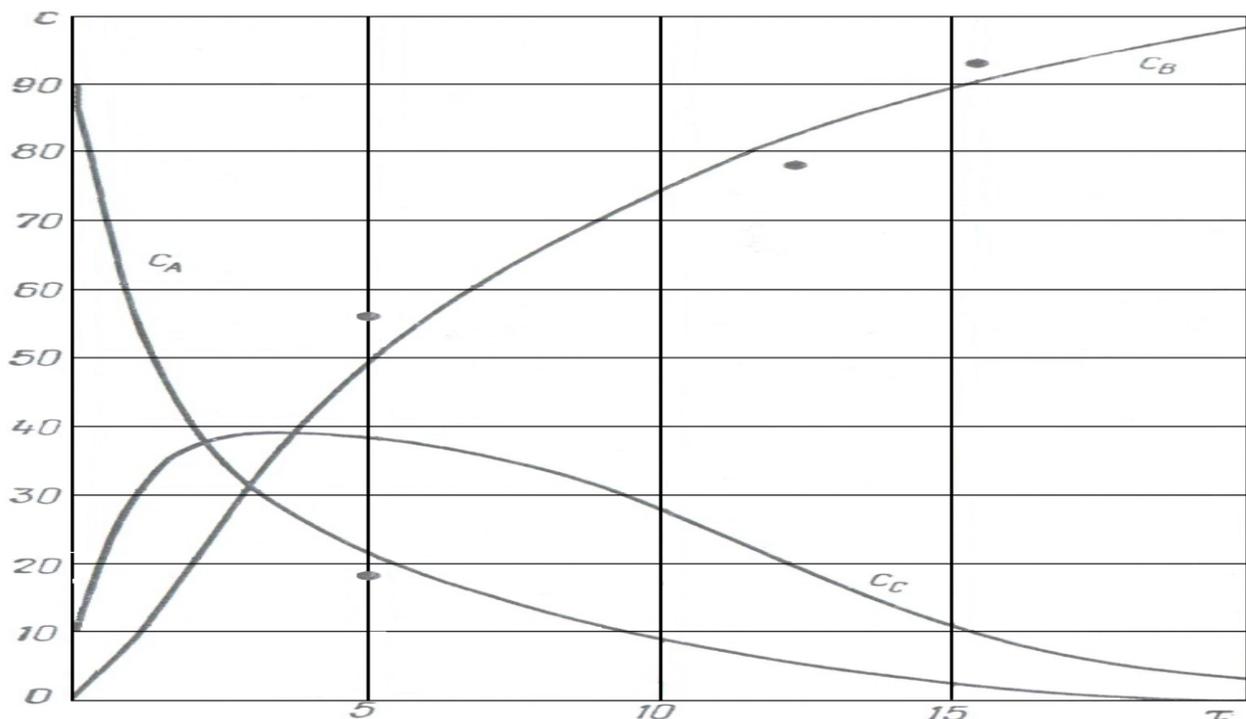


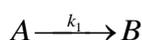
Рис. 15.1. Графічне подання кінетики хімічних реакцій $A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$.

Рішення одержують у вигляді трьох кривих, що зображують залежність напруги від часу, які є аналогією залежності концентрації від часу. Криві, отримані при початкових умовах $c_A = 100$, $c_B = c_C = 0$ при $k_1 = 0,4$ й $k_2 = 0,3$, представлені на мал.(15.1.).

Прикладом реакції типу $A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$ є гідроліз рослинних тканин, тобто перетворення полісахаридів у моносахариди, і розкладання моносахаридів в оксиметилфурфуролі, левулінову кислоту та інші речовини



Оборотні реакції першого порядку. Речовини A в оборотній реакції утворюють речовина B



Початкові умови: $c_{A_0} = A$ і $c_{B_0} = 0$

При складанні диференціальних рівнянь варто враховувати, що компоненти A й B беруть участь у двох реакціях одночасно, тому швидкість реакції визначається алгебраїчною сумою швидкостей кожної окремої реакції.

Диференціальні рівняння кінетики реакцій мають вигляд

$$\frac{dc_A}{d\tau} = -k_1c_A + k_2c_B ; \quad \frac{dc_B}{d\tau} = k_1c_A - k_2c_B .$$

Послідовні реакції другого порядку. Вихідними речовинами є компоненти A и B . Один з компонентів, що утвориться, M бере подальшу участь у реакції, з'єднуючись із вихідним B



$$\frac{dc_A}{d\tau} = -k_1c_Ac_B ; \quad \frac{dc_B}{d\tau} = -k_2c_Ac_B ; \quad \frac{dc_M}{d\tau} = k_1c_Ac_B \quad \text{і т.д.}$$

Початкові умови: $c_{A_0} = A$; $c_{B_0} = B$; $c_{C_0} = 0$; $c_{M_0} = 0$; $c_{D_0} = 0$.

Закон діючих мас є основним у хімічній кінетиці. У загальному випадку можна прийняти, що швидкість хімічної реакції прямо пропорційна концентраціям реагуючих (діючих) речовин у деяких ступенях

$$v = k \prod_{i=0}^m (c_i^{r_i}) ;$$

де k — постійна (за даних умов), названа константою швидкості реакції; m — число речовин, що вступають у реакцію; c_i — концентрація i -го реагенту- r_i — порядок реакції по даному i -му речовині; Π — знак добутку.

Порядок хімічної реакції - це сума показників ступенів при концентраціях реагуючих речовин. Залежність константи швидкості від температури представляють у вигляді формули Арреніуса

$$k = k_0 \exp\left(-\frac{E}{RT}\right), \quad (15.6)$$

де k_0 — постійна, залежна від числа зіткнень реагуючих молекул; E — енергія активації, $\frac{\text{кДж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$; R — газова постійна, $\frac{\text{кДж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$; T — абсолютна температура, К.

Біохімічний процес можна розглядати як хімічну реакцію зі специфічним каталізатором-ферментом. Якщо при описі ферментативної реакції виходити із пропозицій про те, що фермент на початку утворить фермент-субстратний комплекс зі своїм субстратом, а потім цей комплекс розпадається зі звільненням вільного ферменту й продукту реакції, то рівняння, що враховує зміна концентрації субстрату, буде мати вигляд

$$\frac{S_0 - S}{\tau} = v_{0\max} + \frac{k_m}{\tau} \ln \frac{S}{S_0},$$

де $v_{0\max}$ — теоретично гранична початкова швидкість реакції при нескінченно великій концентрації субстрату; k_m — константа, що характеризує фермент і реакційну систему; S_0, S — початкова й поточна концентрації субстрату.

Експериментально встановлено, що між швидкістю реакції v_0 і концентрацією субстрату S_0 існує гіперболічна залежність

$$(v_{0\max} - v_0)(x + S_0) = \text{const},$$

де x — деяка постійна в рівнянні.

Гіпотезі про утворення фермент-субстратного комплексу, виходячи із припущення про існування щирої термодинамічної рівноваги між вихідними речовинами (фермент, субстрат) і фермент-субстратним комплексом, дане математичне обґрунтування. Розглянемо наступну односубстратну ферментативну реакцію

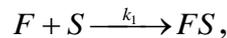


де F — фермент; S — субстрат; FS — фермент-субстратний комплекс; P — інгібітор.

