МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ МЕНЕДЖМЕНТУ
Кафедра економічної кібернетики, комп'ютерних наук та інформаційних технологій

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ В ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЯХ

методичні рекомендації для виконання практичних та індивідуальних завдань
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти ОПП
«Комп'ютерні науки» спеціальності F3 (122) «Комп'ютерні науки»
денної форми здобуття вищої освіти

Миколаїв
2025

УДК 519.1:004
М74

Друкується за рішенням науково-методичної комісії факультету менеджменту Миколаївського національного університету від 18.09.2025 року протокол № 2

Укладачі:

О. Ю. Пархоменко	– к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри економічної кібернетики, комп’ютерних наук та інформаційних технологій Миколаївського національного аграрного університету
О. Є. Богатєнкова	–асистент кафедри економічної кібернетики, комп’ютерних наук та інформаційних технологій Миколаївського національного аграрного університету

Рецензенти:

В. О. Поздєєв	– доктор фізико-математичних наук, професор кафедри методики викладання фізики та математики Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова
В. В. Поживатенко	– кандидат фізико-математичних наук, старший викладач кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського національного аграрного університету

ЗМІСТ

ВСТУП

Математичні методи в інформаційних технологіях є важливою складовою фахової підготовки спеціалістів у галузі комп'ютерних наук. Вони формують теоретичне підґрунтя для аналізу, моделювання та оптимізації процесів, що лежать в основі сучасних програмних та інформаційних систем. Застосування математичних підходів дозволяє майбутнім ІТ-фахівцям упевнено працювати з функціональними залежностями, числовими й векторними структурами, оптимізаційними моделями, комбінаторними задачами, графами, логічними конструкціями та методами статистичного аналізу даних.

Ці методичні рекомендації підготовлено для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки». Матеріал структуровано відповідно до програми фахового вступного випробування та спрямовано на узагальнення, повторення і систематизацію знань, отриманих у попередніх математичних курсах. Поданий зміст допоможе студентам сформувати цілісне уявлення про математичні основи інформаційних технологій та якісно підготуватися до вступу в магістратуру.

Посібник містить практичні завдання, приклади розв'язання типових задач, завдання для самостійної та індивідуальної роботи, а також тестові питання, що спрямовані на закріплення теоретичного матеріалу та розвиток логічного й аналітичного мислення. Значну увагу приділено прикладним аспектам – студенти знайдуть приклади використання математичних методів для розв'язання реальних задач у сфері ІТ.

Метою методичних рекомендацій є допомога студентам у систематизації знань, опануванні основних математичних інструментів і підвищенні компетентності у розв'язанні прикладних задач, що становлять основу сучасних інформаційних технологій. Очікується, що оволодіння матеріалом сприятиме формуванню системного математичного мислення та успішній підготовці до подальшого навчання й професійної діяльності.

ТЕМА 1. ЧИСЛОВА ПОСЛІДОВНІСТЬ. ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ

Приклад 1. Знайти перші п’ять членів послідовності:

$$\text{а) } a_n = \frac{2^n}{n^2}, \qquad \text{б) } a_{n+1} = \left[\sqrt{a_n}\ \right]\ , a_1 = 4.$$

Розв’язання:

а) Послідовність задано формулою загального члена, тому маємо:

$$a_1 = \frac{2^1}{1^2} = 2,\ a_2 = \frac{2^2}{2^2} = 1,\ a_3 = \frac{2^3}{3^2} = \frac{8}{9},\ a_4 = \frac{2^4}{4^2} = \frac{16}{16} = 1,\ a_5 = \frac{2^5}{5^2} = \frac{32}{25}.$$

б) Послідовність задана рекурентно, маємо:

$$a_2 = [\sqrt{a_1}] = [\sqrt{4}] = [2] = 2,\ a_3 = [\sqrt{a_2}] = [\sqrt{2}] = 1,\ a_4 = a_5 = [1] = 1.$$

Приклад 2. Знайти загальний член n_x послідовності: $-\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; -\frac{3}{4}; \frac{4}{5}; -\frac{5}{6}; \ldots$

Розв’язання:

В чисельнику наведених дробів записано номер члена послідовності, тому в загальному (n-му) члені в чисельнику матимемо *n*. Знаменники дробів є на одиницю більшими чисельника, тобто знаменником загального члена буде (*n+1*). Сусідні члени послідовності мають протилежні знаки, тому загальний член буде містити множником $(-1)^n$. Отже, загальний член послідовності має вигляд:

$$x_n = (-1)^n \cdot \frac{n}{n+1} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Приклад 3. Знайти границю послідовності із загальним членом

$$x_n = \frac{2n^2 + 3n + 1}{3n^2 + n + 3}.$$

Розв'язання:

Послідовність $\left\{\dfrac{2n^2+3n+1}{3n^2+n+3}\right\}$ є часткою нескінченно великих послідовностей $\left\{2n^2+3n+1\right\}$ і $\left\{3n^2+n+3\right\}$, тому ми не можемо скористатися теоремою про границю частки. Маємо невизначеність виду $\dfrac{\infty}{\infty}$. Поділимо чисельник і знаменник даного дробу на n^2. Дістанемо: $x_n=\dfrac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}$. Тепер послідовність $\{x_n\}$ можна розглядати, як частку двох послідовностей $\left\{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right\}$ і $\left\{3+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}\right\}$. Перша має границею число 2, а друга – число 3, тому за теоремою 3 про границю частки дана послідовність має границею число $\frac{2}{3}$. Отже,

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+1}{3n^2+n+3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}=\frac{2}{3}.$$

Приклад 4. Знайти границі послідовностей

$$\text{а) } u_n=\frac{1}{2n}\cdot\cos n^2-\frac{3n}{6n+1};\quad \text{б) } u_n=\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}.$$

Розв'язання:

а) Послідовність $\{u_n\}$ можна розглядати, як різницю двох послідовностей $\left\{\frac{1}{2n}\cdot\cos n^2\right\}$ і $\left\{\frac{3n}{6n+1}\right\}$. Перша має границею число 0 (добуток нескінченно малої послідовності $\left\{\frac{1}{2n}\right\}$ і обмеженої послідовності $\left\{\cos n^2\right\}$ є нескінченно малою послідовністю, а границя другої рівна $\frac{1}{2}$ (аналогічно попередньому прикладу). За теоремою про границю різниці дана послідовність має границею число $-\frac{1}{2}$.

б) Чисельник даної послідовності є сумою n членів арифметичної прогресії, тому $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$. Тепер загальний член u_n можна записати так: $u_n=\frac{n(n+1)}{2n^2}$. Аналогічно до прикладу 3 знаходимо границю даної послідовності. Вона дорівнює $\frac{1}{2}$.

Приклад 5. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

Розв'язання:

Тут маємо невизначеність $\infty-\infty$. Для її розкриття позбавимося ірраціональності в чисельнику. Матимемо

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0.$$

Приклад 6. Знайти похідні наступних функцій:

$$1)\ f(x)=2^x-3\sin x+5;\quad 2)\ f(x)=x^3\arcsin x;\quad 3)\ f(x)=\frac{\ln x}{tgx}.$$

Розв'язання:

Користуючись правилами диференціювання і похідними основних елементарних функцій, маємо:

$$1)\ f'(x)=(2^x-3\sin x+5)'=(2^x)'-(3\sin x)'+5'=2^x\ln 2-3\cos x;$$

$$2)\ f'(x)=(x^3\arcsin x)'=(x^3)'\arcsin x+(\arcsin x)'x^3=3x^2\arcsin x+\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$3)\ f'(x)=\left(\frac{\ln x}{tgx}\right)'=\frac{(\ln x)'tgx-(tgx)'\ln x}{tg^2x}=\frac{\frac{1}{x}tgx-\frac{\ln x}{\cos^2 x}}{tg^2x}=\frac{1}{xtgx}-\frac{\ln x}{\sin^2 x}.$$

Приклад 7. Знайти похідну функції $y=\sin x^3$.

Розв'язання:

Ця функція є складеною для функцій $f(u)=\sin u$ і $u=x^3$, тому згідно теореми про похідну від складеної функції маємо:

$$(\sin x^3)'=\sin' u\cdot(x^3)'=\cos u\cdot 3x^2=3x^2\cdot\cos x^3.$$

Приклад 8. Знайти похідну функції $y=x^{\sin x}$.

Розв'язання:

$$(x^{\sin x})' = x^{\sin x}\cdot\left(\frac{\sin x\cdot 1}{x}+\cos x\cdot\ln x\right)=\sin x\cdot x^{\sin x-1}+x^{\sin x}\cdot\ln x\cdot\cos x,\quad x>0\,.$$

Приклад 9. Обчислити похідну функції $y=(tg2x)^{ctg\frac{x}{2}}$**.**

Розв'язання:

Знайти похідну цієї функції можна іншим способом. Можна прологарифмувати цю функцію і потім продиференціювати як складену функцію:

$$\ln y = ctg\frac{x}{2}\cdot\ln tg2x\,,\qquad (\ln y)' = (ctg\frac{x}{2}\cdot\ln tg2x)',$$

$$\frac{y'}{y}=-\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln tg2x+ctg\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{tg2x}\cdot\frac{1}{\cos^2 2x}\cdot 2,$$

$$y'=y\cdot\left(-\frac{\ln tg2x}{2\sin^2\frac{x}{2}}+\frac{4ctg\frac{x}{2}}{\sin 4x}\right)=(tg2x)^{ctg\frac{x}{2}}\cdot\left(-\frac{\ln tg2x}{2\sin^2\frac{x}{2}}+\frac{4ctg\frac{x}{2}}{\sin 4x}\right).$$

Приклад 10. Знайти похідну і диференціал 4-го порядку функції $f(x)=2x^2+\sin x,\ \ x\in(-\infty;+\infty)$.

Розв'язання:

Для $x\in R$ за означенням 1 маємо:

$$f'(x)=4x+\cos x;\qquad f''(x)=\left(f'(x)\right)'=(4x+\cos x)'=4-\sin x;$$

$$f'''(x)=\left(f''(x)\right)'=(4-\sin x)'=-\cos x;$$

$$f^{IV}(x)=\left(f'''(x)\right)'=(-\cos x)'=\sin x.$$

Маємо: $d^4 f(x)=f^{(4)}(x)dx^4=\sin x\,dx^4$.

Приклад 11. Знайти похідну n-го порядку функції $f(x)=a^x$.

Розв'язання:

Знайдемо $f'(x),\quad f''(x)$ і $f'''(x)$:

$$f'(x)=a^x\ln a\,,\qquad f''(x)=\left(a^x\ln a\right)'=a^x(\ln a)^2,\quad f'''(x)=\left(a^x(\ln a)^2\right)'=a^x(\ln a)^3.$$

Закон одержання похідної n-го порядку очевидний: $f^{(n)}(x)=a^x(\ln a)^n$.

Завдання для самостійної роботи:

1. Записати п’ять перших членів послідовності $x_n = n^{(-1)^n} \quad (n=1,2,...)$.

2. Записати загальний член послідовності

$$а)\ 1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, ...; \quad б)\ \frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{8}{6}, \frac{16}{24}, ...$$

3. Знайти границі послідовностей, якщо вони існують:

а) $x_n = \frac{1}{2n} - \frac{2n}{3n+1}$; б) $x_n = \frac{1}{3n} \cdot sin n^2$;

в) $x_n = \frac{2n^3 + n - 1}{3n^3 - n + 5}$; г) $x_n = \frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n-1)}{n^4 + 2n + 3}$;

д) $x_n = \frac{(2n+1)^3 - 8n^3}{(6-n)^2}$ е) $x_n = \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right)$;

э) $x_n = \left(\frac{2n^2}{2n^2 + 3n}\right)^{n+2}$; ж) $x_n = \left(\frac{5n^2}{n^2 + n}\right)^n$;

з) $x_n = \left(\frac{n}{n+3}\right)^{\frac{n}{2}}$; к) $x_n = \frac{\sqrt{4n^4 + 3n^2 + 2} + (1-3n)^2}{(2n+1)\cdot(3n+1)}$.

4. Знайти похідні наступних функцій:

1) $y = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 3x$; 2) $y = (x^2 - 1)\cdot sin x$; 3) $y = \frac{sin^2 x}{cos x}$;

4) $y = \sqrt{x^2 + 3x + 1}$; 5) $y = ln(x^3 + 7x + 2)$; 6) $y = e^{arctgx}$;

7) $y = tg^3 \frac{x^2 + 2x - 1}{3}$; 8) $y = (cos x)^{sin x}$; 9) $y = arccos\ x^x$.

5. Знайти похідні вказаного порядку:

1) $y = x^4 + 2x^3 - x^2 + 5$, знайти y^{IV}; 2) $y = x^2 \ln x$, знайти y''';

3) $y = sin x$, знайти $y^{(n)}$; 4) $x = 2t^2$, $y = 3t^3$, знайти y''_{xx}.

ТЕМА 2. ЧАСТИННІ ПОХІДНІ. ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЇ. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Приклад 1. Знайти частинні похідні першого порядку функції:

$$w = 5x^3 + 3y^5 - 12x^2y^3 + 10$$

Розв'язання:

Похідна за $x\ (\frac{\partial w}{\partial x})$. Розглядаємо y як сталу:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(5x^3) + \frac{\partial}{\partial x}(3y^5) - \frac{\partial}{\partial x}(12x^2y^3) + \frac{\partial}{\partial x}(10)$$

$\frac{\partial}{\partial x}(3y^5) = 0$ (похідна від сталої).

$$\tfrac{\partial}{\partial x}(12x^2y^3) = 12y^3 \cdot \tfrac{\partial}{\partial x}(x^2) = 12y^3 \cdot 2x = 24xy^3$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 15x^2 + 0 - 24xy^3 + 0$$

Маємо: $\frac{\partial w}{\partial x} = 15x^2 - 24xy^3$.

