МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Миколаївський національний аграрний університет

Інженерно-енергетичний факультет

Кафедра загальнотехнічних дисциплін

ІНЖЕНЕРНА ТА КОМП'ЮТЕРНА ГРАФІКА

методичні рекомендації
для виконання практичних робіт і самостійної роботи
змістовного модуля «Основи нарисної геометрії»
здобувачами першого (бакалаврського) рівня
вищої освіти ОПП «Харчові технології»
спеціальності G13 «Харчові технології»
денної форми здобуття вищої освіти

Миколаїв

2026

УДК 744:004. 92
І-62

Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету.

Протокол № _5_ від _19_ «_лютого_» 2026 року.

Укладачі:

Полянський П.М. – доцент кафедри загальнотехнічних дисциплін Миколаївського національного аграрного університету;
Доценко Н.А. – професорка кафедри загальнотехнічних дисциплін Миколаївського національного аграрного університету;
Іванов Г.О. – доцент кафедри загальнотехнічних дисциплін Миколаївського національного аграрного університету;
Степанов С.М. – старший викладач кафедри загальнотехнічних дисциплін Миколаївського національного аграрного університету;
Баранова О.В. – асистентка кафедри загальнотехнічних дисциплін Миколаївського національного аграрного університету.

Рецензенти:

Марченко Д. Д. – доцент кафедри тракторів та сільськогосподарських машин, експлуатації та технічного сервісу Миколаївського національного аграрного університету;
Бабенко Д. В. – професор кафедри загальнотехнічних дисциплін Миколаївського національного аграрного університету.

Вступ

Дані методичні рекомендації присвяченні вивченню точки, прямої та площини на комплексному кресленні, його перетворення з метою отримання додаткових проекцій геометричних образів для розв’язання різноманітних задач позиційного та метричного характеру. Ставиться метою навчити студентів зображати всілякі поєднання геометричних форм на площині, а також проводити їх дослідження і виміри.

В даних методичних рекомендаціях викладений основний теоретичний матеріал, наводиться велика кількість прикладів рішення задач та по мірі викладення матеріалу студентам пропонується для самостійного розгляду велике коло питань, рішення яких сприяє правильному розумінню законів відображення просторових об’єктів на площину.

Також в методичних рекомендаціях надаються завдання, питання до захисту і методичні рекомендації для самостійної роботи студентів по виконанню графічних робіт до першого, другого та третього модулів з курсу нарисної геометрії.

ТОЧКА, ПРЯМА, ПЛОЩИНА

1.Точка на комплексному кресленні

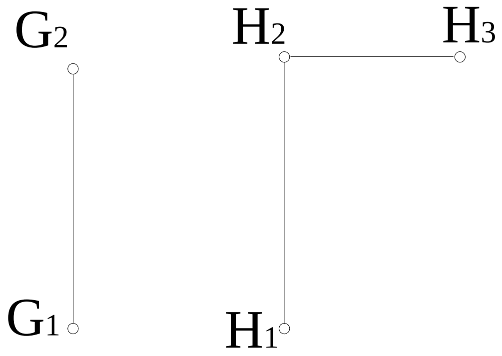
На рис. 1 а і б представлені відповідно двокартинне та трьохкартинне комплексні креслення точок *G* і *H*. Креслення ці безвісні. Вони елементарні і особливих пояснень не потребують.

Іноді приходиться будувати комплексні креслення точок по їх координатам.

К о о р д и н а т а м и x, y, z точки M називаються відповідно відстані від даної точки до фіксованих площин проекцій $П_3, П_2, П_1$ (рис.2).

Комплексне креслення в такому випадку буде мати осі проекцій. Вони будуть базами підрахунку координат: відстань $MM_3 = OM_x$ - координата x (абсциса) точки M; відстань $MM_2 = OM_y$ - координата y (ордината) точки M; відстань $MM_1 = OM_z$ - координата z (апліката) точки M.

Чисельні величини, що виражають координати x, y, z точки в міліметрах, записують в скобках після її найменування. Наприклад: А (30,15,25).



а б

Рис. 1

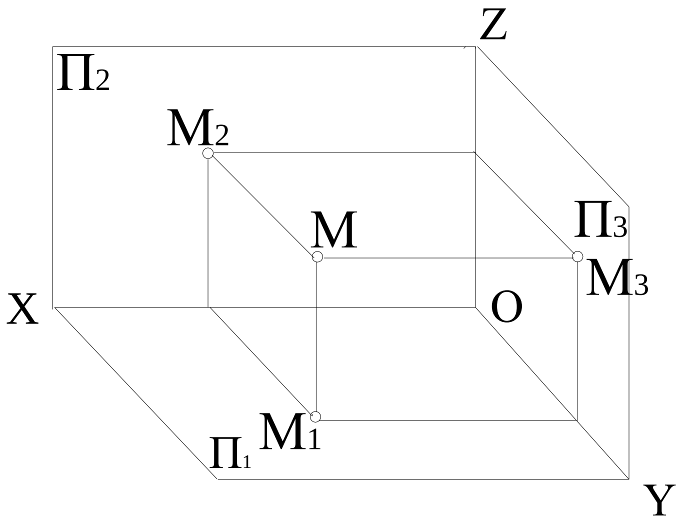


Рис. 2

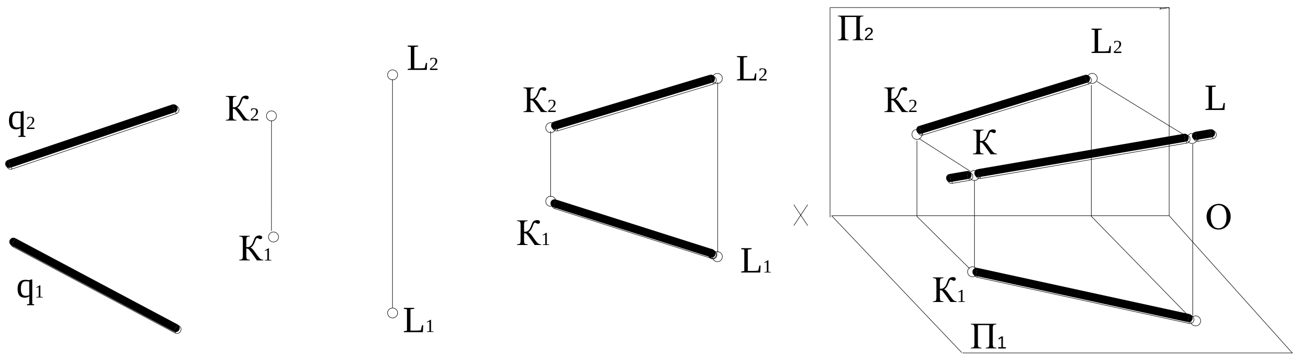
2.Пряма на комплексному кресленні. Спосіб прямокутного трикутника

Наступним геометричним образом після точки є пряма. Необхідно пам'ятати , що пряма нескінчена, тобто вона може бути продовжена. Якщо пряма лінія не співпадає з напрямом проектування , то її проекція також являється прямою. В протилежному випадку вона проектується в точку.

На комплексному кресленні пряма лінія може бути задана безпосередньо своїми проекціями (пряма q на рис. 3, а), проекціями двох її точок (точки K і L на рис. 3, б) або проекціями її відрізка (відрізок KL на рис. 3, в).

Відновлюючи пряму лінію, що розглядається, по її зображенням (проекціям) – рис. 3, г, визначаємо, що дана пряма не паралельна і не перпендикулярна ні одній з площин проекцій: Π_1, Π_2, Π_3. Такі прямі називаються *п р я м и м и з а г а л ь н о г о п о л о ж е н н я.*

Аналізуючи рис. 3, в, г, робимо висновок, що проекції K_1L_1 і K_2L_2 не дорівнюють по довжині самому відрізку-оригіналу, тобто вони коротші за нього, так як при проектуванні відрізок KL знаходився під кутом до площини проекцій Π_1 і Π_2.



а б в г

Рис. 3

Часто доводиться розв’язувати задачі визначення натуральної довжини відрізка прямої загального положення по його комплексному кресленню. Спочатку розв’яжемо задачу в наочному зображенні (рис. 4).

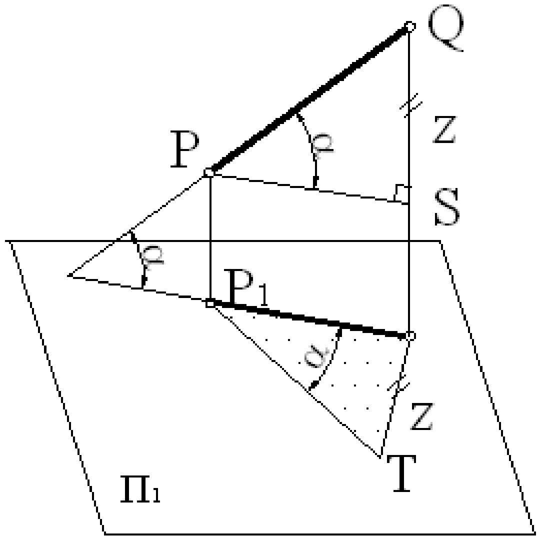
Проведемо з точки P пряму $PS // П_1$.Отримаємо прямокутний трикутник *PQS*. Побудуємо в площині проекцій $П_1$ трикутник P_1Q_1T , що дорівнює трикутнику *PQS*. Для цього до катету P_1Q_1 з точки Q_1 побудуємо другий катет Q_1T, що дорівнює відрізку QS , тобто перевищенню ΔZ одного кінця відрізку над другим (або різниці відстаней кінців відрізка від площини $П_1$).

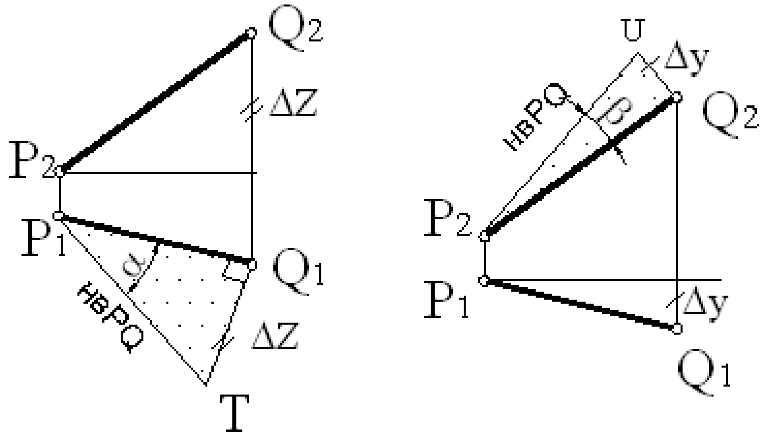
Таким чином, трикутник P_1Q_1T дорівнює трикутнику *PQS*. Тоді гіпотенуза P_1T буде дорівнювати гіпотенузі PQ , тобто самому відрізку-оригіналу *PQ*.

Звертаючись до комплексного креслення (рис. 5) , помічаємо, що всі необхідні елементи для розв'язання поставленої задачі тут є. Є катет P_1Q_1 (горизонтальна проекція відрізка *PQ)* і відома довжина другого катета Q_1T (вона дорівнює перевищенню ΔZ одного кінця відрізку над другим). Виконав необхідні побудови в площині $П_1$, отримуємо прямокутний трикутник P_1Q_1T, гіпотенуза P_1T якого дорівнює натуральній величині даного відрізка. Такий спосіб визначення довжини відрізка прямої загального положення по його комплексному кресленню отримав назву способу *п р я м о к у т н о г о т р и к у т н и к а*.

Повернемося до рис. 4. Кут α між гіпотенузою P_1T і проекцією P_1Q_1 дорівнює куту нахилу відрізка-оригінала *PQ* до горизонтальної площині проекцій $П_1$. Таким чином, в даній задачі одночасно була визначена і натуральна величина кута α нахилу прямої загального положення (відрізка *PQ)* до горизонтальної площини проекцій $П_1$.

Розмірковуючи аналогічним чином в відношенні фронтальної площини проекцій $П_2$, знову визначимо ту ж саму натуральну величину відрізка PQ до фронтальної площини проекцій Π_2. Читачеві рекомендується самостійно виконати схему, подібну рисунку 4, взявши замість площини Π_1 площину Π_2.





а б

Рис. 4 Рис. 5

Ми же відразу звернемося до комплексного креслення (рис. 5, б). Прямокутний трикутник будуємо у фронтальній площині проекцій Π_2. Тут одним з катетів буде проекція P_2Q_2, а другим – відрізок Q_2U, що дорівнює різниці відстаней Δy кінців відрізка від площини проекцій Π_2.Тоді гіпотенуза P_2U є таж сама натуральна величина відрізка *PQ,* а кут β між гіпотенузою і проекцією P_2Q_2 являється натуральною величиною кута β нахилу відрізка-оригінала *PQ* до фронтальної площини проекцій Π_2.

3. Прямі окремого положення

Прямі окремого положення - це прямі, або паралельні, або перпендикулярні кожній з площин проекцій: Π_1, Π_2, Π_3 .

Прямі паралельні до площин проекцій Π_1, Π_2, Π_3 називаються *п р я м и м и   р і в н я*, так як всі точки такої прямої знаходяться на одному рівні по відношенню до відповідної площини проекцій.

Прямі перпендикулярні до площин проекцій Π_1, Π_2, Π_3 називаються *п р о е к т у ю ч и м и   прямими*, так як вони співпадають з напрямом проектування.

На рис. 6 представлені наочні зображення першої групи прямих окремого положення – прямих рівня. В відповідності з назвою площини проекцій, до якої вони паралельні, ці прямі отримали наступні назви:

пряма ***h*** - *г о р и з о н т а л ь*, так як $h // \Pi_1$;

пряма ***f*** - *ф р о н т а л ь,* так як $f // \Pi_2$;

пряма ***p*** – *п р о ф і л ь н а*   пряма, так як $p // \Pi_3$.

На рис. 7 представлені двокартинні комплексні креслення горизонталі ***h*** і фронталі ***f***. Ці прямі в якості допоміжних достатньо часто будуть зустрічатися в рішеннях задач, тому на них необхідно звернути увагу. По своєму зображенню на комплексних кресленнях вони взаємно зворотні . Одна з їх проекцій горизонтальна , а друга нахилена і уявляє собою натуральну величину прямої. Кути α і β визначають кути нахилу цих прямих до відповідних площин проекцій Π_2 і Π_1.

Що ж стосовно профільної прямої ***p*** , то для неї двокартинне креслення являється незворотнім (рис. 8, а), так як не визначає дійсного положення даної прямої у просторі. В такому випадку креслення необхідно доповнити або третім зображенням (профільною проекцією p_3) – рис. 8, б, або задати на цій прямій дві любі точки *A* і *B*.

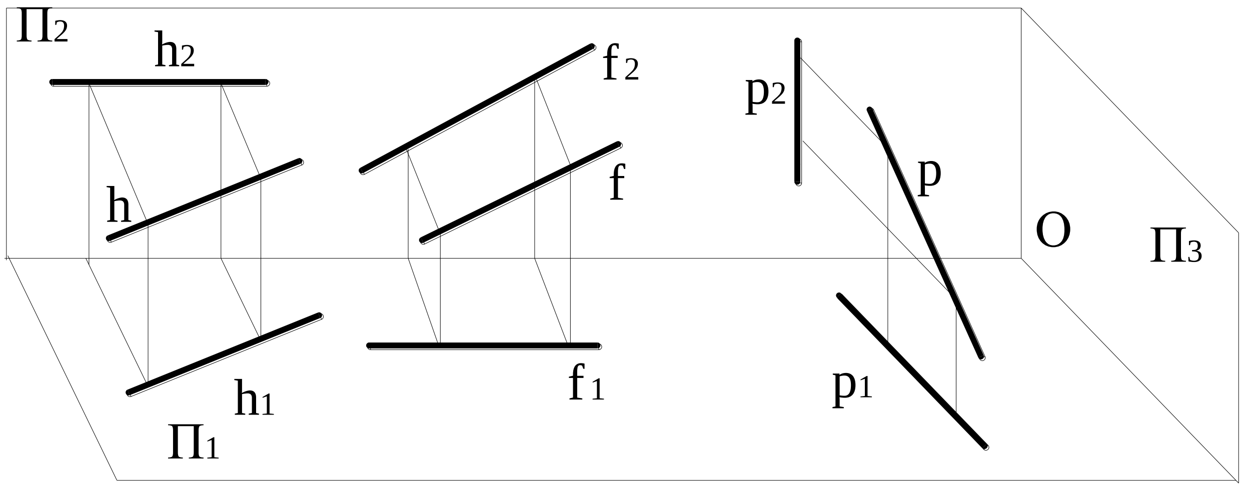
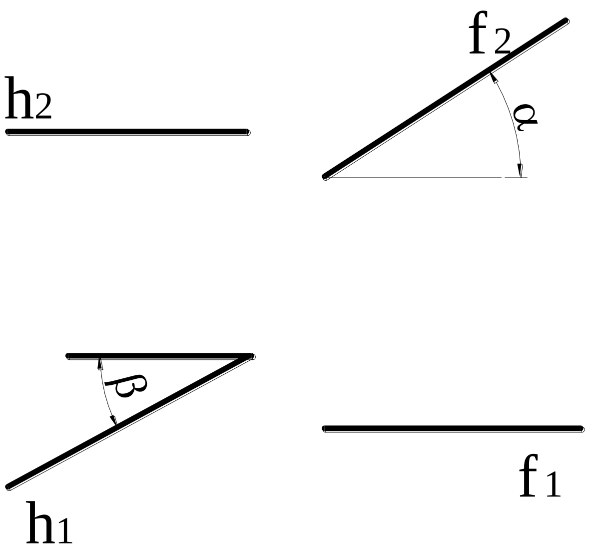
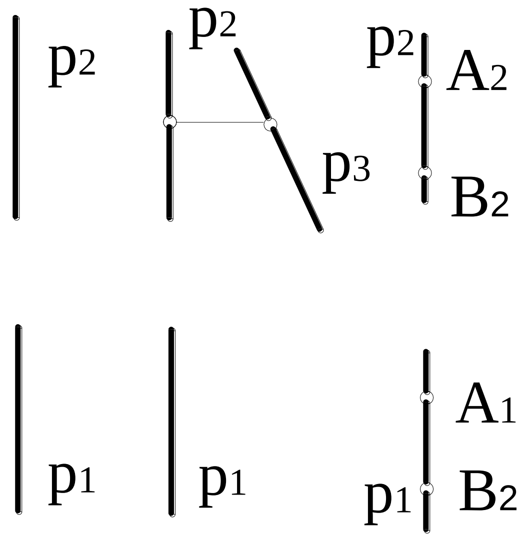


Рис.6



а б

Рис. 7



а б в

Рис. 8

На рис. 9 представлені наочні зображення другої групи прямих окремого положення – проектуючих прямих.

В відповідності з назвою площини проекцій, якої вони перпендикулярні, ці прямі отримали наступні назви:

пряма ***s*** - горизонтально-проектуюча, так як $s \perp П_1$;

пряма ***t*** – фронтально-проектуюча, так як $t \perp П_2$;

пряма ***u*** - профільно-проектуюча, так як $u \perp П_3$.

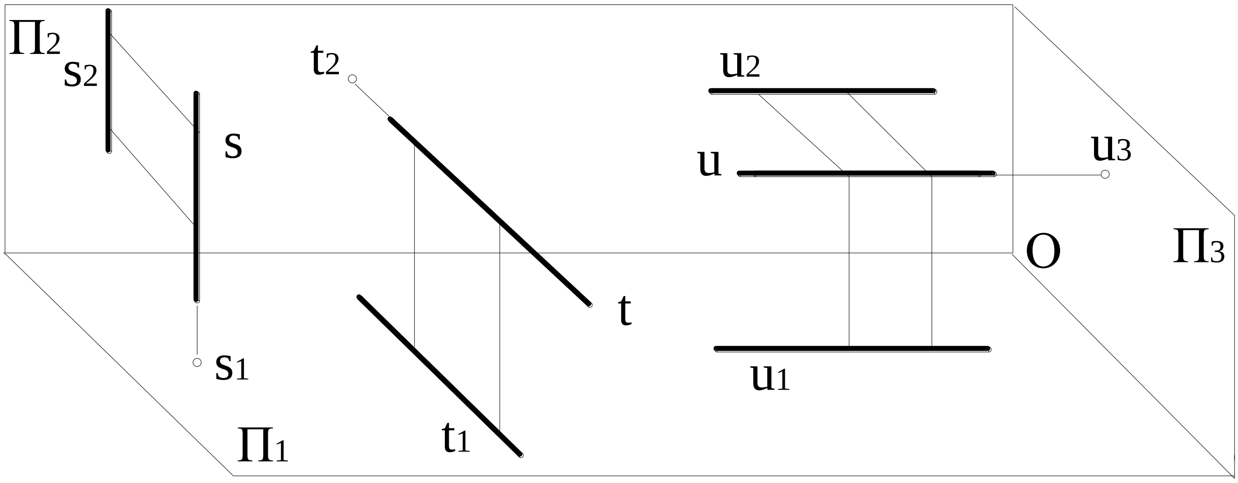


Рис. 9

На рис.10 представлені комплексні креслення проектуючих прямих s, t, u.

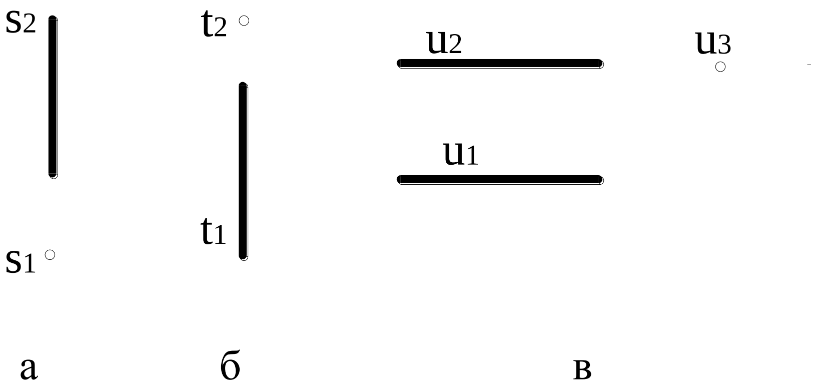


Рис. 10

Одна з проекцій представляє собою точку, а другі співпадають з лініями зв’язку.

В задачах такі прямі часто використовуються в якості вісей обертання.

◈ *Самостійна робота*

Для перевірки знань і тренування просторового мислення рекомендується самостійно проаналізувати комплексні креслення, зображенні на рис. 11 і відповісти на наступні питання:

1.Які геометричні образи представлені на кресленнях? Дати їх точні назви.

2. Яким чином розташовані по відношенню один до одного ці геометричні образи?

Примітка: а) на рис.11, а, д, ж знак "≡" означає співпадання проекцій двох геометричних образів;

б)на рис.11,г точки *G* і *H* визначають положення прямої *p* , так як вони задані для зворотності креслення.

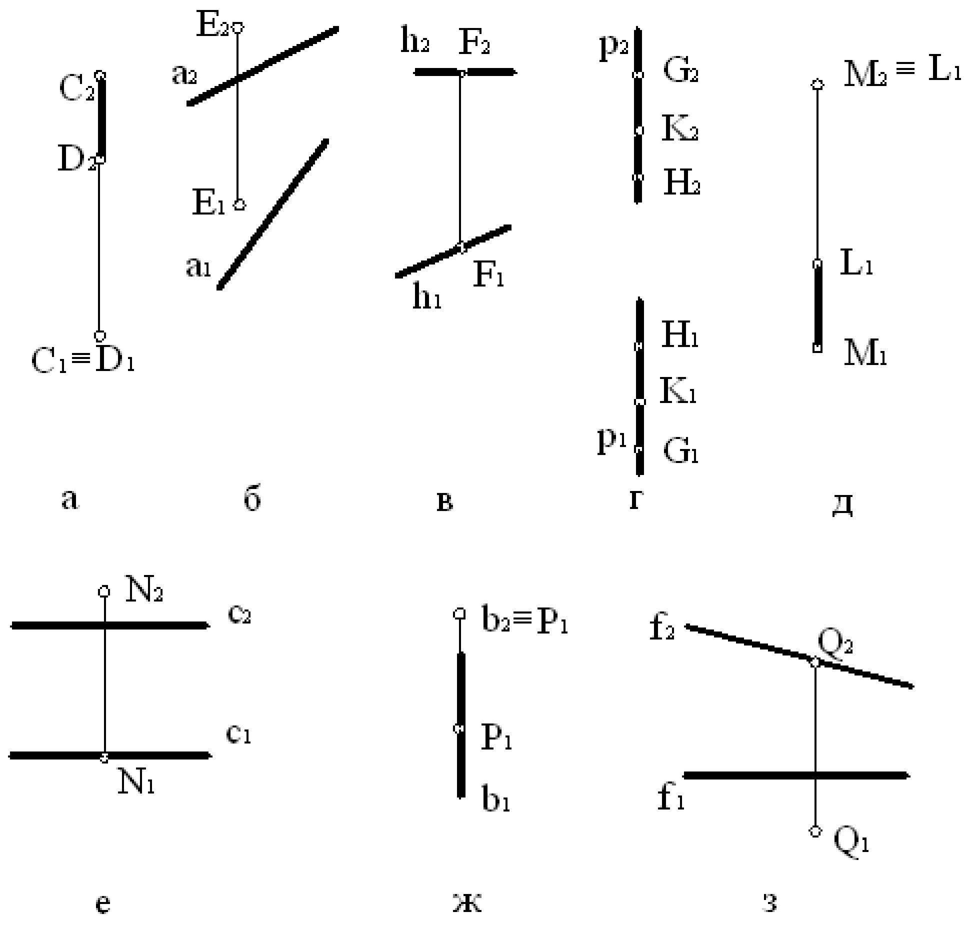
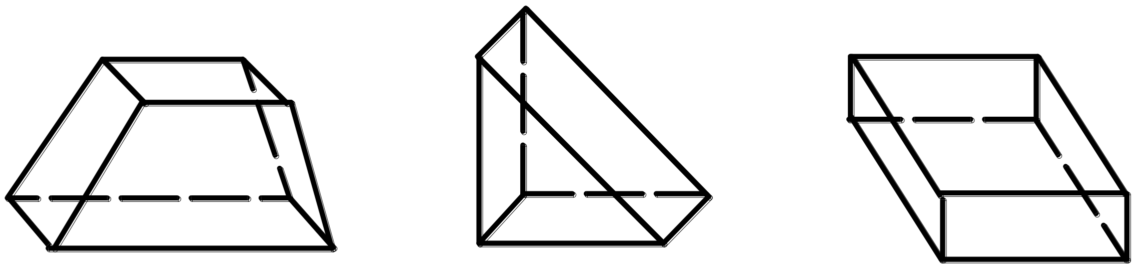


Рис. 11

3. На рис. 12 зображенні геометричні тіла, ребра яких уявляють собою відрізки загального і окремого положення. Які ці прямі і в якій якості вони знаходяться в кожному з цих геометричних тіл?



а б в

Рис.12

4.Взаємне положення двох прямих

П а р а л е л ь н і прямі. На комплексному кресленні однойменні проекції двох паралельних прямих також паралельні між собою, тобто $s_1 // t_1$ і $s_2 // t_2$ (рис. 13)

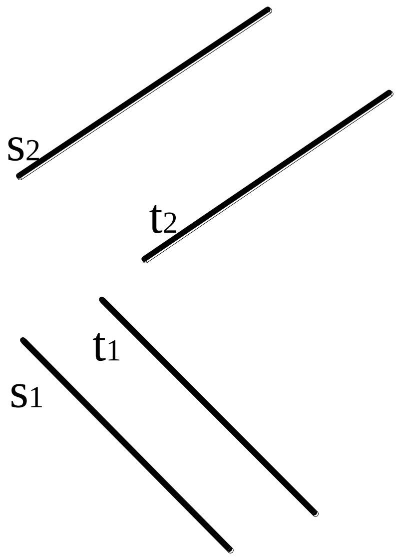


Рис. 13

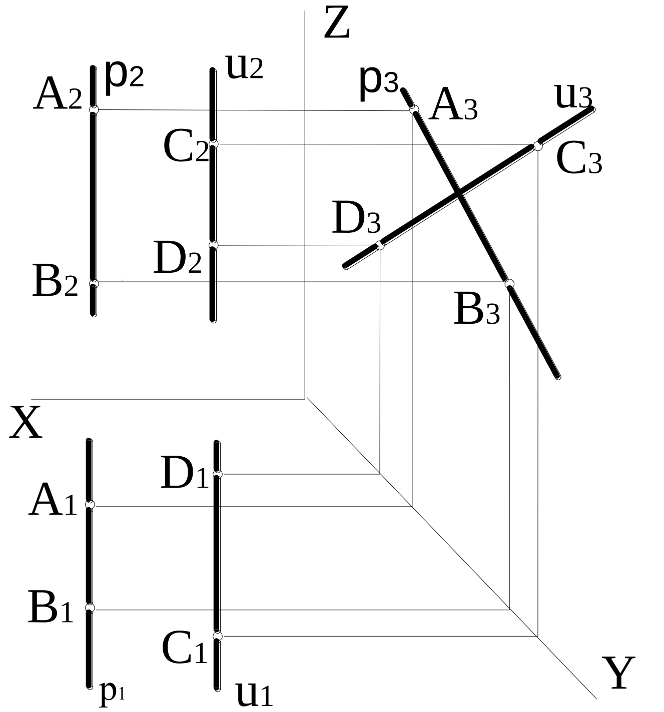


Рис. 14

При наявності основного двокартинного креслення це твердження дійсно для любих прямих, крім профільних. На рис.14 представлені дві профільні прямі : *p* і *u* . На перший погляд вони здаються паралельними, так як $p_1 // u_1$ і $p_2 // u_2$. Але побудувавши їх треті проекції p_3 і u_3, ми бачимо зворотне, тобто вони не паралельні.

