

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Миколаївський національний аграрний університет
Інженерно-енергетичний факультет
Кафедра загальнотехнічних дисциплін



ІНЖЕНЕРНА ТА КОМП'ЮТЕРНА ГРАФІКА

методичні рекомендації

для виконання практичних робіт і самостійної роботи
змістовного модуля «Позиційні та метричні задачі»
здобувачами першого (бакалаврського) рівня
вищої освіти ОПП «Харчові технології»
спеціальності G13 «Харчові технології»
денної форми здобуття вищої освіти

Миколаїв

2026

Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету.

Протокол № 5 від 19 «лютого» 2026 року.

Укладачі:

Полянський П.М. – доцент кафедри загальнотехнічних дисциплін Миколаївського національного аграрного університету;
Доценко Н.А. – професорка кафедри загальнотехнічних дисциплін Миколаївського національного аграрного університету;
Іванов Г.О. – доцент кафедри загальнотехнічних дисциплін Миколаївського національного аграрного університету;
Степанов С.М. – старший викладач кафедри загальнотехнічних дисциплін Миколаївського національного аграрного університету;
Баранова О.В. – асистентка кафедри загальнотехнічних дисциплін Миколаївського національного аграрного університету.

Рецензенти:

Марченко Д. Д. – доцент кафедри тракторів та сільськогосподарських машин, експлуатації та технічного сервісу Миколаївського національного аграрного університету;
Бабенко Д. В. – професор кафедри загальнотехнічних дисциплін Миколаївського національного аграрного університету.

ВСТУП

В інженерній графіці розглядаються два види задач: *позиційні і метричні*. В основі рішення позиційних і метричних задач лежать позиційні і метричні властивості пар їх проекцій.

Задачі, пов'язані з рішенням питань взаємного розташування геометричних фігур на комплексному кресленні, називаються *позиційними*.

До *метричних* відносяться задачі, пов'язані з визначенням істинних (натуральних) величин відстаней, кутів і плоских фігур на комплексному кресленні. Можна виділити три групи метричних задач.

При рішенні позиційних задач з'ясовують взаємне розташування (позицію) двох і більшого числа геометричних фігур. Поняття *взаємне розташування* включає також приналежність однієї фігури іншій. При цьому можливі випадки:

1) повної належності, наприклад, точка належить прямій, пряма належить площині (пряма є підмножина площини); 2) перетини, наприклад, пряма перетинається з площиною (пряма не є підмножиною площини), одна площина перетинається з іншою, 3) відсутність належності, наприклад, у двох прямих, що схрещуються.

До метричних задач відносять такі, в умові або рішенні яких присутні геометричні поняття, пов'язані з чисельною характеристикою. Рішенням метричних задач визначаються

перпендикулярність геометричних фігур і чисельні характеристики фігур: відстань, площа, кут і т.п.

Нижче розглянуті метричні і позиційні властивості проєкцій найпростіших геометричних фігур в поєднанні їх по дві, сформульовані відповідні властивості і слідства, що витікають з них.

1.1 ТОЧКА І ПРЯМА

Точка може належати прямій або не належати їй. Для вирішення питання про належність достатньо досліджувати їх проєкції, взявши до уваги наступну властивість: *точка належить прямій, якщо її проєкції належать тим же проєкціям прямої, і не належить прямій, якщо хоча б одна її проєкція не належить тій же проєкції прямій.*

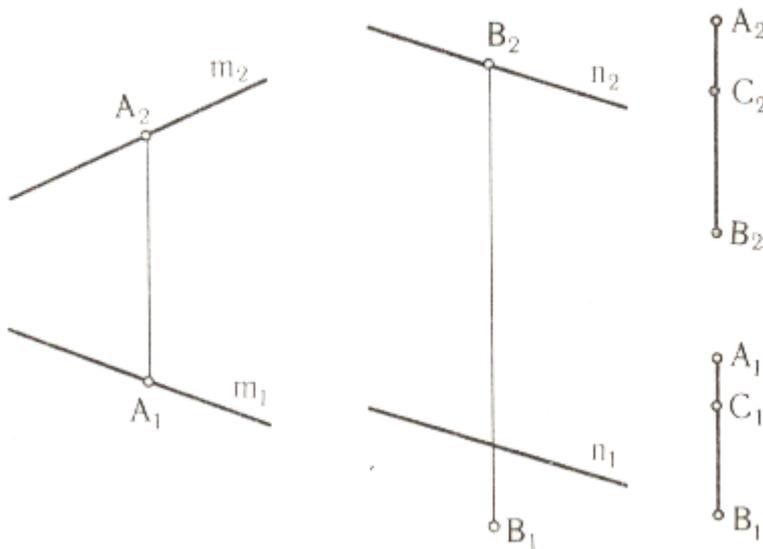


Рис.1

На рис. 1 показані прямі m і n . Точка A , проекції якої інцидентні відповідним проекціям прямої m , належить цій прямій. Точка B не належить прямій n , оскільки її горизонтальна проекція не інцидентна горизонтальній проекції прямої. Для двох проекцій (фронтальній і горизонтальній) профільної прямої умови інцидентності недостатньо, оскільки якщо пряма і точка належать одній профільній площині, то проекції точок завжди інцидентні проекціям прямих. В цьому випадку необхідно внести визначеність, що полягає в тому, що на профільній прямій фіксується двома точками її відрізок, а точка, що належить прямій, повинна ділити проекції цього відрізка в одному і тому ж відношенні на фронтальній і горизонтальній проекціях.

Метричні характеристики двох геометричних фігур виражаються, як правило, у визначенні відстаней і кутів між ними. Розглянемо такі положення геометричних фігур, при яких ці відстані і кути проектуються у натуральну величину.

Почнемо з взаємного розташування точки і прямої.

При загальному розташуванні прямої відстань від точки до прямої проектується у натуральну величину, якщо ця пряма є лінією нахилу площини, яка задається точкою і прямою. В цьому випадку відрізок, що виміряє відстань від точки до прямої, паралельний одній з площин проекцій, а значить проектується на неї без спотворення. На рис. 2 показана пряма m і точка A . Пряма є лінією нахилу (лінією ската) щодо площини Π_1 . Відстань від точки до прямої вимірюється відрізком горизонтальної прямої.

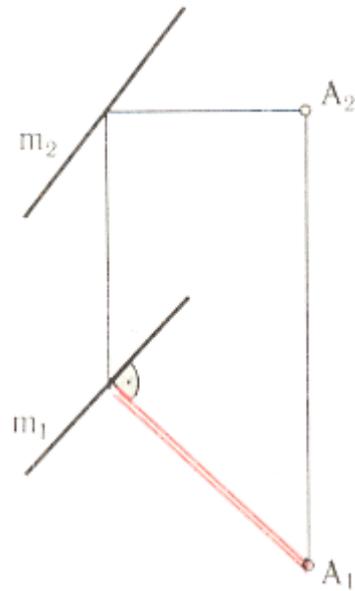


Рис.2

Сформулюємо властивість: *відстань від точки до прямої проектується в натуральну величину, якщо пряма є лінією нахилу*

площини, заданою точкою і прямою, до однієї з площин проєкцій.

З цієї властивості можна вивести два слідства:

Слідство 1. *Відстань від точки до прямої проектується у натуральну величину на горизонтальній проєкції, якщо пряма вертикальна, і на фронтальній, якщо пряма фронтально-проектує.*

На рис. 3, а показана вертикальна пряма m і точка A , відстань між прямою і точкою зобразиться без спотворення на горизонтальній проєкції.

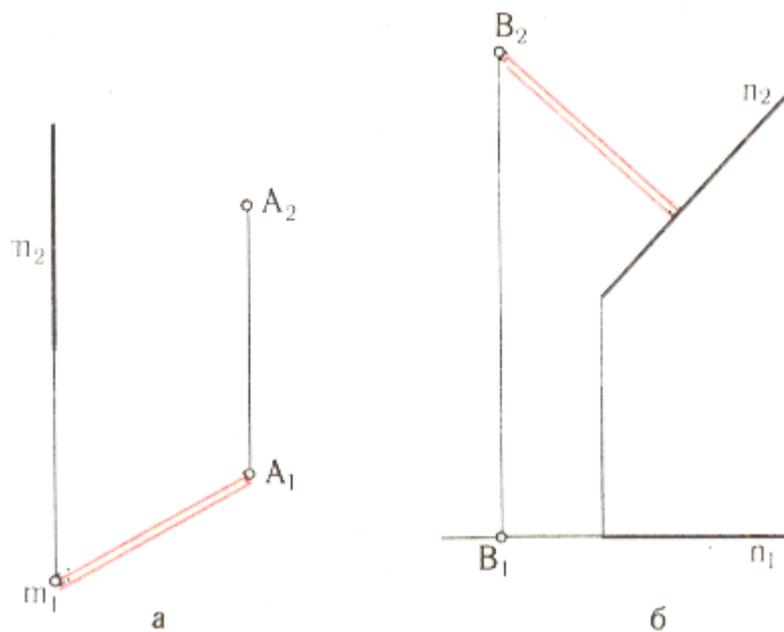


Рис.3

***Слідство 2.** Відстань від точки до прямої проектується у натуральну величину на горизонтальній проекції, якщо площина, задана точкою і прямою, горизонтальна, і на фронтальній проекції, якщо ця площина фронтальна.*

На рис. 3, б показана пряма n і точка B , що дають фронтальну площину. Відстань від точки до прямої зобразиться без спотворення на фронтальній проекції.

1.2. ДВІ ПРЯМІ

Прямі перетинаються, якщо мають одну загальну власну або невластну точку; прямі схрещуються, якщо не мають загальну точку. Дві прямі в просторі в загальному положенні схрещуються. В цьому випадку, як відомо з середньої школи, через них можна провести єдину пару площин, паралельних площині паралелізму

(це площина, паралельна двом прямим, що схрещуються). Її можна задати, якщо через довільну точку простору провести дві прямі, паралельні прямим, що схрещуються. Відстань між прямими дорівнює відстані між цими площинами. При зменшенні цієї відстані до нуля дві площини зливаються в одну і прямі стають пересічними. Якщо точка їх перетину віддаляється в нескінченність — прямі паралельні. По проєкціях прямих на комплексному кресленні можна судити про те, яке вони займають положення.