Відповідно до принципу збереження загальної кількості речовини в реакції загальна концентрація ферменту f_0 дорівнює сумі концентрації вільного ферменту f і зв'язаного у вигляді фермент-субстратного комплексу fs

$$f_0 = f + fs,$$

а формула константи рівноваги $k = \frac{k_1}{k_{-1}}$ для реакції



має вигляд

$$k = \frac{fS}{fS},$$

звідки

$$k = \frac{fS}{(f_0 - fS)S}.$$

Тоді для концентрації фермент-субстратного комплексу одержимо

$$fS = \frac{f_0 S}{\left(\frac{1}{k} + S\right)}.$$

Відповідно до кінетичної схеми й закону діючих мас, швидкість реакції v пропорційна концентрації фермент-субстратного комплексу. З урахуванням рівняння для швидкості реакції одержимо

$$v = \frac{k_2 f_0 S}{\left(\frac{1}{k} + S\right)}.$$

Константа $k_s = \frac{1}{k} = \frac{k_{-1}}{k_1}$ має розмірність концентрації (звичайно моль/л)

і називається константою Міхаеліса. Оскільки на початку реакції $S = S_0$, те $v \approx v_0$ й рівняння для початкової швидкості реакції запишемо

$$v_0 = \frac{k_2 f_0 S_0}{(k_s + S_0)}$$

Це рівняння називається рівнянням Міхаеліса-Ментен й є одним з фундаментальних рівнянь кінетики ферментативних реакцій.

Кінетика росту популяцій описується рівнянням Моно, що мають зовнішню подібність із рівнянням Міхаеліса-Ментен. Відповідно до моделі Моно, концентрація біомаси при безперервному культивуванні мікроорганізмів змінюється по рівнянню

$$\frac{dc}{d\tau} = \mu c ; \quad c = c_0 + k(S_0 + S) ; \quad \mu = \mu_{\max} \frac{S}{k_s + S} ;$$

де c_0, c — початкове й поточне значення концентрації біомаси в апараті, кг/м³; τ — час, с; k — постійна; S_0, S — початкова й поточна концентрації живильних речовин, кг/м³; μ_{max}, μ — максимальну й поточну питому швидкості росту мікроорганізмів, 1/с; k — константа Моно.

Відповідно до моделі Моно - Ієрусалимського, питома швидкість росту мікроорганізмів визначається по рівнянню

$$\mu = \mu_{max} \frac{S}{k_s + S} \cdot \frac{k_p}{P + k_p} ;$$

де P — концентрація інгібруючого метаболіту; k — постійний коефіцієнт.

Подальшим розвитком моделі Моно - Ієрусалимського є моделі Миколаєва, Хіншельвуда й інших, що враховують визначальні етапи в ланцюзі метаболічних процесів. Модель Моно - Ієрусалимського, модифікована Н. И.Ніколаєвим, має вигляд

$$\mu = \mu_{max} \frac{S}{k_s + S} \cdot \frac{k_{PS}}{k_{PS} + (S_0 - S)} ;$$

де k_{PS} — константа росту субстрату.

Узагальнюючи викладене, можна укласти, що для опису кінетики біохімічних процесів, що відбуваються в харчових виробництвах, застосовують наступні види моделей, що формально описують залежність швидкості перетворення субстрату від його концентрації:

реакція першого порядку

$$\frac{dS}{d\tau} = -kS ;$$

реакція по рівнянню Міхаеліса-Ментен

$$\frac{dS}{d\tau} = -\frac{kS}{k_s + S} ;$$

реакція по рівнянню Міхаеліса-Ментен з інгібуванням

$$\frac{dS}{d\tau} = S - \frac{kS}{k_s + S + \frac{1}{k_m} S^2} ;$$

реакція по рівнянню довільного порядку

$$\frac{dS}{d\tau} = -kS^n .$$

Таким чином, можна застосовувати методи формальної кінетики хімічних реакцій для опису поведінки біологічних систем. Моделі Міхаеліса-Ментен, Моно, Моно - Ієрусалимського й інші задовільно описують процеси мікробіологічного синтезу в харчовій промисловості при відомих чисельних значеннях постійних у рівняннях моделей, що характеризують конкретні умови процесів.

Закономірності рівноваги дозволяють визначити лише максимально можливий (теоретичний) вихід продукту. Однак такий вихід у виробничих умовах звичайно не досягається через зменшення сумарної швидкості різних перетворень (хімічних, біохімічних) $v = \bar{v}_1 - \bar{v}_2$ у міру зниження величини рушійної сили.

У необоротних процесах, тобто при $\bar{v}_2 = 0$, швидкість реакції прагне до нуля ($v \rightarrow 0$) при повній витраті (зникненні) одного з вихідних реагентів, а в оборотних процесах ($v \rightarrow 0$) при $\bar{v}_1 = \bar{v}_2$, тобто при досягненні рівноваги. Наприклад, швидкість технологічного процесу по цільовому продукті при хімічних перетвореннях є результуючою швидкістю прямої, зворотної й побічної реакцій, а також дифузії вихідних речовин у зону реакції й продуктів із цієї зони.

§ 16. Математична модель оптимального виходу біомаси

У харчовій промисловості значне місце займає безперервне культивування мікроорганізмів (виробництво харчових і кормових дріжджів та ін.). При цьому застосовують каскадні багатоступінчасті апарати з постійним складом культури. Відповідно до існуючих уявлень, безперервне культивування в одному апараті може бути представлено параметричною схемою (мал.).

В апарат з робочим об'ємом V_p надходить потік культуральної рідини V_r з початковою концентрацією живильних речовин S_0 . У результаті мікробіологічних перетворень концентрація живильних речовин в апараті об'єму V_p зменшується до S , і утвориться біомаса з концентрацією c . Розведенням середовища зі швидкістю, що характеризується коефіцієнтом

$D = \frac{V_r}{V_p}$ середній час знаходження субстрату в культиваторі становить τ .

Нагромадження біомаси пропорційно швидкості її росту μ або швидкості розведення культури живильним середовищем D . Тоді витрата біомаси, що виходить із апарата, визначається вираженням $G = Dc$.

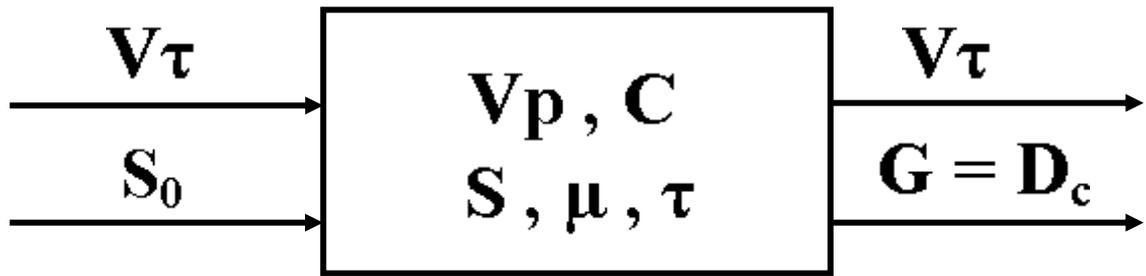


Рис. 16.1. Параметрична схема процесу безперервного біосинтезу в одному апараті.

Узагальнюючи викладені теоретичні подання, можна записати наступні математичні співвідношення:

швидкість росту (зміна концентрації) біомаси

$$\frac{dc}{d\tau} = \mu c ;$$

питома швидкість росту біомаси відповідно до рівняння Моно

$$\mu = \mu_{\max} \frac{S}{k_S + S} ;$$

зміна концентрації субстрату

$$\frac{dS}{d\tau} = \frac{1}{y} \cdot \frac{dc}{d\tau} = d\mu_{\max} \frac{S}{k_S + S} c ;$$

де $y = \frac{1}{\alpha}$ — коефіцієнт, що враховує ефективність витрати субстрату; μ_{\max} — максимальне значення коефіцієнта швидкості росту мікроорганізмів, 1/год.