П е р е т и н н і прямі . Дві прямі, що перетинаються мають одну спільну точку. На комплексному кресленні проекції T_1 і T_2 даної точки T являються точками перетину однойменних проекцій прямих і вони повинні знаходитися на одній вертикальній лінії зв'язку (рис.15).

П е р е х р е с н і прямі. Ці дві прямі не паралельні і не перетинаються. На комплексному кресленні їх однойменні проекції перетинаються в точках, що не лежать на одній лінії зв'язку (рис.16).

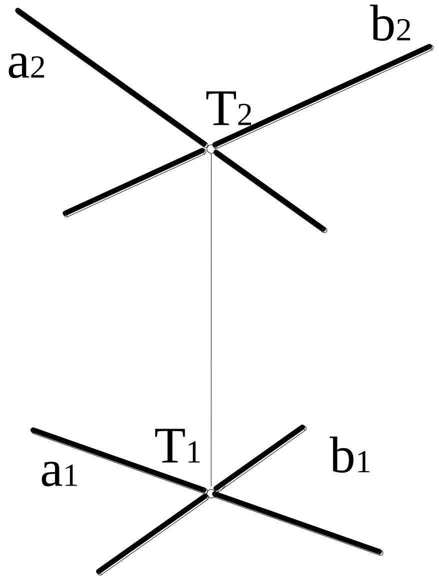


Рис. 15

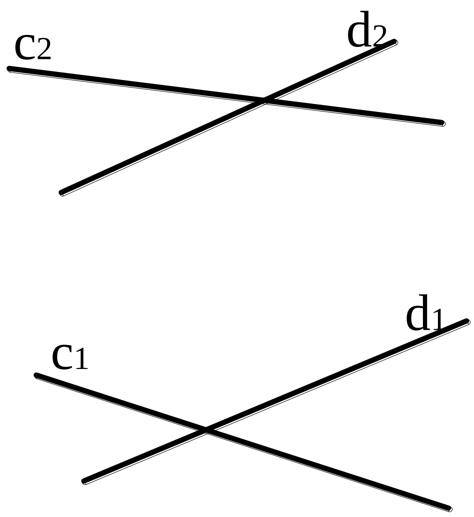
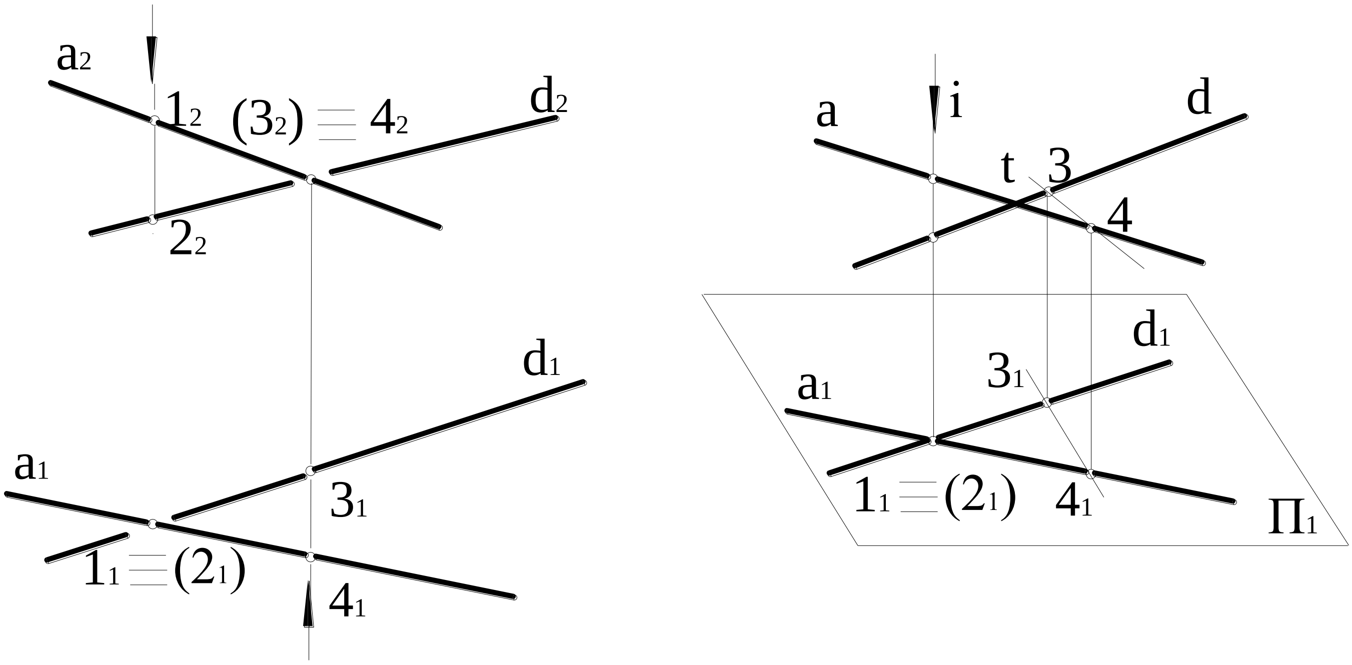


Рис. 16

Перехресні прямі часто використовуються для визначення видимості елементів на комплексному кресленні. Хай задані дві перехресні прямі a і d (рис. 17, а). Необхідно розв'язати задачу: яка з прямих закриває собою другу в горизонтальній та фронтальній проекціях?

Звернемося спочатку до наочного зображення (рис. 17, б).



а б

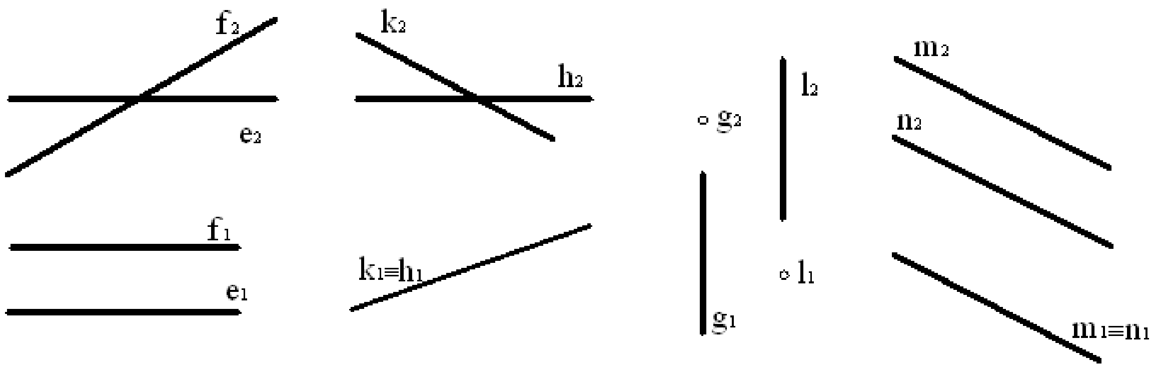
Рис. 17

Почнемо з горизонтальної проекції. В місці перетину горизонтальних проекцій a_1 і d_1 перехресних прямих маємо співпадаючи проекції точок *1* і *2*, що належать різним прямим. Хай точка *1* належить прямої *a* , а точка *2* – прямій *d*. Ці дві точки, що знаходяться на горизонтально-проектуючої прямої *i* ,з якою співпадає наш напрямок зору, називаються *к о н к у р у ю ч и м и*. Вони конкурують на видимість в горизонтальній площині. З рисунку 17, б видно, що виграє точка *1*, тобто вона закриває собою точку *2* в горизонтальній проекції. Про це ж говорить і фронтальна проекція на рис.17, а. Точка *1* знаходиться вище точки *2*. Відмітимо факт невидимості точки *2* скобками. Значить, пряма *a* з точкою *1* закриває собою пряму *d* з точкою *2*. Умовно перериваємо в цьому місці проекцію d_1 .

Переходимо до установлення видимості в фронтальній проекції за допомогою конкуруючих точок *3* і *4*. Наш промінь зору, що співпадає з фронтально-проектуючою прямою *t* , проходить через точку *4* (хай вона належить прямої *a*) і точку *3*, що належить прямій *d*. Як випливає з рис. 17, б, виграє точка *4*, яку ми бачимо першою і яка закриває собою точку *3*. Значить, пряма *a* з точкою *4* закриває собою пряму *d* з точкою *3*. Про це ж говорить і горизонтальна проекція рис. 17, а. Точка *4* знаходиться ближче точки *3*. Умовно перериваємо в цьому місці проекцію d_2 прямої *d*.

◈ *С а м о с т і й н а   р о б о т а*

Визначити по рис. 18, як розташовані зображені на ньому прямі по відношенню друг до друга; дати назву кожній з них.



а б в г

Рис.1 8

5. Проекції прямого кута

Можливі три випадки розташування сторін прямого кута по відношенню до площин проекцій (рис.19 – 21).

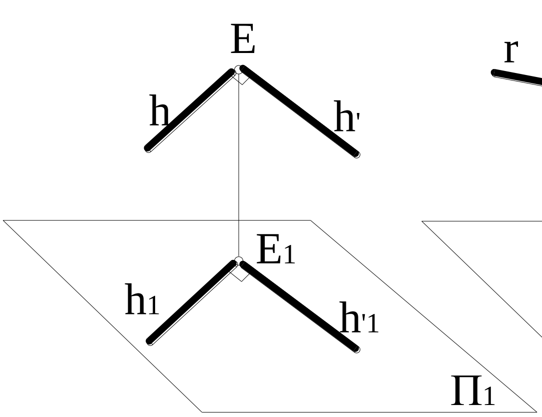


Рис. 19

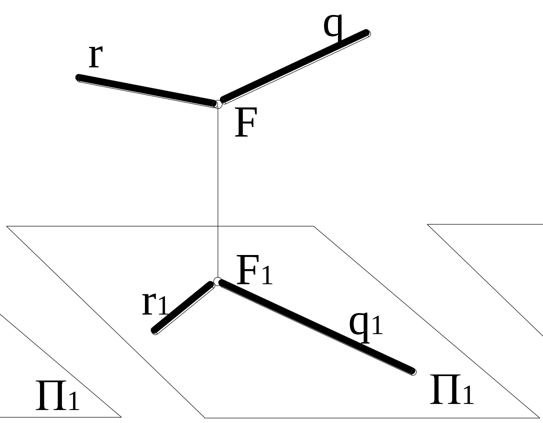


Рис. 20

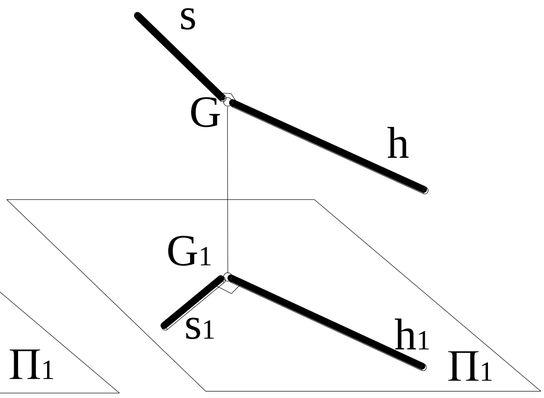


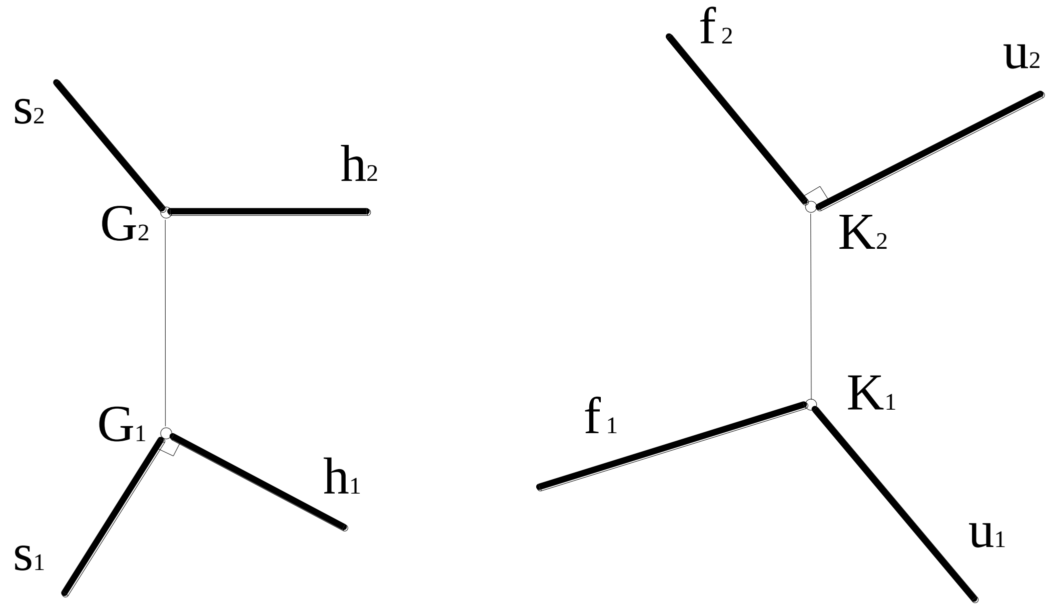
Рис. 21

В першому випадку (дивись рис. 19) обидві сторони прямого кута hEh' паралельні площині проекцій Π_1. Зрозуміло, що цей прямий кут зпроектується на площину Π_1 в натуральну величину.

Зайвими будуть докази для ствердження, що в другому випадку (дивись рис. 20) прямий кут не зпроектується на площину Π_1 в натуральну величину, так як обидві його сторони r і q являються прямими загального положення.

Розглянемо докладніше третій випадок (дивись рис. 21), коли тільки одна сторона прямого кута паралельна площині проекцій. Неважко довести, що в цьому випадку прямий кут sGh зпроектується на площину Π_1 в натуральну величину.

Хай через прямі s і GG_1 проходить площина θ (тета). Тоді горизонталь $h \perp \theta$, так як $h \perp s$ і $h \perp GG_1$ (пряма перпендикулярна до площини, якщо вона перпендикулярна двом перетинаючимся прямим цієї площини). А так як $h // h$,то $h_1 \perp \theta$. Значить, $h_1 \perp s_1$ (тобто пряма h_1 буде перпендикулярна любій прямій в площині θ, в тому числі і прямій s_1). Таким чином , ми довели , що кут $s_1 G_1 h_1 = 90^{\circ}$.



а б

Рис. 22

Всі наведені вище міркування о проекціях прямих кутів справедливі і в відношенні фронтальної площини проекцій $П_2$. Тільки там в якості прямої рівня повинна розглядатися фронталь.

На рисунках 22, а, б наводяться комплексні креслення прямих кутів , коли одна із їх сторін являється горизонталлю (рис. 22, а) або фронталлю (рис. 22, б). Ці креслення необхідно засвоїти, так як в подальшому ми не одноразово будемо до них повертатися.

Таким чином , доведену вище *теорему о проекції прямого кута* можна сформулювати так:

- Якщо одна сторона прямого кута паралельна площині проекцій, то на цю площину даний прямий кут проектується в натуральну величину.

◆ *С а м о с т і й н а   р о б о т а*

Рекомендується самостійно вирішити, на якому із креслень (рис. 23) зображений прямокутник, а на якому – паралелограм.

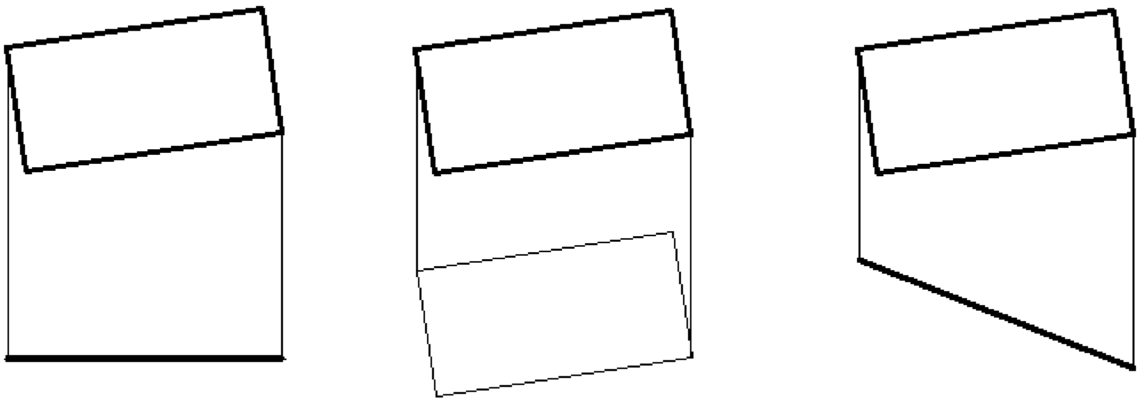


Рис. 23

6. Площина на комплексному кресленні

Площина – простий вид поверхні. Вона відноситься до незамкнених поверхням, тобто може буди продовжена, не має товщини. В задачах будемо вважати її непрозорою.

Площина, не паралельна і не перпендикулярна ні до однієї з площин проекцій $П_1, П_2, П_3$, називається площиною *з а г а л ь н о г о п о л о ж е н н я.*

Площина загального положення на комплексному кресленні не може бути задана безпосередньо своїми проекціями (як, наприклад, точка чи пряма), так як вона не має меж і покриває собою все поле проекцій. Тому її задають або відсіком в вигляді *n*- кутньої пластинки (рис. 24, а) , або елементами її визначаючими:

- трьома точками – *L, M, N* , що не лежать на одній прямій (рис. 24, б);
- прямою *a* і точкою *M* за її межами (рис. 24, в);

- двома паралельними прямими – *b* і *c* (рис. 24, г);
- двома перетинними прямими – *d* і *e* (рис. 24, д).

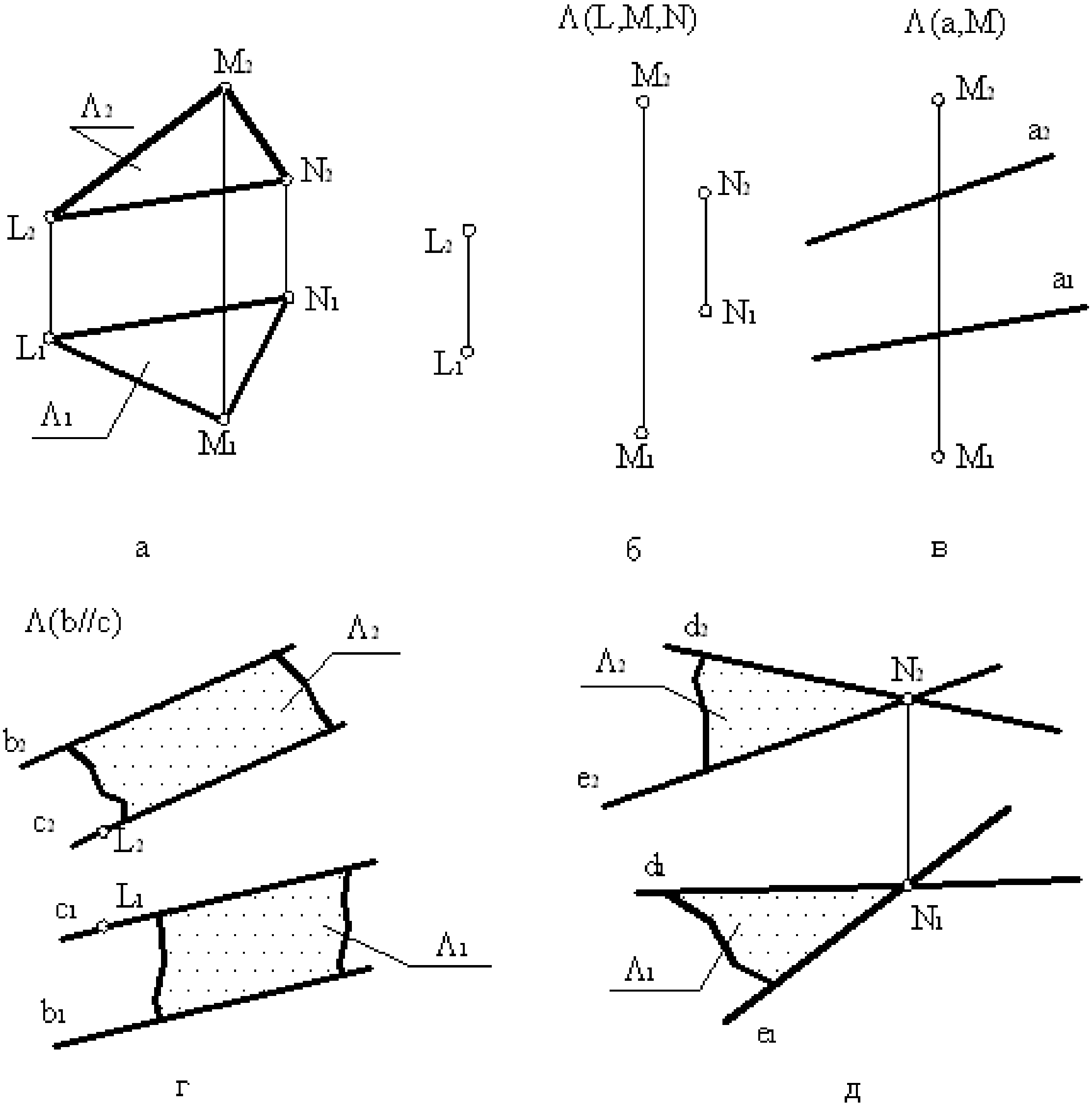
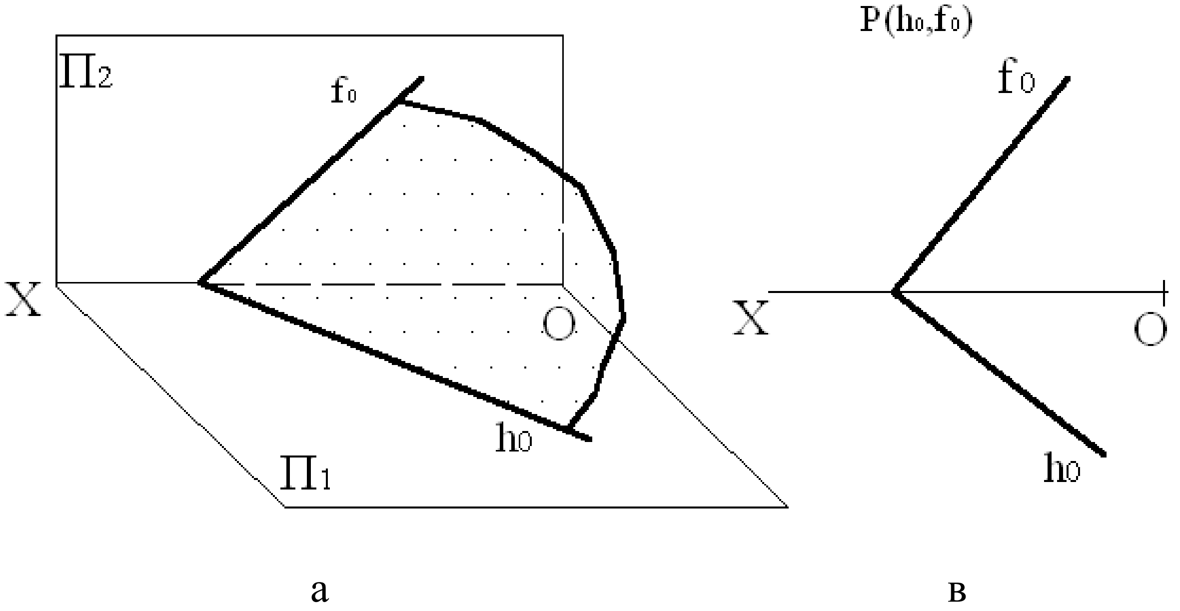


Рис. 24

Необхідно відмітити , що в основі усіх цих способів завдання знаходяться три точки, що визначають єдину площину. Можна, по бажанню , легко переходити від одного способу завдання до другого.

Існує ще один спосіб завдання площини на комплексному кресленні – це завдання слідами. На рисунку 25, а зображена частина площини загального положення *P* (ро). Прямі h_0 і f_0 , по яким площина *P* перетинає площини проекцій $П_1$ і $П_2$, називаються її *с л і д а м и*.

Якщо тепер розвернути цю модель в плоске креслення (забравши площину-оригінал P), то на комплексному кресленні залишаться тільки сліди цієї площини – прямі h_0 і f_0 (рис. 25, б).



а в

Рис. 25

Переходимо до розгляду *п л о щ и н о к р е м о г о п о л о-ж е н н я*. Це площини, або перпендикулярні до любої з площин проекцій, або паралельні їй.

Площини перпендикулярні до площин проекцій $П_1, П_2, П_3$ називаються *проектуючими площинами*, так як вони співпадають з напрямом проектування (рис. 26).

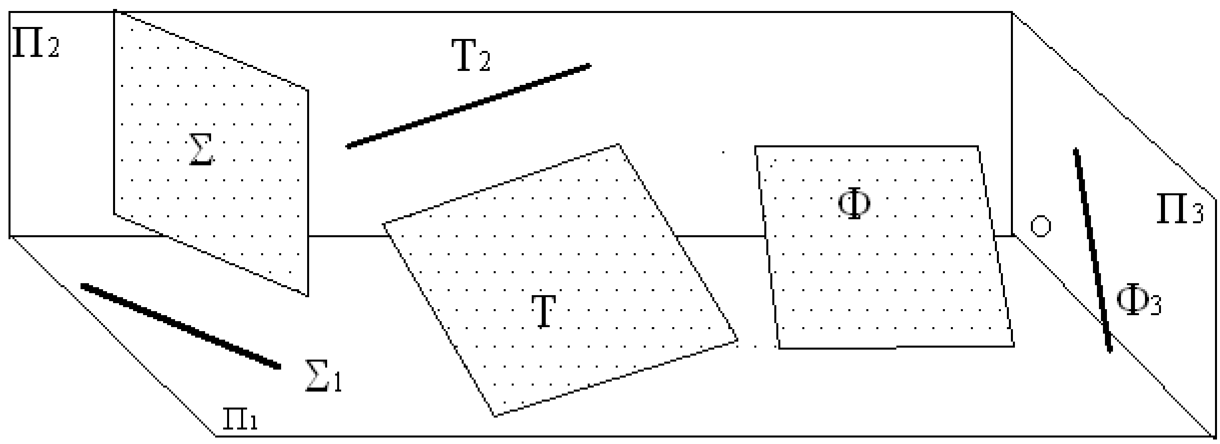


Рис. 26

В відповідності з назвою площини проекцій , якій вони перпендикулярні, ці площини окремого положення отримали наступні назви:

- площина Σ (сигма) – *горизонтально* - проектуюча, так як $\Sigma \perp П_1$;
- площина $Т$ (тау) – *фронтально* - проектуюча. Так як $Т \perp П_2$;
- площина $Ф$ (фі) – *профільно* - проектуюча, так як $Ф \perp П_3$.

На рис. 27 представлені комплексні креслення розглянутих проектуючих площин $\Sigma, Т, Ф$, але кожне з них має тільки одне зображення – похилу пряму, в яку проектується вказана площина.

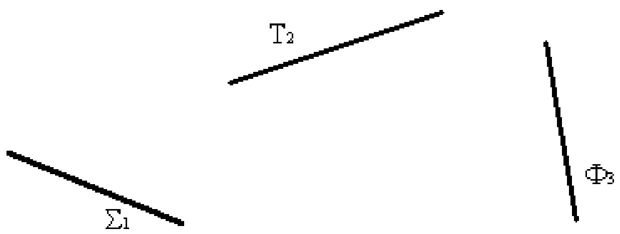


Рис. 27

Наприклад, профільно-проектуюча площина $Ф$ має тільки одне зображення на комплексному кресленні $Ф_3$ (рис. 27, в). На площинах проекцій вона зображень не має, так як внаслідок своєї безмежності покриває все поле креслення.