Похідна за $y\ (\frac{\partial w}{\partial y})$. Розглядаємо x як сталу.

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(5x^3) + \frac{\partial}{\partial y}(3y^5) - \frac{\partial}{\partial y}(12x^2y^3) + \frac{\partial}{\partial y}$$

$\frac{\partial}{\partial y}(5x^3) = 0$ (похідна від сталої).

$$\tfrac{\partial}{\partial y}(12x^2y^3) = 12x^2 \cdot \tfrac{\partial}{\partial y}(y^3) = 12x^2 \cdot 3y^2 = 36x^2y^2.$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0 + 15y^4 - 36x^2y^2 + 0$$

Маємо: $\frac{\partial w}{\partial y} = 15y^4 - 36x^2y^2$.

Приклад 2. Знайти екстремуми функції $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 2$.

Розв'язання:

Для того, щоб знайти екстремуми функції, треба виконати такі кроки:

1) Знайти $f'(x)$: $f'(x) = x^2 - 2x$.

2) Знайти точки, в яких $f'(x)=0$ або не існує:

$$f'(x)=x\cdot(x-2)=0 \text{ в точках } x_1=0,\ x_2=2.$$

$f'(x)$ існує на всій області визначення функції.

3) Знайти інтервали знакосталості $f'(x)$ дивись попереднє практичне за няття), розбивши область визначення функції точками, в яких $f'(x)=0$ або не існує: $(-\infty;0)$, $(0;2)$, $(2;+\infty)$.

4) Визначити знак $f'(x)$ на знайдених інтервалах.

$$-1\in(-\infty;0),\ f'(-1)=3>0, \text{ отже } f'(x)>0\ \ \forall\, x\in(-\infty;0).$$

$$1\in(0;2),\quad f'(1)=-1<0, \text{ отже } f'(x)<0\ \ \forall\, x\in(0;2).$$

$$3\in(2;+\infty),\ f'(3)=3>0, \text{ отже } f'(x)>0\ \ \forall\, x\in(2;+\infty).$$

5) Використавши перші достатні умови екстремуму, матимемо:

інтервали знакосталості $f'(x)$	$(-\infty;0)$	$x=0$	$(0;2)$	$x=2$	$(2;+\infty)$
знак $f'(x)$	+	0	–	0	+
поведінка функції $f(x)$	зростає	точка max $y(0)=2$	спадає	точка min $y(0)=\frac{2}{3}$	зростає

Дана функція в точці $x=0$ має максимум рівний 2, а в точці $x=2$ має мінімум рівний $\frac{2}{3}$.

Приклад. Користуючись формулою Ньютона-Лейбніца, обчислити інтеграли:

$$\text{а) } \int_0^2 2^x\,dx; \qquad \text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} sin2xdx; \qquad \text{в) } \int_2^5 \frac{dx}{x^2+2x+10}.$$

Розв’язання.

а) Для підінтегральної функції $f(x)=2^x$ первісними є функції $F(x)=\frac{2^x}{ln2}+C$. Сталу С беремо рівною нулю, бо нам треба яка небудь первісна функції $f(x)$ наприклад та, в якій C=0. Використавши формулу для первісної $F(x)=\frac{2^x}{ln2}$, матимемо: $\int_0^2 2^x\,dx=\left.\frac{2^x}{ln2}\right|_0^2=\frac{2^2}{ln2}-\frac{2^0}{ln2}=\frac{3}{ln2}$.

б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin2x\,dx=-\frac{1}{2}cos2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{1}{2}\left(cos\frac{\pi}{2}-cos0\right)=-\frac{1}{2}(-1)=\frac{1}{2}$.

в) $\int_2^5 \frac{dx}{x^2+2x+10}=\int_2^5\frac{dx}{(x+1)^2+3^2}=\frac{1}{3}arctg\frac{x+1}{3}\Big|_2^5=$

$\frac{1}{3}(arctg2-arctg1)=\frac{1}{3}\left(arctg2-\frac{\pi}{4}\right)$.

Приклад 3. Знайти площу S сегмента, який відсікається прямою x=-y від параболи $y=2x-x^2$.