Продукти, що утворюються, реакції Р приводять до вповільнення процесу, що враховується рівнянням Моно - Ієрусалимського

$$\mu = \frac{\mu_{\max} S}{k_S + S} \cdot \frac{k_P}{P + k_P} = \frac{\mu_{\max} S}{k_S + S} \cdot \frac{k_{pS}}{k_{pS} + (S_0 - S)} ;$$

де k_P — константа інгібування, чисельно рівна такій кількості субстрату, при якому в одиниці об'єму живильного середовища утвориться концентрація продуктів обміну, що викликає зменшення максимальної швидкості росту мікроорганізмів у два рази ($\mu = 0,5 \mu_{\max}$, кг/м³); k — константа насичення Моно, рівна концентрації субстрату, при якій коефіцієнт швидкості росту мікроорганізмів становить половину його максимального значення ($\mu = 0,5 \mu_{\max}$, кг/м³).

При безперервному культивуванні мікроорганізмів запишемо

$$\frac{dc}{d\tau} = (\mu - D)c \quad \text{и.} \quad \frac{dS}{d\tau} = D(S_0 - S) - \alpha \mu c$$

При сталому режимі роботи апарата

$$\frac{dc}{d\tau} = 0 \quad \text{і} \quad \frac{dS}{d\tau} = 0 \quad \text{тобто} \quad \mu = D$$

Тоді $c = y (S_0 - S)$ або $c = \frac{1}{\alpha} (S_0 - S)$, де $y = 1/\alpha$ — вихід дріжджів від використаного субстрату, кг/кг.

У цьому випадку продуктивність (продуктивність) апарата по біомасі

$$G = Dc = \mu c$$

залежить від коефіцієнта швидкості росту мікроорганізмів μ , що визначається концентраціями розчиненого кисню, субстрату й продуктів обміну, а також температурою й рН середовища. При оптимальних значеннях рН, температури середовища й достатньої концентрації розчиненого кисню продуктивність апарата визначається максимальною швидкістю росту

$$G = \mu c = Dc = \mu_{\max} \frac{k_p S}{\alpha} \cdot \frac{S(S_0 - S)}{(k_s + S)(k_{pS} + S_0 - S)} \quad (16.1)$$

Із цього виразу неважко встановити, що продуктивність апарата по біомасі визначається фізіологічними константами μ_{\max} , α , k_s й k_{pS} , має екстремальний характер і залежить від вихідної й залишкової концентрацій субстрату. Оптимальне її значення можна одержати класичним методом, дорівнявши похідну по концентрації субстрату до нуля при заданому значенні S_0

$$\left[\frac{dG}{dS} \right]_{S_0 = \text{const}} = 0$$

Виконавши всі перетворення, знайдемо концентрацію субстрату в апараті, що відповідає максимальній продуктивності по біомасі

$$\frac{dG}{dS} = \frac{\mu_{\max} k_{pS}}{\alpha} \cdot \left[\frac{(S_0 - 2S)(k_s + S)(k_{pS} + S_0 - S) - (k_{pS} + S_0 - 2S)(S_0 - S)S}{(k_s + S)^2 (k_{pS} + S_0 - S)^2} \right] = 0 ;$$

$$S^2 (2k_s - k_{pS}) + S (-2k_s k_{pS} - 3k_s S_0) + S_0 k_s (k_{pS} + S_0) = 0$$

Позначивши

$$A = 2k_s - k_{pS} ; \quad B = 2k_s k_{pS} - 3k_s S_0 ; \quad c = S_0 k_s (k_{pS} + S_0) ;$$

одержимо рівняння канонічної форми

$$AS^2 + BS + C = 0,$$

рішенням якого є вираження для визначення залишкової концентрації субстрату, що відповідає максимальній продуктивності

$$S_m = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{2k_s k_{pS} + 3k_s S_0 - \sqrt{k_s [4k_{pS} (k_{pS} + S_0)(k_s + S_0) + k_s S_0^2]}}{2(2k_s - k_{pS})} . \quad (16.2)$$

Знак мінус, що стоїть перед коренем у чисельнику цього виразу, визначений з умови

$$0 < S_m < S_0. \quad (16.3)$$

Підставивши отримане вираження у вихідне рівняння (), можна визначити максимальну продуктивність апарату

$$G = \frac{\mu_m k_{pS} S_m (S_0 - S_m)}{\alpha (k_s + S_m)(k_{pS} + S_0 - S_m)}.$$

Характерне для культивування мікроорганізмів властивість саморегулювання процесу встановлюється на основі стійкості рішення системи в області, обмеженої нерівністю

$$0 < D < D_{кр}. \quad (16.4)$$

Критичне значення коефіцієнта розведення, що відповідає повному вимиванню мікробних кліток з апарату, дорівнює

$$D_{кр} = \mu_m \frac{S_0}{k_s + S_0} ; \quad (16.5)$$

$$D_m = \mu = \mu_m \frac{S_m}{k_s + S_m} \cdot \frac{k_{pS}}{k_{pS} + S_0 - S_m}. \quad (16.6)$$

Показником досконалості процесу може бути коефіцієнт використання субстрату в апараті, виражений у відносних частках або у відсотках

$$\eta_m = \frac{S_0 - S_m}{S_0}. \quad (16.7)$$

Нагромадження біомаси

$$c_m = \frac{G}{D} \quad (16.8)$$

Перебором різних значень початкової концентрації розраховують оптимальні значення параметрів S_m , D_m , G_m , η_m , c_m , вирішуючи рівняння при умовах (—)

Якщо процесом біосинтезу управляють величиною коефіцієнта розведення, то оптимальне значення продуктивності апарата по біомасі можна знайти, дорівнявши до нуля похідну за коефіцієнтом розведення, тобто

$$\left[\frac{\partial G}{\partial D} \right]_{S_0=const} = 0 \quad (16.9)$$

Розрахувавши рівняння щодо концентрації субстрату S_m , знайдемо залежність $S_m = f(D)$, тобто

$$D(k_s + S)(k_p + S_0 - S) = \mu_m k_p; \quad (16.10)$$

$$DS + S(Dk_s - Dk_p - DS_0 = \mu_m k_p) - Dk k_p - Dk S_0 = 0;$$

$$S^2 + S \left(k_s - k_{ps} - S_0 + \frac{\mu_m k_{ps}}{D} \right) - k_s k_{ps} - k_s S_0 = 0$$

ПОЗНАЧИВШИ

$$\left(k_s - k_{ps} - S_0 + \frac{\mu_m k_{ps}}{D} \right) = D \quad \text{і} \quad k_s (k_{ps} - S) = C$$

Останнє вираження приведемо в канонічну форму $S^2 + BP + 3 = 0$, з якої визначимо оптимальне значення концентрації субстрату

$$S_{m(D)} = \frac{1}{2} \left[\left(k_{ps} - k_s + S_0 - \frac{\mu_m k_{ps}}{D} \right) \pm \sqrt{\left(k_{ps} - k_s - S_0 - \frac{\mu_m k_{ps}}{D} \right)^2 + 4k_s (k_{ps} + S_0)} \right].$$

Це рівняння справедливе в області, обмеженої інтервалом $0 < D < D_{kp}$, а знак перед коренем визначається з умови $0 < S_m < S_0$.