Таким чином, в відмінності від площин загального положення площини окремого положення можуть задаватися на комплексному кресленні безпосередньо своїми проекціями.

Друга група площин окремого положення – площини рівня представлені на рисунку 28.

П л. о щ и н и р і в н я - це площини паралельні до площин проекцій $П_1, П_2, П_3$.

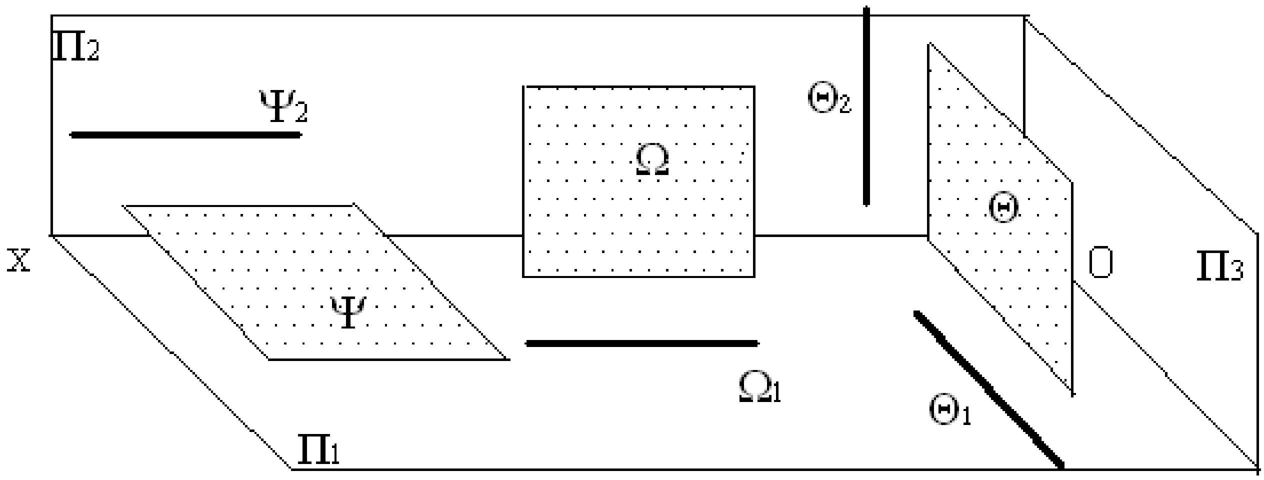


Рис. 28

В відповідності з назвою площин проекцій, яким вони паралельні, ці площини окремого положення отримали наступні назви:

- площина Ψ (псі) – *горизонтальна* площина рівня, так як $\Psi // \Pi_1$;
- площина Ω (омега) – *фронтальна* площина рівня, так як $\Omega // \Pi_2$;
- площина Θ (тета) – *профільна* площина рівня, так як $\Theta // \Pi_3$.

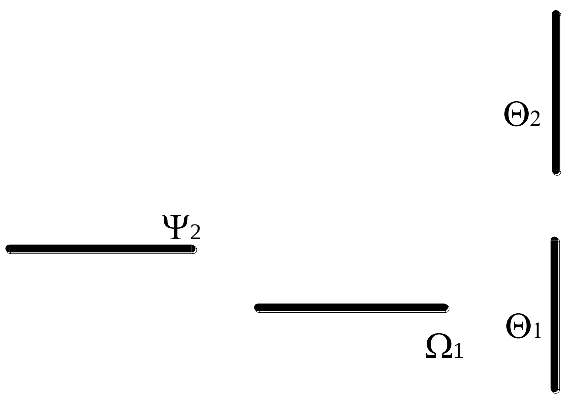


Рис. 29

На комплексних кресленнях (рис.29) ці площини мають неповні зображення, що складаються з горизонтальних і вертикальних прямих.

7. Точки і прямі в площині

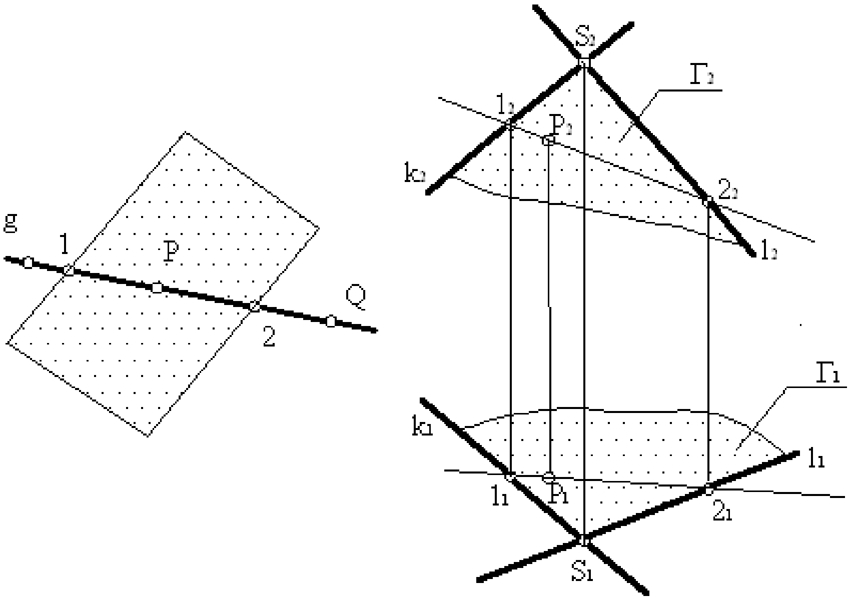
Побудова точок та прямих в площинах окремого положення не викликає затруднення, так як одна з проекцій цих геометричних об'єктів співпадає з однойменною *проекцією-прямою* цих площин.

А як побудувати довільну точку в площині загального положення? Тут ми повинні покликати на допомогу простішу лінію – пряму. Цією допоміжною прямою точка як би прив'язується до площини.

Хай маємо площину загального положення Γ (рис. 30, а). Щоб задати в цій площині точку P, достатньо провести в ній довільну пряму g. Із елементарної геометрії відомо, що пряма належить площині в тому випадку, коли дві точки цієї прямої належать даній площині. Хай це будуть точки 1 і 2 .Залишається задати точку P в любому місці цієї допоміжної прямої g.

Рисунок 30, б представляє розв'язання цієї задачі на комплексному кресленні. Площина загального положення Γ задана двома перетин ними прямими: k і l.

В якості допоміжних прямих площини в задачах часто використовуються прямі рівня – горизонталь h і фронталь f (див. рис.7). І в площинах їх треба будувати не задумуючись. Зрозуміло, що необхідно починати з тієї проекції прямої рівня, яка завжди горизонтальна. На рис.31 в площині загального положення Δ, що задана двома паралельними прямими m і n , побудовані довільні горизонталь h і фронталь f .



а б

Рис. 30

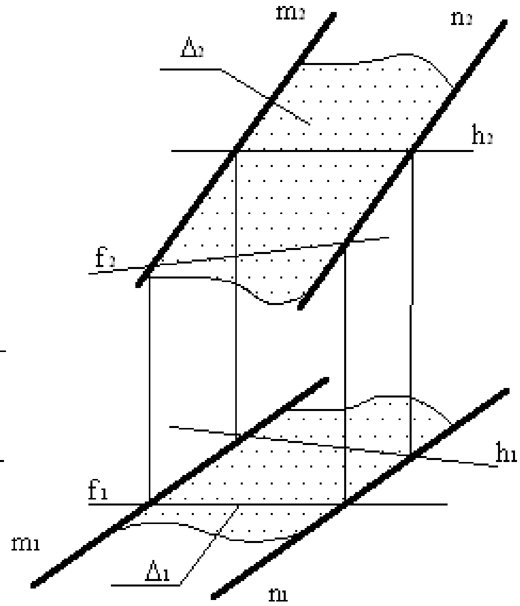
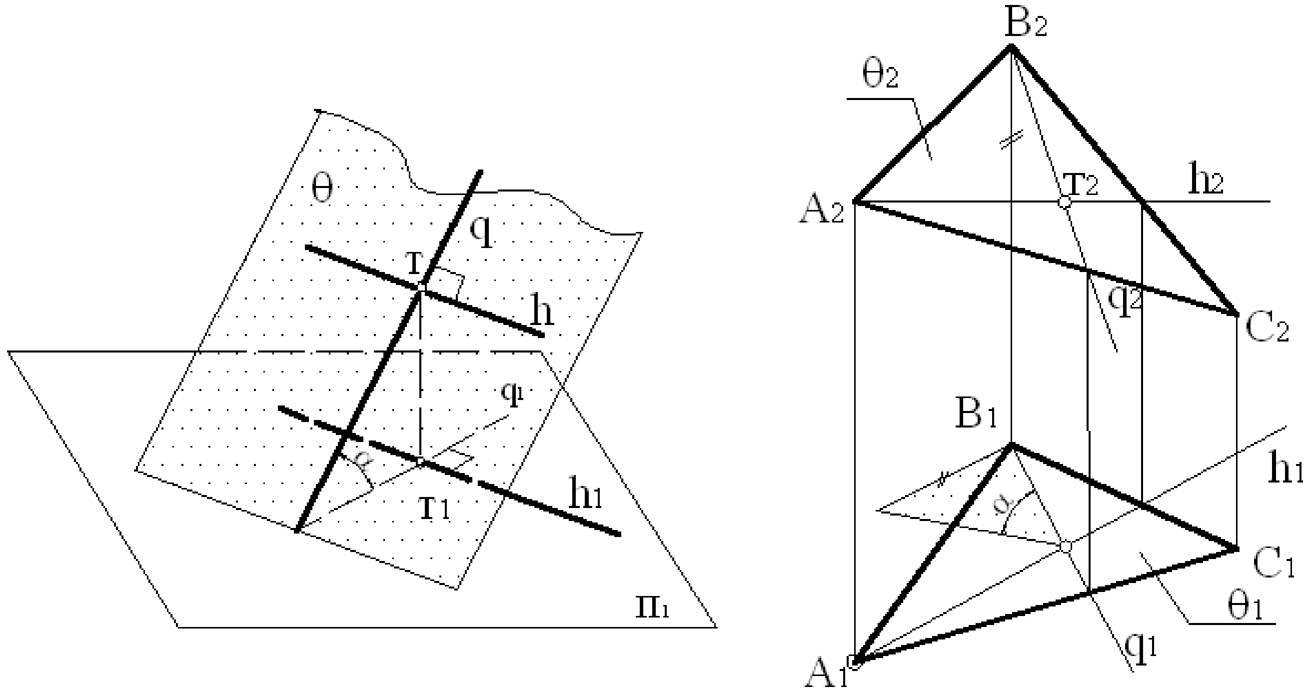


Рис. 31

Існує ще одна цікава пряма в площині – лінія *н а й б і л ь ш о г о н а х и л у* , яка є мірою кута нахилу цієї площини до площини проекцій Π_1. Іноді цю пряму називають лінією *с к а т у* (по такій траєкторії з площини буде котитися шарик).

Якщо в площині загального положення Θ (рис. 32, а) провести пряму *q*, перпендикулярну горизонталі *h* , то із усіх прямих цієї площини вона одна утворює найбільший кут α нахилу до площини проекцій Π_1, тобто вона буде лінією скату. На основі теореми про прямий кут (див. п. 5) можемо стверджувати, що прямий кут , утворений цією лінією скату *q* і горизонталю *h* , зпроектується на площину Π_1 без спотворення. Значить, в горизонтальній проекції повинно бути $q_1 \perp h_1$.

Рис. 32, б представляє задачу побудови лінії скату *q* на комплексному кресленні. Площина загального положення Θ задана її трикутним відсіком. Лінія найбільшого нахилу *q* (лінія скату) проходить через вершину B перпендикулярно горизонталі h. Продовжуючи цю задачу, можна визначити кут нахилу α відрізка BT лінії скату до площини Π_1.Для цього використаємо спосіб прямокутного трикутника (див. # 2). В результаті цей кут α визначає кут нахилу заданої площини Θ до горизонтальної площини проекцій Π_1.



а б

Рис. 32

Для визначення кута β нахилу заданої площини до фронтальної площини проекцій Π_2 необхідно скористатися фронталлю f. В такому випадку необхідно дотриматися перпендикулярності проекцій: $q_2 \perp f_2$. Пряма q вже буде називатися лінією найбільшого нахилу до площини Π_2, лінією скату в такому випадку її називати не можна.

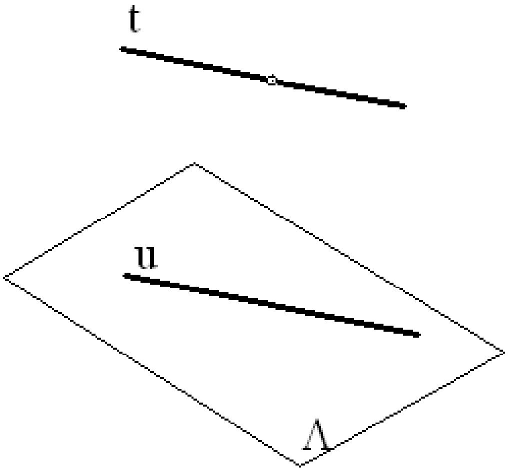
8. Прямі, паралельні та перпендикулярні до площини

Для того, щоб побудувати прямі паралельні та перпендикулярні до площин загального положення, необхідно спочатку згадати два твердження із стереометрії. Ось перше з них:

- Пряма в тому випадку паралельна площині, якщо вона паралельна іншій прямій, що належить цій площині.

Схема на рис. 33 пояснює це твердження. Щоб побудувати в просторі через точку D пряму t, паралельну заданій площині Λ, необхідно спочатку в цій площині провести деяку допоміжну пряму u, а потім вже паралельно їй будують через точку D шукану пряму t.

Так ми і зробимо на комплексному кресленні (рис. 34), де площина загального положення Λ задана паралельними прямими r і s.



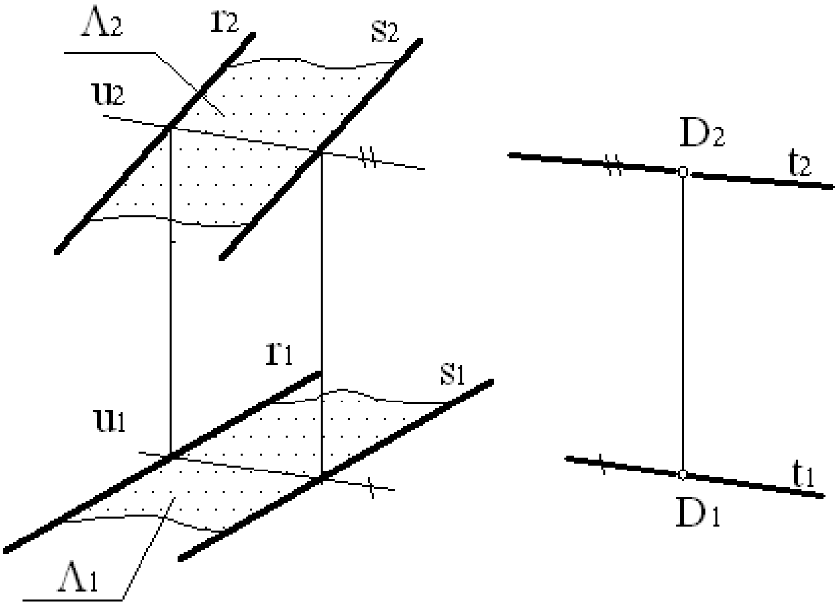


Рис. 33 Рис. 34

А зараз згадаємо друге твердження з стереометрії:

- Пряма в тому випадку перпендикулярна площині, якщо вона перпендикулярна двом перетинним прямим цієї площини.

Схема на рис. 35, а пояснює це твердження. Пряма n являється перпендикуляром до площини P, так як $n \perp a$ і $n \perp b$. Але в якості пари перетинних прямих зручніше брати не довільні прямі a і b, а прямі рівня – горизонталь h і фронталь f (рис. 35, б). Тому що на основі теореми о проекції прямого кута (див. п.5) прямий кут між горизонталлю h і шуканим перпендикуляром n (прямою загального положення) повинен зпроектуватися на площину Π_1 в натуральну величину, тобто $n_1 \perp h_1$.

Точно таким же чином прямий кут між фронталью f і перпендикуляром n зпроектується в натуральну величину на площину проекцій Π_2 , тобто $n_2 \perp f_2$.

Перейдемо до комплексного креслення (рис. 35, в), на якому необхідно через точку S провести до площини P , що задана перетинними прямими c і d , перпендикуляр n . Для цього будуємо в площині P довільні горизонталь h і фронталь f , а потім через точку S проводимо перпендикуляр n , знаючи, що $n_1 \perp h_1$ і $n_2 \perp f_2$.

Тут необхідно підкреслити суттєву деталь – для побудови перпендикуляра до площини прямі рівня проводяться в любому її місці. Вони потрібні для визначення напрямів проекцій перпендикуляра.

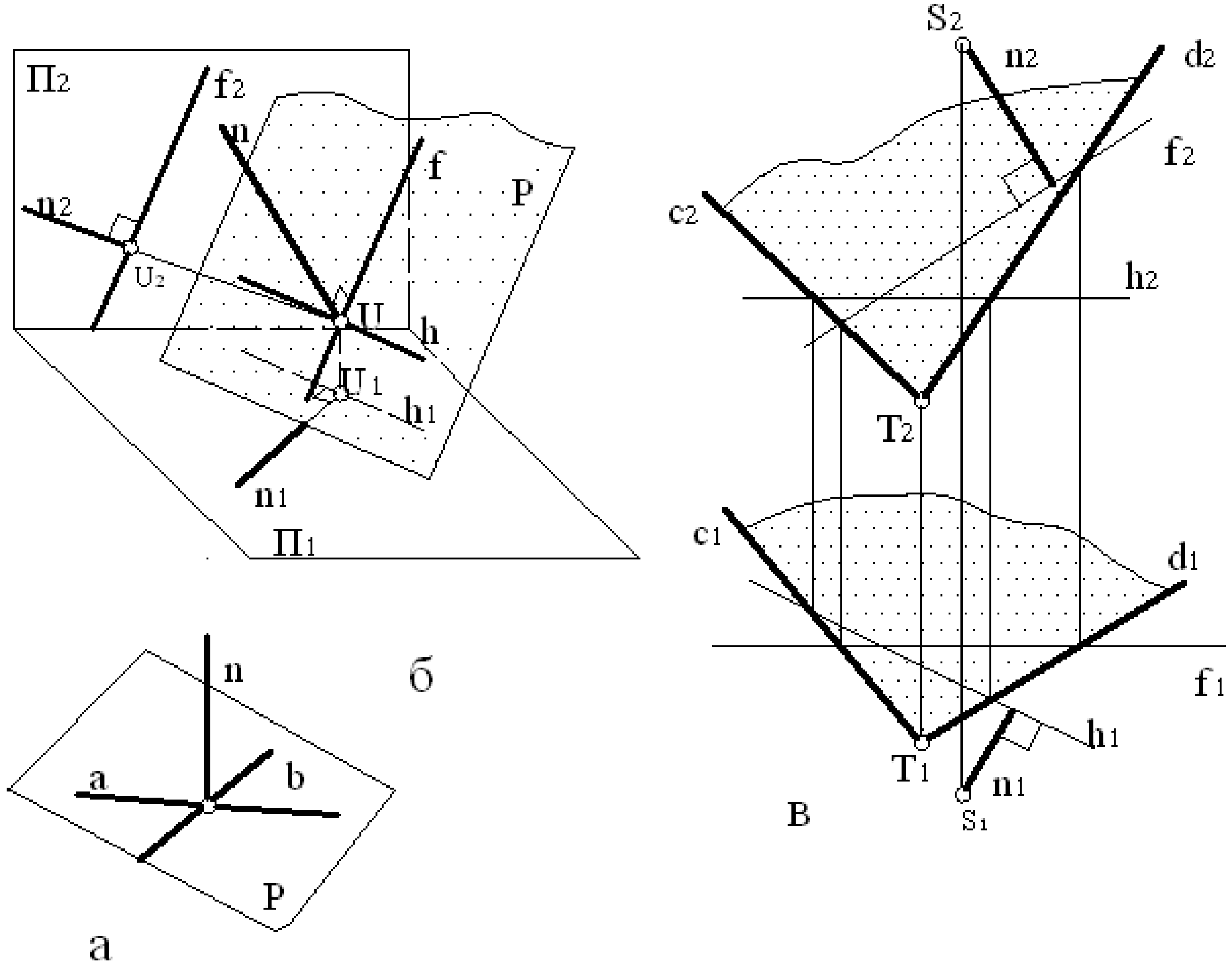


Рис. 35

9. Прямі , що перетинаються з площиною

Прямі , не паралельні площині, перетинаються з нею, тобто мають загальну точку. Тому і почнемо з питання побудови їх точки перетину. Тут можливі наступні варіанти перетину:

1. Пряма проектуюча – площина загального положення.
2. Пряма загального положення – площина окремого положення.
3. Пряма загального положення – площина загального положення.

Два перших варіанта взаємо перетину геометричних образів достатньо прості для розв'язання задач, і читачу рекомендується самостійно скласти їх комплексні креслення , а потім і розв'язати ці задачі. Ми же розглянемо третій варіант, тобто загальний випадок взаємо перетину прямої та площини.

Спочатку звернемося до схеми на рис. 36, а.

Задачу на побудову точок перетину прямої з площиною, а в подальшому і з любою поверхнею, можна умовно поділити на три частини:

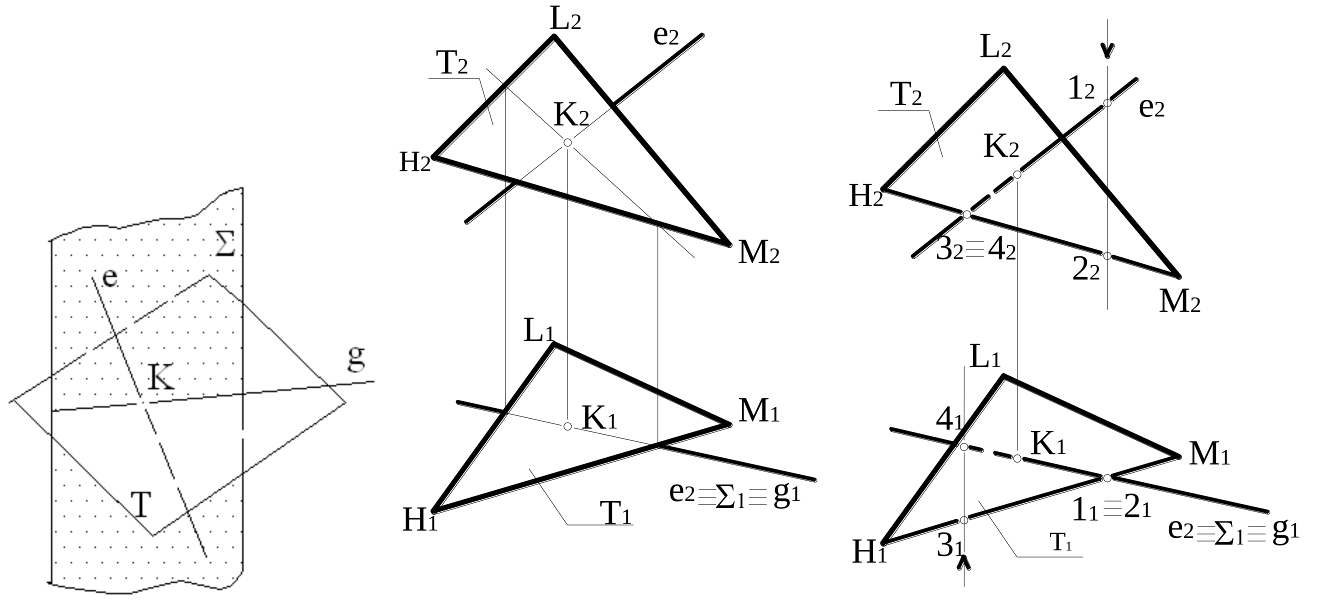
1.Задану пряму е заключаємо в допоміжну площину Σ *(для зручності рішення ця площина повинна бути окремого положення).*

2. Побудуємо лінію перетину допоміжної площини Σ *з заданою площиною Т (в нашому випадку - пряму g).*

3.Точка перетину побудованої лінії перетину g з заданою прямою е - шукана точка К.

Так як допоміжна площина Σ явилася як би посередником між прямою *е* і площиною *Т* в визначенні їх загального елементу (точки *К*) , такі площини будемо називати площинами – *п о с е р е д н и к а м и*.

Перейдемо до рішення задач на комплексному кресленню (рис. 36, б), де площина загального положення *Т* задана її трикутним відсіком *HLM* .Відповідно наведеної вище схеми, заключаємо пряму *е* в площину-посередник Σ (горизонтально - проектуючу). Потім будуємо лінію перетину площин Σ і *Т* (пряму *g*). В завершення визначимо шукану точку *К* . Вона і буде точкою перетину заданих прямої *е* і площини *Т*.



а б в

Рис. 36

Тепер, вважаючи площину *T* непрозорою , ми повинні визначити видимість прямої *e*. Почнемо з горизонтальної проекції. Виділяємо пару перехресних прямих , якими являються, наприклад, задана пряма *e* і сторона *HM* трикутного відсіку. На них знаходяться конкуруючи точки *1* і *2*. При погляді зверху точка *1* , яка знаходиться на заданій прямій *e*, виграє в конкуренції на видимість. Значить, пряма *e* закриває собою сторону *HM* в горизонтальній проекції. Обводимо ділянку прямої *e* справа від точки *K* лінією видимого контуру. Невидиму ділянку прямої зліва обводимо штриховою лінією невидимого контуру.

Для визначення видимості прямої в фронтальній проекції також виділяємо пару перехресних прямих, наприклад, ті ж самі задані пряму *e* і сторону *HM* трикутного відсіку. На них знаходяться конкуруючи точки *3* і *4*.

При виді спереду точка 3 буде видимою і закриває собою точку *4*. Значить, сторона *HM* відсіку, на якій знаходиться точка *3*, закриває собою пряму *e*. Обводимо ділянку прямої *e* зліва від точки *K* штриховою лінією. Справа від точки *K* пряма *e* видима.

10. Паралельність і перпендикулярність двох площин

Спочатку розглянемо паралельність площин. Згадаємо наступне твердження з стереометрії:

- Дві площини в тому випадку паралельні, якщо дві перетинні прямі однієї площини відповідно паралельні двом перетинним прямим другої площини.

Схема на рис. 37, а пояснює це твердження. Площини ψ і Ω паралельні одна одній, так як пара перетинних прямих m і n площини ψ відповідно паралельні другій парі перетинних прямих k і l, що знаходяться в площині Ω.

Перейдемо до комплексного креслення (рис.37, б). Площина загального положення ψ задана відсіком у вигляді паралелограма $NPQR$. Через точку S простору побудувати площину Ω, паралельну заданій площині ψ.

Для рішення задачі необхідно мати в площині ψ пару прямих, що перетинаються . Хай це будуть прямі при вершині N, тобто сторони відсіку NP і NR. Тоді через точку S будуємо прямі r і t, відповідно паралельні відрізкам NP і NR. Ці перетинні прямі r і t визначають шукану площину Ω, що проходить через точку S і паралельна заданій площині ψ .