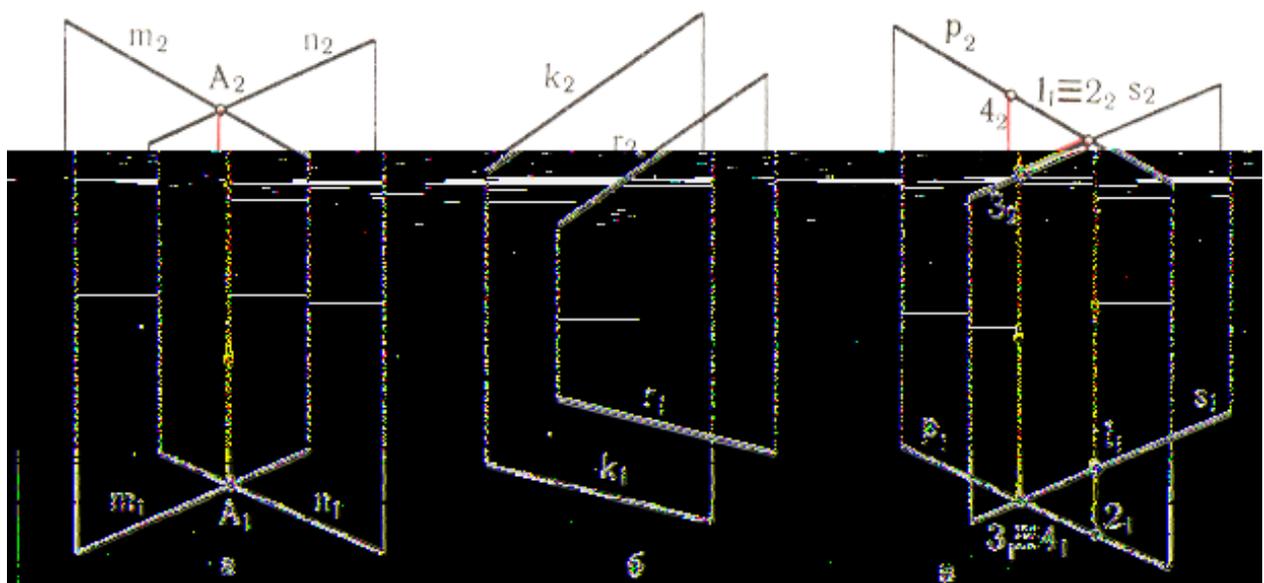


Рис.4

Сформулюємо властивості: якщо точки перетину однойменних проєкцій прямих загального положення належать одній вертикальній лінії зв'язку, прямі перетинаються (рис. 4, а); якщо однойменні проєкції прямих паралельні між собою, прямі паралельні (рис 4, б); якщо точки перетину однойменних проєкцій

прямих не належать одній вертикальній або горизонтальній лінії зв'язку, прямі схрещуються (рис. 4, в).

Звернемося до рис. 4в, де зображено дві прямі, що схрещуються. Фронтальні проекції перетинаються в точці $1_2 \equiv 2_2$, а горизонтальні — в точці $3_1 \equiv 4_1$. Конкуруючі точки (точки, що належать одній проектуючій прямій) використовують при визначенні видимості геометричних елементів.

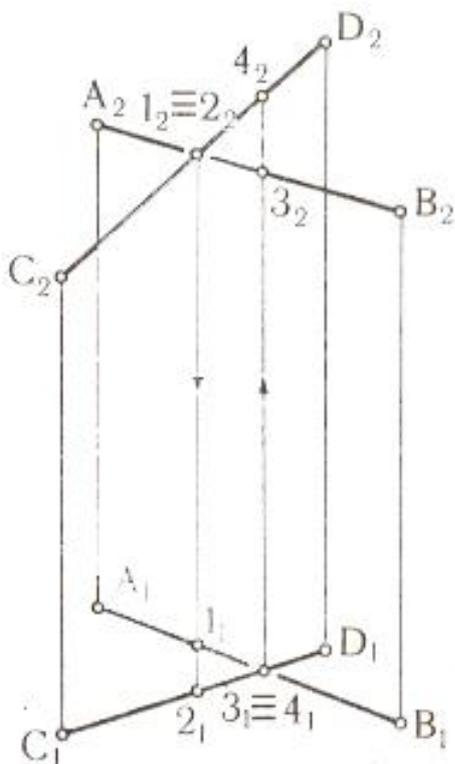


Рис.5

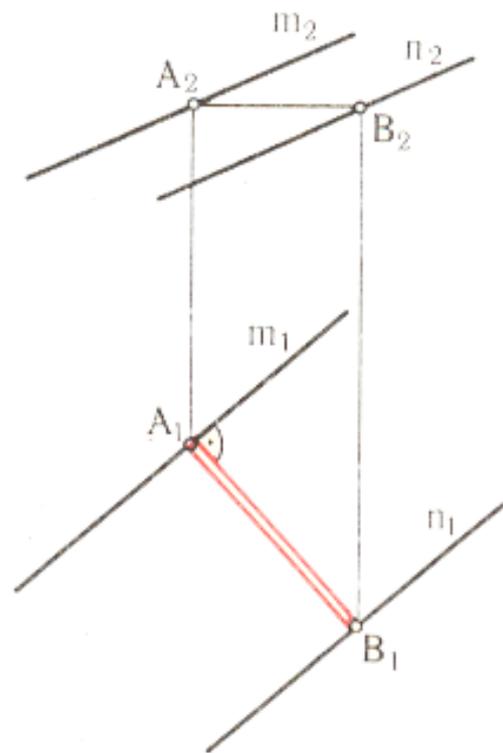


Рис.6

На рис. 5 приведено два відрізки прямих AB і CD , що схрещуються. Для визначення «перекриття» їх на проекціях відзначені конкуруючі точки 1 і 2 щодо площини Π_2 і точки 3 , 4 щодо площини Π_1 . При цьому точки 1 і 3 належать відрізку AB , а точки 2 і 4 — відрізку CD . Оскільки точка 4 розташована вище за точку 3 , на площині Π_1 відрізок CD «перекриває» відрізок AB .

Точка 2 розташована ближче за точку 1, тому на площині Π_2 відрізок CD «перекриває» відрізок AB .

Розглянемо метричні властивості двох паралельних прямих. На підставі властивості відстані від точки до прямої сформулюємо властивість, що стосується відстані між паралельними прямими

Відстань між двома паралельними прямими загального положення зображається у натуральну величину, якщо прямі є лініями нахилу площини, яку вони задають, до однієї з площин проєкцій. Так, якщо на одній з паралельних прямих узяти точку, то ця задача може бути зведена до попередньої задачі на відстань від точки до прямої, що є лінією нахилу.

На рис. 6 показана відстань між двома лініями нахилу m і n , що вимірюється відрізком горизонтальної прямої AB .

З приведеної вище властивості можна вивести два слідства:

1. *Відстань між паралельними прямими проєктується у натуральну величину на горизонтальній проєкції, якщо прямі вертикальні, і на фронтальній, якщо прямі фронтально-проєктуючі (рис. 7, а).*

2. *Відстань між паралельними прямими зображається у натуральну величину на горизонтальній проєкції, якщо задана ними площина горизонтальна, і на фронтальній, якщо ця площина фронтальна (рис. 7, б).*

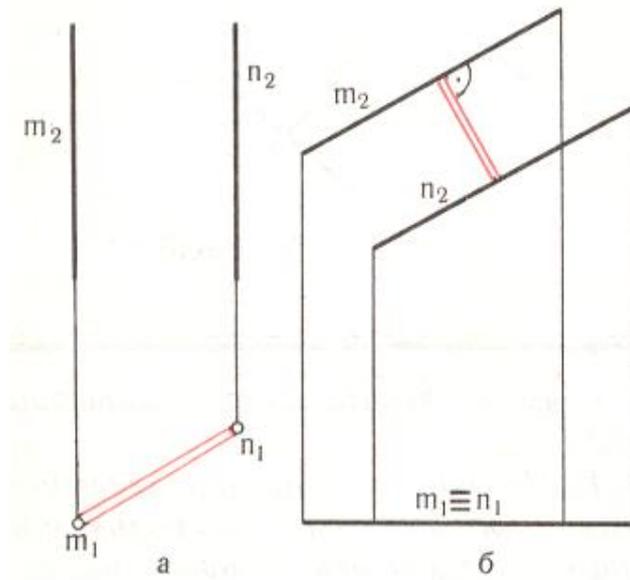


Рис.7

Кут між прямими, що схрещуються або являються пересічними, проектується у натуральну величину на горизонтальній проекції, якщо прямі горизонтальні, і на фронтальній, якщо прямі фронтальні (рис.8).