Концентрація біомаси $c = f(D)$ може бути знайдена зі співвідношення

$$c_D = \frac{S_0 - S_{m(D)}}{\alpha},$$

а продуктивність по біомасі

$$G_D = D \frac{S_0 - S_{m(D)}}{\alpha}.$$

Таблиця 16.1. Параметри ведення технологічного процесу при різних значеннях S_0 й S_m

S_0	S_m	G_m	D_m	c_m	$D_{кр}$	η_m
10	1,05	2,25	0,24	9,31	0,43	0,89
20	1,81	3,33	0,17	18,94	0,43	0,90
30	2,55	3,93	0,14	28,59	0,43	0,91
40	3,28	4,31	0,11	38,24	0,43	0,91
50	4,01	4,58	0,09	47,91	0,43	0,91
60	4,73	4,77	0,08	57,60	0,43	0,92
70	5,45	4,92	0,07	67,23	0,43	0,92
80	6,17	5,04	0,06	76,89	0,43	0,92
90	6,90	5,13	0,06	86,56	0,43	0,92
100	7,72	5,21	0,05	96,22	0,43	0,92

Адекватність наведеної моделі реальному процесу встановлюється експериментально вирощуванням мікроорганізмів на живильному заданому середовищі концентрації.

Як приклад приведемо розрахунок оптимальних значень S_m , D_m , G_m , η_m , c_m , що виконаний в Інституті мікробіології й вірусології АН УРСР імені К.Д.Заболотного при фізіологічних константах культури $\mu_m = 0,435$ 1/ч; $k = 0,08$ кг/м³; $kp = 13,3$ кг/м³; $\alpha = 0,96$ кг/кг перебором значень S_0 від 10 до 100 кг/м³ із кроком $h = 10$ кг/м³.

Схема алгоритму обчислення наведена на мал. (, а), результати обчислень — у табл. () і ().

S_0	D	S_m	$D_{кр}$	c_m	G_m	η_m
10	0,1	0,05	0,43	10,35	1,03	0,99
	0,4	9,95		0,05	0,02	0,09
20	0,1	0,11	0,43	20,71	2,07	0,99
	0,4	19,89		0,11	0,04	0,05
30	0,1	0,25	0,43	30,98	3,09	0,99
	0,4	29,87		0,13	0,05	0,03
40	0,1	0,94	0,43	40,67	4,06	0,97

50	0,1	7,09	0,43	44,69	4,46	0,86
60	0,1	16,72	0,43	45,08	4,50	0,72
70	0,1	26,61	0,43	45,18	4,51	0,62
80	0,1	36,57	0,43	45,23	4,52	0,54
90	0,1	46,45	0,43	43,76	4,52	0,48
100	0,1	56,52	0,43	45,28	4,52	0,44

Таблиця 16.2. Параметри ведення технологічного процесу при різних значеннях S_0 й D

S_0	D	S_m	$D_{кр}$	c_m	G_m	η_m
10	0,1	0,05	0,43	10,35	1,03	0,99
	0,4	9,95		0,05	0,02	0,09
20	0,1	0,11	0,43	20,71	2,07	0,99
	0,4	19,89		0,11	0,04	0,05
30	0,1	0,25	0,43	30,98	3,09	0,99
	0,4	29,87		0,13	0,05	0,03
40	0,1	0,94	0,43	40,67	4,06	0,97
50	0,1	7,09	0,43	44,69	4,46	0,86
60	0,1	16,72	0,43	45,08	4,50	0,72
70	0,1	26,61	0,43	45,18	4,51	0,62
80	0,1	36,57	0,43	45,23	4,52	0,54
90	0,1	46,45	0,43	43,76	4,52	0,48
100	0,1	56,52	0,43	45,28	4,52	0,44

Аналізуючи наведені в цих таблицях дані, можна встановити, що продуктивність і час перебування дріжджів в апараті $\left(\tau = \frac{1}{D}\right)$ зростають зі збільшенням вихідної концентрації субстрату. Процес вирощування триває не більше 10 год ($D \geq 0,1$). Тому прийняли час вирощування дріжджів в апарату $\tau = 7$ год ($D = 0,14$). За даними табл. можна знайти відповідні значення $S_0 = 30$ кг/м³, $G_m = 3,93$ кг/(м³ · ч); $c_m = 28,59$ кг/м³ й $S_m = 2,55$ кг/м³, тобто має місце залишкова концентрація субстрату, рівна 2,55 кг/м³.

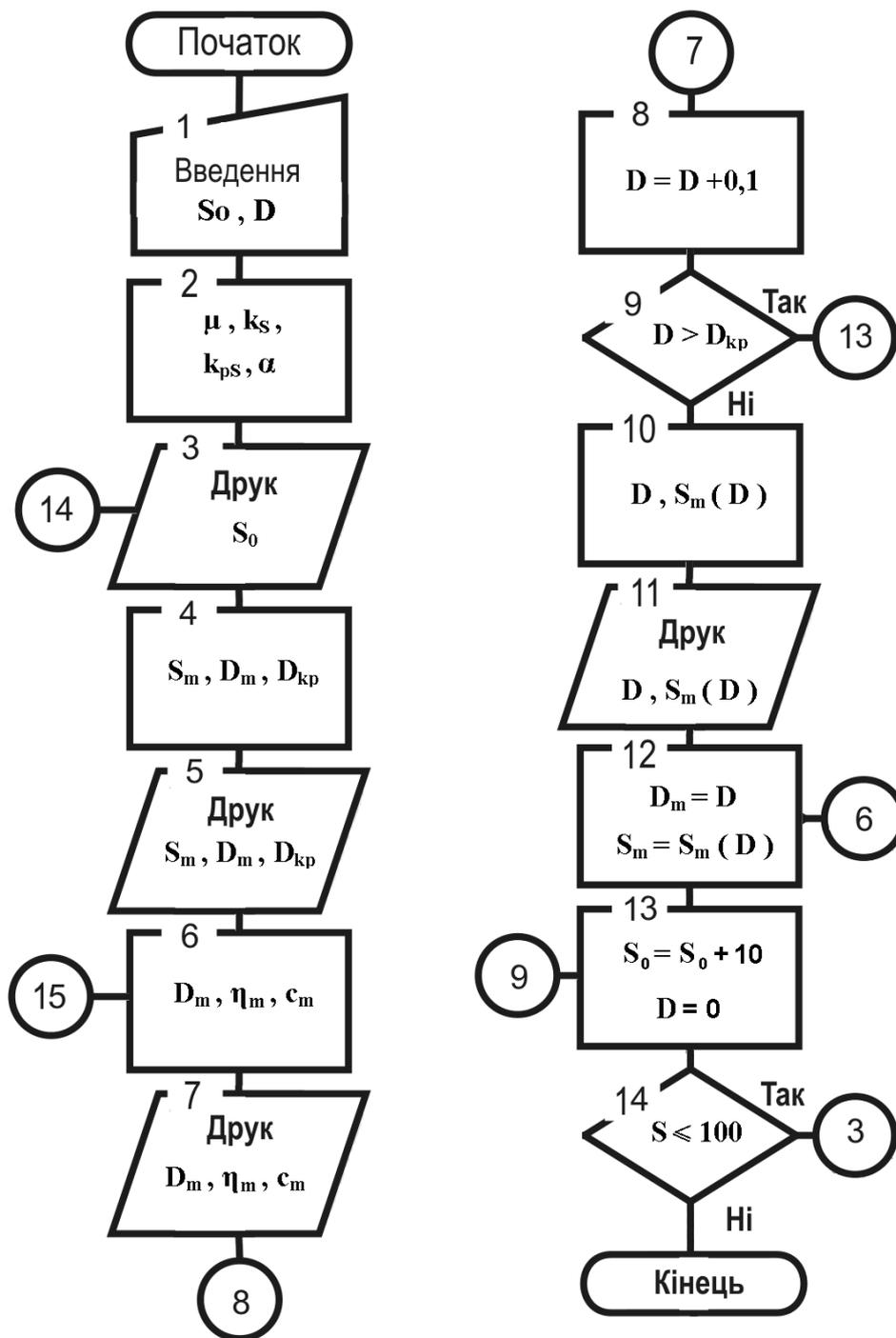


Рис. 16.1. Структурна схема алгоритму оптимізації вирощування мікроорганізмів.