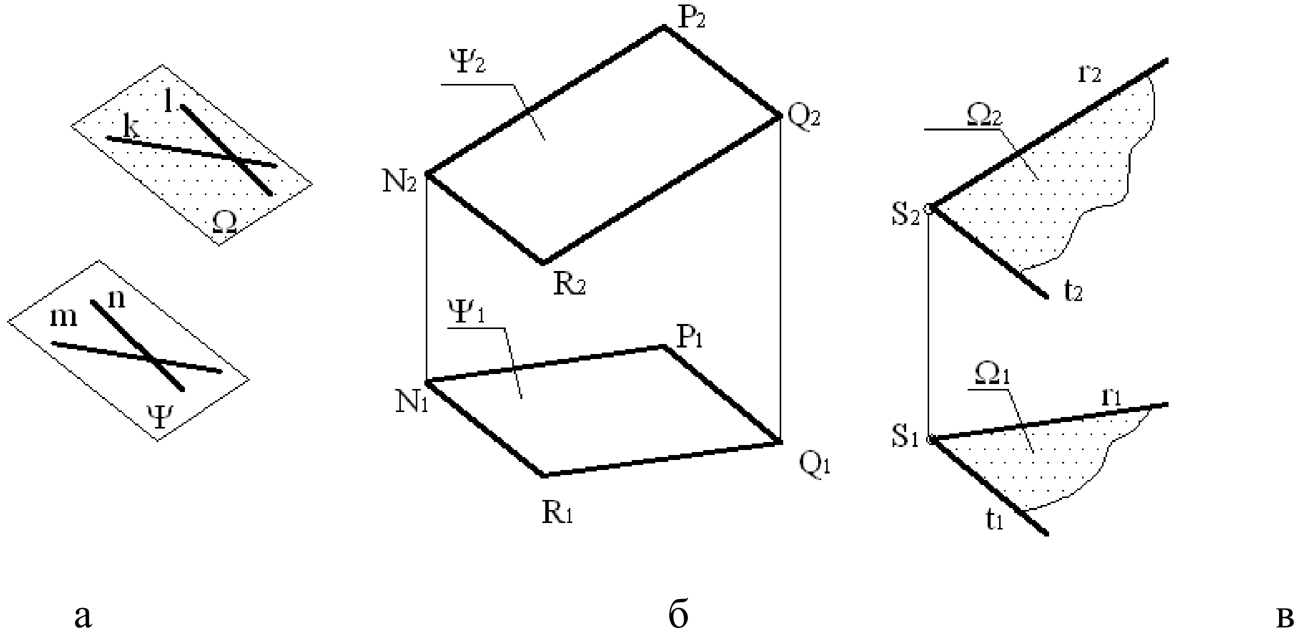


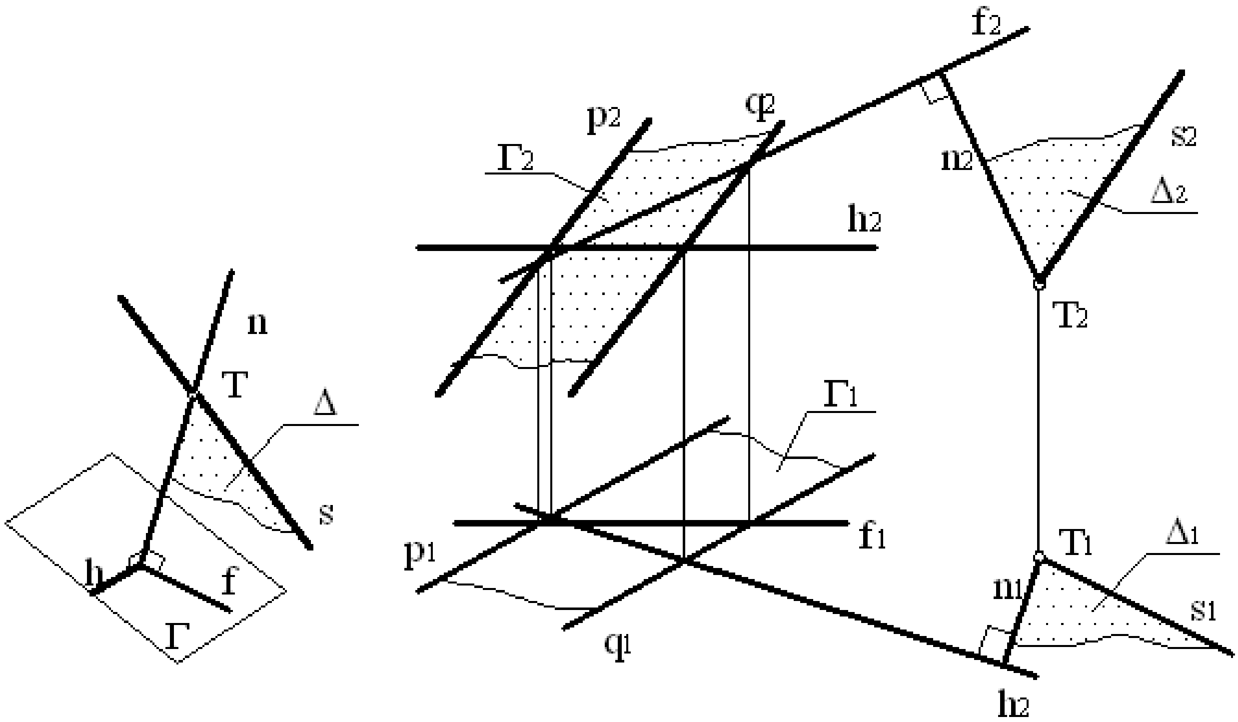
Рис. 37

Тепер розглянемо взаємну перпендикулярність двох площин. Для цього згадаємо друге твердження з стереометрії:

- Дві площини в тому випадку взаємно перпендикулярні, якщо одна з них проходить через перпендикуляр до іншої.

На схемі рис. 38, а площина Δ, яка проходить через точку *T*, перпендикулярна площині *Г*, так як вона проходить через перпендикуляр *n* до площини *Г*.

Розв'яжемо цю задачу на комплексному кресленні (рис. 38, б). Площина загального положення *Г* задана паралельними прямими *p* і *q*. Через точку *T* необхідно побудувати площину Δ, перпендикулярну до заданої площини *Г*. Шукана площина Δ повинна проходить через перпендикуляр *n* до заданої. Тому спочатку через точку *T* будуємо перпендикуляр *n* за допомогою горизонталі *h* і фронталі *f*, які проводимо в довільному місці площини *Г*. Дотримуємося умови, щоб $n_1 \perp h_1$ і $n_2 \perp f_2$.



а б

Рис. 38

Так як через перпендикуляр *n* і точку *T* на ньому можна провести велику кількість площин, то за допомогою деякої прямої *s* ми визначаємо одну конкретну площину Δ, яка перпендикулярна до заданої площини *Г* і проходить через точку *T* .

◈ *С а м о с т і й н а р о б о т а*

Рекомендується розглянути наступні питання:

а) взаємно паралельні площини окремого положення;

б) взаємно перпендикулярні площини окремого положення.

Складти комплексні креслення до них.

11. Площини, що перетинаються

Тут можливі наступні варіанти взаємо перетину:

1.Обидві площини окремого положення.

2.Одна площина загального положення, друга – окремого.

3.Обидві площини загального положення.

Два перших випадки достатньо прості. Ми розглянемо загальний випадок.

Звернемося до схеми на рис. 39, на якій своїми відсіками задані площини загального положення Θ і Λ. Вони непаралельні і при своєму продовженні повинні перетнутися по якійсь прямій u . Вона уявляє собою геометричне місце точок, спільних для заданих площин Θ і Λ.Отже, для побудови цієї прямої достатньо мати мінімум дві точки, спільні для площин Θ і Λ.

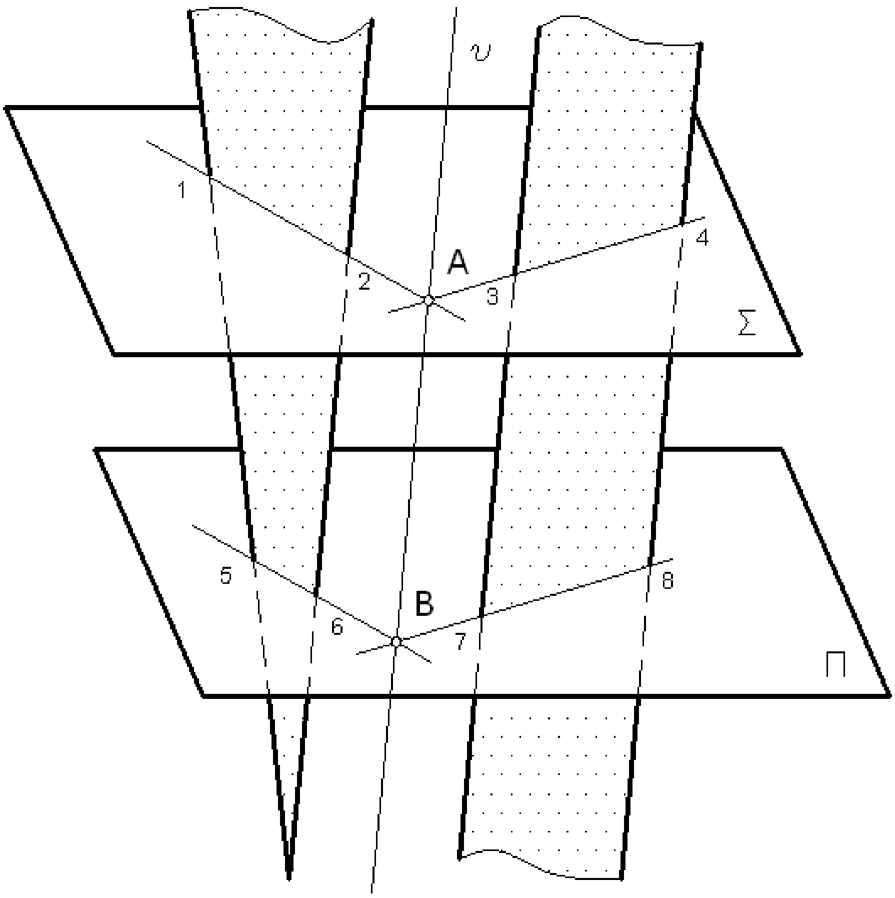


Рис. 39

Першу з них, тобто точку *A*, отримуємо за допомогою площини-посередника *P*, яка перетинає площину Θ по прямій *1-2*, а площину Λ - по прямій *3-4*. Ці дві прямі, в свою чергу, знаходяться в одній площині *P* і перетинаються в точці *A*. Аналогічно будуємо другу спільну точку *B* за допомогою площини-посередника Σ,яка перетинає площину Θ по прямій *5-6*, а площину Λ - по прямій *7-8*. Ці дві прямі при взаємному перетині дають другу спільну точку *B*.

На рис. 40 розглянута задача розв'язана на комплексному кресленні в відповідності до вищерозглянутої схеми. В якості січних площин-посередників зручніше вибирати або проектуючи площини, або площини рівня. Паралельність їх не обов'язкова.

Якщо плоскі відсіки знаходяться в безпосередньому взаємо перетині, то використання таких площин-посередників не обов'язкове.

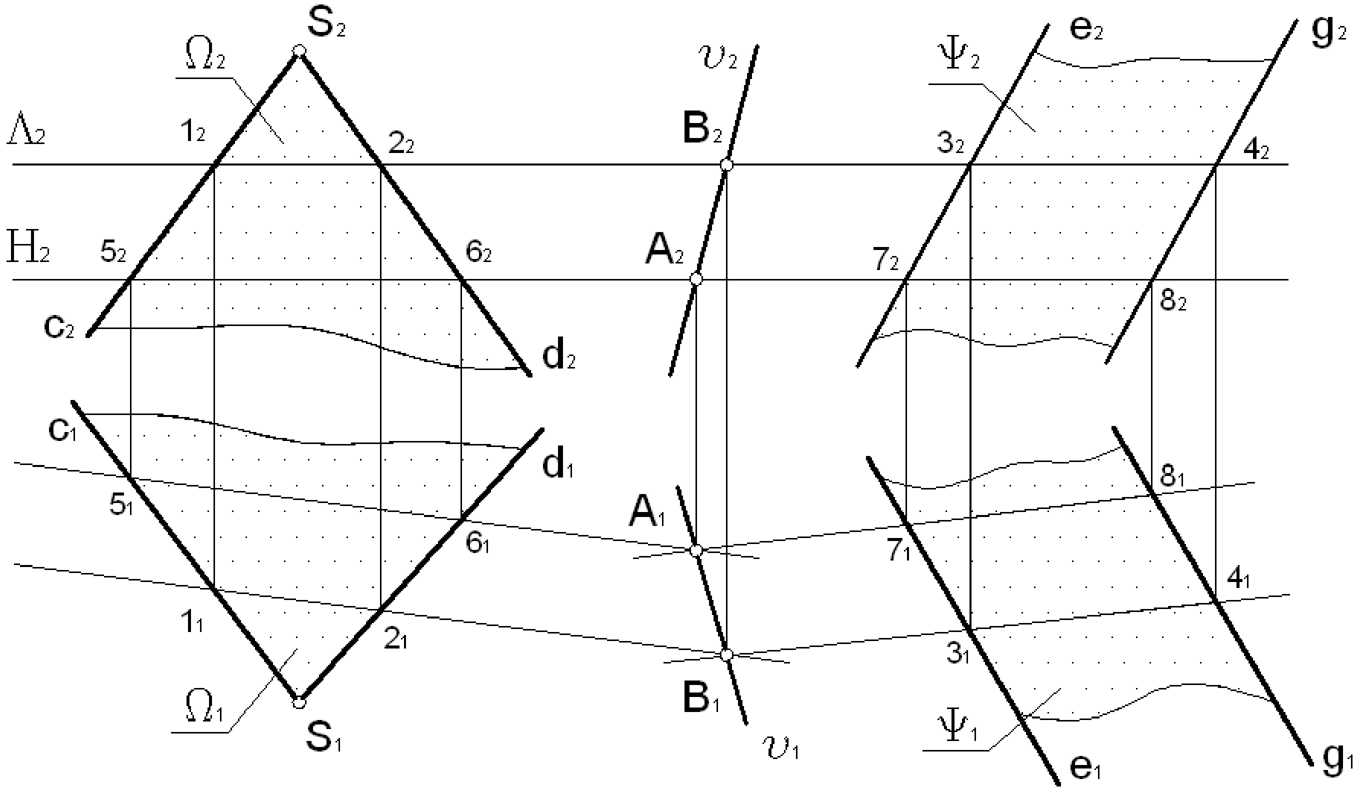


Рис.40

ПЕРЕТВОРЕННЯ КОМПЛЕКСНОГО КРЕСЛЕННЯ

12. Мета і способи перетворення креслення

В інженерній практиці при зображенні якого-небудь оригінала на комплексному кресленні вважають за краще так розміщати оригінал по відношенню до площин проекцій Π_1, Π_2, Π_3, щоб найбільш важливі його елементи розташовувалися на прямих або площинах окремого положення. Зрозуміло, що не завжди удається виконати цю умову по відношенню до усіх елементів оригінала. І тоді виникають задачі вимірювання відрізків та кутів, а також визначення натуральної форми плоских фігур тих елементів оригінала, які розташовані невдало по відношенню до площин проекцій, тобто елементів, які знаходяться на прямих або площинах загального положення.

Бажання спростити рішення вказаних задач приводить до необхідності такого перетворення комплексного креслення , при якому прямі та площини загального положення, які містять елементи оригіналу, що нас цікавлять, перейшли б відповідно в прямі і площини окремого положення.

Існують різноманітні способи перетворення. Розглянемо два, які найбільш часто використовуються в практиці:

1.Зміна положення геометричного образу по відношенню до площин проекцій (обертання навколо проектуючих прямих і прямих рівня).

2. Зміна положення площин проекцій по відношенню до геометричного образу(заміна площин проекцій).

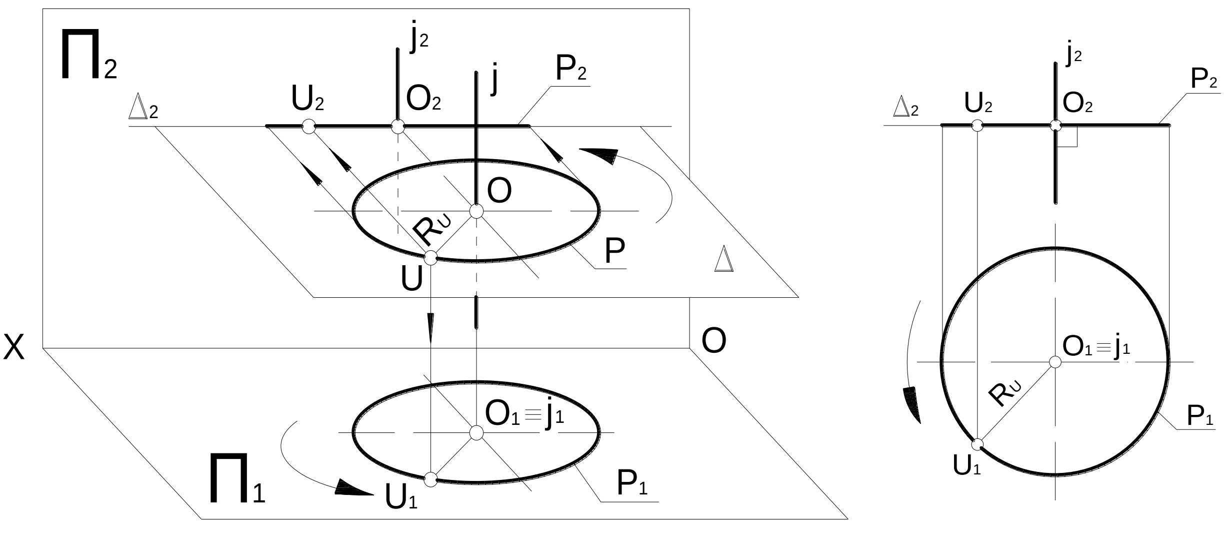
13.Обертання навколо проектуючих прямих

Обертання широко використовується в інженерної практиці при дослідженні траєкторії точок елементів механізмів та машин, які обертаються. Головне в процесі обертання при вивченні його на кресленні – це чітке уявлення траєкторії руху точки в просторі і в проекціях. Кожному відомо, що траєкторія точки , яка обертається навколо нерухомої осі, є окружність.

І якщо вісь обертання перпендикулярна одній з площин проекцій, тобто являється проектуючою прямою, то траєкторія точки, що обертається, буде знаходиться в відповідній площині рівня.

На рис. 41 вісь обертання i являється горизонтально-проектуючою прямою, а траєкторія-коло p точки U разом з її центром обертання O належить горизонтальній площині рівня Δ. Радіусом обертання точки U являється відрізок OU,тобто $R_v = OU$.

Спроектуємо ортогонально траєкторію повного оберта точки U на площини проекцій Π_2 і Π_1. В результаті на комплексному кресленні (рис. 41, б) фронтальна проекція траєкторії p представляє собою горизонтальний відрізок прямої p_2 , по довжині рівний діаметру, а горизонтальна проекція p_1 - коло p в натуральну величину.



а б

Рис. 41

При повороті точки або іншого геометричного образу на потрібний кут необхідно вказувати напрям повороту, інакше задача буде мати два рішення.

Наприклад, на рис. 42 задана точка T повернута навколо профільно-проектуючої вісі i на кут 60^0 по руху часової стрілки (якщо дивитися на площину Π_3 в напряму вісі i).

Спочатку в усіх трьох проекціях намічається траєкторія точки T, яка обертається. Вона знаходиться в профільній площині рівня θ, на горизонтальній і фронтальній проекціях співпадає з вертикальною лінією зв'язку , а на профільній зображається в натуральну величину, тобто дугою окружності радіусом $R_T = i_3 T_3$.

Залишається повернути на потрібний кут в вказаному напрямі радіус R_T і зафіксувати нове положення точки T, яке відмічається однією горизонтальною рискою над літерним позначенням, тобто

$\bar{T}_3$

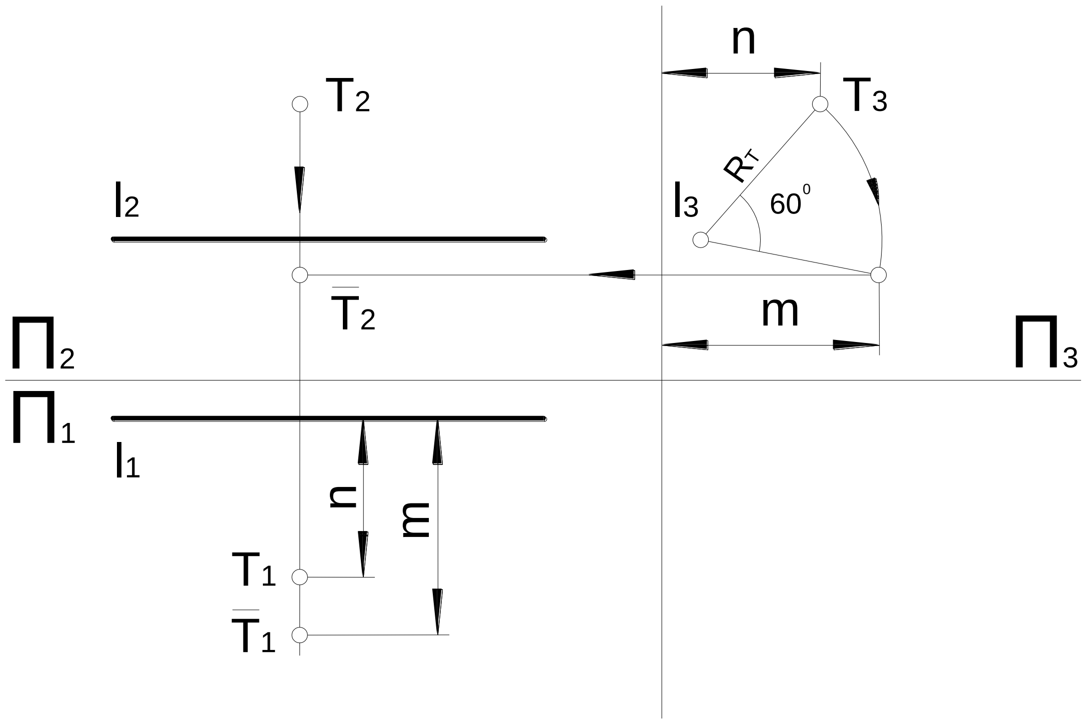


Рис.42

Потім по законам побудови профільної проекції визначаємо інші проекції $\bar{T}_2$ і $\bar{T}_1$ нового положення точки T після її повороту на кут 60^0.

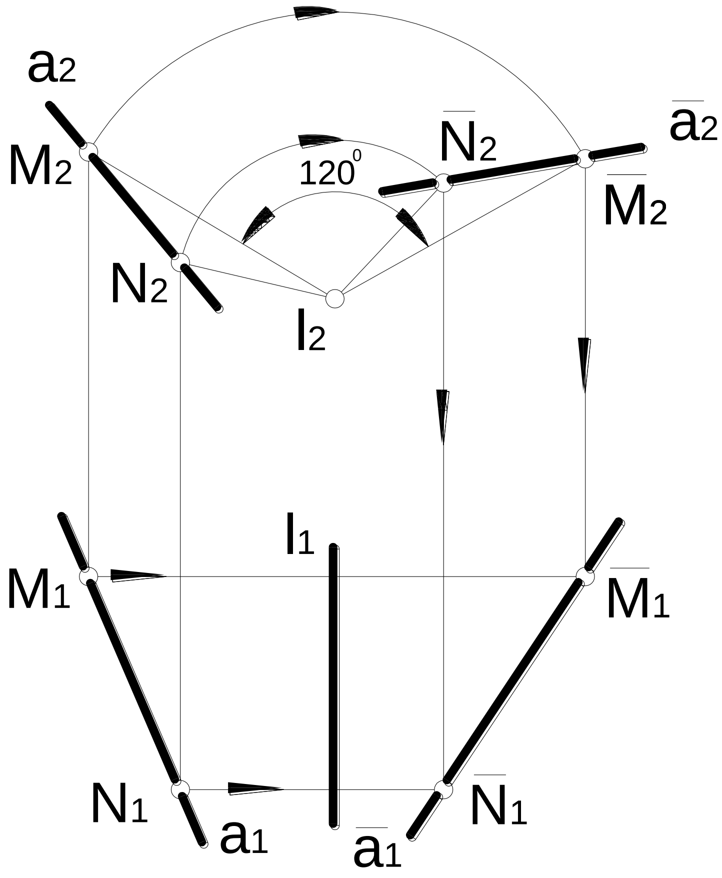


Рис. 43

Для повороту прямої на потрібний кут достатньо повернути на цей кут кожну з її двох точок. На рис.43 пряма *a* повернута на кут 120^0 по руху годинникової стрілки навколо фронтально-проектуючої прямої i . Тут також необхідно починати з нанесення в тонких лініях траєкторій обертання точок *M* і *N*, які знаходяться в фронтальних площинах рівня Λ і Р.

Значить, в горизонтальній проекції це будуть горизонтальні прямі, а в фронтальній – дуги окружності.

Повернувши кожен з радіусів R_M і R_N на кут 120^0 в заданому напрямі , фіксуємо нові положення $\bar{M}_2$ і $\bar{N}_2$ точок *M* і *N*, а потім за допомогою ліній зв’язку визначаємо проекції $\bar{M}_1$ і $\bar{N}_1$.

З’єднавши нові однойменні проекції точок прямими лініями, отримаємо проекції $\bar{a}_2$ і $\bar{a}_1$ нового положення прямої *a*, повернутої на кут 120^0.

Для повороту площини на потрібний кут необхідно повернути на цей кут три її точки, які не лежать на одній прямій.

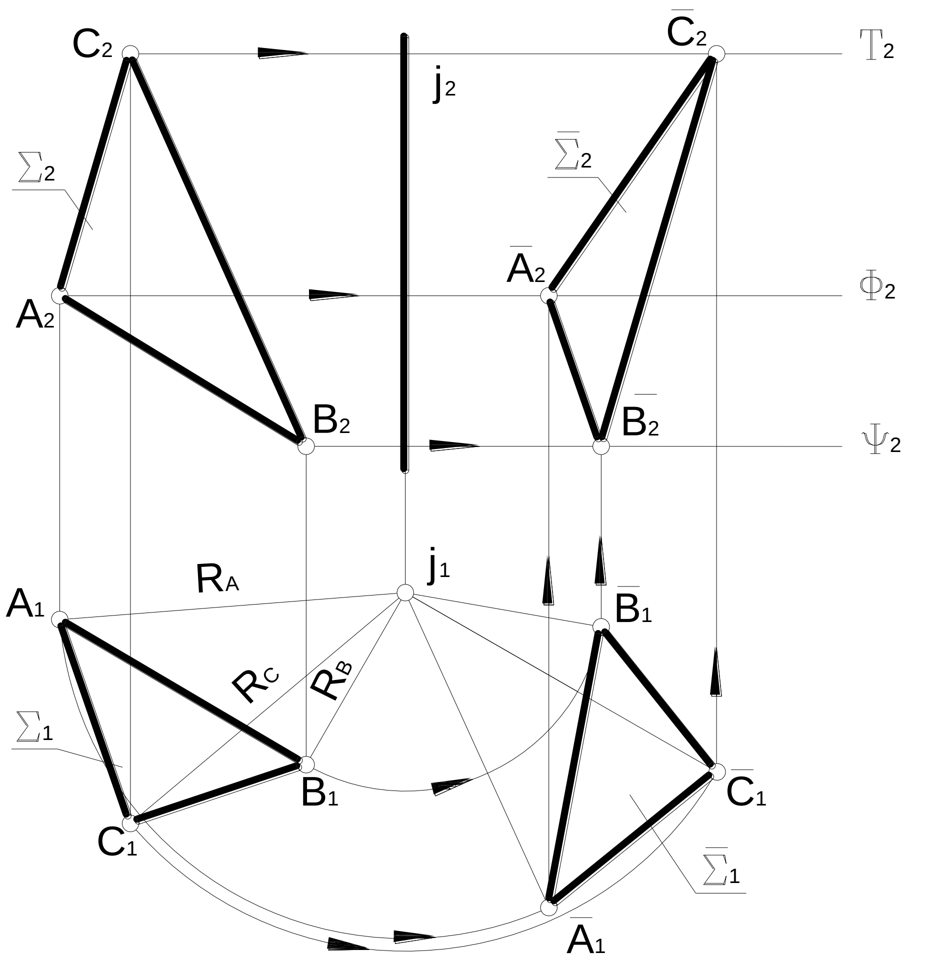
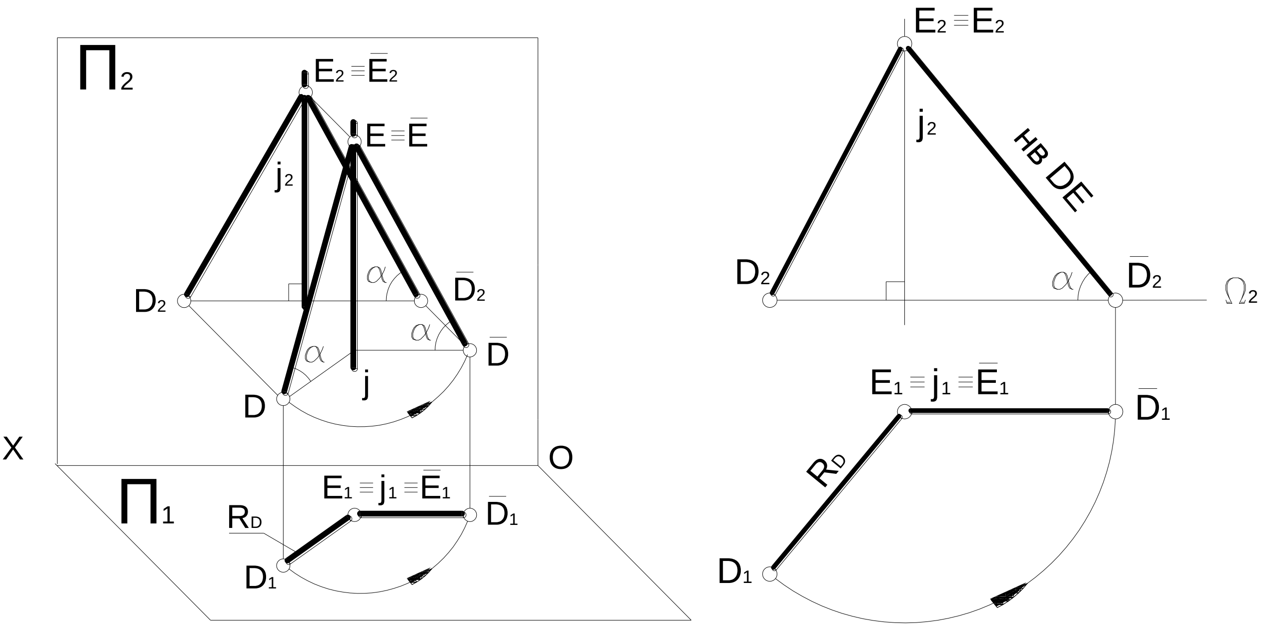


Рис. 44

На рис. 44 площина Σ, задана трикутним відсіком *ABC*, повернута на кут 90^0 проти руху годинникової стрілки навколо горизонтально-проектуючої вісі *i*. Попередніх прикладів достатньо , щоб зрозуміти хід розв'язання цієї задачі.