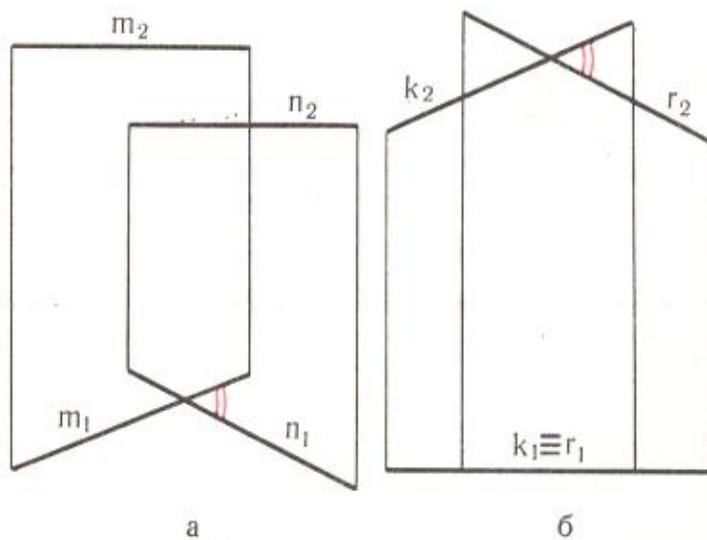


Рис.8

Оскільки взаємно перпендикулярними можуть бути дві прямі, пряма і площина і дві площини, розглянемо послідовно всі ці випадки на прикладах. На рис.9 показані дві взаємно перпендикулярні площини — горизонтальна Π_1 і вертикальна Π_4 . Окрім цього, задана горизонтальна пряма m , що належить Π_4 , і вертикальна площина Π_5 , перпендикулярна до прямої m в точці A , а значить і до площини Π_4 .

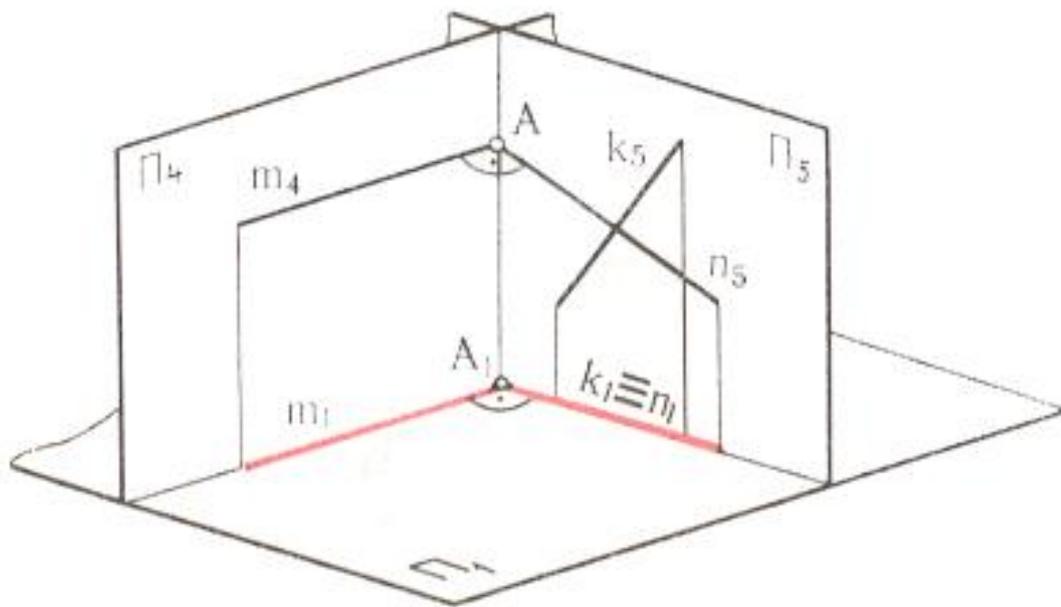


Рис.9

Через точку A проходить пряма n , що належить площині Π_5 і яка створює, як відомо, з прямою m прямий кут. Цей кут проектується без спотворення на горизонтальну площину проєкцій Π_1 , оскільки його сторони лежать на гранях горизонтально-проєктуючого прямого двогранного кута, утвореного площинами Π_4 і Π_5 . Неважко помітити, що якщо в площині Π_5 узяти довільну пряму k (яка завжди буде перпендикулярна до m), що схрещується

з прямою m , то цей прямий кут схрещення також зпроектується без спотворення на горизонтальну площину проєкції.

На підставі приведених міркувань можна сформулювати наступну властивість.

Прямий кут перетину або схрещення проєктується у натуральну величину на горизонтальній проєкції, якщо хоча б одна його сторона горизонтальна, і на фронтальній, якщо хоча б одна сторона його фронтальна. При цьому друга сторона прямого кута не повинна бути проєктуючою, оскільки в цьому випадку проєкція прямого кута перетину перетворюється в лінію. На рис. 10, а є показаний прямий кут перетину, одна сторона якого горизонтальна, і прямий кут схрещення, одна сторона якого фронтальна (рис. 10, б), ці кути проєктуються в першому випадку на Π_1 , а в другому — на Π_2 у натуральну величину.

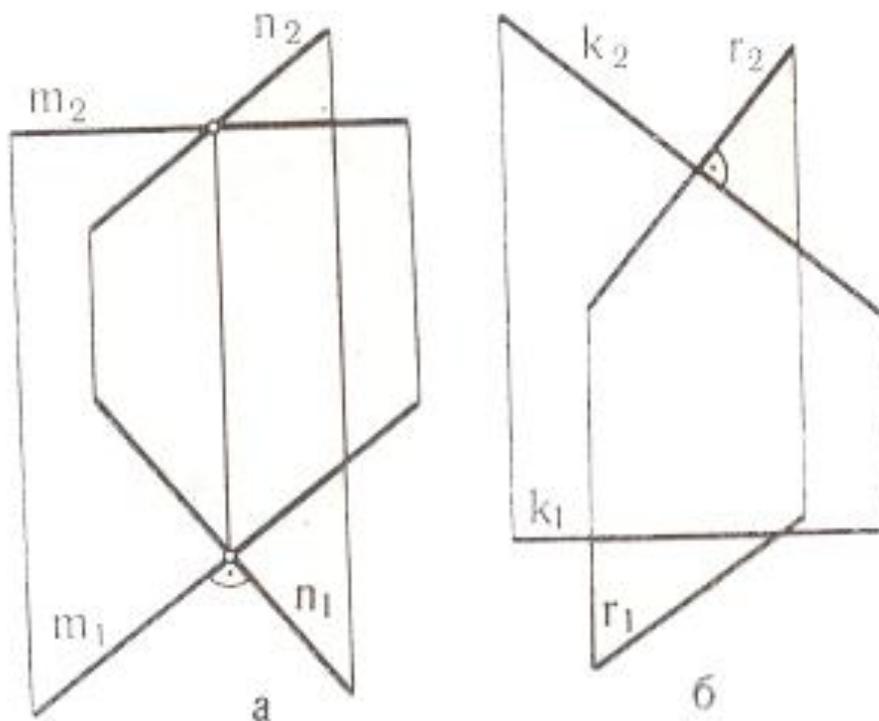


Рис.10

3. ПРЯМА І ПЛОЩИНА

Щоб з'ясувати взаємне положення прямої і площини, скористаємося *способом перетину*

Алгоритм рішення складається з трьох операцій:

1) пряма заключається в допоміжну площину;
2) визначається лінія перетину заданої площини з допоміжною;

3) з'ясовується взаємне положення двох прямих: заданої і лінії перетину.

При цьому можливі три випадки:

дві прямі перетинаються в одній точці, значить, пряма перетинається з площиною в цій точці;

дві прямі паралельні, значить, пряма паралельна площині;

дві прямі співпадають, значить, пряма є підмножина площини.

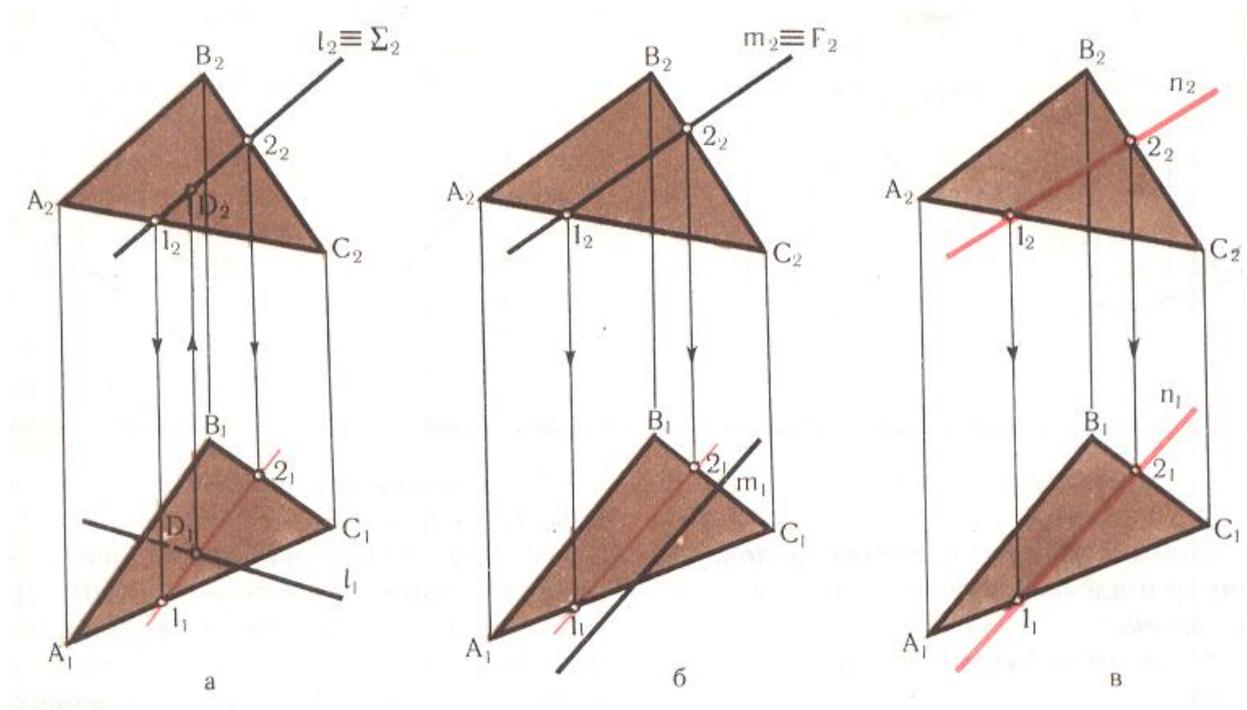


Рис.11

На рис. 11, а є зображений трикутний відсік ABC і пряма загального положення l . Для визначення їх взаємного положення використана фронтально-проектуюча площина Σ , проведена через пряму l . Знайдена лінія перетину двох площин — пряма $l-2$.