При аналізі даних табл. () можна встановити, що при зменшенні D максимальне значення продуктивності збільшується. З огляду на значення, що лімітує, тривалості вирощування в якості оптимальної вихідної концентрації, варто прийняти $S_0 = 30 \text{ кг/м}^3$ і $D = 0,13 \text{ 1/год}$. По наведеним у табл. () значенням S_0 й D можна знайти продуктивність апарата, нагромадження біомаси, поточну концентрацію субстрату в середовищі й коефіцієнт використання субстрату.

Інші чисельні значення рівні: $c = 31,2 \text{ кг/м}^3$ сухої біомаси або $c_n = 124,8 \text{ кг/м}^3$ при вологості 75 %; $G = 3,45 \text{ кг/м}^3$; $S_m = 4 \text{ кг/м}^3$, $\tau_1 = \frac{1}{D_1} = \frac{1}{0,13} = 7,7 \text{ год}$.

При цих умовах залишкова концентрація субстрату в апараті достатня для подальшого ведення процесу вирощування біомаси, тобто можна застосувати батарею апаратів. Параметри роботи другого апарата знаходять із умови, при якому залишкова концентрація субстрату повинна становити не більше $0,2 \text{ кг/м}^3$, тобто $S_{m_2} = 0,2 \text{ кг/м}^3$. Режим роботи будь-якого апарата батареї опишемо системою рівнянь виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{dc_i}{d\tau} &= D_i(c_{i-1} - c_i) + \mu_i c_i; \\ \frac{dS_i}{d\tau} &= D_i(S_{i-1} - S_i) + \mu_i \alpha c \end{aligned} \right\}$$

де $i = 2, 3, 4, \dots, k$;

$$\mu_i = D_i = \frac{S_{i-1} - S_i}{S_0 - S_i};$$

$$D_i = \mu_i = \frac{S_0 - S_i}{S_{i-1} - S_i}.$$

З умови, що $\mu_2 \neq D_2$ одержимо

$$\mu_2 = \mu_m \frac{S_2}{k_s + S_2} \cdot \frac{k_{ps}}{k_{ps} + S_0 - S_2} = \frac{0,4 \cdot 0,2 - 13,3}{(0,2 + 0,08) \cdot (13,3 + 30 - 0,2)} = 0,092 \frac{1}{4};$$

$$D_2 = \mu_2 \frac{S_0 - S_2}{S_1 - S_2} = \frac{0,09 \cdot 29,8}{3,8} = 0,7 \frac{1}{4};$$

$$\tau_2 = \frac{1}{D_2} = \frac{1}{0,7} = 1,4; \quad c_2 = \frac{S_0 - S_2}{\alpha} = \frac{30 - 0,2}{0,96} = 32 \text{ кг}$$

сухої біомаси (СБ/м³) або $c_2 = 128 \text{ кг/м}^3$ при вологості 75 %.

Продуктивність по біомасі другого апарата

$$G_2 = D_i \frac{S_1 - S_2}{\alpha} = 0,7 \frac{4 - 0,2}{0,96} = 2,78 \frac{\text{СБ}}{\text{м}^3 \cdot \text{год}}$$

Для батареї апаратів при $S_0 = 30 \text{ кг/м}^3$; $S_k = 0,2 \text{ кг/м}^3$; $c_1 = c_2 = 32 \text{ кг/м}^3$;

загальний час вирощування біомаси

$$\tau_6 = 7,7 + 1,4 = 9,1 \text{ год};$$

продуктивність

$$G_6 = c \frac{1}{\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}} = \frac{32}{9,1} = 3,52 \text{ кг СБ/м}^3 \cdot \text{рік};$$

коефіцієнт використання субстрату

$$\eta_6 = \frac{30 - 0,2}{30} = 0,994;$$

якщо врахувати, що в році 330 робочих днів, задана виробнича потужність 100 тис. т, враховуючи 8 % втрат продукту на наступних стадіях, режим роботи батареї 24 години у добу при коефіцієнті, що враховує вологість дріжджів 0,9, то продуктивність по біомасі складе

$$V_r = \frac{100000000 \cdot 0,9}{330 \cdot 0,92 \cdot 32 \cdot 24} = 384 \frac{\text{м}^3}{\text{год}}.$$

При поверненні культуральної рідини 70 %, витрата стічних вод складе

$$G_B = V_r \cdot 0,3 = 384 \cdot 0,3 = 115 \text{ м}^3/\text{год}.$$

Для здійснення технологічного процесу необхідні наступні об'єми апаратів:

Перший апарат -- $V_{p_1} = \frac{V_r}{D_1} = \frac{384}{0,13} = 2953,8 \text{ м}^3 = 2954 \text{ м}^3$, а з урахуванням

втрат

$$V_{заг_1} = \frac{V_{p_1}}{k_3} = \frac{2954}{0,8} = 3692 \text{ м}^3$$

$$\tau_8 = 7,7 + 1,4 = 9,1$$

$$\eta_8 = 0,997$$

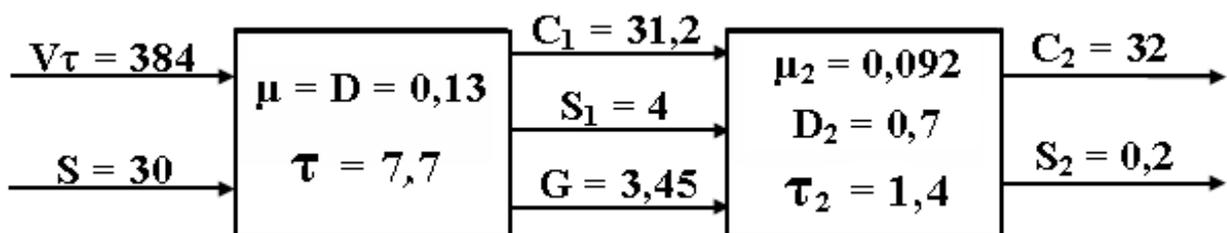


Рис. 16.2. Схема двостадійного вирощування мікроорганізмів.

Якщо встановити апарати з об'ємом 850 м^3 , то необхідно мати

$$n = \frac{3692}{850} \approx 5 \text{ апаратів.}$$

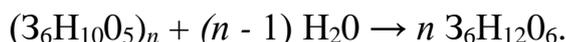
Другий апарат — $V_{p_2} = \frac{V_r}{D_2} = \frac{384}{0,7} = 545 \text{ м}^3$, а з урахуванням коефіцієнта заповнення $k_3 = 0,8$ загальний об'єм апарата

$$V_{заз_3} = \frac{V_{p_2}}{k_3} = \frac{545}{0,8} = 686 \text{ м}^3.$$

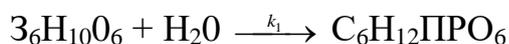
Послідовність потоків у батареї, що складається із двох апаратів, і їхні чисельні характеристики представлені на мал. ().