Тепер використаємо обертання для визначення натуральної величини відрізку прямої загального положення. Спочатку звернемося до просторової моделі задачі (рис. 45, а).

Щоб відрізок *DE* зпроектувався в натуральну величину, його необхідно повернути до положення прямої рівня – горизонталі або фронталі. Для зручності розв'язання задачі проведемо вісь обертання через один із кінців відрізку (наприклад, через точку *E*). Хай віссю обертання буде горизонтально-проектуюча пряма *i*. Повернувши відрізок DE навколо вісі i до положення фронталі $\bar{D}\bar{E}$ і спроектувавши його ортогонально на площину Π_2, отримаємо натуральну величину відрізку DE. І так як під час руху відрізку DE навколо вісі i кут α нахилу до площини Π_1 не мінявся, то одночасно отримуємо його натуральну величину.



а б

Рис. 45

На комплексному кресленні (рис. 45, б) спочатку намічаємо траєкторію обертання точки D. Радіусом обертання точки D є сама горизонтальна проекція D_1E_1 відрізку.

Щоб відрізок зайняв положення фронталі, треба його горизонтальну проекцію повернути до горизонтального положення. Точка D при цьому оберталася в горизонтальній площині рівня Ω. За допомогою ліній зв'язку визначаємо проекцію $\bar{D}_2$ нового положення точки D. Точка E не змінила свого положення, так як вона знаходиться на вісі обертання i. З'єднуємо її прямою лінією з новим положенням точки D.

Таким чином, ми перетворили креслення, тобто отримали нові, додаткові до основних проекції $\bar{D}_1\bar{E}_1$ і $\bar{D}_2\bar{E}_2$ відрізку, які утворюють нове комплексне креслення. На цьому кресленні пряма DE загального положення стала прямою рівня. Значить, нова проекція $\bar{D}_2\bar{E}_2$ визначає натуральну величину відрізку DE, а кут α - натуральну величину кута нахилу відрізка DE до горизонтальної площини проекцій Π_1. Раніше ці параметри прямої загального положення ми визначали способом прямокутного трикутника.

14. Плоско паралельне переміщення. Чотири основні способи перетворення

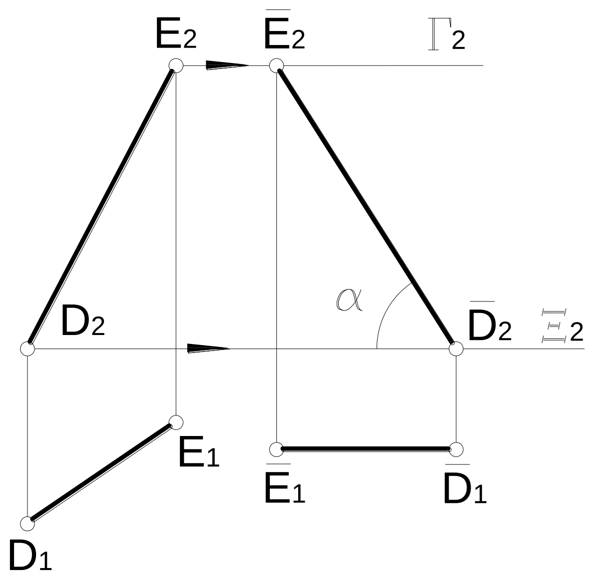
Перетворення креслення обертанням геометричних об'єктів з вказівкою проектуючих осей має суттєву незручність, яка заключається в тому, що нові, додаткові проекції або примикають до основних, або налягають на них. Це затрудняє як сам процес розв'язання задачі, так і читання вже розв'язаних задач. Цю незручність усуває так назване плоско паралельне переміщення. Сама назва цього способу перетворення пояснює, що переміщення елементів геометричних образів проходить в паралельних площинах.

Повернемося до рис. 45, б і звернемо увагу на наступне. Горизонтальна проекція $\bar{D}_1\bar{E}_1$ відрізку DE при його обертанні навколо вертикальної вісі не змінюється по довжині, так як не змінюється кут α нахилу відрізка до площини проекцій Π_1 (рис. 45, а).

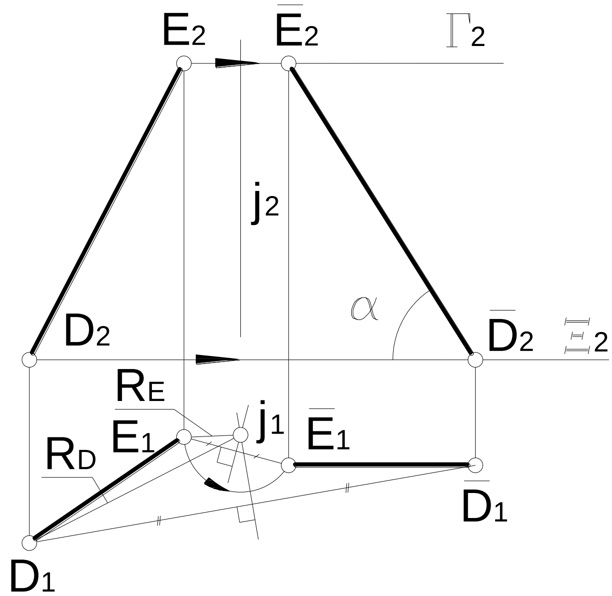
Використовуючи цю особливість, спробуємо друге положення горизонтальної проекції відрізку (після його повороту) зразу помістити в любому вільному полі креслення, не міняючи довжини проекції, тобто $\bar{D}_1\bar{E}_1 = D_1E_1$ (рис. 46, а).

Це значить, що відбулося таке переміщення відрізку DE в його нове положення $\bar{D}\bar{E}$, при якому кут α його нахилу до площини Π_1 не мінявся , а точки D і E переміщувались відповідно в паралельних площинах рівня Ξ і Γ(горизонтальних). За допомогою ліній зв'язку будуємо фронтальну проекцію $\bar{D}_2\bar{E}_2$ нового положення відрізку DE.

Таким чином, перетворення креслення здійснено способом плоско паралельного переміщення. Тут відбулося обертання відрізку навколо відсутньої на кресленні вертикальної вісі (“неявної ” вісі).



а



б

Рис. 46

При бажанні можна визначити положення цієї “неявної ” вісі обертання, а також вказати горизонтальну проекцію дуг кіл, по яким переміщалися точки D і E (рис. 46, б). З'єднавши однойменні горизонтальні проекції точок прямими і побудувавши до середини відрізків $D_1\bar{D}_1$ і $E_1\bar{E}_1$ перпендикуляри, ми знаходимо в точці i_1 їх перетину проекцію тій самої “неявної ” вісі обертання, навколо якої відбулося обертання відрізку DE .Тепер, маючи радіуси обертання R_D і R_E точок D і E , можемо побудувати горизонтальні проекції траєкторій-дуг точок, які обертаються.

Але необхідності в таких побудовах немає. Треба тільки зрозуміти, що плоско паралельне переміщення є обертання навколо проектуючої прямої , яка не вказана на кресленні. І головне тут – тільки результат руху, а не сам процес безперервної зміни геометричного образу в просторі.

Такий вид обертання цікавить тим, що дає можливість в процесі перетворення відділити нове комплексне креслення від старого, основного. Зменшується також кількість ліній на кресленні (відсутні вісі обертання і проекції-дуги). Все це робить креслення більш чітким та зрозумілим.

В основі розв’язання багатьох задач нарисної геометрії знаходяться наступні чотири задачі перетворення креслення.

1.Перетворення прямої загального положення в пряму рівня.

2. Перетворення прямої рівня в проектуючи пряму.

3.Перетворення площини загального положення в проектуючи площину.

4.Перетворення проектуючої площини в площину рівня.

П е р ш у основну задачу перетворення ми вже розв’язали (див. рис. 46), тобто способом плоско паралельного переміщення перетворили пряму загального положення в пряму рівня – фронталь.

Переходимо до розв’язання *д р у г о ї* основної перетворення прямої рівня в проектуючи пряму. Розв’яжемо цю задачу як продовження попередньої. В подальшому буде часто виникати необхідність в об’єднанні цих двох задач (при перетворенні прямої загального положення в проектуючи пряму).

Щоб пряма рівня стала на новому комплексному кресленні проектуючою прямою, треба її проекцію – натуральну величину - розташувати вертикально.

На рис. 47 маємо фронталь $\bar{D}\bar{E}$ в її початковому положенні. Не змінюючи довжини проекції $\bar{D}_2\bar{E}_2$, розташовуємо її вертикально в вільному полі креслення. Нове положення відрізку відмічають дві горизонтальні риски над їх літерним позначенням ($\bar{\bar{D}}_2\bar{\bar{E}}_2$).

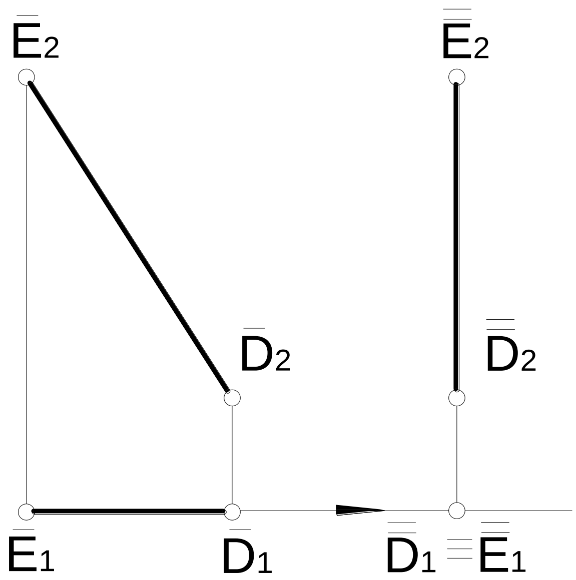


Рис. 47

Обидва кінця відрізку, тобто точки $\bar{D}$ і $\bar{E}$, переміщувались в одній фронтальній площині рівня Δ, а “неявною ” віссю обертання була фронтально-проектуюча пряма. Її місце розташування і фронтальні проекції траєкторій-дуг нас не цікавлять. За допомогою ліній зв’язку визначаємо нову горизонтальну проекцію $\bar{\bar{D}}_1\bar{\bar{E}}_1$ відрізку, яка зображається точкою $\bar{\bar{D}}_1 \equiv \bar{\bar{E}}_1$.

Таким чином, в результаті перетворення (плоско паралельного переміщення) ми отримали нове комплексне креслення, на якому пряма рівня стала проектуючою прямою.

Т р е т я основна задача полягає в перетворенні площини загального положення в проектуючи площину.

Перетворюючи пряму рівня деякої площини в проектуючи пряму, ми тим самим перетворюємо в проектуючи і саму площину (рис. 48).

Почнемо з горизонталі. На комплексному кресленні (рис.49) задана площина загального положення θ своїм трикутним відсіком *NPQ*. Побудуємо в ній горизонталь h і приведемо горизонтальну проекцію відсіку, не міняючи його форму та розміри, в таке положення, щоб проекція – натуральна величина h його горизонталі стала вертикальною. Тому і почнемо побудову з горизонталі. На вільному полі креслення будуємо нове положення горизонталі – вертикальну пряму $\bar{h}_1$, а потім за допомогою засічок із точок Q і O будуємо вершини N і P відсіку таким чином, щоб нова проекція $\bar{N}_1 \bar{P}_1 \bar{Q}_1$ залишилася рівною проекції $N_1 P_1 Q_1$ початкового положення відсіку.

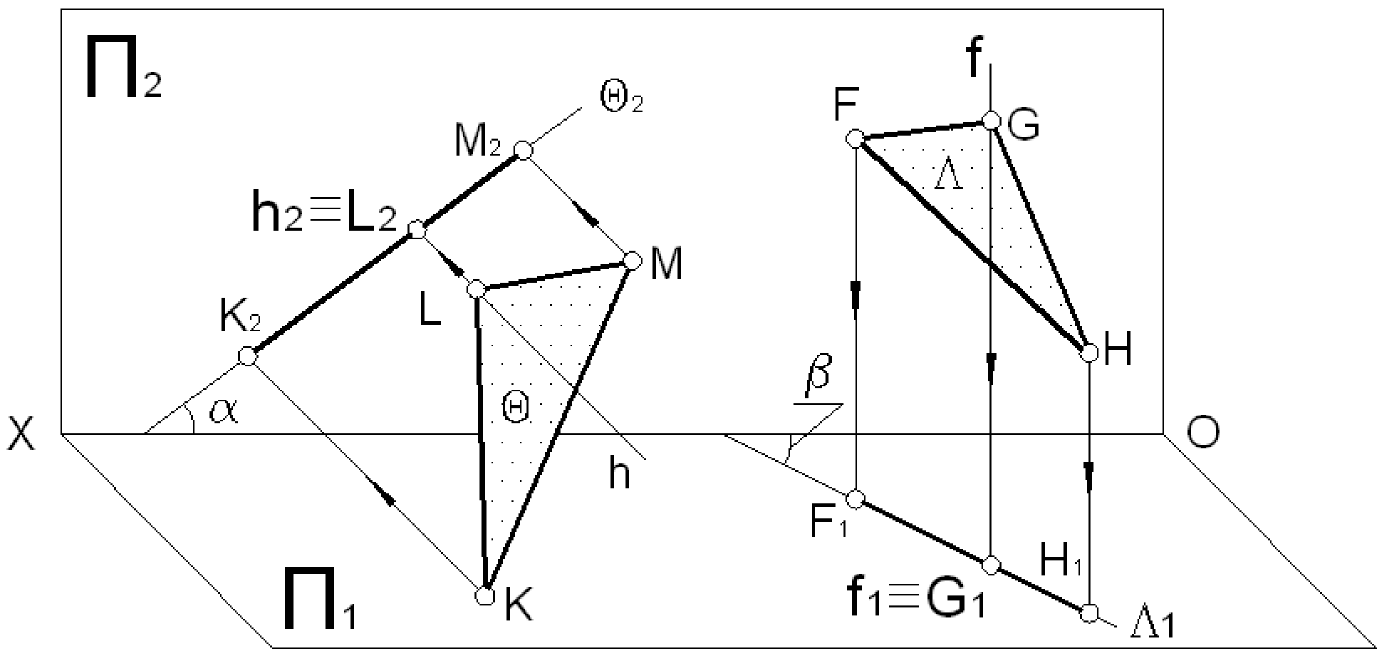


Рис. 48

При цьому точки N, Q , P (вершини відсіку) переміщалися в відповідних площинах рівня Σ,Φ,Τ. За допомогою ліній зв'язку визначаємо нову фронтальну проекцію $\bar{N}_2 \bar{P}_2 \bar{Q}_2$ відсіку. Вона повинна бути прямою лінією. В результаті отримуємо нове комплексне креслення, на якому площина загального положення θ стала фронтально-проектуючою.

Так як кут α нахилу площини θ до площини проекцій Π_1 (див. рис. 49) при переміщенні, тобто обертанні навколо “неявної ” горизонтально-проектуючої вісі, залишався незмінним, можна стверджувати, що даним перетворенням ми визначили натуральну величину цього кута.

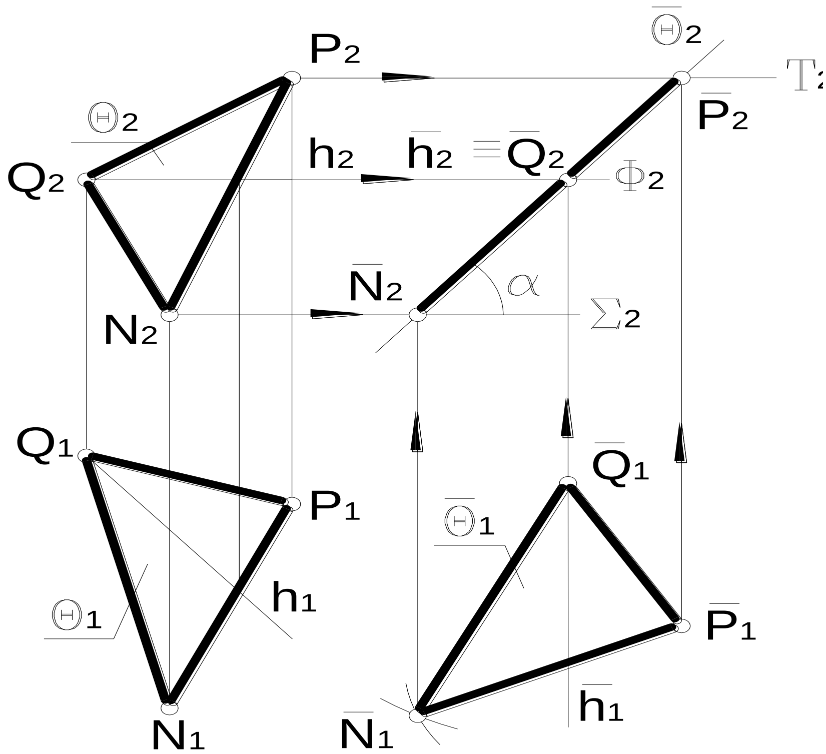


Рис. 49

Ч е т в е р т а основна задача – перетворення проектуючої площини в площину рівня. Будемо розв’язувати цю задачу як продовження попередньої, третьої задачі, так як вони можуть бути об’єднанні в одну безперервну задачу перетворення площини загального положення в площину рівня.

Щоб проектуюча площина стала площиною рівня, треба її проекцію – пряму розташувати горизонтально. На рис. 50 маємо фронтально-проектуючу площину $\bar{\theta}$ в її початковому положенні. Не змінюючи довжини і форми фронтальної проекції $\bar{N}_2\bar{P}_2\bar{Q}_2$, розташовуємо її горизонтально в вільному полі креслення.

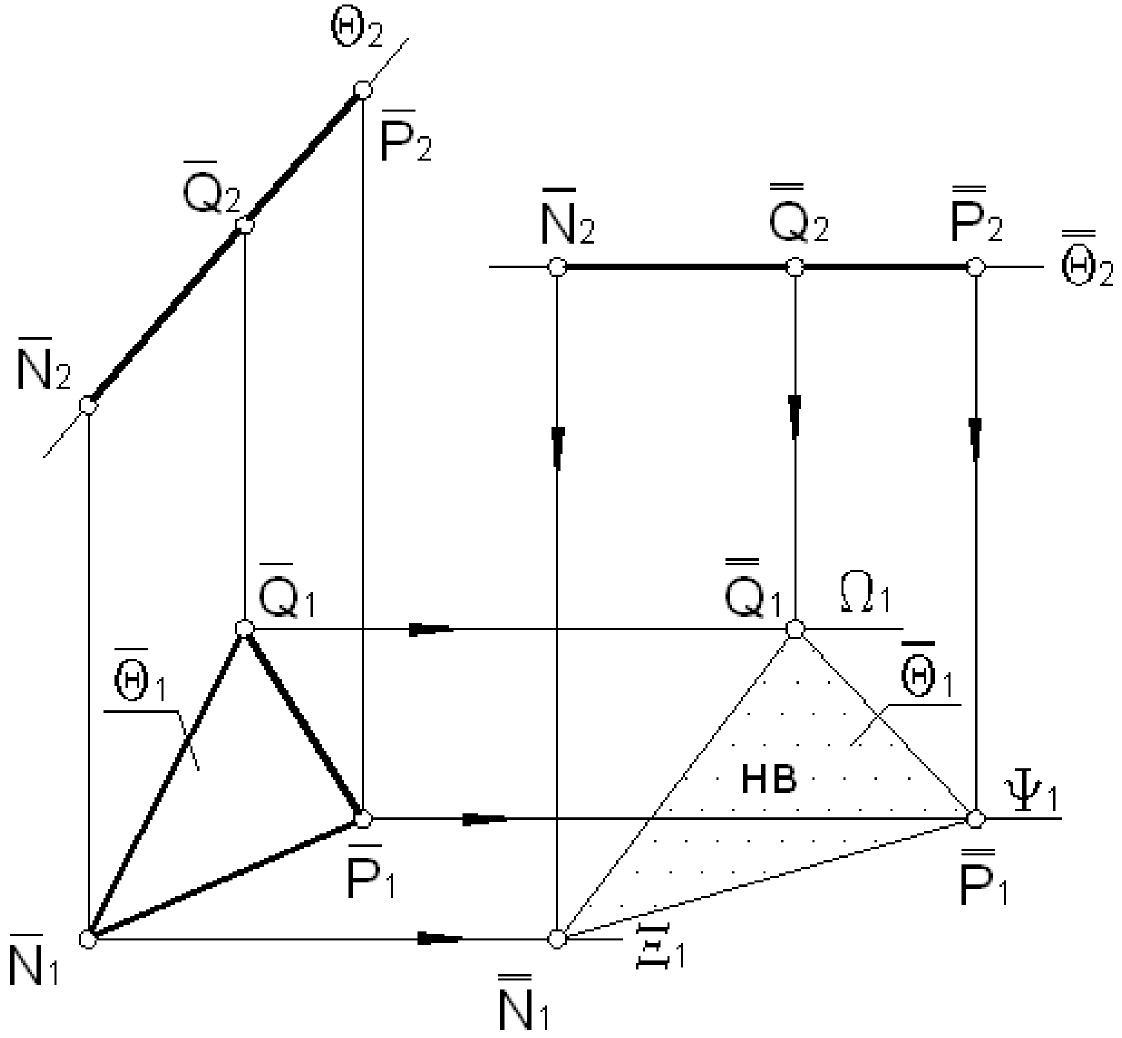


Рис. 50

За допомогою ліній зв'язку визначаємо горизонтальну проекцію $\bar{\bar{N}}_1\bar{\bar{P}}_1\bar{\bar{Q}}_1$ нового положення відсіку. При цьому вершини відсіку (точки N, P,Q) переміщувалися відповідно в фронтальних площинах Ξ,Ψ,Ω. Тут можна сказати, що здійснено обертання плоского відсіку навколо відсутньої на кресленні фронтально-проектуючої вісі.

Таким чином, в результаті перетворення способом плоско паралельного переміщення отримали нове комплексне креслення, на якому проектуюча площина стала площиною рівня. Нова горизонтальна проекція $\overline{\overline{N}}_1 \overline{\overline{P}}_1 \overline{\overline{Q}}_1$ відсіку являється його натуральною величиною.

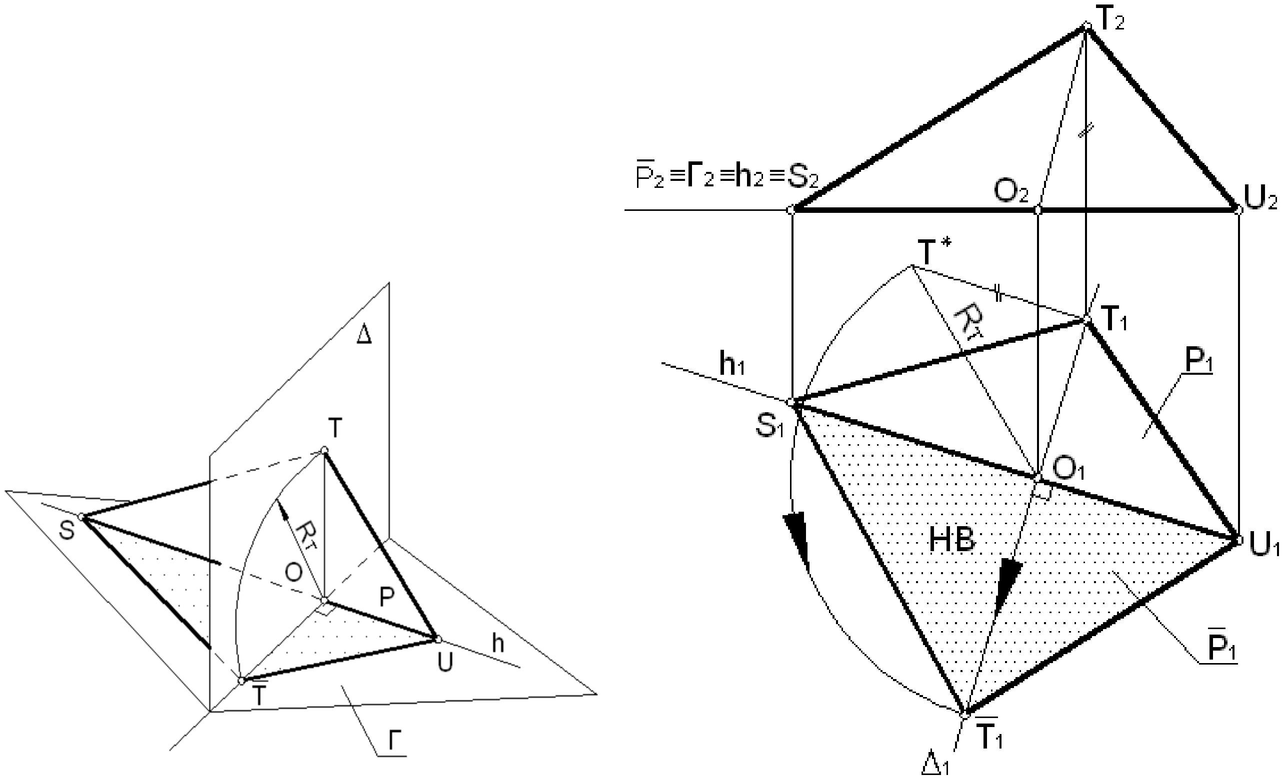
Шляхом суміщення креслень рис. 49 і 50 таким чином, щоб їх проектуючи площини співпали можна отримати креслення безперервного перетворення площини загального положення в площину рівня, тобто послідовного розв'язання третьої та четвертої задач.

15.Обертання навколо прямих рівня

Перетворення площини загального положення в площину рівня можна здійснити не в два прийому, як це було розглянуто вище, тобто послідовним розв'язанням третьої та четвертої задач, а в один. Для цього площину треба обертати не навколо проектуючих прямих, а навколо прямої рівня цієї площини (горизонталі або фронталі).

На схемі (рис. 51, а) площина загального положення *P* задана трикутним відсіком *STU* з горизонтальною стороною *SU*. Значить сторона *SU* буде одночасно і горизонталлю площини *P*, і її віссю обертання.

Для приведення відсіку *STU* в горизонтальне положення достатньо сумістити точку *T* з горизонтальною площиною рівня *Г* обертанням навколо горизонталі *h*. Точка *T* при цьому буде переміщуватися в горизонтально-проектуючий площині Δ, перпендикулярній вісі обертання - горизонталі *h*.