З розгляду горизонтальних проєкцій прямих l_1 і $l_1 2_1$ видно, що пряма l перетинається з площиною в точці D , фронтальна проєкція якої визначається по вертикальній відповідності.

В символічному записі $\Sigma_2 \supset l_2, l_2 2_2 \equiv l_2, l_1 2_1 \times l_1 = D_1$

На рис. 11, и побудована пряма m , паралельна площині відсіку ABC . Для цього також була побудована пряма $l-2$, отримана в результаті перетину трикутного відсіку з фронтально-проектуючою площиною Γ . Горизонтальна проєкція прямої m_1 повинна бути паралельна горизонтальній проєкції прямої $l-2$

$(\Gamma_2 \supset m_2, l_2 2_2 \equiv m_2, m_1 \parallel l_1 2_1)$.

На рис. 11, в показана пряма n , проєкції якої співпадають з проєкціями прямої $l-2$, , що належить площині. Значить, пряма належить площині ($l_2 2_2 \equiv n_2, l_1 2_1 \equiv n_1$).

Визначення точки перетину прямої з площиною — *перша основна позиційна задача* курсу інженерної графіки. До неї можна звести більшість позиційних задач.

Метричні характеристики поєднання — пряма і площина — торкаються визначення відстані між прямою і паралельною їй площиною, а також кута між прямою і площиною, якщо пряма і площина не паралельні. *Відстань від прямої до паралельної їй площини проєктується у натуральну величину на горизонтальній проєкції, якщо площина вертикальна, і на фронтальній, якщо вона*

фронтально-проектуюча.. На рис. 12 показана відстань між вертикальною площиною Θ і прямою m .

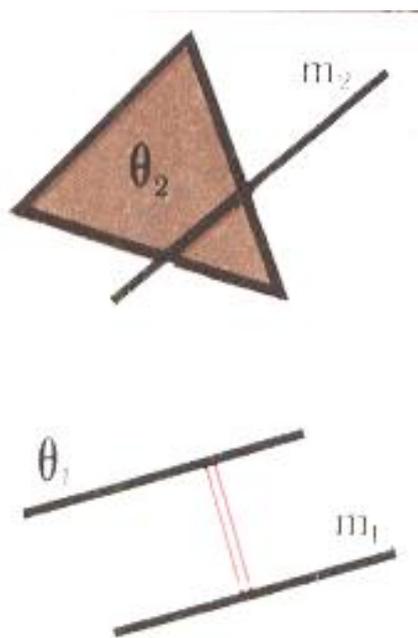


Рис.12

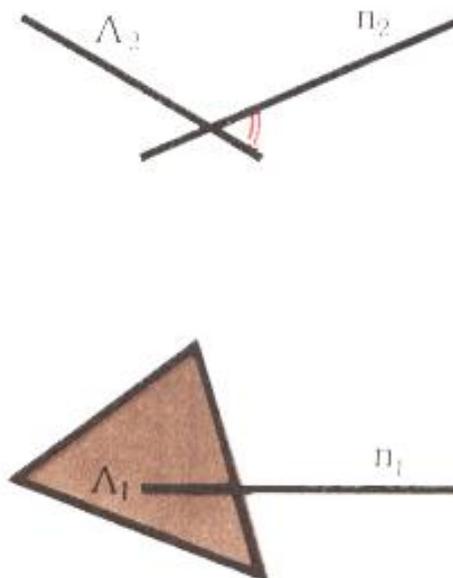


Рис.13

Кут між прямою і площиною визначається такою властивістю: кут між прямою і площиною проектується у натуральну величину на горизонтальній проекції, якщо площина вертикальна, а пряма горизонтальна, і на фронтальній проекції, якщо площина фронтально-проектуюча, а пряма фронтальна.

На рис.13 показаний кут між фронтально-проектуючою площиною Λ і фронтальною прямою n .

Як відомо, пряма перпендикулярна площині, якщо вона перпендикулярна до двох прямих, що належать площині. Беручи до уваги властивості проєкцій прямого кута, зі всієї безлічі прямих площини доцільно в якості цих ліній вибрати лінії рівня, тобто горизонталь і фронталь.

На рис. 14 показаний трикутний відсік, сторона якого AC є горизонталлю, а AB — фронталлю. Щоб з точки D опустити перпендикуляр на площину цього відсіку, достатньо провести фронтальну проекцію його перпендикуляра до фронтальної проекції фронталі A_2B_2 , а горизонтальну — перпендикулярно до горизонтальної проекції горизонталі A_1C_1 .

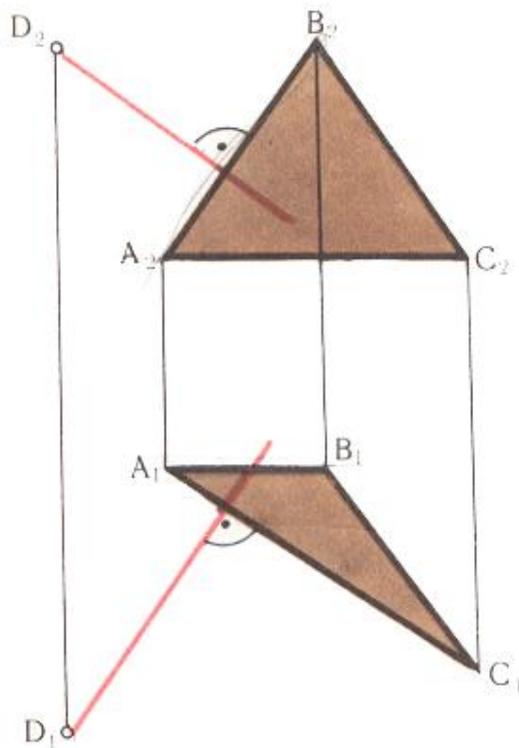


Рис.14

Сформулюємо властивість: *проекція прямої, що перпендикулярна до площини, на горизонтальній проекції площини перпендикулярна до проекції горизонталі, на фронтальній — перпендикулярна до проекції фронталі площини.*

На рис. 14 точка перетину перпендикуляра з площиною, тобто його основа, відсутня. Щоб її знайти, достатньо вирішити першу основну позиційну задачу, тобто визначити точку перетину прямої з площиною.

Якщо на кресленні площини горизонталь і фронталь не показані, для проведення перпендикуляра до площини їх необхідно провести.

4. ТОЧКА І ПЛОЩИНА

Точка може належати площині або не належати їй. Це визначається за допомогою прямої, що належить площини.

На рис. 15 показаний трикутний відсік ABC і задані точки 1 і 2. Точка 1 належить площині, оскільки вона належить прямій BD , яка являється підмножиною площини, точка 2 не належить площині, оскільки тільки фронтальна проекція її належить фронтальній проекції прямої D_2B_2 , а горизонтальна проекція не належить D_1B_1 .

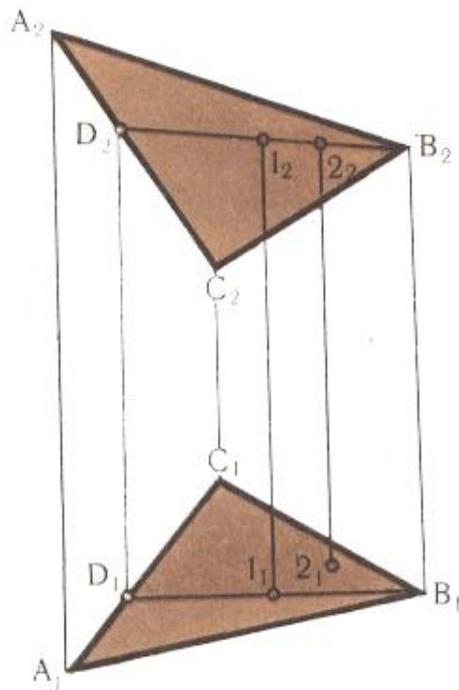


Рис.15

Можна сформулювати наступну властивість: *точка належить площині, якщо обидві її проекції співпадають з тими ж проекціями прямої, що належить площині..*

Метрична характеристика визначається такою властивістю: *відстань від точки до площини проектується у натуральну величину на горизонтальній проекції, якщо площина вертикальна, і на фронтальній, якщо площина фронтально-проектуюча.* На рис. 16 показані точка A і вертикальна площина Φ , відстань між ними проектується без спотворення на горизонтальній площині проєкцій.