§ 17. Моделі кінетики гідролізу

Як приклад розглянемо складання математичної моделі для дослідження кінетики процесу гідролізу целюлози. Основна мета дослідження - визначення тривалості процесу гідролізу целюлози для досягнення максимально можливої концентрації глюкози. Математична модель повинна відповідати рішенню цієї задачі. Для складання математичного опису процесу гідролізу використовують основні теоретичні положення про реакції гідролізу целюлози, що у найпростішому випадку може бути описана наступним рівнянням:

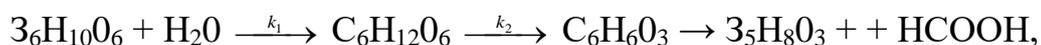


Оскільки ступінь полімеризації дуже велика й для целюлози становить $1500\text{—}10\,000$ од., тоді запишемо, не вводячи при цьому істотній погрішності, що $n - 1 \approx n$. Тоді ліву й праву частини рівняння розділимо на n й одержимо рівняння виду



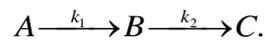
Процес гідролізу є реакцією першого порядку, хоча й біомолекулярного (концентрація води дорівнює нулю).

Одночасно з гідролізом целюлози проходить реакція розпаду моносахаридів, що приводить до утворення оксиметилфурфуролу. У загальному випадку процес утворення глюкози і її розпад представити в такий спосіб:



де k_1 , k_2 — константи швидкості гідролізу целюлози й розпаду глюкози.

У нашому випадку має місце послідовна реакція першого порядку типу



У диференціальній формі кінетичні рівняння цієї реакції мають вигляд

$$\frac{dc_A}{d\tau} = -k_1 c_A ; \quad \frac{dG_A}{d\tau} = -k_1 G_A ; \quad \frac{dc_B}{d\tau} = k_1 c_A - k_2 c_B , \quad \text{або}$$
$$\frac{dG_B}{d\tau} = k_1 G_A - k_2 G_B$$

$$\frac{dc_C}{d\tau} = k_2 c_B ; \quad \frac{dG_C}{d\tau} = k_2 G_B$$

де c -концентрація компонентів A , B і C , молярні частки або %; G — маса компонентів A , B і C , кг.

Технологічною задачею процесу гідролізу й підготовки гідролізату є одержання біологічно доброякісного сахаровмісного розчину (оптимальне живильне середовище для одержання з нього біомаси). У процесі гідролізу утворюються також інгібітори - речовини, що гальмують розмноження дріжджів. До таких речовин ставиться й оксиметилфурфурол. Тому дуже важливо встановити час гідролізу, після закінчення якого в розчині буде максимальна кількість простих цукрів.

Для рішення цієї задачі зручно використати АОМ. Із цією метою розглянемо конкретний приклад розрахунку оптимального часу гідролізу полісахариду. При щільності завантаження 135 кг/м^3 абсолютно сухих речовин при об'ємі апарата 18 м^3 процес гідролізу ведуть при температурі $168 \text{ }^\circ\text{C}$ и концентрації кислоти 1%

Таблиця 17.1.. Залежність констант швидкості гідролізу целюлози й розпаду глюкози від температури (у присутності 1 % сірчаної кислоти)

Температура, , °C	Константи, 1/год		$\frac{k_1}{k_2}$	Температура , °C	Константи, 1/год		$\frac{k_1}{k_2}$
	k_1	k_2			k_1	k_2	
130	0,010 4	0,015 7	0,66 0	166	0,484	0,53 8	0,90 0
132	0,012 9	0,019 0	0,68 0	106	0,596	0,64 8	0,92 0
134	0,016 2	0,023 5	0,69 0	170	0,735	0,78 0	0,94 5
136	0,020 4	0,028 8	0,71 0	172	0,871	0,91 0	,95
138	0,0257	0,035 5	0,72 5	174	1,059	1,09 0	0,97 0
140	0,033 0	0,044 5	0,74 0	176	1,274	1,29 0	0,99 0
142	0,040 7	0,054 2	0,75 2	178	1,549	1,53 4	1,01 0
144	0,051 3	0,067 1	0,76 5	180	1,880	1,83 0	1,02 5
146	0,063 1	0,081 7	0,77 7	182	2,239	2,13 8	1,05 0
148	0,079 4	0,100 0	0,79 4	184	2,630	2,46 0	1,07 0
150	0,098 0	0,121 0	0,81 0	186	3,162	2,91 1	1,09 0
152	0,120 0	0,146 0	0,82 3	188	3,802	3,42 0	1,11 0
154	0,148 0	0,178 0	0,83 2	190	5,500	3,98 0	1,13 0
156	0,180 0	0,214 0	0,84 2	192	5,250	4,53 0	1,16 0
158	0,219 0	0,258 0	0,85 0	194	6,310	5,25 0	1,20 0
160	0,270 0	0,314 0	0,86 0	196	7,410	5,97 0	1,24 0
162	0,327 0	0,375 0	0,87 0	198	8,810	6,82 0	1,29 0
164	0,398 0	0,453 0	0,88 0	200	10,55 0	7,89 0	1,33 0

Кількість сировини, що завантажує в апарат, складе $18 \times 135 = 2430$ кг, а кількість целюлози (40 % маси) – $2430 \times 0,4 \approx 1000$ кг. У початковий момент часу, тобто при $\tau = 0$, кількість целюлози дорівнює 1000 кг, тобто $G_{A_0} = 1000$; глюкози $G_{B_0} = 0$ та оксиметилфурфуролу $G_{C_0} = 0$.

Значення констант наведені в табл. (). При заданому режимі гідролізу целюлози константи швидкості гідролізу й розпаду моносахаридів для наведених умов рівні

$$k_1 = 0,596 \frac{1}{\text{год}} ; \quad \text{і} \quad k_2 = 0,648 \frac{1}{\text{год}}$$

Підставляючи значення констант у рівняння кінетики процесу гідролізу, одержимо

$$\left. \begin{aligned} \frac{dG_A}{d\tau} &= 0,596 G_A; \\ \frac{dG_B}{d\tau} &= 0,596 G_A - 0,648 G_B; \\ \frac{dG_C}{d\tau} &= 0,648 G_B \end{aligned} \right\} \quad (17.1)$$

На підставі цієї системи диференціальних рівнянь становлять структурну схему з'єднання вирішальних елементів (див. мал.).

З метою максимального використання шкали вимірювальних приладів АОМ масштабні коефіцієнти $M_{G_A}, M_{G_B}, M_{G_C}$ вибираємо з умов повної відповідності величин найбільшої концентрації $G_A = 1000$ максимальній величині напруги $u_{\max} = 100$ В, тобто

$$M_{G_A} = M_{G_B} = M_{G_C} = \frac{G_A}{u_{G_A}} = \frac{G_B}{u_{G_B}} = \frac{G_C}{u_{G_C}} = \frac{1000}{10} = 100 \text{ кг}^2/\text{В}$$

Масштаб часу вибираємо прискорений $M_\tau = \frac{\tau}{\tau_{\max}} = 3600$ (одна секунда машинного часу τ_{\max} відповідає одній годині або 3600 з натурального часу τ), тому що й машинний час повинне забезпечити тільки зняття або фіксацію показань приладів.

Використовуючи структурну схему з'єднання вирішальних елементів і масштабні співвідношення, складемо машинні рівняння

$$-u_{G_A} = -\frac{1}{p} k_{11} (-u_{G_A}) ; \quad \frac{G_A}{M_{G_A}} = -\frac{1}{p} k_{11} \frac{G_A}{M_C}$$

Оскільки $p = \frac{d}{d\tau}$ й $\tau = M_\tau \tau_M$, останній вираз приведемо до виду

$$\frac{dG_A}{d\tau_M} = -k_{11} M_\tau G_A$$

де τ_M - машинний час, с; M_τ - масштаб часу; τ - натуральний час, год.