а б

Рис. 51

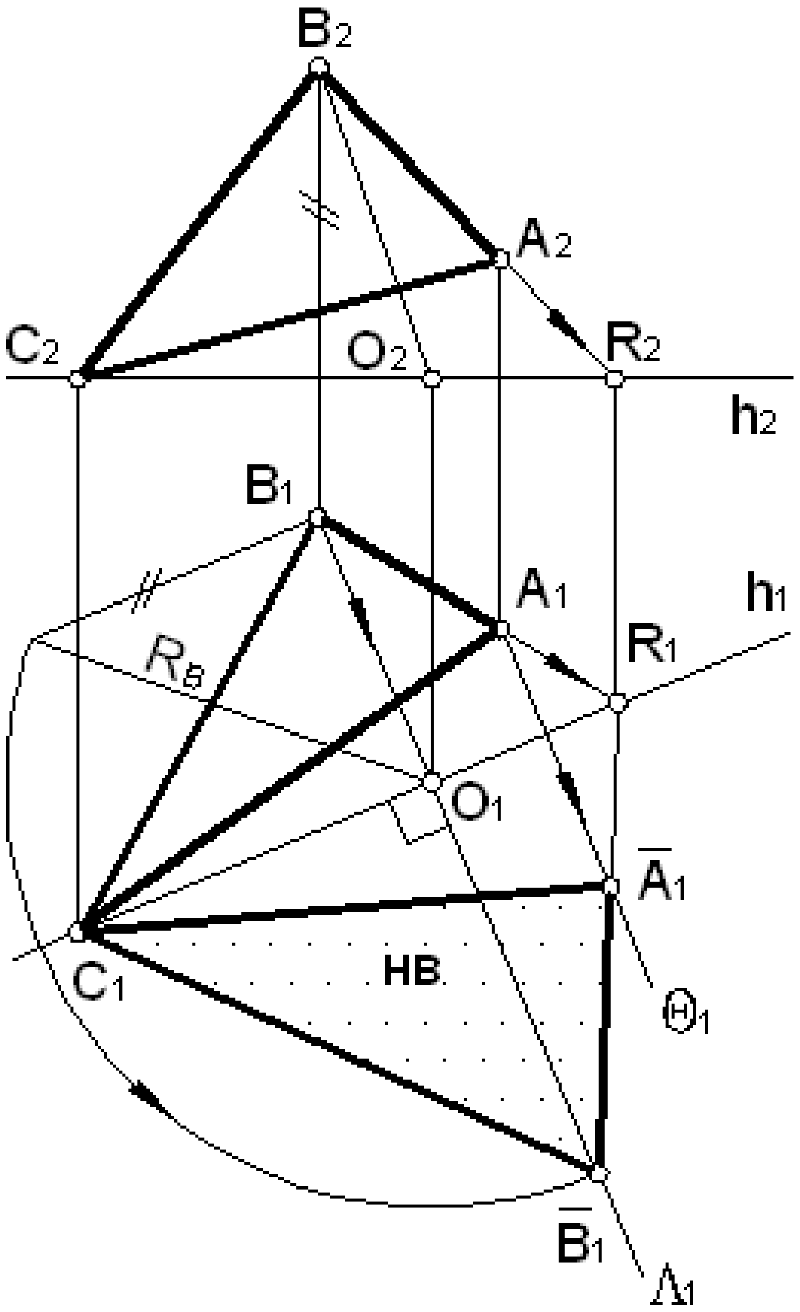
Переходимо до комплексного креслення (рис. 51, б). Через точку Т проводимо горизонтально-проектуючу площину Δ перпендикулярно горизонталі *h*. Траєкторія обертання точки Т в горизонтальній проекції співпадає з проекцією – прямою Δ_1 площини Δ. Залишається знайти натуральну величину радіуса R_T , тобто відрізку OT (це можна виконати способом прямокутного трикутника) , і із центра O зробити засічку на проекції Δ_1. Це і буде шукана точка T в своєму новому положенні $\bar{T}$.

Потім нове положення точки T з'єднуємо з нерухомими точками S і U, які знаходяться на вісі обертання *h*. Отримаємо нове комплексне креслення (суміщене зі старим, основним), на якому площина загального положення P стала площиною рівня $\bar{P}$ проминувши стадію проектуючої площини. Нова фронтальна проекція представляє собою горизонтальну пряму $\bar{P}_2$, а нова горизонтальна проекція $S_1\bar{T}_1U_1$ відсіку являється його натуральною величиною.

Як бачимо, таке перетворення програє в наочності – нове комплексне креслення не віддалено від старого і це затрудняє його читання. Але в той же час цей спосіб виграє в швидкості розв'язання задачі – поворот здійснюється в один прийом, і графічно ця побудова займає меншу площину.

При розв'язанні подібних задач необхідно врахувати одну обставину. Якщо плоский відсік не має сторони – горизонталі (сторони SU в нашому прикладі), то його треба добудувати таким чином, щоб ця горизонталь була, тобто плоский відсік повністю повинний бути по одну сторону від горизонталі. Інакшу буде накладання нової проекції відсіку на стару (основну),а це значно ускладнить розв'язання деяких задач. На рис. 52 заданий відсік *ABC*, який не має сторони горизонталі. Через вершину *C* проводимо горизонталь h до перетину з стороною *BA* в точці *R*.

Отримуємо трикутник *RBC*, який і обертаємо навколо сторони-горизонталі *RC*. Точка *A* обертається в площині θ , яка паралельна площині Λ (в ній обертається точка *B*).



З'єднав нове положення точки $\bar{B}$ з нерухомими точками R і C , отримаємо нове положення трикутного відсіку ABC і одночасно – нове положення вершини A.

Розглянутий вид перетворення можна використовувати при визначені натуральних величин плоских фігур і для різноманітних геометричних побудов в площинах загального положення

Рис.52

16.Заміна площин проекцій

Спосіб заміни площин проекцій в своїй основі протилежний способу обертання. Якщо при обертанні (а також при плоскопаралельном переміщенні) мінялося тільки положення геометричного образу в просторі, а площини проекцій залишалися нерухомими, то тут навпаки – нерухомим в просторі буде залишатися геометричний образ, а площини проекцій змінять своє положення.

При цьому необхідно замітити, що площини проекцій переміщуються не якимсь визначеним чином, а вказуються їх кінцеві положення. В нових положеннях площини проекцій будуть називатися послідовно: Π_4, Π_5, Π_6 і т.д. Можна сказати, що старі площини проекцій Π_1, Π_2 замінюються новими Π_4, Π_5 і т.д. Звідси і назва способу перетворення – *з а м і н а   п л о щ и н   п р о е к ц і й.*

При такому перетворенні необхідно дотримання наступних умов:

1) площини проекцій замінюються не одночасно, а послідовно;
2) кожна нова площина проекцій повинна бути перпендикулярна до залишеної, утворюючи з нею нову систему площин проекцій.

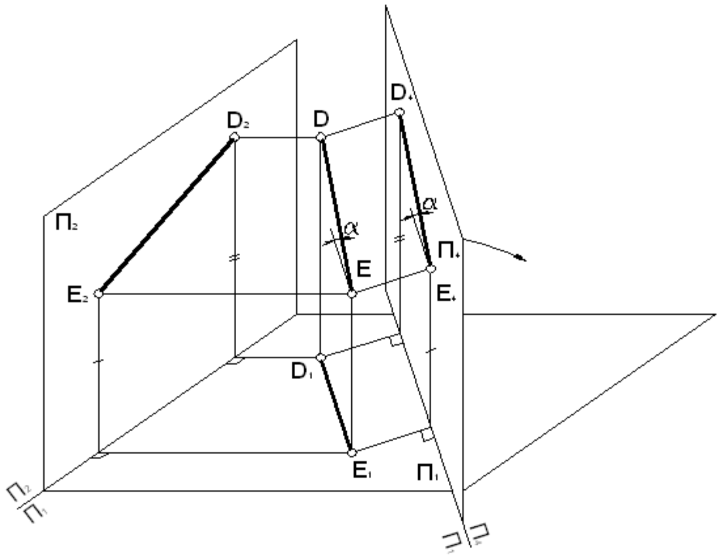
Розглянемо сутність цього перетворення в застосуванні до рішення чотирьох основних задач по перетворенню прямої та площини. Необхідно замітити, що при способі заміни площин проекцій наявність на комплексному кресленні осей проекцій обов'язкова.

П е р ш а основна задача – перетворення прямої загального положення в пряму рівня.

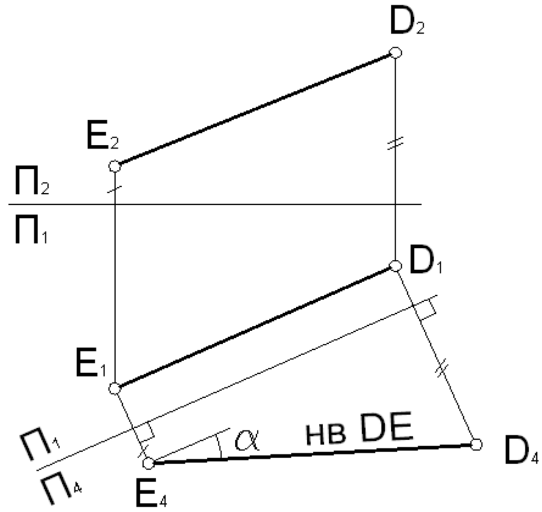
На рис. 53, а   в системі площин проекцій $\Pi_1\Pi_2$ (назвемо її "старою" системою) задана пряма загального положення своїм відрізком *DE*. Для зручності вісь проекцій позначимо Π_2 / Π_1.

Щоб в новій системі площин проекцій пряма загального положення стала прямою рівня, треба нову площину проекцій Π_4 розташувати паралельно до цієї прямої і одночасно перпендикулярно площині проекцій, яка залишається.

Хай нова площина проекцій Π_4 паралельна відрізку *DE* і перпендикулярна горизонтальній площині проекцій Π_1. Це значить, що нова площина проекцій Π_4 замінила собою фронтальну Π_2, яку умовно назвемо “відпавшою”. Утворюється нова система двох взаємно перпендикулярних площин проекцій Π_1 і Π_4 з новою віссю проекцій Π_1 / Π_4.



а



б

Рис. 53

Зпроектувавши відрізок загального положення DE ортогонально на нову площину проекцій Π_4, маємо нову проекцію D_4E_4 відрізку DE. Для отримання плоского креслення сумістимо площину Π_4 разом з зображенням з площиною Π_1 обертом навколо вісі проекцій Π_1 / Π_4 в напряму вказаному стрілкою.

Переходимо до комплексного креслення (рис. 53, б). Тут ми маємо в старій системі площин проекцій пряму загального положення DE, а також стару вісь проекцій Π_2 / Π_1.

Звичайно вихідне комплексне креслення не має вісі проекцій, тобто являється безосним. Але ми знаємо, що вісі проекцій при необхідності можна вибирати в довільному місці креслення між проекціями геометричних образів. При перетворенні, яке розглядається, вісі проекцій служать базами відліку координат окремих точок.

Перехід до нової системи площин на комплексному кресленні здійснюється в три етапи. Їх необхідно запам'ятати.

1. Будується нова вісь проекцій в відповідності з умовою задачі. В даному випадку нова вісь проекцій $П_1/П_4$ повинна бути паралельна горизонтальній проекції D_1E_1 (так як відрізок *DE* повинний стати прямою рівня) – див. рис. 53, а. Відстань від нової вісі проекцій до проекції D_1E_1 довільна. Зверніть увагу на порядок постановки літерних позначень $П_1$ і $П_4$: індекси *1* і *4* відповідають полям проекцій.
2. Проводяться нові лінії зв'язку перпендикулярно нової вісі проекцій. Вони повинні починатися від тих проекцій точок, які переходять в нове комплексне креслення. В даному випадку лінії зв'язку йдуть від горизонтальних проекцій D_1 і E_1 перпендикулярно новій вісі проекцій $П_1/П_4$.
3. На нових лініях зв'язку від нової вісі проекцій відкладаємо відстань , яка дорівнює відстаням від "відпавших" проекцій точок до старої вісі проекцій. В даному випадку це будуть координати Z точок D і E , тобто відстані від проекцій D_2 і E_2 до старої вісі проекцій $П_2/П_1$. Їх величини дає фронтальна проекція комплексного креслення, тобто та проекція, яка "відпадає", не переходить в нове комплексне креслення.

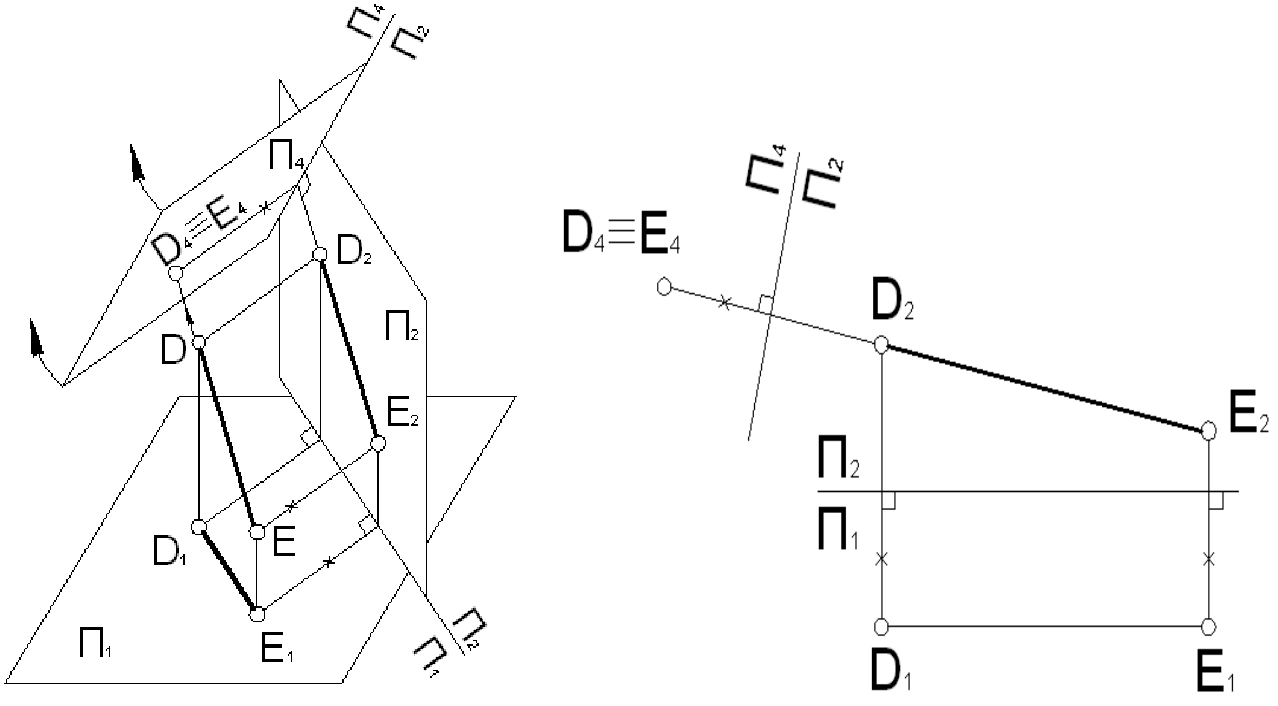
Таким чином, отримане нове комплексне двокартине креслення, яке складається зі старої проекції D_1E_1 відрізку і нової, додаткової проекції D_4E_4. На цьому новому кресленні, що отримане з основного, старого креслення, пряма загального положення стала прямою рівня. Правда, її не можна назвати ні горизонталлю, ні фронталлю, так як ми вже відійшли від старої, початкової системи площин проекцій $П_1П_2$. Нова, додаткова проекція D_4E_4 являється натуральною величиною відрізку DE, а кут α - натуральною величиною його нахилу до горизонтальної площини проекцій $П_1$ (див. рис. 53, а).

Незвичність нового комплексного креслення ще і втому, що вісь проекцій похила. Так як ми вже звикли до того, що вона повинна бути горизонтальною, можна повернути креслення (зошит) так, щоб нова вісь проекцій $П_1/П_4$ стала горизонтальною. Причому тут вже не має значення, яка з проекцій буде над віссю або під нею.

Д р у г а основна задача – перетворити пряму рівня в проектуючу пряму. Будемо розв’язувати цю задачу як продовження попередньої.

На рис.54,а для рішення поставленої задачі система взаємно перпендикулярних площин $П_1$ і $П_4$ вже стає старою. І вісь проекцій $П_4/П_1$ також стара.

В відповідністю до умови задачі новою площиною проекцій повинна стати площина $П_5$, перпендикулярна відрізку DE, тому що він повинний стати проектуючою прямою. І ця нова площина повинна бути перпендикулярна площині $П_4$, що залишається. А замінюється тут горизонтальна площина проекцій $П_1$. Таким чином, дві взаємно перпендикулярні площини – стара $П_4$ і нова $П_5$ утворюють нову систему площин проекцій з новою віссю проекцій $П_5/П_4$.



а б

Рис. 54

Зпроектувавши пряму рівня – відрізок DE ортогонально на нову площину Π_5 , отримаємо нову проекцію $D_5 \equiv E_5$ відрізку DE . Як і повинно було бути, вона представляє собою точку. Для отримання плоского креслення сумістимо площину Π_5 разом з зображенням з площиною Π_4 обертом навколо нової вісі проекцій Π_5 / Π_4 в напряму, вказаному стрілками.

Переходимо до комплексного креслення (рис. 54, б). Для зручності рішення задачі початкове комплексне креслення прямої рівня, взяте з рис. 53, б, розташуємо так, щоб його вісь проекцій Π_4 / Π_1 стала горизонтальною. Причому величина відстані між проекціями D_1E_1 і віссю проекцій Π_4 / Π_1 не має значення.

Перехід до нової системи площин проекцій здійснюється в тому ж самому порядку, як і при рішенні першої задачі:

1. Нову вісь проекцій Π_5 / Π_4 будуємо перпендикулярно проекції, яка представляє натуральну величину прямої рівня DE . Ця вісь проекцій проводиться на довільній відстані.
2. Від проекцій D_4 і E_4, які переходять в нове комплексне креслення, проводимо нові лінії зв’язку перпендикулярно нової вісі проекцій Π_5 / Π_4. В даному випадку вони співпадають в одну лінію.
3. На нових лініях зв’язку від нової вісі проекцій Π_5 / Π_4 відкладаємо відстані, на яких знаходилися “відпавші” проекції D_1 і E_1 від старої вісі проекцій Π_4 / Π_1. Ці відстані виявилися рівними, і тому нова, додаткова проекція відрізку представляє собою точку $D_5 \equiv E_5$.

Таким чином, ми отримали нове комплексне креслення, яке складається з старої проекції D_4E_4 і нової, додаткової проекції $D_5 \equiv E_5$. На цьому кресленні пряма рівня стала проектуючою прямою. Тут також не має сенсу уточнювати, горизонтально-проектуюча вона чи фронтально-проектуюча, так як від основної системи площин проекцій $\Pi_1\Pi_2$ ми пішли ще далі.

Для перетворення прямої загального положення в проектуючи пряму необхідно розв’язати послідовно першу і другу задачі на одному кресленні. Це креслення безперервного перетворення можна отримати суміщенням креслень рис. 53, б і 54, б. При цьому прямі рівня обох креслень повинні співпасти.

Т р е т я основна задача – перетворити площину загального положення в проектуючи площину.

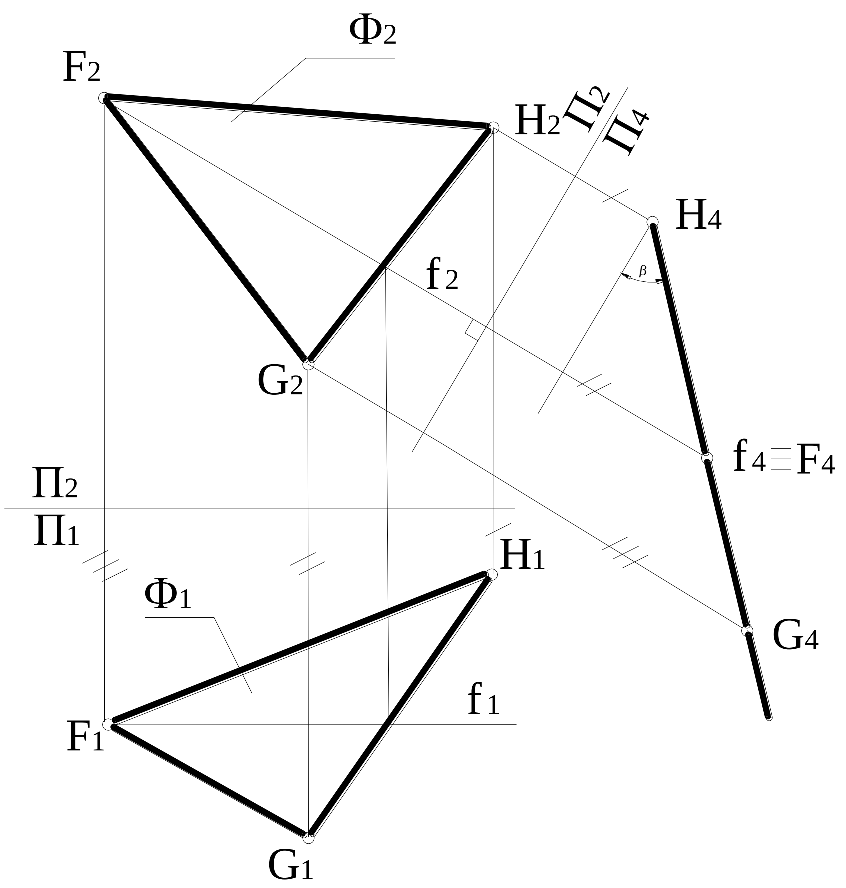


Рис. 55

Щоб площина загального положення стала проектуючою, достатньо добитися того, щоб одна з прямих рівня цієї площини стала проектуючою прямою (див. рис.53) Почнемо з фронталі. На рис.55 площина загального положення Ф задана своїм відсіком *FGH*. Будуємо в ній фронталь f і починаємо перетворення по запропонованій вище схемі. Щоб фронталь стала проектуючою, треба нову площину проекцій $П_4$ побудувати перпендикулярно проекції – натуральній величині f_2 фронталі. Значить, нова вісь проекцій $П_2/П_4$ повинна бути перпендикулярна проекції f_2. І проводити її можна як справа від проекції відсіку, так і зліва.

Потім від проекцій F_2, G_2, H_2, які залишаються, тобто переходять в нове комплексне креслення, проводимо нові лінії зв'язку перпендикулярно новій вісі проекцій $П_2/П_4$.

Так як "відпавшою" проекцією тут являється горизонтальна проекція $F_1G_1H_1$ відсіку (нова площина $П_4$ замінила собою горизонтальну площину проекцій Π_1), вимірюємо відстань проекцій точок від старої вісі проекцій Π_2 / Π_1 і відкладаємо їх на нових лініях зв'язку від нової вісі проекцій Π_2 / Π_4.

Отримуємо нову, додаткову проекцію $G_4F_4H_4$ відсіку, яка разом зі старою проекцією $F_2G_2H_2$ утворює нове комплексне креслення площини Φ. На цьому новому кресленні площина загального положення Φ стала проектуючою площиною.

Щоб краще зрозуміти це креслення, треба розвернути його так, щоб нова вісь проекцій Π_2 / Π_4 стала горизонтальною. Кут β являється натуральною величиною кута нахилу площини Φ до фронтальної площини проекцій Π_2.

Для визначення кута α нахилу площини Φ до горизонтальної площини проекцій Π_1 треба замінити площину проекцій Π_2 і користуватися при цьому горизонталлю h.

Ч е т в е р т а основна задача – перетворити проектуючу площину в площину рівня. Розв'язувати її будемо як продовження попередньої.

Вихідним кресленням для розв'язання цієї задачі буде креслення на рис.55. Тільки розташуємо його так, що вісь проекцій Π_2 / Π_4 стала горизонтальною (рис.56), так що система взаємо перпендикулярних площин проекцій $\Pi_2\Pi_4$ і їх вісь проекцій Π_2 / Π_4 до даного моменту являються вже "старими".

Щоб на новому комплексному кресленні проектуючи площина стала площиною рівня, треба нову площину проекцій Π_5 побудувати паралельно проекції прямої Φ_4. Тим самим буде замінена фронтальна площина проекцій Π_2.

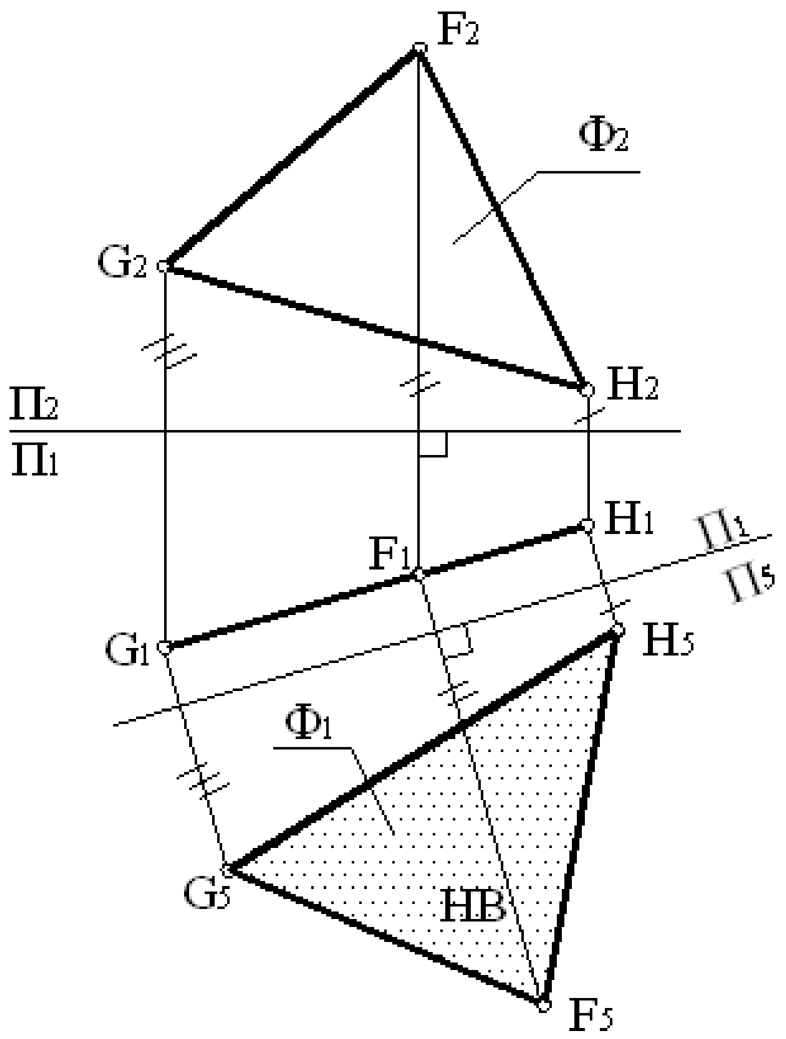


Рис. 56

.Таким чином, спочатку паралельно Φ_4 на довільній відстані будуємо нову вісь проекцій Π_4/Π_5, а потім від залишених проекцій G_4, F_4, H_4 точок проводимо нові лінії зв'язку перпендикулярно новій вісі проекцій Π_4/Π_5 і на них відкладаємо відстані, які дорівнюють відстаням від старої вісі Π_2/Π_4 до "відпавших" проекцій G_2, F_2, H_2 точок $G\ ,F\ ,H$. Отримаємо нове комплексне креслення площини Φ, яке складається зі старої проекції-прямої $G_4F_4H_4$ відсіку і його нової , додаткової проекції $G_5F_5H_5$. На цьому новому кресленні проектуюча площина Φ стала площиною рівня. Нова проекція $G_5F_5H_5$ відсіку являється його натуральною величиною.

Для кращого сприйняття нового креслення повернемо його так, щоб нова вісь проекцій Π_4/Π_5 стала горизонтальною.

17. Багатогранники

17.1 .Загальні відомості. Види багатогранників.

Багатогранники, як один із видів просторових геометричних форм, знаходять широке застосування в різноманітних інженерних спорудах і конструкціях сучасних будинків. Багатогранні форми мають також різноманітні деталі машин і механізмів, станків і інструментів.

Багатогранник – це поверхня, складена з кінцевого числа плоских багатокутників, що не лежать в одній площині.

Елементами багатогранників являються його грані, ребра та вершини.

Лінії перетину суміжних граней називаються ребрами, точки перетину ребер – вершинами багатогранника.

Сукупність всіх ребер багатогранника називають його сіткою. На кресленнях , як правило, багатогранники зображаються проекціями своїх сіток.

Між кількістю вершин (В), ребер (Р) та граней (Г) багатогранника існує співвідношення (теорема Ейлера):

В+Г-Р=2.

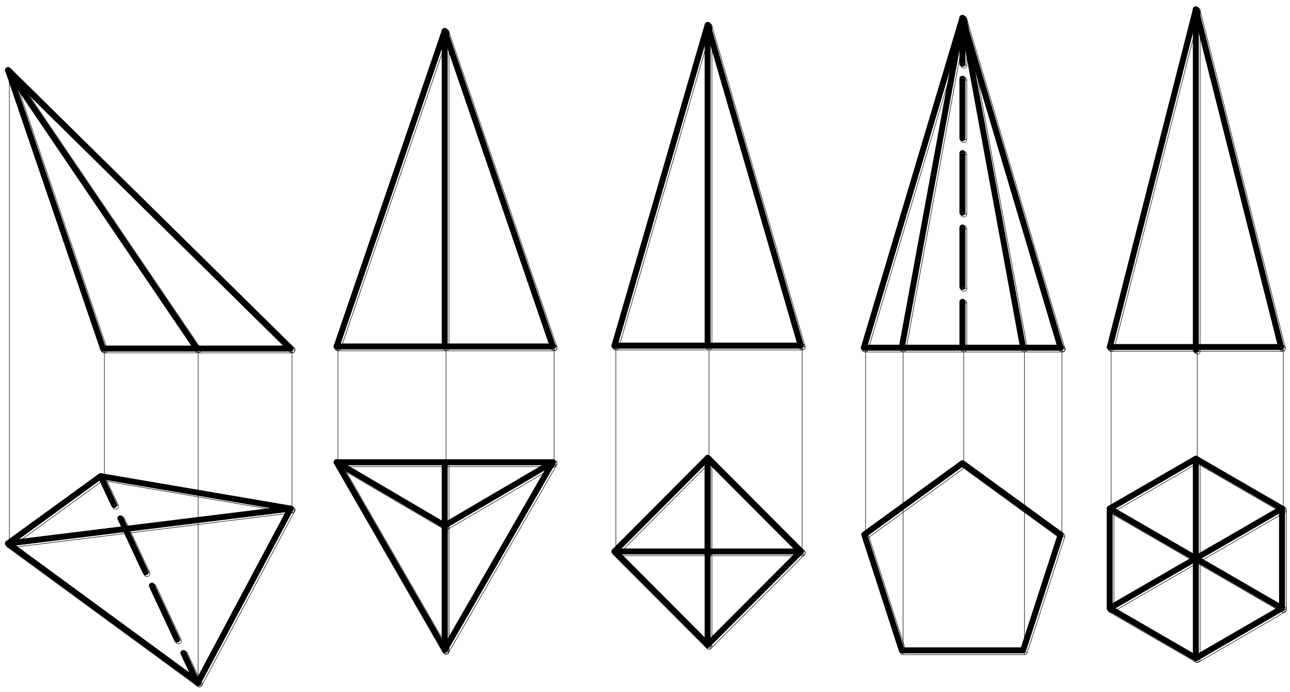
Багатогранники поділяються на опуклі та не опуклі .