Розв’язання. Побудуємо фігуру, площу якої треба знайти (рис. 1.1). Координати точок A і B знаходимо, розв’язуючи систему:

$$\begin{cases} y=-x, \\ y=2x-x^2, \end{cases}$$

маємо A(0;0), B(3;-3). Шукану площу S знаходимо за формулою (2):

$$S=\int_0^3\left((2x-x^2)-(-x)\right)dx=\frac{9}{2}.$$

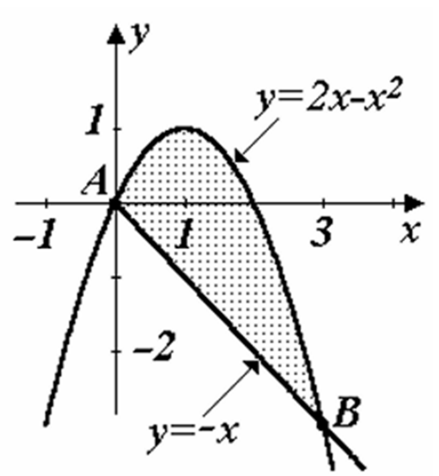

Рисунок 1.1

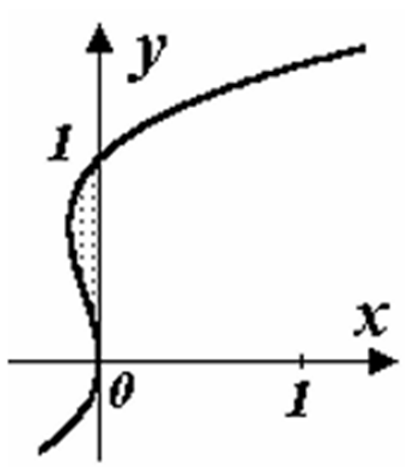

Рисунок 1.2

Приклад 4. Знайти площу фігури, яка обмежена лініями $x=y^2(y-1),\ x=0$.

Розв’язання:

Знайдемо точки перетину кривої $x = y^2(y-1)$ з віссю ординат (рис. 1.2). Маємо $y_1=0$, $y_2=1$ Тоді

$$S = \int_0^1 |x|\, dy = -\int_0^1 y^2(y-1)\, dy = -\int_0^1 \left(y^3 - y^2\right) dy =$$

$$= -\left(\frac{y^4}{4} - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{12}.$$

Завдання для самостійної роботи:

1. Знайти частинні похідні першого порядку.

1) $u = 6x^4 + y^4 - 8xy$

2) $z = x^5 y + 8xy^3 - 7xy + 34$

3) $p = 8n^5 + 3d^{12} + 20n^7 d^5$

4) $u = \cos\left(3x^3 + 7y\right)$

5) $u = \sin\left(4xy^5\right)$

6) $u = e^{5y + x^2}$

7) $z = \ln(4x^2 + 7y)$

2. Знайти екстремуми функцій:

1) $f(x) = 2x^2 - \dfrac{x^4}{4}$; 2) $f(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^2}$;

3. Користуючись формулою Ньютона-Лейбніца, обчислити такі інтеграли:

1) $\int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx$; 2) $\int_0^1 \frac{x^5\, dx}{x^{12} + 1}$; 3) $\int_0^{\pi^2/4} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$; 4) $\int_0^{1/8} \frac{dx}{\sqrt{1 - 16x^2}}$.

4. Обчислити площу фігур, обмежених лініями:
1) $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$;
2) $xy = 3$, $x = 2$, $x = 4$, $y = 0$;

ТЕМА 3. МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ. АПРОКСИМАЦІЯ ДАНИХ. МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Приклад 1. Фермер відгодовує два види тварин – А і В. Для цього використовує три види кормів. Витрати корму кожного виду на одну тварину за видами наведені в табл. 3.1. У ній також зазначені запаси кормів та прибуток від реалізації однієї тварини. Визначити, скільки тварин кожного виду потрібно відгодовувати фермерові, щоб отримати максимальний прибуток. Скласти математичну модель операції.

Розв'язання:

Кількість тварин виду А позначимо як x_1, кількість тварин виду В – як x_2.

Отже, визначено вектор керованих змінних $X = (x_1, x_2)$.

Запишемо функцію прибутку: $F = 16x_1 + 6x_2 \to \max$. Ця функція виражає критерій оптимальності задачі у математичній формі – *цільову функцію*.

Таблиця 3.1.

Вид корму	**Витрати кормів на відгодівлю**		**Запаси кормів**
	тварини виду А	**тварини виду В**	
I	2	3	180
II	4	1	240
III	6	7	426
Прибуток від реалізації однієї тварини	16	6	

Складемо вектор некерованих змінних $B = (b_1, b_2, b_3) = (180; 240; 426)$.