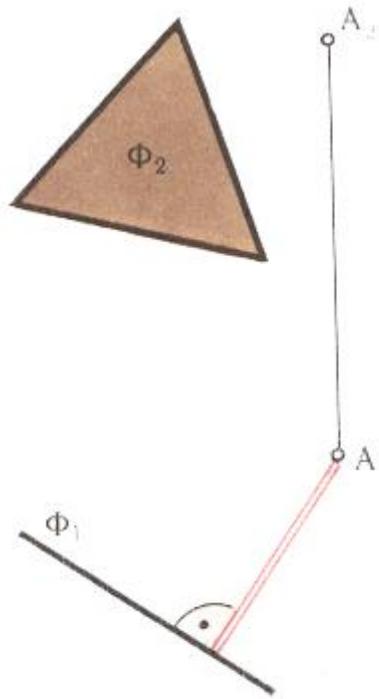


Рис.16

5. ДВІ ПЛОЩИНИ

Дві площини завжди між собою перетинаються. Якщо лінія їх перетину — невласна пряма, площини паралельні. Тому щоб з'ясувати взаємне положення двох площин, знаходять лінію їх перетину — *друга основна позиційна задача*. Для цього достатньо визначити дві точки, що належить цій лінії. Рішення такої задачі можна звести до попередньої, тобто до перетину прямої з площиною, повторивши його двічі. На рис. 17 показано дві площини: одна задана трикутним відсіком, а інша — двома паралельними прямими. Знаходимо точку перетину кожній з паралельних прямих з трикутним відсіком. Для цього скористаємося фронтально-проектуючими допоміжними площинами Σ і Ω , які перетнуть трикутний відсік по прямим 1—2 і 3—4. Точки D і E визначають лінію перетину двох площин:

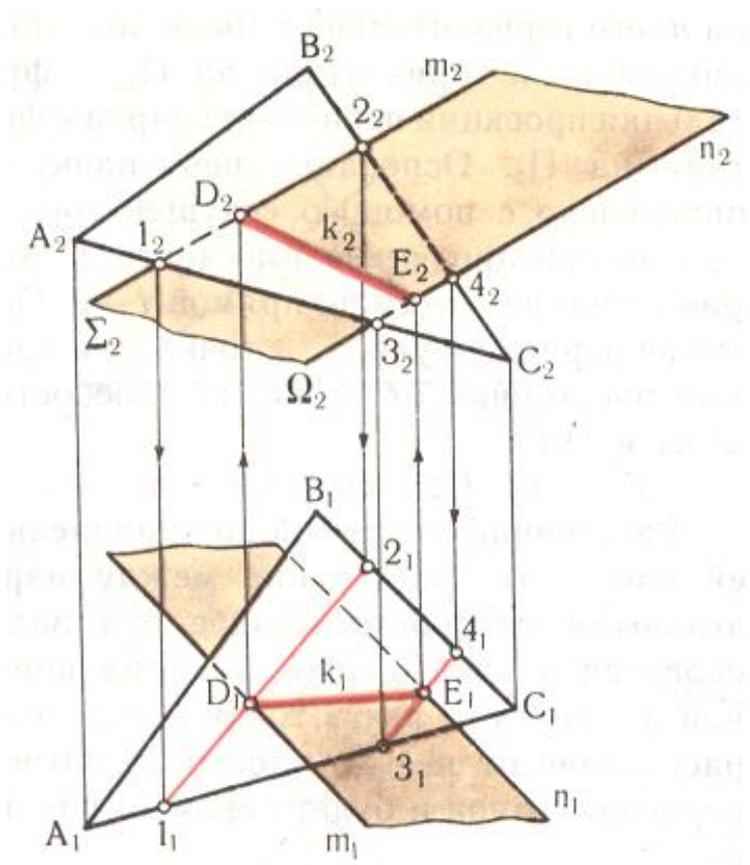


Рис.17

$$\Sigma_2 \supset m_2; \Omega_2 \supset n_2; I_2J_2 \equiv m_2; K_2L_2 \equiv n_2;$$

$$I_1J_1 \times m_1 = D_1; K_1L_1 \times n_1 = E_1; \kappa \supset DE.$$

Таким чином, для визначення лінії перетину двох площин способом перетинів знаходять дві точки перетину прямих однієї з площин з іншою площиною.

На рис. 18 зображено дві площини: одна задана трикутним відсіком, друга — двома паралельними прямими m і n . Ці площини паралельні, оскільки прямі m і n паралельні прямим $1-2$ і $3-4$, отриманим в результаті перетину відсіку фронтально-проектуючими площинами A і G .

Із елементарної геометрії відомо: якщо дві пересічні прямі однієї з площин відповідно паралельні двом пересічним прямим іншої площини, то площини паралельні:

$$\Lambda_2 \supset m_2; \quad \Gamma_2 \supset n_2; \quad m_2 \equiv l_2 2_2; \quad n_2 \equiv 3_2 4_2;$$

$$m_1 \parallel n_1 \parallel l_1 2_1.$$

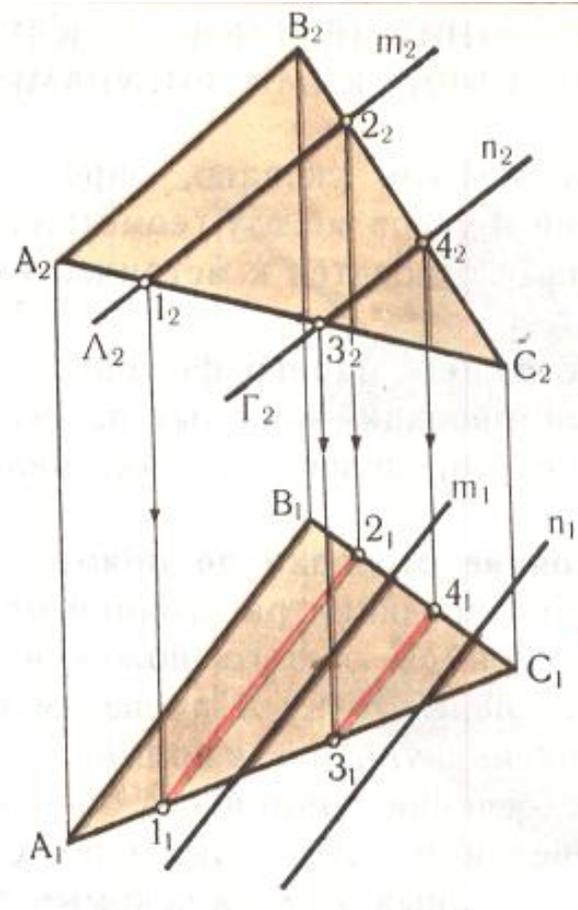


Рис.18

Розглянемо метричні характеристики — відстані і кути між двома площинами.

Відстань між паралельними площинами проектується у натуральну величину на горизонтальну площину проєкцій, якщо площини вертикальні, і на фронтальну, якщо площини фронтально проєктуючи.

На рис. 19 показана відстань між двома паралельними вертикальними площинами Θ і Φ , що проектується без спотворення на горизонтальну площину проєкцій.

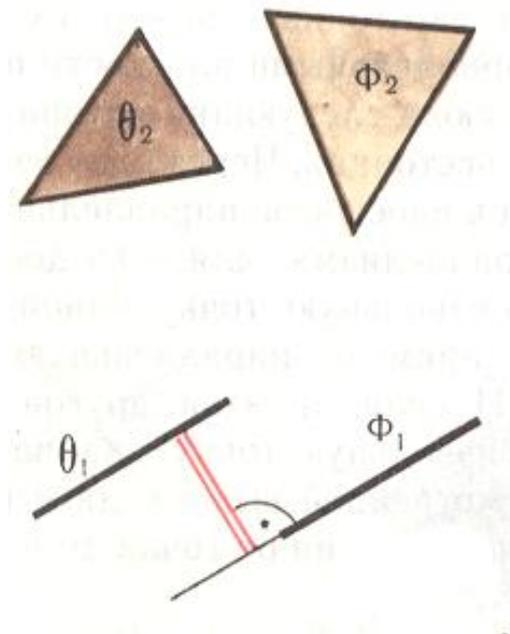


Рис.19

Кут між двома площинами (двогранний кут) проектується в натуральну величину на горизонтальній проєкції, якщо площини вертикальні, і на фронтальній, якщо площини фронтально-проектуючі.

На рис. 20 показано дві фронтально-проектуючі площини, кут між якими проектується без спотворення на фронтальну проєкцію.

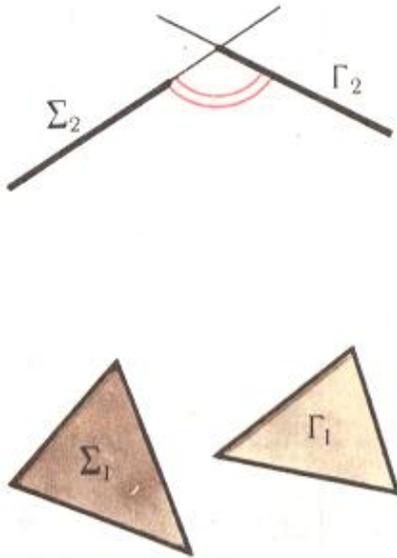


Рис.20

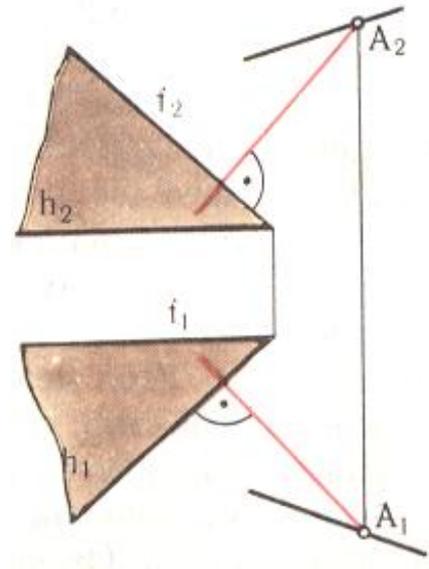


Рис.21

Проведемо площину, перпендикулярну до заданої, використовуючи властивість, розглянуту в п.3 і що стосується проведення перпендикуляра до площини. На рис. 21 площину задано горизонталлю h і фронталлю f . Через точку A до цієї площини проведений перпендикуляр. Якщо через точку A провести довільну пряму, то вона разом з перпендикуляром задасть площину, перпендикулярну до заданої. Оскільки пряма проводиться довільно, таких площин — незліченна множина.

Сформулюємо властивість: *площина перпендикулярна до іншої площини, якщо вона містить перпендикуляр до неї*

6. ПОБУДОВА ПРОЕКЦІЙ ВІДСТАНЕЙ І КУТІВ МІЖ ГЕОМЕТРИЧНИМИ ФІГУРАМИ

Як вже було сказано, визначення відстаней і кутів між геометричними фігурами відноситься до метричних задач.

В даному параграфі розглянемо побудову проєкцій шуканих відстаней і кутів без визначення їх натуральних величин.

Відстань від точки до прямої. Для визначення проєкції відстані від точки A до прямої загального положення m (рис. 22) через точку A проведемо площину, перпендикулярну до прямої, знайдемо точку перетину прямої з цією площиною і з'єднаємо знайдену точку з точкою A . Отриманий відрізок шуканий.