Заміняючи часову константу швидкості реакції гідролізу секундної й порівнюючи останнє рівняння з першим рівнянням системи () і врахуванням масштабу часу, одержимо $k_{11} = 0,596$

$$-u_{G_B} = \frac{1}{p} (k_{21} u_{G_A} - k_{22} u_{G_B}) ;$$

$$\frac{G_B}{M_{G_B}} = \frac{1}{p} \left(k_{21} \frac{G_A}{M_{G_A}} - k_{22} \frac{G_B}{M_{G_B}} \right) .$$

З огляду на масштаб часу

$$\frac{dG_B}{d\tau} = (k_{21} G_A - k_{22} G_B) M_\tau$$

і порівнюючи останнє рівняння із другим рівнянням системи (), одержимо

$$k_{21} = 0,596 ; \quad k_{22} = 0,648 ; \quad -u_{G_C} = -\frac{1}{p} k_{31} u_{G_B} ; \quad p \frac{G_C}{M_G} = k_{31} \frac{G_B}{M_G} .$$

З огляду на масштаб часу $\frac{dG_C}{d\tau} = k_{31} G_B M_\tau$ й порівнюючи останнє рівняння із третім рівнянням системи (), одержимо $k_{31} = 0,648$.

Для одержання чисельного рішення системи рівнянь установлюють коефіцієнти передачі й початкові умови операційних підсилювачів. За допомогою осцилографа спостерігають характеристики зміни кількості целюлози, глюкози й оксиметилфурфуролу в часі. По ряду фіксованих точок будують графік (див. мал.) зміни концентрації компонентів у часі. За графіком визначають оптимальний час гідролізу, тобто час, при якому одержують максимальний вихід цукру.

На підставі графіка робимо наступний висновок: максимальна концентрація глюкози може бути отримана після двох годин гідролізу целюлози. При цьому кількість глюкози, що утворилася

$$G_B^{\max} = u_{G_B} M_G = 37 \cdot 10 = 370 \text{ кг.}$$

Як приклад використання інтегрального методу розглянемо складання математичної моделі для визначення кінетичних констант процесу розкладання глюкози. Експериментальні дані зміни концентрації глюкози (с)

у часі (τ) при температурах 423 й 473 К (відповідно 150 й 200 °С) наведені в табл. (). Оскільки в процесі дослідження визначається кількість (концентрація) компоненту, який прореагував, то для розрахунку констант варто застосовувати інтегральний метод (величина концентрації реагентів є інтегралом від швидкості реакції за часом).

Таблиця 17.2. Зміна концентрації глюкози в часі

423 К		473 К	
τ , МОЛЬ	c , МОЛЬ	τ , МОЛЬ	c , МОЛЬ
0	1	0	1
3600	0,89	90	0,78
7200	0,79	180	0,65
10800	0,69	270	0,55
14400	0,62	360	0,45
18000	0,55	450	0,38
21600	0,49	540	0,32
25200	0,45	630	0,26
28000	0,39	720	0,21
32400	0,34	810	0,18
36000	0,30	900	0,15
54000	0,16		

Виходячи з того, що механізм реакції невідомий, припустимо, що кінетика розкладання глюкози описується рівнянням n -го порядку. Як відомо, швидкість реакції n -го порядку описується рівнянням виду

$$v = \frac{dc}{d\tau} = kc^n.$$

Прологарифмувавши це вираження, одержимо

$$\lg v = \lg k + n \lg c.$$

Побудувавши графік залежності швидкості реакції від концентрації реагентів у логарифмічних координатах, одержимо пряму лінію. Тангенс кута нахилу цієї прямій буде являти собою порядок реакції n . Відрізок, що відтинає на осі ординат, дорівнює значенню константи швидкості реакції k . Якщо ж точки не будуть лежати на прямій, то необхідно прийняти інший вид рівняння, тобто припустити інший механізм хімічної реакції.

Інтегральний метод полягає в інтегруванні обраного кінетичного рівняння й одержанні виразу для концентрації c як функції часу τ , порядку реакції n і константи швидкості k

$$c = f(\tau, n, k).$$

Порівнюючи криві $f(\tau, n, k)$, побудовані для різних значень n і k , з експериментально отриманою зміною концентрації продуктів реакції вихідних речовин, можна підібрати такі значення порядку й константи швидкості, при яких експериментальні й розрахункові дані повністю відповідають.

Отже, інтегральний метод є методом проб і помилок. Він розповсюджений завдяки застосуванню АВМ, тому що диференціальні рівняння на АОМ вирішуються миттєво, а параметри n і k можна змінювати на моделі в широких межах шляхом простого повороту рукоятки потенціометра.

Розглянемо застосовувані на АОМ методи обробки експериментальних даних на прикладі простої реакції першого порядку процесу розкладання глюкози до оксиметилфурфуролу: схема реакції $A \xrightarrow{k} B$, швидкість реакції $v_n = \frac{dc_A}{d\tau} = -k_1 c_A$ при $\tau = 0$, $c_A = c_{A_0}$, c_A і c_{A_0} — початкове й поточне значення концентрації компонента (глюкози).

Значення константи реакції розкладання глюкози залежить від температури відповідно до рівняння

$$k = k_0 \exp\left(-\frac{E}{RT}\right),$$

де k_0 — предекспоненційний множник; E — енергія активації, Дж/моль; R — газова постійна, Дж/моль · К, T — абсолютна температура, К.

Завдання полягає в тім, щоб визначити кінетичні константи (предекспоненційний множник k_0 й енергію активації E) за експериментальними даними, наведеними у табл. ().

Перетворивши кінетичне рівняння шляхом заміни фізичних змінних машинними, одержимо рівняння

$$\frac{dU_{c_A} M_A}{\tau_m M_\tau} = -k U_{c_A} M_A,$$

$$\text{де } c_A = U_{c_A} M_A; \quad \tau = \tau_m M_\tau$$

Розділивши ліву й праву частини рівняння на $\frac{M_A}{M_\tau}$, остаточно одержимо

$$\frac{dU_{c_A}}{d\tau_m} = N_1 U_{c_A} \quad \text{при} \quad \tau_m = 0, \quad U_{c_A} = U_{c_{A_0}},$$

де N_1 — коефіцієнт передачі, рівний k_τ .

Далі підбираємо такі значення, при яких отримані на АВМ значення c мають найменші відхилення від експериментальних.

Визначивши величину N_1 для $T_1 = 423\text{К}$ и $T_2 = 473\text{К}$, розрахуємо відповідні значення константи швидкості

$$k_1 = \frac{N_{11}}{M_{\tau_1}} \quad \text{і} \quad k_2 = \frac{N_{12}}{M_{\tau_1}} ;$$

а потім визначити E и k_0 , вирішивши систему рівнянь із двома невідомими

$$k_0 \exp\left(-\frac{E}{RT_1}\right)$$
$$k_0 \exp\left(-\frac{E}{RT_2}\right)$$

При обробці експериментальних даних застосовують різні прийоми підбору коефіцієнтів й оцінки відхилень залежно від задачі, що стоїть перед дослідником і особливостей проведення експерименту.

Найчастіше величину відхилення (погрішність) визначають трьома методами: по середньому інтегральному, середньому квадратичному й максимальному відхиленню (розмірне наближення), застосовуючи простий перебір значень N_1 .

Середнє інтегральне відхилення. Як відхилення розрахункової величини концентрації глюкози від експериментальних даних приймають середнє інтегральне відхилення

$$\Delta c_{A_0} = f(k) ; \quad \Delta c_{A_m} = \frac{1}{\tau_{k_0}} \int_0^{\tau_k} \Delta c_A d\tau ,$$

де

$$\Delta c_A = c_A - c_{\text{експ}}$$

τ_{k_0} — тривалість реакції.