За умовою задачі корм 1-го виду витрачається в кількості $2x_1 + 3x_2$, що не повинно перевищувати запаси цього виду корму, тобто 180. Маємо нерівність $2x_1 + 3x_2 \le 180$. Аналогічні нерівності складаємо щодо інших видів кормів: $4x_1 + x_2 \le 240$; $6x_1 + 7x_2 \le 426$.

У результаті маємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 180, \\ 4x_1 + x_2 \le 240, \\ 6x_1 + 7x_2 \le 426. \end{cases}$$

Потрібно додати, що кількість тварин не може бути від'ємним числом, тобто $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Об'єднуючи всі нерівності, одержимо *систему обмежень:*

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 180, \\ 4x_1 + x_2 \leq 240, \\ 6x_1 + 7x_2 \leq 426, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Цільова функція і система обмежень разом становлять *математичну модель*. Отже, математична модель наведеної задачі має вигляд

$$F = 16x_1 + 6x_2 \rightarrow \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 180, \\ 4x_1 + x_2 \leq 240, \\ 6x_1 + 7x_2 \leq 426, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Приклад 2. Витрати компанії на виробництво х тисяч одиниць продукції описуються функцією:

$$K(x) = 3x^2 - 18x + 40$$

Знайдіть обсяг виробництва х (у тисячах одиниць), при якому витрати будуть мінімальними, та обчисліть ці мінімальні витрати.

Розв'язання:

Для знаходження мінімуму функції витрат $K(x)$, ми повинні знайти критичну точку, де перша похідна дорівнює нулю. Спочатку знайдемо похідну $K'(x)$:

$$K'(x) = 6x - 18$$

Далі прирівнюємо цю похідну до нуля, щоб знайти оптимальний обсяг х:

$$6x - 18 = 0$$

$$6x = 18$$

$$x = 3$$

Щоб переконатися, що це мінімум, можна використати другу похідну: $K''(x) = 6$. Оскільки $K''(x) > 0$, це дійсно точка мінімуму. Підставимо знайдене значення $x=3$ у функцію витрат для обчислення мінімальних витрат:

Таким чином, мінімальні витрати становлять 13 грошових одиниць при обсязі виробництва 3 тисячі одиниць.

Приклад 3. Застосуйте метод градієнтного спуску для знаходження мінімуму функції $f(x) = x^2 - 4x + 9$. Почніть з початкової точки $x_0 = 5$ та виконайте дві ітерації з розміром кроку (швидкістю навчання) $\eta = 0.2$.

Розв'язання:

Спочатку знайдемо першу похідну функції, яка є градієнтом:

$$f'(x) = 2x - 4$$

Формула оновлення в градієнтному спуску:

$$x_{(новий)} = x_{(поточний)} - \eta \cdot f'(x_{(поточний)})$$

Ітерація 1

Початкове значення: $x_0 = 5$. Обчислюємо градієнт:

$$f'(5) = 2 \cdot 5 - 4 = 6$$

Оновлюємо значення:

$$x_1 = 5 - 0.2 \cdot 6$$

$$x_1 = 3.8$$

Ітерація 2

Беремо $x_1 = 3.8$. Обчислюємо градієнт:

$$f'(3.8) = 2 \cdot 3.8 - 4 = 3.6$$

Оновлюємо значення:

$$x_2 = 3.8 - 0.2 \cdot 3.6$$

$$x_2 = 3.08$$

Після двох ітерацій метод градієнтного спуску наблизився до істинного мінімуму (який аналітично дорівнює $x = 2$):

$$x_2 = 3.08$$

Приклад 4. В результаті агрономічних досліджень отримана залежність врожайності y (ц/га) від кількості внесених мінеральних добрив x (кг/га). Експериментальні дані за п'ятьма дослідними ділянками наведені в таблиці:

Таблиця 3.2

Ділянка i	Кількість добрив, x_i (кг/га)	Врожайність, y_i (ц/га)
1	1	8.5
2	2	10.0
3	3	11.5
4	4	12.0
5	5	13.5

Методом найменших квадратів знайти лінійну функцію $y = ax + b$, яка найкращим чином апроксимує ці емпіричні дані.