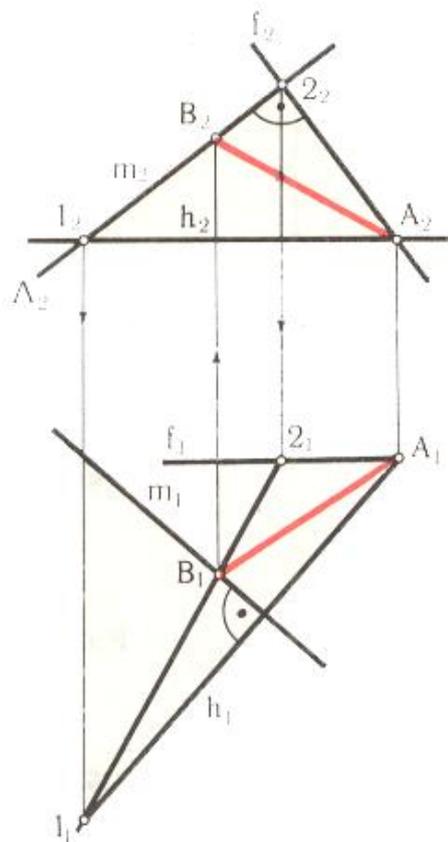


Рис.22

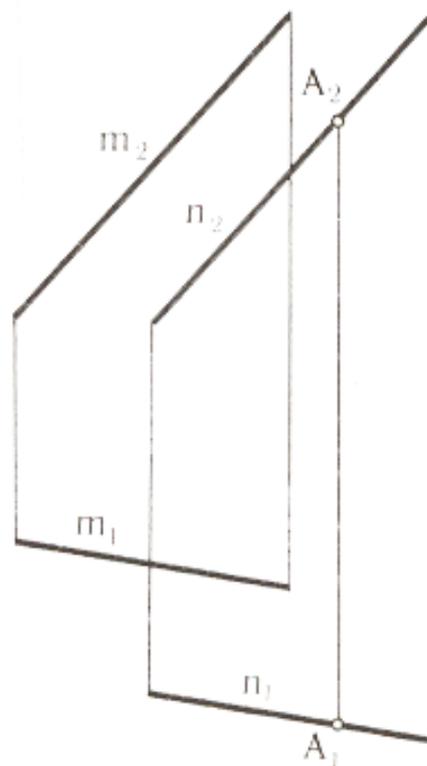


Рис.23

Площину задамо горизонталлю h і фронталью f , при цьому на полі Π_1 горизонтальна проєкція горизонталі перпендикулярна до

m_1 , а на Π_2 фронтальна проекція фронталі перпендикулярна до m_2 .

Для знаходження точки перетину прямої m_2 з площиною скористаємося січною фронтально-проектуючою площиною A , що проходить через m , яка перетне площину по прямій 1_22_2 . Перетином горизонтальної проекції 2_11_1 з m_1 визначають шукану точку B . Відрізок AB є проекцією відстані від точки до прямої:

$$A_2 \supset m_2; 1_22_2 \equiv m_2; 1_12_1 \times m_1 = B_1.$$

Відстань між паралельними прямими. Якщо на одній з прямих узяти довільну точку, наприклад A , то ця задача може бути зведена до попередньої, тобто до визначення відстані від точки до прямої (рис. 23).

Відстань від точки до площини. Для визначення відстані від точки до площини необхідно з точки опустити перпендикуляр на площину і знайти його основу. На рис.24 показаний трикутний відсік, сторона AC якого — горизонталь, а сторона AB — фронталь. З точки D проведені проекції перпендикуляра n , його горизонтальна проекція перпендикулярна до горизонталі на Π_1 , а фронтальна проекція перпендикулярна до фронталі на Π_2 . Основа перпендикуляра визначена за допомогою січної горизонтально-проектуючої площини Γ , яка перетне відсік по прямій $1-2$. Основа перпендикуляра — точка E , а проекції відстані від точки до площини — D_1E_1 і D_2E_2 :

$$\Gamma_1 \supset n_1; 1_12_1 \equiv n_1; 1_22_2 \times n_2 = E_2.$$

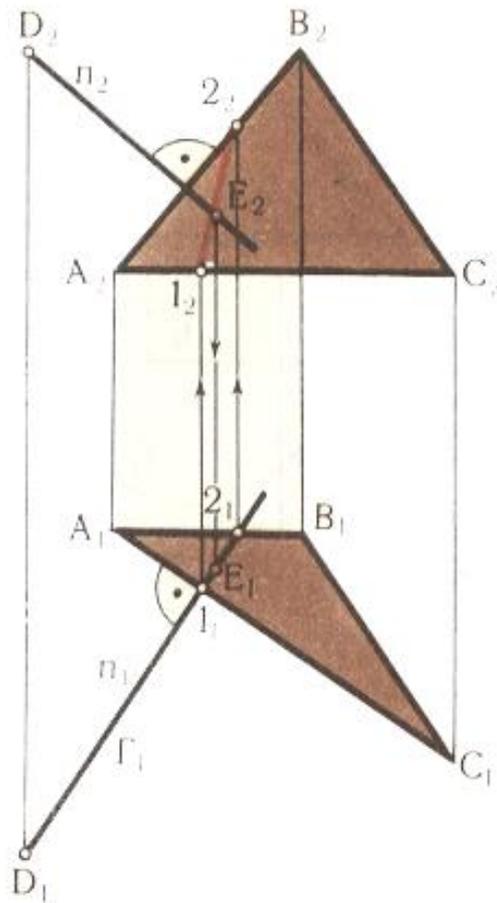


Рис.24

Відстань від прямої до паралельної їй площини, відстань між паралельними площинами. Обидві ці задачі зводяться до попередньої, якщо на прямій або в площині узяти точку і визначити відстань від неї до площини. Відрізок перпендикуляра і буде шуканою відстанню.

Відстань між прямими, що схрещуються. Відомо (див. п.2), що відстань між прямими, що схрещуються, дорівнює відстані між їх площинами, паралельними площині паралелізму.

Звідси наступний алгоритм визначення відстані. Через одну з прямих проводиться площина, паралельна площині паралелізму,

для чого достатньо через довільну точку однієї прямої провести пряму, паралельну іншій прямій. І якщо на цій іншій прямій узяти довільну точку, задача зводиться до розглянутої вище задачі по визначенню відстані від точки до площини (рис. 25):

$$A \in m; A_1B_1 \parallel n_1; A_2B_2 \parallel n_2.$$

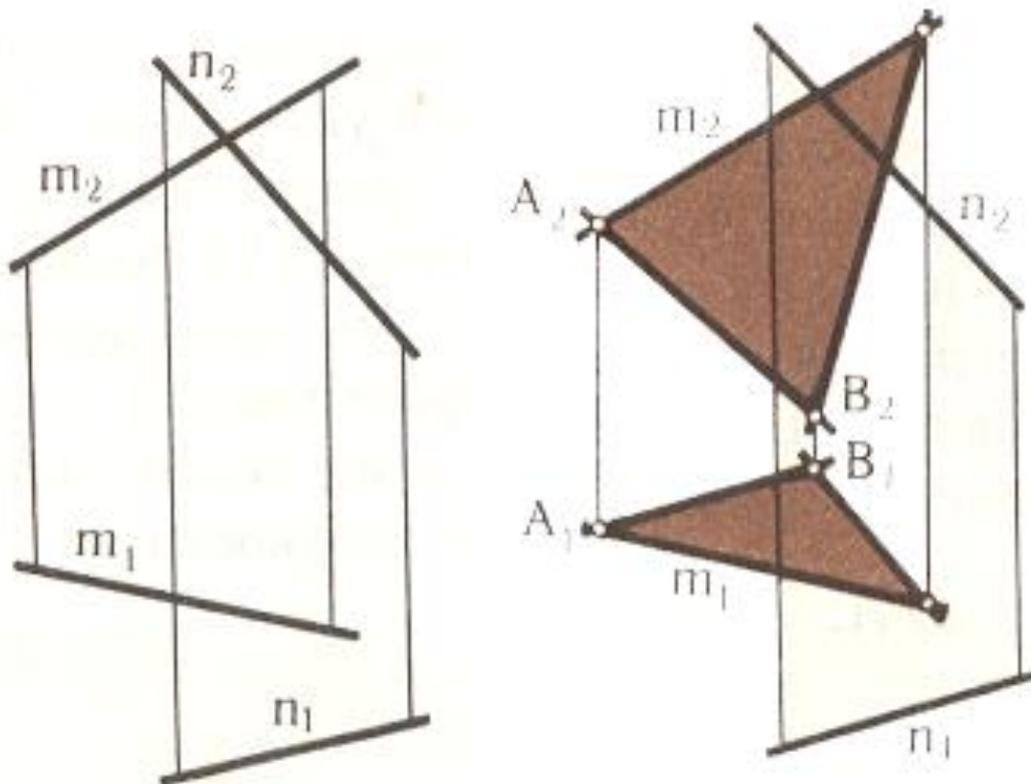


Рис.25

Кут між прямими, що схрещуються, вимірюється кутом перетину, для чого достатньо через довільну точку однієї з прямих, що схрещуються, провести пряму, паралельну другій прямій.

Кут між прямою і площиною. Як відомо, кут між прямою і площиною вимірюється кутом між прямою і її прямокутною проекцією на дану площину. Звідси можливий прямий шлях

побудови цього кута, для чого необхідно через пряму провести площину, перпендикулярну до даної площини. Лінія їх перетину і є проекція прямої на цю площину.

Оскільки отриманий при цьому трикутник ABC (рис. 26) прямокутний, сума кутів при вершинах A і B завжди рівна 90° .