Опуклим називається багатогранник, який розміщується по один бік від площини будь-якої його грані.

Найбільший практичний інтерес представляють такі багатогранники, як піраміди, призми, призматоїди та тіла Платона.

1. П і р а м і д и – багатогранники, одна грань яких (основа) – багатогранник з числом сторін не менше трьох, а інші грані (бокові) являються трикутники з загальною вершиною.

На рис. 57 (а) зображена піраміда загального виду. Якщо в основі піраміди знаходиться правильний n – кутник і її висота (перпендикуляр, опущений з вершини на основу) проходить через центр цього n – кутника , піраміду називають правильною (рис.57,б-д).

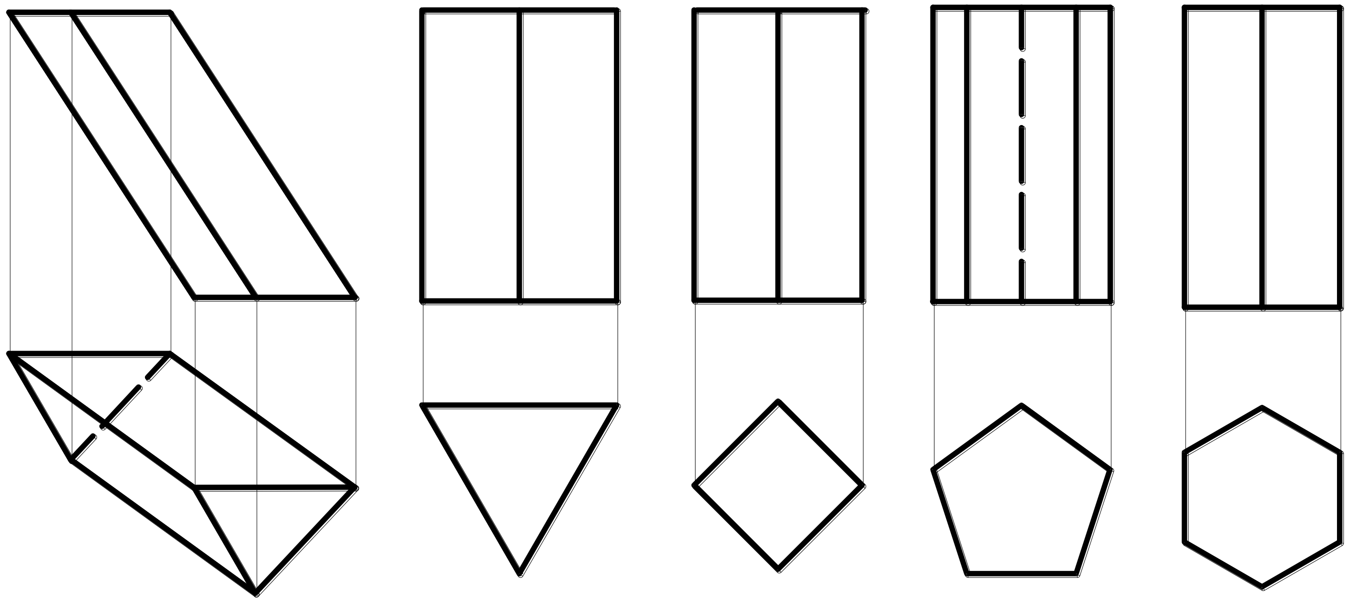


а) б) в) г) д)

Рис.57

2.П р и з м и – багатогранники, дві грані яких (основи) – рівні n – кутники з взаємно паралельними сторонами, які лежать в паралельних площинах, а інші грані (бокові) являються паралелограмами або прямокутниками.

На рис.58 (а) призма загального виду. Призму, бокові ребра якої перпендикулярні основі, називають *прямою.* Якщо в основі прямої призми лежить правильний n – кутник, призма називається *правильною* (рис.58,б-д).



а) б) в) г) д)

Рис.58

3. П р и з м а т о ї д и- багатогранники, дві грані яких (основи)- багатокутники, які лежать в паралельних площинах, а інші грані (бокові) являються трикутниками і трапеціями.

4.Т і л а П л а т о н а – багатогранники, всі грані яких – правильні і рівні n – кутники. Існують п’ять таких багатогранників.

Тетраедр (чотиригранник)- це багатогранник, гранями якої є чотири рівносторонні трикутники.

Гексаедр (шестигранник) – багатогранник обмежений шістьома рівними квадратами. Це звичайний куб.

Октаедр (восьмигранник) – багатогранник, гранями якого є вісім рівносторонніх трикутників.

Додекаедр (дванадцятигранник) – багатогранник утворений з дванадцяти правильних п’ятикутників.

Ікосаедр (двадцятигранник) – обмежений двадцятьма правильними трикутниками.

Властивості цих правильних багатогранників були описані більше двох тисяч років назад древньогречеським філософом Платоном, і тому їх зараз називають тіла Платона.

Вони мають дві *основні властивості*: 1)багатогранні кути при вершинах правильних багатогранників (тіл Платона) рівні між собою; 2) навколо цих правильних багатогранників можна описати сферу.

17.2. Перетин багатогранника прямою лінією.

В практиці виконання креслень часто необхідно розв'язати задачу на побудову точок перетину прямої лінії з поверхнею геометричного тіла.

Щоб знайти точки перетину багатогранника прямою лінією необхідно:

1.Через пряму провести допоміжну площину.

2.Знайти переріз площини з багатогранником.

3.Відмітити точки перетину прямої з проекцією перерізу. Це і будуть шукані точки входу і виходу.

Допоміжна січна площина називається площина-посередник.

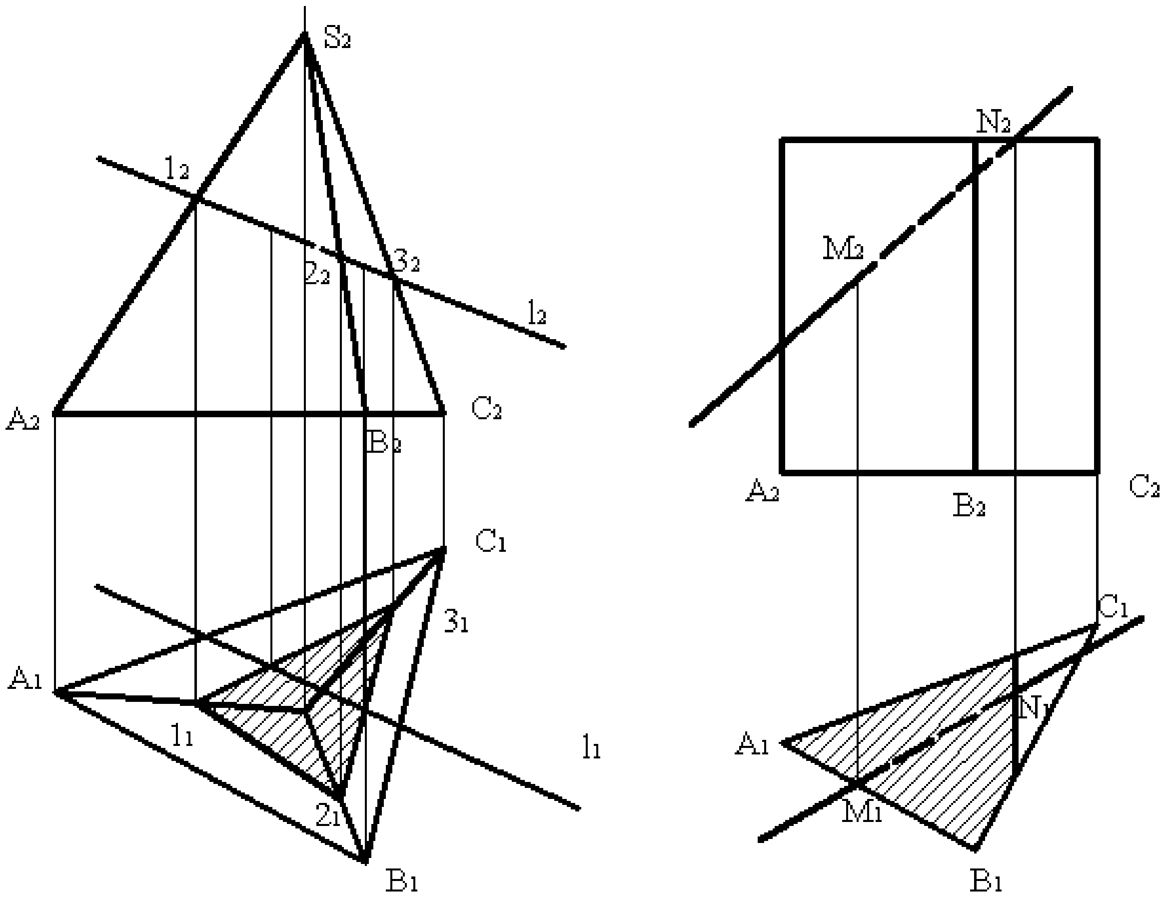


Рис.59

17.3.Перетин багатогранника площиною.

Плоским перерізом багатогранника являється багатогранник, вершинами якого служать точки перетину його ребер з січною площиною, а сторонами – відрізки прямих перетину його граней з тою ж самою площиною.

Приклад 1. Побудувати фігуру перерізу поверхні багатогранника проектуючою площиною.

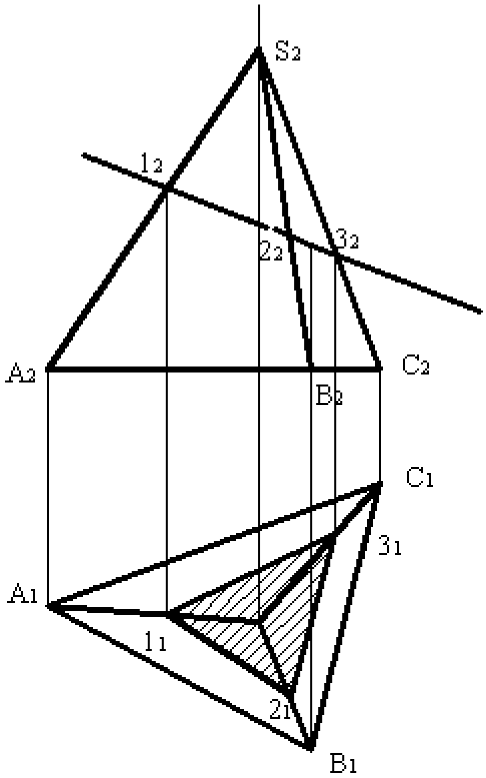


Рис. 60

17.4. Розгортки багатогранників

При виготовленні різноманітних технічних форм з листового матеріалу треба попередньо побудувати розгортку цих поверхней.

Розгорткою багатогранної поверхні називається плоска фігура, що отримана послідовним суміщенням з однією і тією ж площиною всіх її граней.

Поверхню багатогранника можна завжди сумістити з площиною, тому що вона складається з плоских відсіків.

Якщо всі ребра багатогранника знаходяться в загальному положенні, спочатку визначаємо їх натуральні величини, а потім будуємо розгортку.

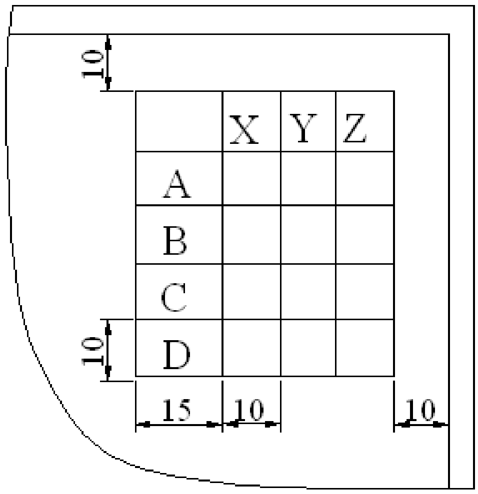
18. МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ТА ЗАВДАННЯ ДО ВИКОНАННЯ ГРАФІЧНИХ РОБІТ (МОДУЛІВ)

Графічні роботи з нарисної геометрії являють собою епюри (креслення), які виконуються по мірі послідовного проходження матеріалу. Завдання особисті, розроблені по варіантам.

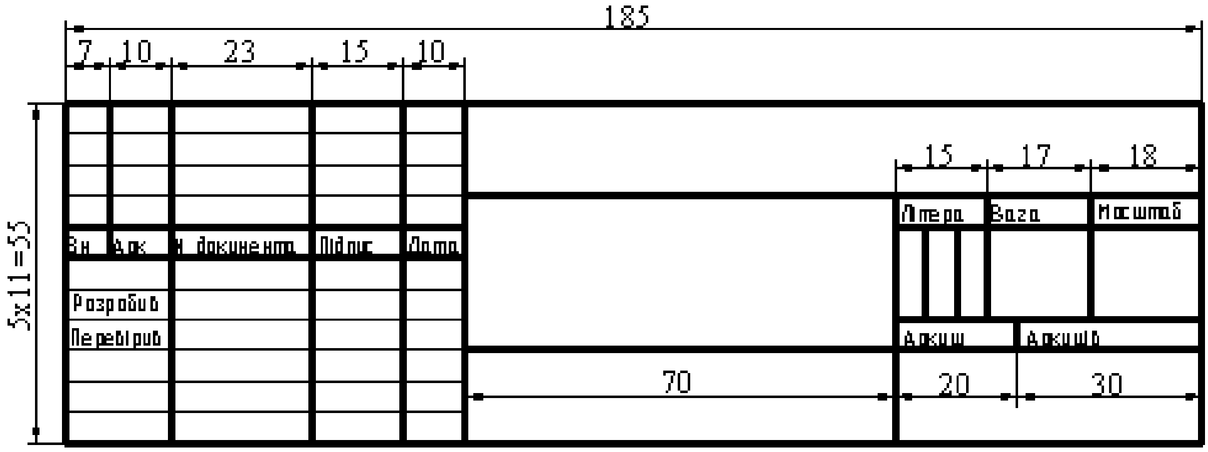
При оформленні завдань слід додержуватися таких вимог:

1. Завдання виконують на аркушах паперу для креслення стандартного формату А3 (420х297).
2. Побудови виконують, використовуючи інструменти для креслення, олівцем з твердим грифелем у тонких лініях. Наводять креслення і виконують написи олівцем з м'яким грифелем.
3. Написи виконують стандартним шрифтом №5.
4. Графічні роботи та титульний лист виконують дотримуючись таких рекомендацій:

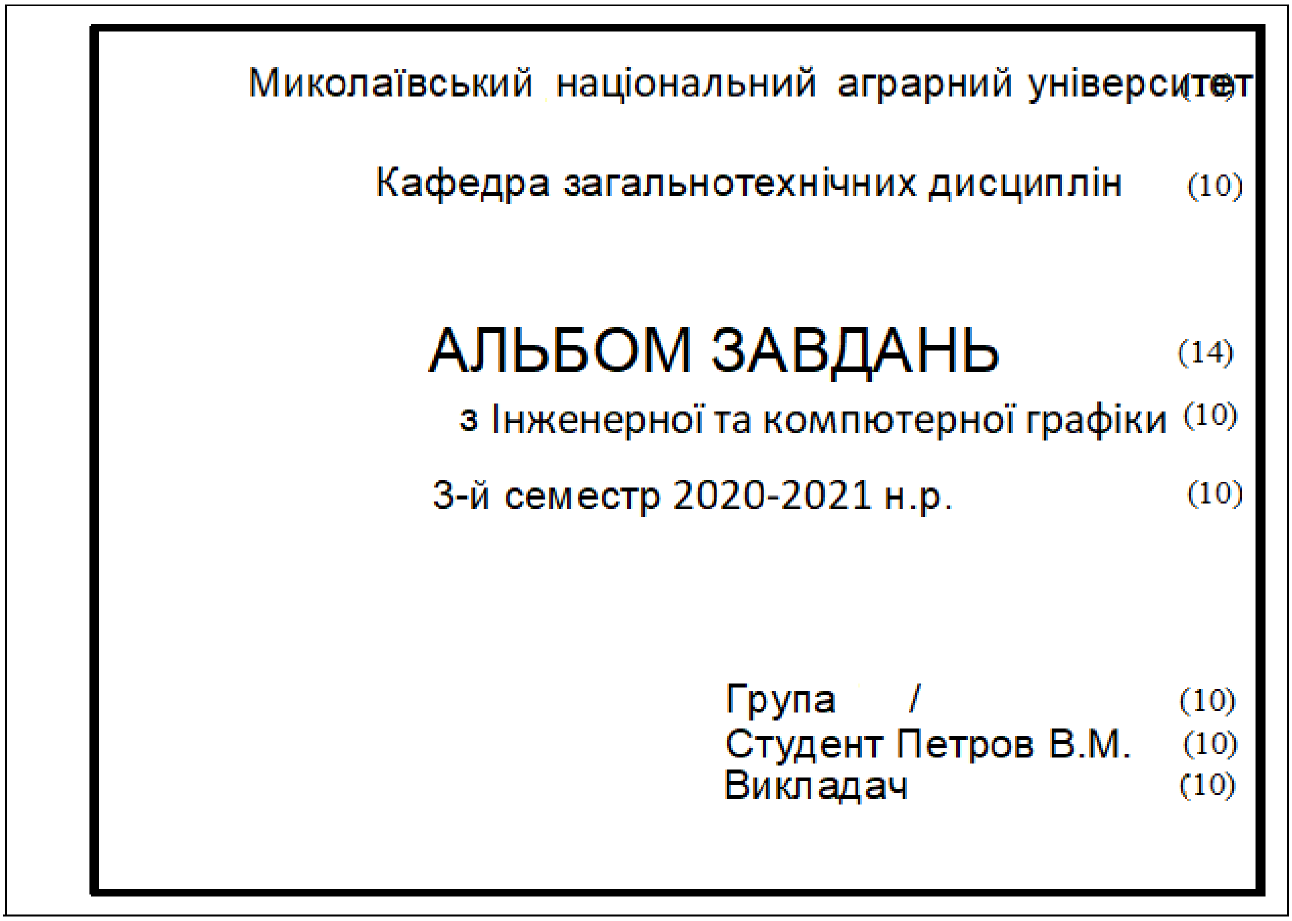
- Рамку виконують суцільною лінією товщиною s=(0.8-1.2)мм, відступивши з лівого боку 20 мм, з правого, знизу та зверху по 5 мм.
- В правому верхньому куті форматного аркуша, на якому виконують графічну роботу, креслять таблицю з координатами точок згідно варіанту.



- В правому нижньому куті форматного аркушу виконують основний напис



- Титульний лист оформлюється по наступному прикладу. Номери шрифтів зазначені для кожного напису.



5. Титульний лист і графічні роботи по порядку підшиваються в альбом, який студент подає викладачу. Викладач підписує альбом після захисту його студентом.

Завдання до модулю №1

Перший модуль з нарисної геометрії включає дві задачі. Координати точок для побудови умов задач беруться з таблиці 1.

Задача 1. Побудувати за координатами відрізок *AB* , знайти його натуральну величину і кути нахилу до площин проекцій Π_1 і Π_2.

Порядок виконання задачі наступний:

1.Згідно варіанту за координатами з таблиці 1 будують фронтальну та горизонтальну проекції відрізку *AB* .

2. Знаходять його натуральну величину та кути α і β нахилу до площин проекцій методом прямокутного трикутника (див. п.2, рис.5). Приклад виконання задачі 1 модулю №1 представлений на рисунку 63 .

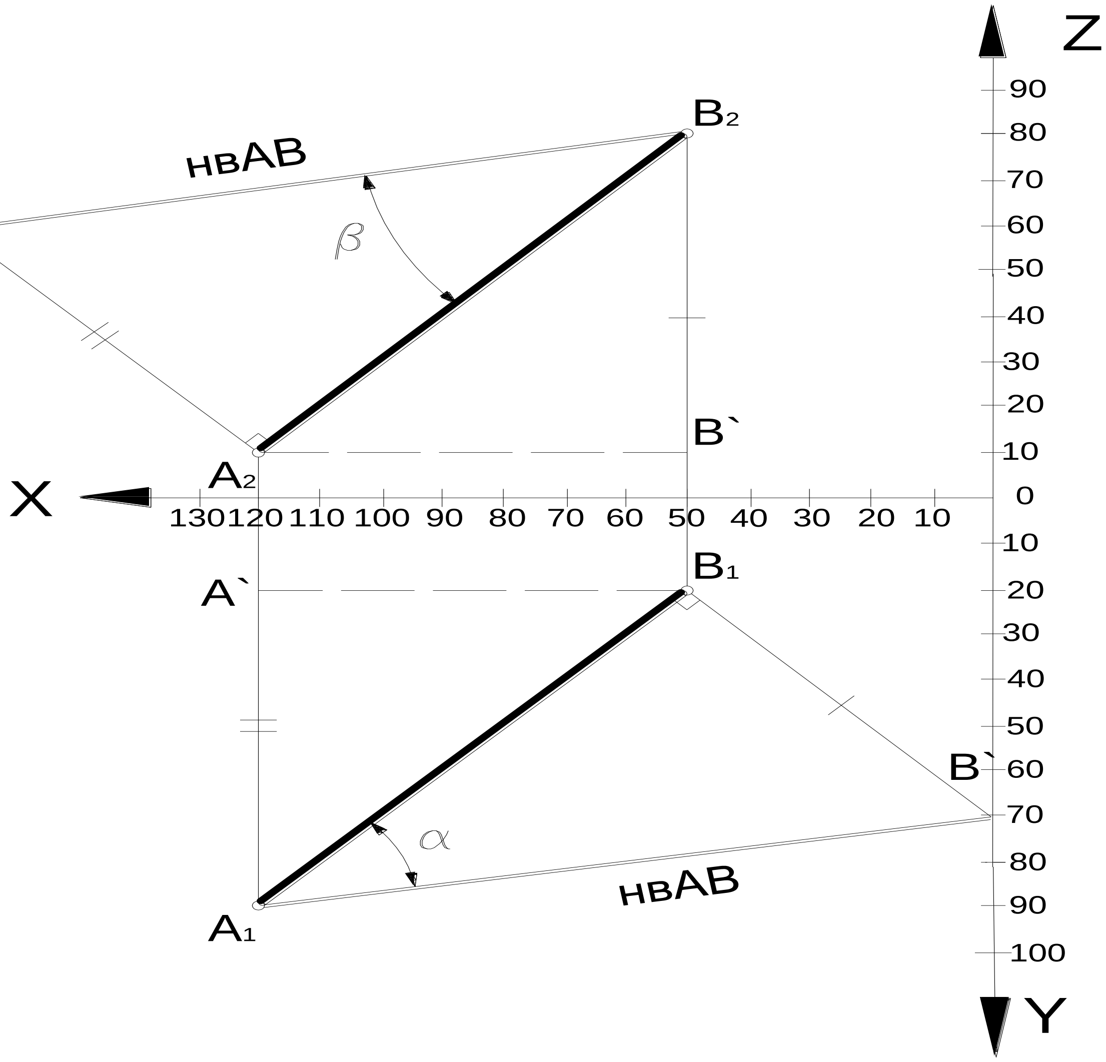


Рис. 63

Задача 2. Побудувати трикутник *ABC*, провести в ньому лінії рівня.

Порядок виконання задачі наступний:

1. За координатами будуємо фронтальну та горизонтальну проекції трикутника *ABC*.

2. В трикутнику *ABC* проводимо фронтальні та горизонтальні проекції ліній рівня: фронталі та горизонталі (див. п.7 , рис.31).

Приклад виконання задачі 2 модулю №1 представлений на рис. 64.

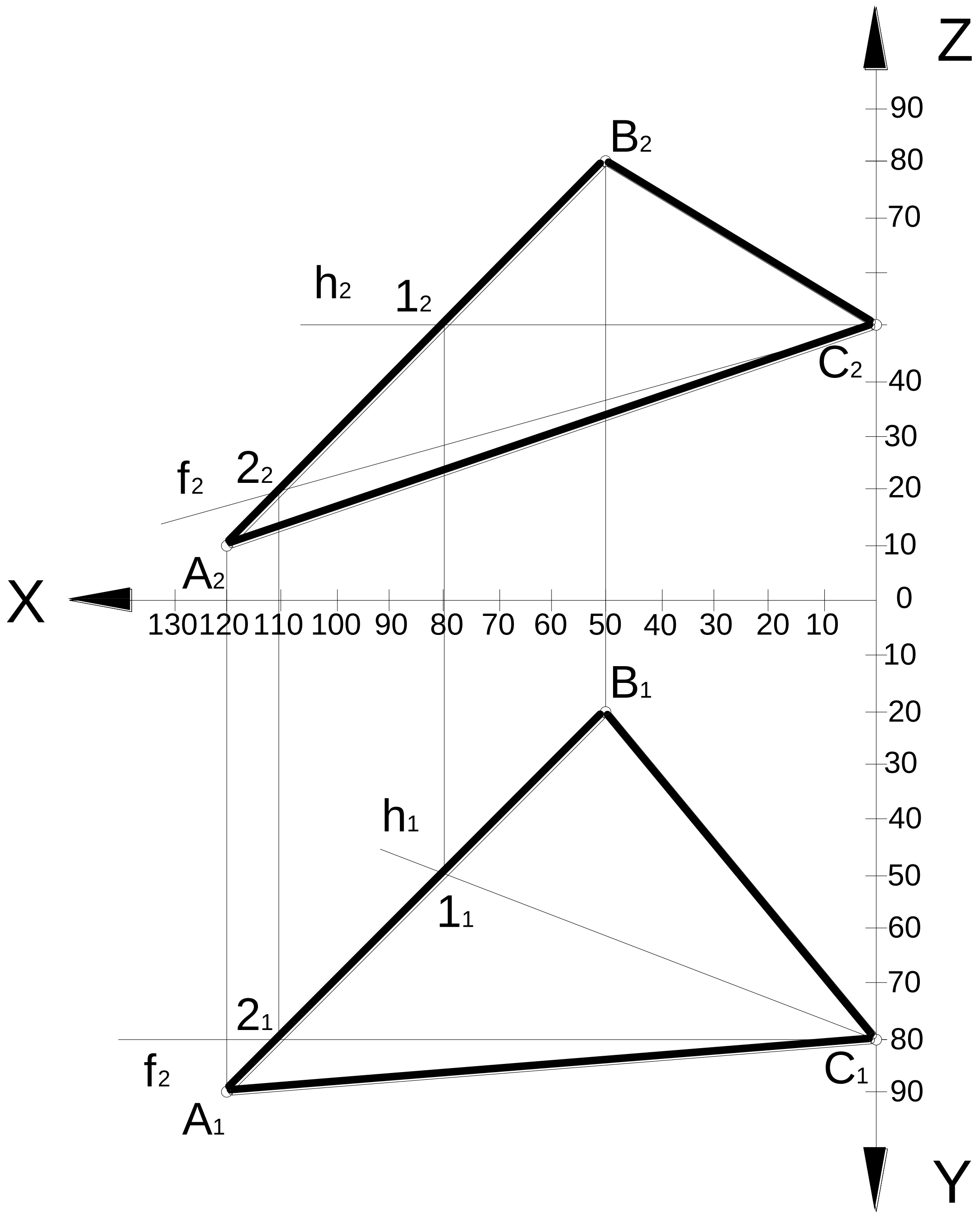


Рис. 64

Питання до захисту модуля №1:

1.Знайти натуральну величину та кути нахилу до площин проекцій Π_1 і Π_2 відрізка АВ (методом прямокутного трикутника).

2.Що називається фронталлю?

3.Що називається горизонталлю?

4.Провести в трикутнику лінії рівня: фронталь і горизонталь.