Розв'язання:

Кількість точок даних $n=5$. Необхідно знайти коефіцієнти a та b для прямої $y = ax + b$, розв'язавши систему нормальних рівнянь:

Складемо допоміжну таблицю для обчислень:

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	1	8.5	1	8.5
2	2	10.0	4	20.0
3	3	11.5	9	34.5
4	4	12.0	16	48.0
5	5	13.5	25	67.5
Сума	$\sum x_i=15$	$\sum y_i=55.5$	$\sum x_i^2=55$	$\sum x_i y_i=178.5$

Підставимо отримані суми та $n = 5$ у систему нормальних рівнянь:

$$55a + 15b = 178.5$$

$$15a + 5b = 55.5$$

Розділимо друге рівняння на 5:

$$3a + b = 11.1$$

Виразимо b через a:

$$b = 11.1 - 3a$$

Підставимо цей вираз у перше рівняння:

$$55a + 15(11.1 - 3a) = 178.5$$

$$55a + 166.5 - 45a = 178.5$$

$$10a = 178.5 - 166.5$$

$$10a = 12$$

$$a = 1.2$$

Знаходження коефіцієнта b

Підставимо знайдене значення a = 1.2 у формулу для b:

$$b = 11.1 - 3(1.2)$$

$$b = 11.1 - 3.6$$

$$b = 7.5$$

Лінійна функція, що найкраще апроксимує дані: $y = 1.2x + 7.5$.

Задачі для самостійного розв'язання:

1. Час T (у годинах), необхідний для виконання певного завдання, залежить від рівня кваліфікації виконавця k за формулою:

$$T(k) = 2k^2 - 16k + 50$$

Знайдіть оптимальний рівень кваліфікації k, при якому час T(k) буде мінімальним, та обчисліть цей мінімальний час.

2. Витрати на обслуговування обладнання C (у тисячах грн) залежать від кількості профілактичних оглядів m за рік:

$$C(m) = 5m^2 - 30m + 80$$

Визначте оптимальну кількість профілактичних оглядів m (за рік), що забезпечує мінімальні витрати, та знайдіть ці мінімальні витрати.

3. Столярна майстерня виготовляє табурети (x_1) та стільці (x_2). Прибуток: табурет – 80 грн, стілець – 120 грн.

Обмеження:

1. Деревина: $3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 120$ *м*
2. Робочий час: $2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 90$ *год*

Скласти математичну модель для визначення кількості табуретів та стільців, що забезпечує максимальний прибуток.

4. Наведена таблиця фіксує залежність кількості годин роботи обладнання x (тис. годин) від відсотка його зношення y (%).

Таблиця 3.3

Вимір i	Час роботи, xi (тис. год)	Відсоток зношення, yi (%)
1	1	15
2	3	25
3	4	32
4	6	40
5	7	48

Використовуючи метод найменших квадратів, знайдіть лінійну функцію $y = ax + b$, яка найкращим чином описує залежність відсотка зношення від часу роботи.

ТЕМА 4. ЧИСЛОВІ ТА СТЕПЕНЕВІ РЯДИ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Приклад 1. Запишіть ряд, якщо його загальний член na визначається рівністю:

$$\text{а) } a_n = \frac{n}{n+1}; \quad \text{б) } a_n = \frac{(-1)^n}{n}; \quad \text{в) } a_n = \frac{n^2}{n+1}.$$

Розв'язання:

$$\text{а) } \frac{1}{1+1} + \frac{2}{2+1} + \frac{3}{3+1} + \ldots + \frac{n}{n+1} + \ldots;$$

$$\text{б) } -\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n} + \ldots;$$

$$\text{в) } \frac{1}{1+1} + \frac{4}{2+1} + \frac{9}{3+1} + \ldots + \frac{n^2}{n+1} + \ldots.$$

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{1+3^{2n}}$.

Розв'язання:

Порівняємо загальний член $a_n = \frac{3^n}{1+3^{2n}}$ даного ряду з загальним членом $b_n = \frac{1}{3^n}$ ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$:

$$\frac{3^n}{1+3^{2n}} < \frac{3^n}{3^{2n}} = \frac{1}{3^n}.$$

Оскільки $a_n < b_n \ (n = 0,1,2,\ldots)$ і ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ збіжний (геометричний ряд з $q = \frac{1}{3}$), то за ознакою порівняння даний ряд збіжний.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$.

Розв'язання:

Із очевидної нерівності

$$\frac{1}{n} < 2 \cdot \frac{1}{2n-1} \qquad (n = 1,2,\ldots)$$

і розбіжності гармонічного ряду за ознакою порівняння даний ряд розбігається.

Приклад 3. Дослідити збіжність ряду:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{2^n\cdot n!}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)}.$$

Розв'язання:

а) Оскільки $a_n=\frac{n+1}{3^n}$, то $a_{n+1}=\frac{n+2}{3^{n+1}}$ і $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)\cdot 3^n}{3^{n+1}\cdot(n+1)}=\frac{1}{3}<1$.

За ознакою Даламбера ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}$ збіжний.