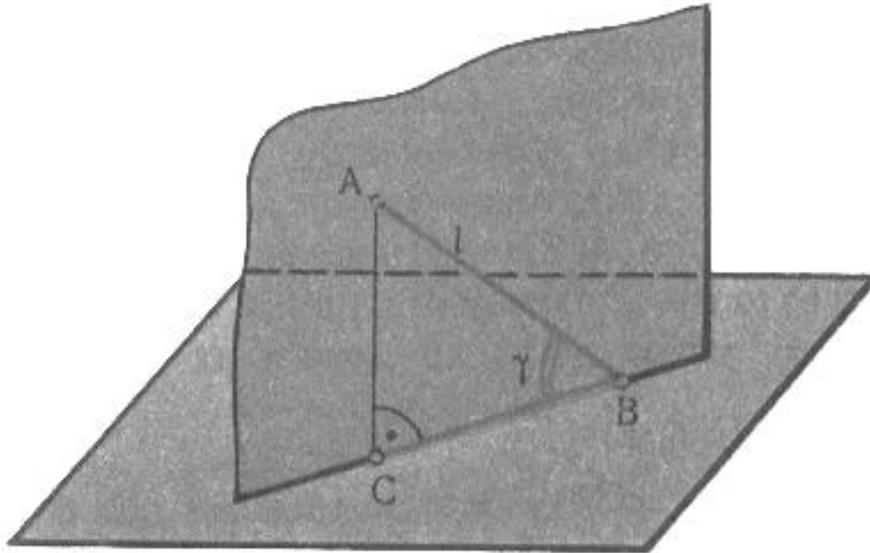


Рис.26

Звідси можливий більш простий спосіб визначення кута між прямою і площиною: достатньо з точки, що належить прямій, опустити перпендикуляр на площину. Отриманий при цьому кут доповнить шуканий до прямого кута (рис. 27):

$$A \in l; n \supset A; n_2 \perp f_2; n_1 \perp h_1.$$

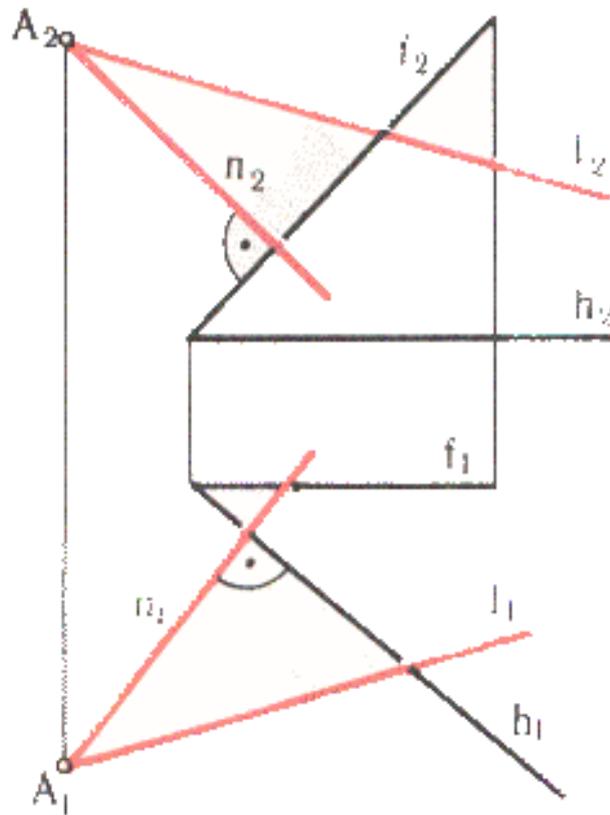


Рис.27

Кут між двома площинами. Для визначення двогранного кута знаходять лінію перетину двох площин (ребро двогранного кута). Перпендикулярно до цього ребра проводять площину, яка перетне двогранний кут по шуканому лінійному куту.

Можливий інший, більш простий шлях: достатньо взяти до уваги, що кут між площинами рівний куту між перпендикулярами до них, проведеними з довільної точки. На рис. 28 показано дві площини Φ і Ω . Для визначення двогранного кута в просторі узята довільна точка A і з неї опущені перпендикуляри на обидві площини:

$$n \supset A; n_2 \perp B_2C_2; n_1 \perp A_1C_1; m \supset A; m_2 \perp D_2E_2; m_1 \perp D_1F_1.$$

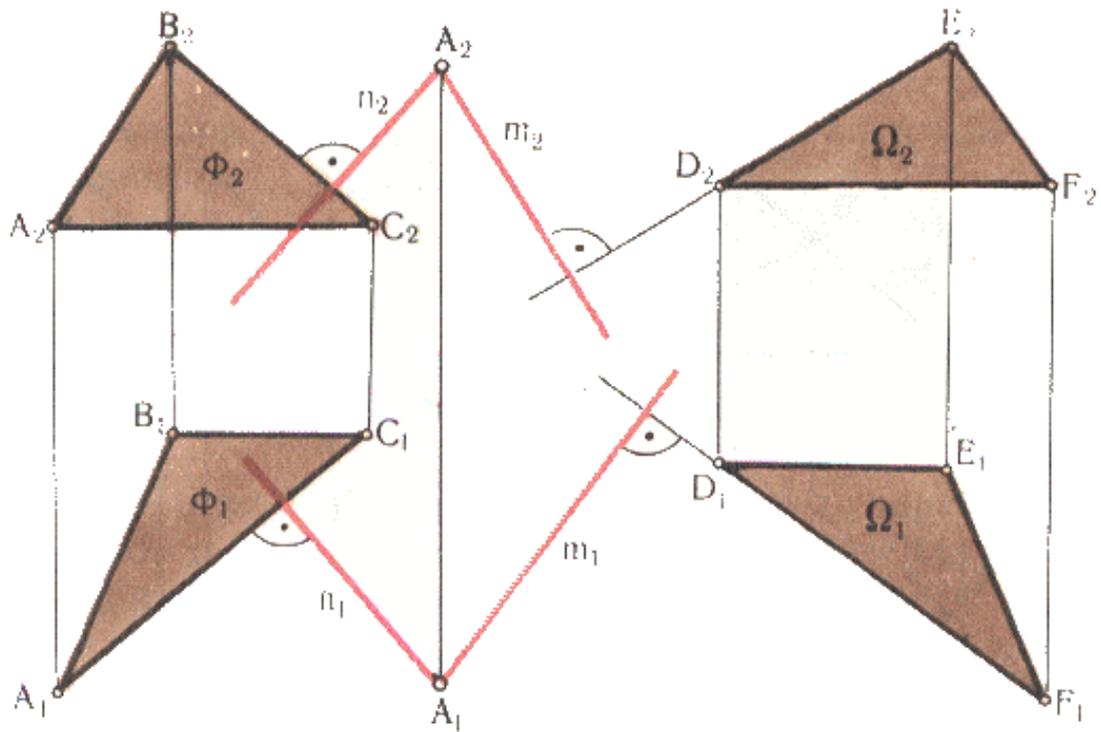


Рис.28

Завдання до модулю №2

Другий модуль з нарисної геометрії включає три задачі.

Координати точок для побудови умов задач беруться з таблиці 1.

Задача 1. Знайти відстань від точки D до площини, яку задано трикутником ABC .

Відстань від точки до площини вимірюється перпендикуляром, опущеним з цієї точки на площину.

Звідси порядок виконання задачі наступний:

1. Будують горизонтальну та фронтальну проєкції трикутника ABC та точку D .

2. Проводять проєкції фронталі та горизонталі.

3. З точки D опускають перпендикуляр на площину трикутника ABC . Щоб з точки D опустити перпендикуляр на площину цього відсіку, достатньо провести фронтальну проєкцію перпендикуляра під прямим кутом до фронталі, а горизонтальну його проєкцію - перпендикулярно до горизонталі.

4. Знаходимо точку перетину перпендикуляра з площиною трикутника ABC (перша позиційна задача).

Задача 2. Побудувати площину паралельну площині, яку задано трикутником ABC на відстані 50 мм від неї.

Порядок виконання задачі наступний:

1. Знаходимо натуральну величину перпендикуляра, опущеного з точки D на площину трикутника ABC (методом прямокутного трикутника).

2. По натуральній величині перпендикуляра від площини трикутника відкладаємо відрізок 50 мм та знаходимо проєкції цього відрізка.

3. Через отриману точку проводимо площину паралельну площині трикутника ABC .

Задача 3. Побудувати площину DEL , що проходить через відрізок DE і являється перпендикулярною до площини заданої трикутником ABC .

Порядок виконання задачі наступний:

1. Будуємо проєкції трикутника DEL та відрізка DE .

2. В трикутнику DEL проводимо проєкції фронталі та горизонталі.

3. З одного кінця відрізка DE проводимо перпендикуляр на площину трикутника ABC і довільно вибираємо точку L на цьому перпендикулярі.

4. Знаходимо лінію перетину двох площин: трикутника DEL та трикутника ABC .

Знаходження лінії перетину двох площин зводиться до знаходження двох точок, що визначають цю лінію. Кожна така точка є результатом перетину прямої однієї площини з іншою площиною. Видимість площин визначають за уявою і перевіряють за «конкуруючими» точками.

Питання для самоконтролю

1. Які задачі нарисної геометрії відносяться до позиційних?
2. Які задачі нарисної геометрії відносяться до метричних?
3. Побудувати проєкції площини, яка проходить через точку A і паралельна:
а) прямої (рис.29); б) двом заданим прямим (рис.30).