Завдання до модулю №2

Другий модуль з нарисної геометрії включає дві задачі. Координати точок для побудови умов задач беруться з таблиці 1.

Задача 1. Знайти відстань від точки *D* до площини, яку задано трикутником *ABC*.

Відстань від точки до площини вимірюється перпендикуляром, опущеним з цієї точки на площину.

Звідси порядок виконання задачі наступний:

1.Будують горизонтальну та фронтальну проекції трикутника АВС та проекції точки D .

2. Проводять проекції фронталі та горизонталі.

3. З точки D опускають перпендикуляр на площину трикутника ABC . Щоб з точки D опустить перпендикуляр на площину цього відсіку, достатньо провести фронтальну проекцію перпендикуляра під прямим кутом до фронталі, а горизонтальну його проекцію - перпендикулярно до горизонталі.

4. Знаходимо точку K перетину перпендикуляра з площиною трикутника ABC (перша позиційна задача), див. п.9, рис.36 .

5. Визначаємо натуральну величину відстані від точки D до трикутника ABC методом прямокутного трикутника.

Приклад виконання задачі 1 модулю №2 представлений на рисунку 65 .

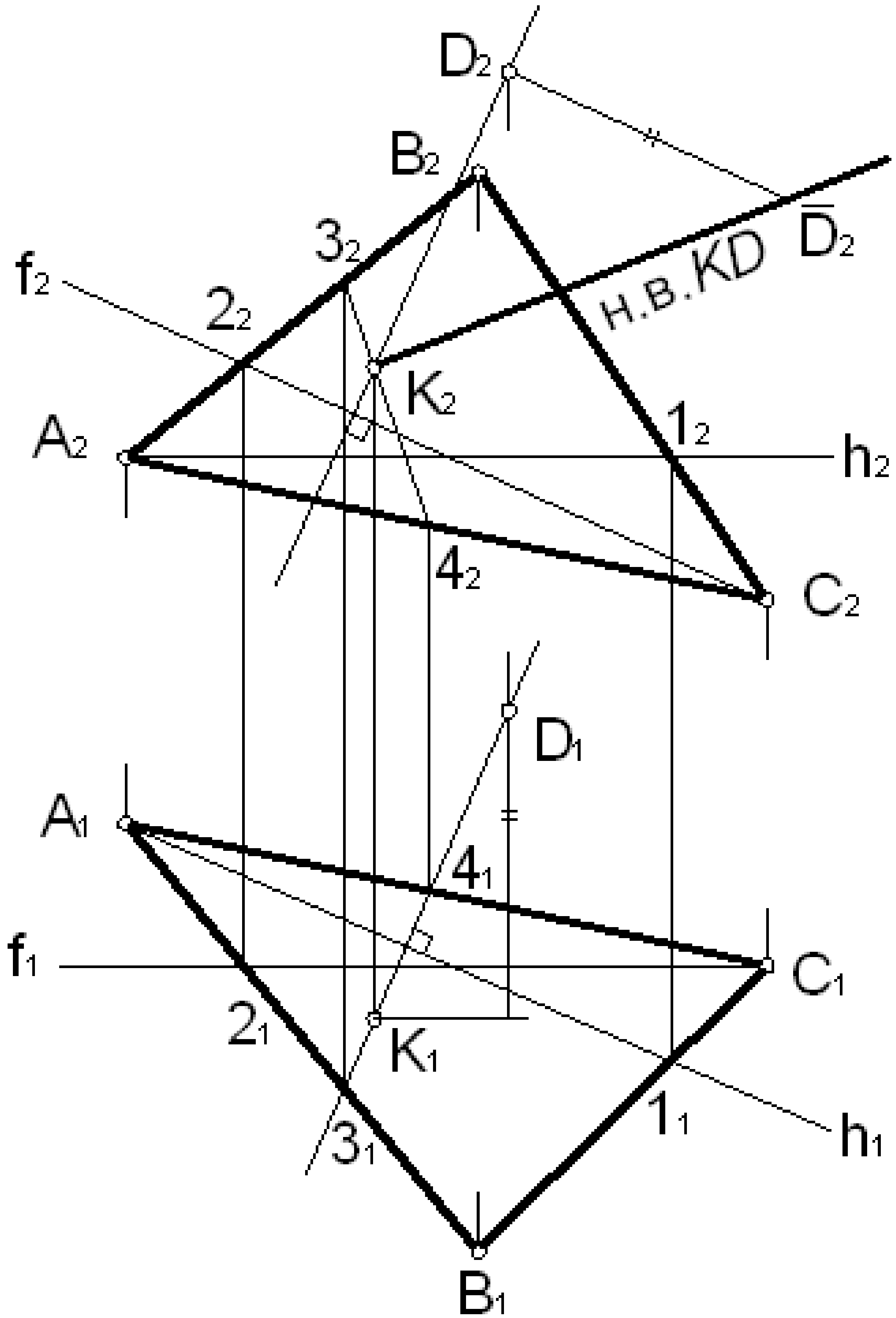


Рис. 65

Задача 2. Побудувати площину *DEL*, що проходить через відрізок *DE* і являється перпендикулярною до площини заданої трикутником *ABC*.

Порядок виконання задачі наступний:

1.Будуємо проекції трикутника *DEL* та відрізку *DE*.

2.В трикутнику *DEL* проводимо проекції фронталі та горизонталі.

3.З одно кінця відрізку *DE* проводимо перпендикуляр до площини трикутника *ABC* і довільно вибираємо точку *L* на цьому перпендикулярі.

4.Знаходимо лінію перетину двох площин: трикутника *DEL* та трикутника *ABC*.

Знаходження лінії перетину двох площин зводиться до знаходження двох точок, що визначають цю лінію. Кожна така точка є результатом перетину прямої однієї площини з іншою площиною. Видимість площин визначають за уявою і перевіряють за «конкуруючими» точками.

Приклад виконання задачі 2 модулю №2 представлений на рисунку 66.

Питання до захисту модуля №2:

1.Як знайти відстань від точки до площини?

2.Визначити точку перетину прямої з трикутником.

3. Як побудувати площину перпендикулярну даній площині?

4.Послідовність знаходження лінії перетину двох площин.

5.Побудувати пряму перпендикулярну до площини, заданої трикутним відсіком.

6. Побудувати пряму паралельну до площини, заданої трикутним відсіком.

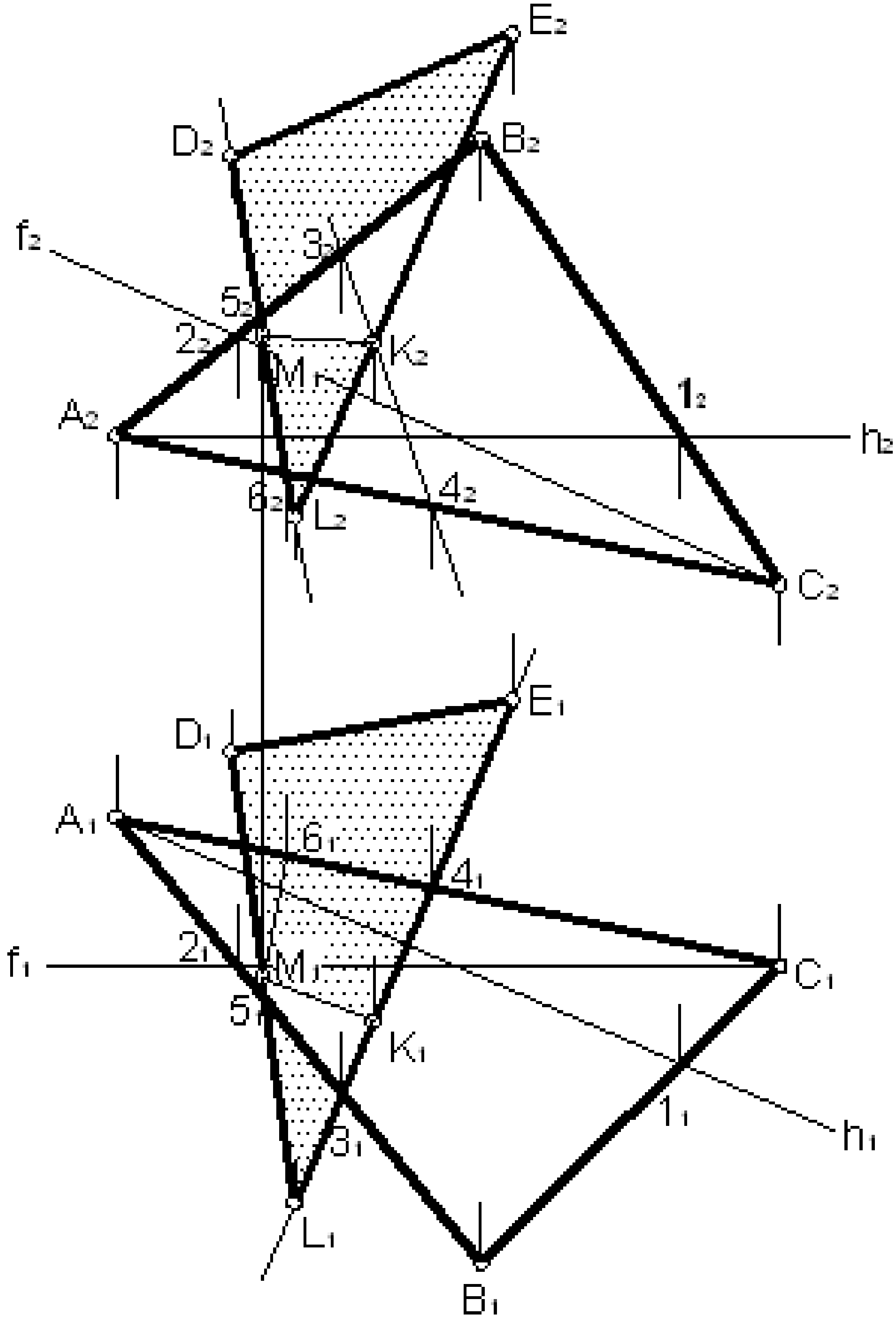


Рис. 66

Завдання до модулю №3

Третій модуль з нарисної геометрії включає дві задачі. Координати точок для побудови умов задач беруться з таблиці 1.

Задача 1. Знайти натуральну величину відрізка АВ та кути його нахилу до площин проекцій Π_1 і Π_2 методом заміни площин проекцій.

Порядок виконання задачі наступний:

1. По координатам будують фронтальну та горизонтальну проекції відрізку AB **.**

2. Будують нову вісь проекцій Π_1/Π_4 паралельно горизонтальній проекції A_1B_1 (так як відрізок AB повинний стати прямою рівня) – див. рис. 53, б. Відстань від нової вісі проекцій до проекції A_1B_1 довільна. Зверніть увагу на порядок постановки літерних позначень Π_1 і Π_4 : індекси *1* і *4* відповідають полям проекцій.

3. Проводяться нові лінії зв'язку перпендикулярно нової вісі проекцій. В даному випадку лінії зв'язку йдуть від горизонтальних проекцій A_1 і B_1 перпендикулярно новій вісі проекцій Π_1/Π_4.

4. На нових лініях зв'язку від нової вісі проекцій відкладаємо відстань , яка дорівнює відстаням від "відпавших" проекцій точок до старої вісі проекцій. В даному випадку це будуть координати Z точок A і B , тобто відстані від проекцій A_2 і B_2 до старої вісі проекцій Π_2/Π_1. Їх величини дає фронтальна проекція комплексного креслення, тобто та проекція, яка "відпадає", не переходить в нове комплексне креслення.

Таким чином, на площині Π_4 відрізок загального положення перетворюється в відрізок рівня., тобто отримують натуральну величину відрізку AB та кут його нахилу до площини проекцій Π_1.

5. Аналогічно будуючи нову вісь проекцій Π_2 / Π_5 паралельно фронтальній проекції A_2B_2 , отримують натуральну величину відрізку AB та кут його нахилу до площини проекцій Π_2.

Приклад виконання задачі 1 модулю №3 представлений на рисунку 67.

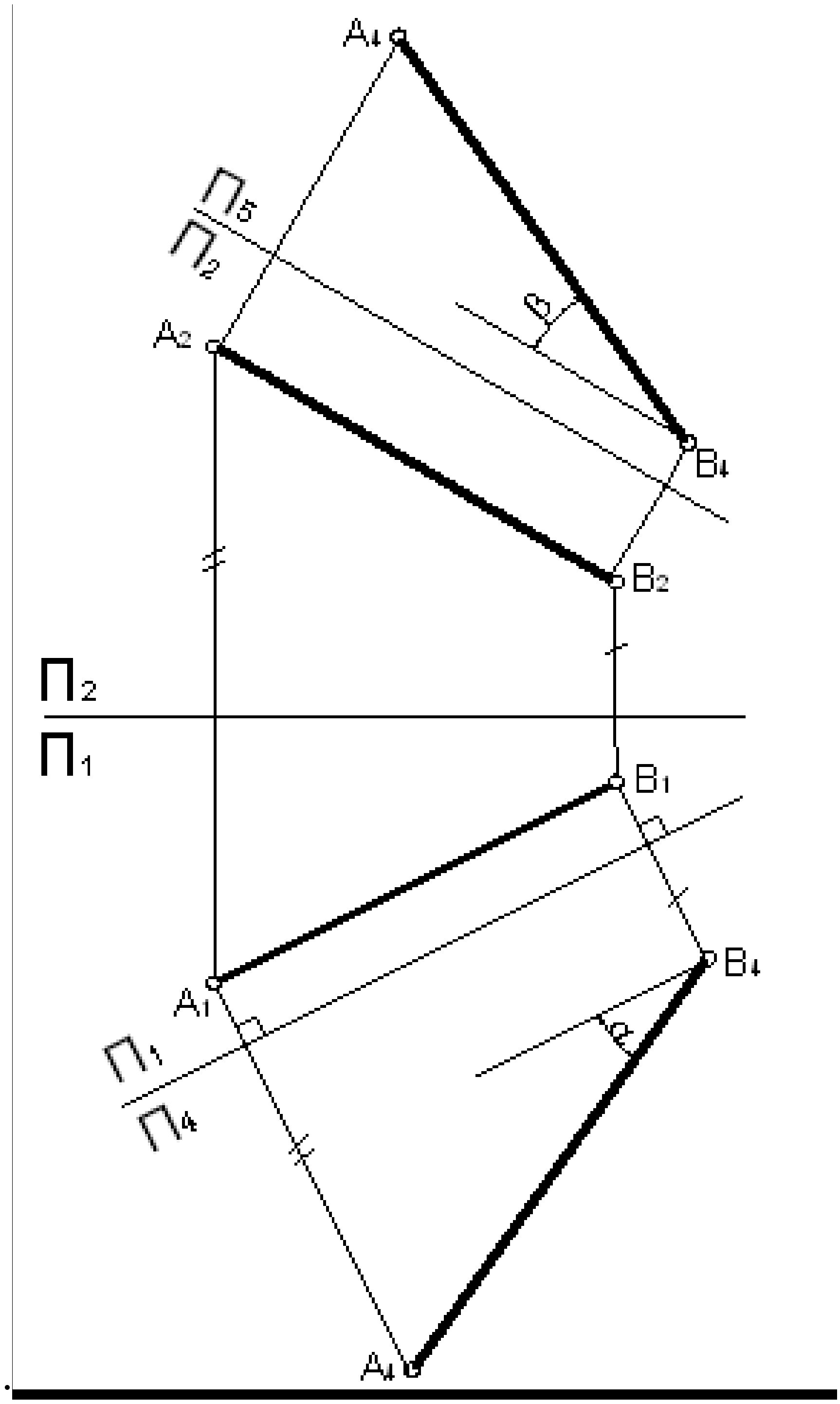


Рис. 67

Задача 2. Знайти натуральну величину трикутника *АВС* методом плоско паралельного переміщення.

Порядок виконання задачі наступний:

1.По координатам будуємо фронтальну та горизонтальну проекції трикутника *АВС*.

2.Методом плоско паралельного переміщення площину загального положення, задану трикутником *АВС,* перетворюємо в проектуючу площину (третя основна задача), порядок побудови див. п.14, рис.49.

3.Методом плоско паралельного переміщення площину проектуючи перетворюємо в площину рівня (четверта основна задача), порядок побудови див. п.14, рис.50.

Приклад виконання задачі 2 модулю №3 представлений на рисунку 68.

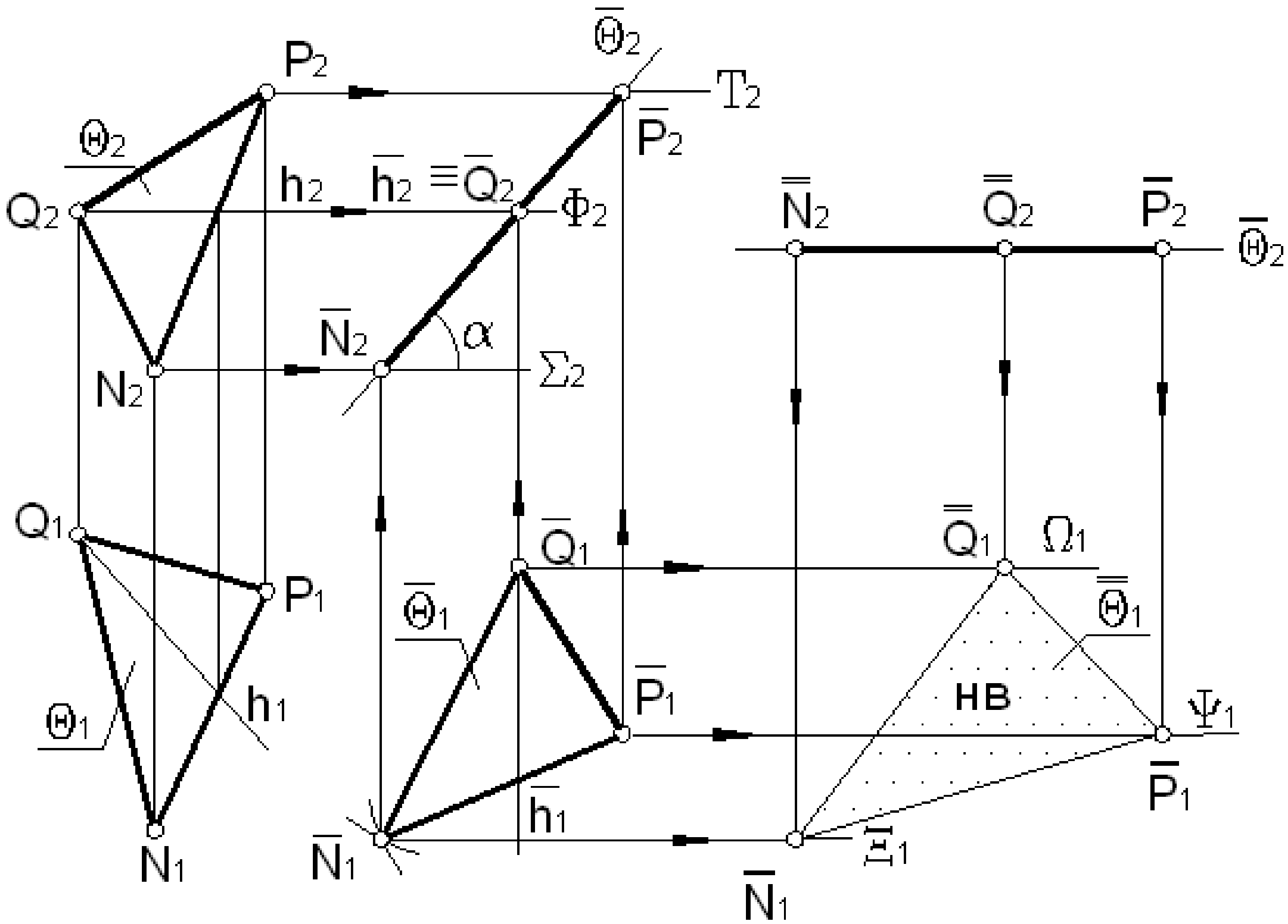


Рис. 68

Питання до захисту модуля №3:

1.Мета перетворення креслення.

2.Способи перетворення креслення: їх недоліки та переваги.

3.Як пряму загального положення перетворити на проектуючу?

4.Як площину загального положення перетворити на площину рівня?

5.Якіх умов необхідно дотримуватися при виконанні перетворень методом заміни площин проекцій?

6.Знайти натуральну величину відрізку методом обертання навколо проектуючої прямої.

7. Знайти натуральну величину відрізку методом плоско паралельного переміщення.

8. Знайти натуральну величину відрізку методом заміни площин проекцій.

9. Знайти натуральну величину трикутного відсіку методом плоско паралельного переміщення.

10. Знайти натуральну величину трикутного відсіку методом заміни площин проекцій

11.Назвати чотири основні задачі перетворення креслення.

<u>Завдання до модулю №4</u>

Виконати розгортку багатогранної поверхні.

Варіанти завдань для побудови умов задач беруться з таблиці 2.

Порядок виконання задачі наступний:

1.Накреслити дві проекції багатогранника (піраміди або призми, в залежності від варіанту).

2.При необхідності методом обертання навколо вісі знайти натуральну величину ребер.

3.Виконати розгортку , приклад див. рис.61,62.

Питання до захисту модуля №4:

1. Що називається багатогранником?
2. Які елементи багатогранників вам відомі?
3. Види багатогранних поверхней.
4. Різновиди тіл Платона.
5. Яка призма називається правильною?
6. Яка піраміда називається правильною?
7. Що називається розгорткою?

	Таблиця 1. Координати точок											
№ варіанту	**A**			**B**			**C**			**D**		
	X	**Y**	**Z**	**X**	**Y**	**Z**	**X**	**Y**	**Z**	**X**	**Y**	**Z**
1	115	75	40	50	5	100	0	40	45	135	0	20
2	100	10	30	60	70	65	5	20	5	105	15	0
3	0	0	40	120	30	60	70	75	15	0	65	60
4	0	5	30	100	30	60	70	75	15	0	50	65
5	5	0	40	100	30	60	70	70	15	0	60	60
6	0	0	40	110	30	65	70	75	10	0	60	65
7	0	0	45	100	35	65	70	75	10	0	70	60
8	0	5	35	100	40	65	60	70	20	0	60	65
9	110	0	35	70	65	65	0	25	0	110	10	0
10	100	5	40	70	70	60	5	30	0	110	10	0
11	90	5	30	70	65	60	0	25	0	100	20	0
12	90	5	40	60	70	70	0	25	0	100	25	0
13	90	0	30	60	60	55	5	30	0	110	25	5
14	100	0	30	60	60	70	5	30	10	110	45	5
15	115	10	90	50	80	25	0	45	80	70	85	110
16	120	40	75	50	100	5	0	45	40	135	20	0
17	20	10	40	85	80	110	125	50	50	70	85	20
18	20	10	40	85	80	110	135	50	50	55	85	20
19	115	10	40	50	80	110	0	50	60	70	85	20
20	115	90	10	55	25	80	0	80	45	65	105	80
21	120	90	10	50	25	80	0	80	50	70	110	85

Продовження таблиці 1

№ варіанту	A			B			C			D		
	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
22	117	90	10	55	25	80	0	85	50	70	110	85
23	20	10	90	85	80	25	135	50	80	70	85	110
24	115	10	90	50	80	25	0	50	85	70	85	110
25	115	10	85	50	80	25	0	50	85	70	85	110
26	120	90	10	50	20	75	0	80	45	70	115	85
27	117	10	90	50	80	25	0	50	85	70	85	110
28	120	10	90	50	80	20	0	50	80	65	80	110
29	20	35	40	45	75	15	5	65	35	110	15	20
30	105	40	40	85	60	30	30	20	10	70	85	85

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Базова

1. Бенке Й. З. Збірник тестів з інженерної графіки. Технічне креслення : навчальний посібник. Київ : Кондор, 2024. 184 с.
2. Браілов О. Ю. Інженерна геометрія : підручник. Київ : Каравела, 2023. 516 с.
3. Ванін В. В., Ковальов С. М., Михайленко В. Є. Інженерна та комп’ютерна графіка : підручник. Київ : Каравела, 2018. 360 с.
4. Воронцов Б. С., Бочарова І. А. Нарисна геометрія : навчальний посібник. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. 187 с.
5. Інженерна та комп’ютерна графіка: практикум для навчання в умовах інформаційно-освітнього середовища: навч. посіб. / Д. В. Бабенко, Н. А. Доценко, О. А. Горбенко, С. М. Степанов. Миколаїв: МНАУ, 2020. 256 с. URL: http://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/8072
6. Козяр М.М., Фещук Ю.В. Комп’ютерна графіка: AutoCAD : навчальний посібник. Херсон : Грінь Д.С., 2024. 304 с.
7. Колосова О. П., Баскова Г. В., Лазарчук М. В. Навчальні завдання з нарисної геометрії, інженерної та комп’ютерної графіки для програмованого навчання : навчальний посібник. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 94 с.
8. Костюкова Т. І. Інженерна графіка: практикум : навчальний посібник. Львів : Новий Світ–2000, 2025. 365 с.
9. Надкернична Т. М., Лебедєва О. О. Курс комп’ютерної графіки в середовищі AutoCAD. Теорія. Приклади. Завдання : навчальний посібник. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. 191 с.
10. Основи інженерної графіки з елементами професійного конструювання : підручник / І. О. Чермних та ін. ; за ред. О. О. Краєвська. Київ : Кондор, 2020. 240 с.

11. Основи інженерної графіки з елементами професійного конструювання: підручник / за ред. І. О. Чермних. Київ: Кондор, 2020. 240 с.
12. Пустюльга С. І., Самчук В. П., Воробчук М. С. Інженерна та комп’ютерна графіка : навчальний посібник. Луцьк : Просто Друк, 2024. 324 с.
13. Інженерна графіка : навчальний посібник / уклад. В. І. Ковбашин, А. І. Пік. Тернопіль : Підручники і посібники, 2023. 240 с.
14. Bethune J., Byrnes D. Engineering Graphics with AutoCAD 2023. Peachpit Press, 2022. 832 p.

Допоміжна література

1. Волошкевич П. П., Бойко О. О., Базишин П. А., Мацура Н. О. Технічне креслення та комп’ютерна графіка : навчальний посібник. Київ : Кондор-Видавництво, 2017. 234 с.
2. Кравченко І. В., Микитенко В. І. Розробка конструкторської документації в середовищі AutoCAD Mechanical : навчальний посібник. Київ : НТУУ «КПІ», 2016. 342 с.
3. Пустюльга С. І., Самостян В. Р. Машинобудівне креслення : навчальний посібник. Луцьк : Луцький НТУ, 2015. 275 с.
4. Василюк А. С., Мельникова Н. І. Комп'ютерна графіка : навчальний посібник. Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2016. 308 с.
5. Власій О. О., Дудка О. М. Комп'ютерна графіка. Обробка растрових зображень : навчально-методичний посібник. Івано-Франківськ : ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника», 2015. 72 с.
6. Інженерна та комп’ютерна графіка : конспект лекцій / уклад. О. П. Скиба, В. І. Ковбашин, А. І. Пік. Тернопіль : Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, 2019.60 с.
7. Лютова О. В., Скоробогата М. В., Бовкун С. А. Вплив технологічних особливостей виготовлення деталей на методику нанесення розмірів : навчальний посібник. Запоріжжя : ЗНТУ, 2018. 88 с.

8. Про затвердження порядку розроблення проектної документації на будівництво об'єктів : наказ Міністерства регіонального розвитку, будівництва та житлово-комунального господарства України від 16.05.2011 № 45 ; станом на 08 грудня 2023 р. URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/z0651-11.

9. Kernytskyy I, Hlinenko L, Yakovenko Y, Horbay O, Koda E, Rusakov K, Yankiv V, Humenuyk R, Polyansky P, Berezovetskyi S, Kalenik M, Szlachetka O. Problem-Oriented Modelling for Biomedical Engineering Systems. Applied Sciences. 2022; 12(15):7466. https://doi.org/10.3390/app12157466.

10. Nykyforov A., Antoshchenkov, R., Halych, I., Kis, V., Polyansky, P., Koshulko, V., Tymchak, D., Dombrovska, A., & Kilimnik, I. (2022). Construction of a regression model for assessing the efficiency of separation of lightweight seeds on vibratory machines involving measures to reduce the harmful influence of the aerodynamic factor. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 2(1 (116), 24–34. https://doi.org/10.15587/1729-4061.2022.253657.

ЗМІСТ

ДЛЯ НОТАТОК

Навчальне видання

ІНЖЕНЕРНА ТА КОМП'ЮТЕРНА ГРАФІКА

Методичні рекомендації

Укладачі: Полянський Павло Миколайович,

Доценко Наталя Андріївна,

Іванов Геннадій Олександрович,

Степанов Сергій Миколайович,

Баранова Олена Володимирівна

Формат 60x84 1/16. Ум. друк. арк. 3,4.
Тираж 50 прим. Зам № ___.

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.