Безпосередньо на АОМ одержують величину напруги

$$U_n = \frac{\Delta c_{A_m} \tau_m}{M_A M_\tau}$$

Найкраще наближення $k (N_1)$ у цьому випадку таке, при якому

$$\Delta c_{A_U} = 0 \quad \text{або} \quad U_n = 0.$$

На блоці нелінійності (БН) відтворюється експериментальна залежність концентрації глюкози від часу $c_{A_{експ}} = f(\tau)$ у відповідному масштабі, тобто $U_{c_{експ}} = f(\tau_m)$

Середнє квадратичне відхилення (метод найменших квадратів). Якщо допустити, що помилки експериментальних величин $c_{A_{експ}}$ мають нормальний закон розподілу, то найбільш ймовірною системою значень невідомих (у цьому випадку кінетичних констант) є сума квадратів відхилень розрахункових значень функції від експериментальних, котра повинна бути найменшою.

Найкраще в цьому змісті значення кінетичних констант доцільно визначати, мінімізуючи середнє квадратичне відхилення

$$\beta = \int_0^{\tau_k} (\Delta c_A)^2 d\tau$$

Величину $(\Delta c_A)^2$ легко одержати, використовуючи блок перемножування АОМ

$$U_\beta = \frac{\beta}{M_{c_A} M_\tau} N_2$$

Для підвищення точності зміни, величину $|\Delta c_A|^2$ множать на постійний коефіцієнт $N > 1$.

Рівномірне наближення. Якщо експеримент проведений з великою точністю й розкид експериментальних точок зневажливо малий у порівнянні з погрішністю апроксимації, знаходять значення констант, що забезпечують рівномірне наближення розрахункової функції до експериментального. Кінетичні константи підбирають таким чином, щоб максимальне відхилення розрахункової величини від експериментальної або в порівнянні з іншим способом вибору констант було б найменшим. Відхилення тут вимірюють тільки в точках, отриманих експериментально. Задача на

АОМ вирішується в наступному порядку:

1. Збирають схему для обчислення середнього інтегрального й середнього квадратичного відхилень.

2. З дільника напруги на вхід підсилювача подають

$$U_L = \frac{100}{\tau_{mk}} = 5V$$

і перевіряють точність відтворення функції

$$U_\tau = U_{L\tau_{mk}} = 5\tau_{mk}$$

Час інтегрування τ_{mk} , прийнято рівним 20 с.

3. Налаштовують блок нелінійності для відтворення експериментальної залежності

$$c_{A_{експ}} = f(\tau) \quad \text{при} \quad 423 \quad \text{й} \quad 473 \text{ К,}$$

для чого складають карти настроювання.

Масштаб часу

$$M_{\tau} = \frac{\tau_k}{\tau_{mk}} = \frac{54000}{20} = 2700 .$$

Масштаб концентрації

$$M_c = \frac{c_A}{U_{c_A}} = \frac{1}{100} = 0,01 \text{ моль/В.}$$

4. Підбирають коефіцієнти передачі N_1', N_1'' й N_1''' відповідно по середньому інтегральному, середньому квадратичному й максимальному відхиленню, результати підбору коефіцієнтів звичайно зводять у таблицю.

Розраховують значення K_1', K_1'' й K_1''' по формулі $k = \frac{N_1}{M_{\tau}}$. Для температури $T = 473 \text{ К}$ повторюють настроювання блоку нелінійності й підбір коефіцієнтів передачі. При цьому вимірюють масштаб часу $M_{\tau} = \frac{900}{20} = 45$, час інтегрування те ж ($t_{mk} = 20$, с).

Для обчислення енергії активації й предекспоненційного множника вирішують систему рівнянь

$$\left. \begin{aligned} \ln k_1 &= \ln k_0 - \frac{E}{RT_1} \\ \ln k_2 &= \ln k_0 - \frac{E}{RT_2} \end{aligned} \right\}$$

де

$$k_1 = \frac{N_{11}}{M_{\tau_1}} ; \quad k_2 = \frac{N_{12}}{M_{\tau_2}}$$

$R = 8,31 \text{ Дж/(моль- К)}$.

Тому що k_1 й k_2 лише наближені значення констант швидкості, тому й величини E й k_0 обчислюють із деякою погрішністю. Для більш точного визначення кінетичних констант необхідно мати експериментальні дані, принаймні для трьох значень температури.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

БАЗОВА ЛІТЕРАТУРА

1. Жученко А. І., Ладієва Л. Р., Піргач М. С., Жураковський Я. Ю. Математичне моделювання процесів і систем : навчальний посібник. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 351 с.
2. Зубар Н. М. Теоретичні основи харчових виробництв : підручник. Київ : Видавничий дім «Кондор», 2020. 304 с.
3. Комп'ютерне моделювання систем та процесів. / Р. Н. Кветний, І. В. Богач, О. Р. Бойко та ін. Вінниця : ВНТУ, 2019. 235 с.
4. Математичне моделювання систем і технологічних процесів / В. Ю. Щербань, О. З. Колиско, Ю. Ю. Щербань та ін. Київ : ТОВ "Фастбінд Україна", 2023. 938 с.
5. Моделювання технологічних систем харчових виробництв : методичні рекомендації для практичних занять та самостійної роботи здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти ОПП «Харчові технології» спеціальності 181 «Харчові технології» денної форми здобуття вищої освіти / уклад. О. В. Шибаніна, С. І. Тищенко, О. Ю. Пархоменко, В. О. Крайній, І. І. Хилько. Миколаїв : МНАУ, 2025. 108 с. URL: <https://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/21280>
6. Основи автоматизації технологічних процесів : навчальний посібник / уклад. В. В. Шевченко, Г. С. Тимчик. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. 111 с.
7. Поперечний А. М. Моделювання процесів і обладнання харчових виробництв. Київ : ЦУЛ, 2023. 312 с.
8. Процеси і апарати ХАРЧОВИХ ВИРОБНИЦТВ. Механічні та гідромеханічні процеси : підручник / В.С. Бойко, К.О. Самойчук, В.Г. Тарасенко та ін. Мелітополь : Таврійський державний агротехнологічний університет імені Дмитра Моторного, 2021. 445 с.
9. Трибрат Р.О. Моделювання технологічних процесів харчових виробництв : конспект лекцій. Миколаїв : МНАУ, 2023. 85 с. URL: <https://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/2454>

ДОПОМІЖНА ЛІТЕРАТУРА

1. Моделювання технологічних процесів тваринництва [Електронний ресурс] : метод. реком. для проведення практичних занять здобувачам вищої освіти ступеня "Магістр" освітньо-професійної та освітньо-наукової програм

спеціальності 204 "ТВППТ" / уклад. Р. О. Трибрат. Миколаїв : МНАУ, 2019. 71 с.

2. Луговський В. І. Математичне моделювання та застосування ЕОМ в хімічній технології: конспект лекцій з курсу для студентів хіміко-технологічних спеціальностей. Одеса : Одеський національний політехнічний університет, 2003. 101 с.
3. Гліненко Л. К., Сухоносів О. Г. Основи моделювання технічних систем : навчальний посібник. Львів : Бескид Біт, 2003. – 176 с.

Навчальне видання

Моделювання технічних систем харчових виробництв

Методичні рекомендації

Укладачі: **Шебаніна** Олена В'ячеславівна
Тищенко Світлана Іванівна
Пархоменко Олександр Юрійович та ін.

Формат 60x84 1/16. Ум. друк. арк. 7,44.
Тираж 50 прим. Зам. № __

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.