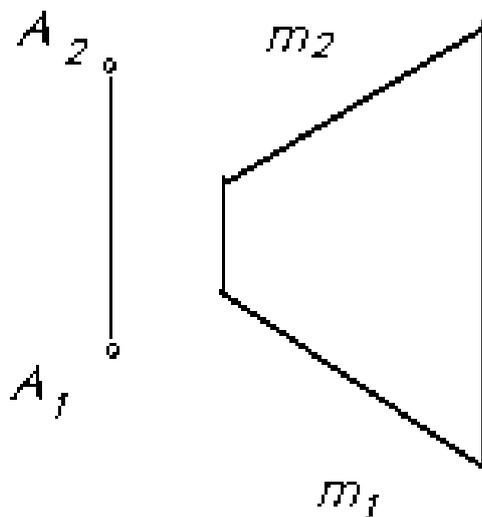


Рис.29

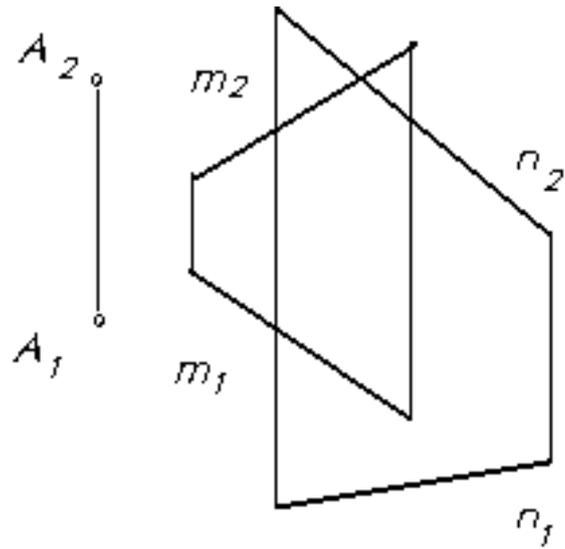


Рис.30

4. Накреслить проєкції площини, заданої горизонталлю та фронталлю, що проходить через точку D і паралельна заданій площині (рис.31).

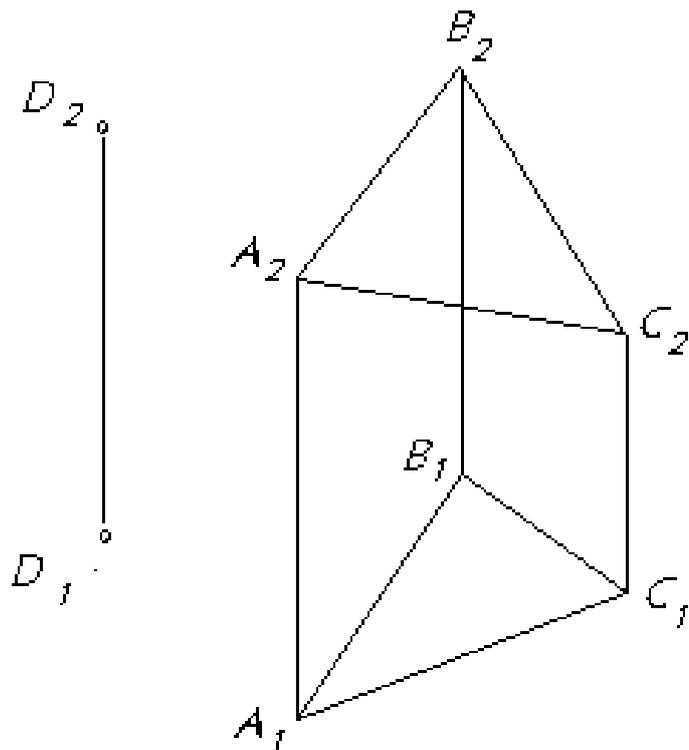


Рис.31

5. Як будувється пряма перпендикулярна до площини?

6. В якому випадку прямий кут проектується в натуральну величину на площини проєкцій?
7. З яких операцій складається алгоритм визначення точки перетину прямої з площиною?
8. В якому випадку відстань між двома паралельними прямими загального положення зображається в натуральну величину?
9. В якому випадку кут між двома площинами (двогранний кут) проектується в натуральну величину на площини проєкцій?
10. Яким чином визначається відстань від точки до площини?
11. Алгоритм визначення відстані між мимобіжними прямими.
12. Яким чином знаходиться лінія перетину двох площин?
13. Через точку A провести пряму, що перетинає задану під прямим кутом, якщо: а) задана пряма фронтальна; б) задана пряма загального положення.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Базова

1. Бенке Й. З. Збірник тестів з інженерної графіки. Технічне креслення : навчальний посібник. Київ : Кондор, 2024. 184 с.
2. Браїлов О. Ю. Інженерна геометрія : підручник. Київ : Каравела, 2023. 516 с.
3. Ванін В. В., Ковальов С. М., Михайленко В. Є. Інженерна та комп'ютерна графіка : підручник. Київ : Каравела, 2018. 360 с.
4. Воронцов Б. С., Бочарова І. А. Нарисна геометрія : навчальний посібник. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. 187 с.
5. Інженерна та комп'ютерна графіка: практикум для навчання в умовах інформаційно-освітнього середовища: навч. посіб. / Д. В. Бабенко, Н. А. Доценко, О. А. Горбенко, С. М. Степанов. Миколаїв: МНАУ, 2020. 256 с. URL: <http://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/8072>
6. Козяр М.М., Фещук Ю.В. Комп'ютерна графіка: AutoCAD : навчальний посібник. Херсон : Грінь Д.С., 2024. 304 с.
7. Колосова О. П., Баскова Г. В., Лазарчук М. В. Навчальні завдання з нарисної геометрії, інженерної та комп'ютерної графіки для програмованого навчання : навчальний посібник. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 94 с.
8. Костюкова Т. І. Інженерна графіка: практикум : навчальний посібник. Львів : Новий Світ–2000, 2025. 365 с.
9. Надкернична Т. М., Лебедева О. О. Курс комп'ютерної графіки в середовищі AutoCAD. Теорія. Приклади. Завдання : навчальний посібник. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. 191 с.
10. Основи інженерної графіки з елементами професійного конструювання : підручник / І. О. Чермних та ін. ; за ред. О. О. Красівська. Київ : Кондор, 2020. 240 с.

11. Основи інженерної графіки з елементами професійного конструювання: підручник / за ред. І. О. Чермних. Київ: Кондор, 2020. 240 с.
12. Пустюльга С. І., Самчук В. П., Воробчук М. С. Інженерна та комп'ютерна графіка : навчальний посібник. Луцьк : Просто Друк, 2024. 324 с.
13. Інженерна графіка : навчальний посібник / уклад. В. І. Ковбашин, А. І. Пік. Тернопіль : Підручники і посібники, 2023. 240 с.
14. Bethune J., Byrnes D. Engineering Graphics with AutoCAD 2023. Peachpit Press, 2022. 832 p.

Допоміжна література

1. Волошкевич П. П., Бойко О. О., Базишин П. А., Мацура Н. О. Технічне креслення та комп'ютерна графіка : навчальний посібник. Київ : Кондор-Видавництво, 2017. 234 с.
2. Кравченко І. В., Микитенко В. І. Розробка конструкторської документації в середовищі AutoCAD Mechanical : навчальний посібник. Київ : НТУУ «КПІ», 2016. 342 с.
3. Пустюльга С. І., Самостян В. Р. Машинобудівне креслення : навчальний посібник. Луцьк : Луцький НТУ, 2015. 275 с.
4. Василюк А. С., Мельникова Н. І. Комп'ютерна графіка : навчальний посібник. Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2016. 308 с.
5. Власій О. О., Дудка О. М. Комп'ютерна графіка. Обробка растрових зображень : навчально-методичний посібник. Івано-Франківськ : ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника», 2015. 72 с.
6. Інженерна та комп'ютерна графіка : конспект лекцій / уклад. О. П. Скиба, В. І. Ковбашин, А. І. Пік. Тернопіль : Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, 2019. 60 с.

7. Лютова О. В., Скоробогата М. В., Бовкун С. А. Вплив технологічних особливостей виготовлення деталей на методику нанесення розмірів : навчальний посібник. Запоріжжя : ЗНТУ, 2018. 88 с.
8. Про затвердження порядку розроблення проектної документації на будівництво об'єктів : наказ Міністерства регіонального розвитку, будівництва та житлово-комунального господарства України від 16.05.2011 № 45 ; станом на 08 грудня 2023 р. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/z0651-11>.
9. Kernytskyy I, Hlinenko L, Yakovenko Y, Horbay O, Koda E, Rusakov K, Yankiv V, Humenuyk R, Polyansky P, Berezovetskyi S, Kalenik M, Szlachetka O. *Problem-Oriented Modelling for Biomedical Engineering Systems. Applied Sciences*. 2022; 12(15):7466. <https://doi.org/10.3390/app12157466>.
10. Nykyforov A., Antoshchenkov, R., Halych, I., Kis, V., Polyansky, P., Koshulko, V., Tymchak, D., Dombrovska, A., & Kilimnik, I. (2022). Construction of a regression model for assessing the efficiency of separation of lightweight seeds on vibratory machines involving measures to reduce the harmful influence of the aerodynamic factor. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2(1 (116)), 24–34. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2022.253657>.

ЗМІСТ

Вступ

1.Точка і пряма	4
2. Дві прямі	7
3. Пряма і площина	14
4. Точка і площина	18
5. Дві площини	19
6. Побудова проєкцій відстаней і кутів між геометричними фігурами	
Відстань від точки до прямої.....	24
Відстань між паралельними прямими.....	25
Відстань від точки до площини.....	25
Відстань від прямої до паралельної їй площини, відстань між паралельними площинами.....	26
Відстань між прямими, що схрещуються.....	26
Кут між прямими, що схрещуються.....	27
Кут між прямою і площиною.....	28
Кут між двома площинами.....	29
Завдання до модулю №2	31
Питання для самоконтролю	35
Література	38
Зміст	40

Навчальне видання

ІНЖЕНЕРНА ТА КОМП'ЮТЕРНА ГРАФІКА

Методичні рекомендації

**Укладачі: Полянський Павло Миколайович,
Доценко Наталя Андріївна,
Іванов Геннадій Олександрович,
Степанов Сергій Миколайович,
Баранова Олена Володимирівна**

Формат 60x84 1/16. Ум. друк. арк. 3,4.
Тираж 50 прим. Зам № ____.

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.