б) Оскільки $a_n=\frac{n^n}{2^n n!}$, то $a_{n+1}=\frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}$ і

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^{n+1}\ 2^n\ n!}{2^{n+1}\ (n+1)!\ n^n}=\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\frac{1}{2}\cdot e=\frac{e}{2}>1$$

Даний ряд розбігається.

в) Для даного ряду в рівності (1) $\alpha=1$, тому за ознакою Даламбера про збіжність ряду нічого не можна сказати. Із нерівності $\frac{1}{(n+2)(n+3)}<\frac{1}{(n+2)^2}$ та збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^2}$ випливає за ознакою порівняння збіжність даного ряду.

Приклад 4. Дослідити збіжність ряду: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{2n+1}\right)^n$.

Розв'язання:

Оскільки $a_n=\left(\frac{3n-1}{2n+1}\right)^n$, то $\sqrt[n]{a_n}=\frac{3n-1}{2n+1}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{2n+1}=\frac{3}{2}>1$$

За ознакою Коші ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{2n+1}\right)^n$ розбіжний.

Приклад 5. Знайти радіус збіжності, інтервал збіжності і область збіжності степеневих рядів:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n} x^n ; \qquad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n-1}}{2n-1} ;$$

Розв'язання:

а) Це степеневий ряд з центром $x_0 = 0$, де

$$a_n = (-1)^n \frac{n}{2^n}$$

Радіус збіжності R обчислюється за формулою:

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2}} = 2$$

Отже, відкритий інтервал збіжності: (-2; 2).

Перевіримо граничні точки.

1. В точці x = -2 даний степеневий ряд перетворюється в числовий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n} (-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n ,$$

який очевидно розбіжний.

2. В точці x = 2 підставляємо у ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n} (2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n ,$$

який теж розбіжний. Отже, областю збіжності даного степеневого ряду є інтервал (-2; 2).

б) Для даного ряду границя $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ не існує, оскільки $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[2k]{|a_{2k}|} = 0$,

а $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[2k-1]{|a_{2k-1}|} = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[2k-1]{\frac{1}{2k-1}} = 1,$.

Тому радіус збіжності

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[2k-1]{\frac{1}{2k-1}}} = 1.$$

Отже, радіус збіжності цього ряду R = 1, а інтервал збіжності - (1; 3). Тут $x_0 = 2$.

У точках x = 1 і x = 3 степеневий ряд переходить у числові ряди:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1},$$

які збігаються умовно за теоремою Лейбніца.

Отже, областю збіжності цього степеневого ряду є відрізок [1; 3], причому в точках x = 1 та x = 3 ряд збігається умовно.

Приклад 6. Знайти суму ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$.

Розв'язання:

Геометричний ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (-\frac{\sqrt{5}}{3} \le x < \frac{\sqrt{5}}{3})$ згідно з теоремою 3 можна почленно диференціювати. Тому $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (-\frac{\sqrt{5}}{3} \le x < \frac{\sqrt{5}}{3})$. Помножимо праву і ліву частину останньої рівності на x, дістанемо $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (-\frac{\sqrt{5}}{3} \le x < \frac{\sqrt{5}}{3})$.

Приклад 7. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x) = arctg\frac{x}{3}$.

Розв'язання.

Ряд Тейлора з центром у a=0 для функції arctg(u):

$$\operatorname{arctg}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} u^{2n-1}}{2n-1} = u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + \dots \qquad (1)$$

Підставивши в ряд (1) замість u вираз $\frac{x}{3}$, матимемо

$$arctg\frac{x}{3} = \frac{x}{3} - \frac{x^3}{3^3 \cdot 3} + \frac{x^5}{3^5 \cdot 5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{3^{2n+1}(2n-1)} + \dots .$$

Оскільки $\left|\frac{x}{3}\right| \le 1$, то останній ряд збігається до функції $y = arctg\frac{x}{3}$ на відрізку $[-3;3]$.

Приклад 8. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x) = \frac{x}{2-x}$.

Розв’язання:

Ряд Маклорена для функції $\frac{1}{1-u}$:

$$\frac{1}{1-u}=\sum_{n=0}^{\infty}u^n=1+u+u^2+u^3+\cdots+u^n+\ldots$$

Перетворимо функцію таким чином: 2 x 1 1 2 x x 2 x)x(f − · = − = . Підставивши в ряд (2) замість x вираз 2 x , матимемо

$$\frac{x}{2-x}=\frac{x}{2}\left(1+\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{x}{2}\right)^n+\ldots\right)=\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}+\ldots\left(\left|\frac{x}{2}\right|<1\right).$$

Останній ряд збігається до функції $f(x)=\frac{x}{2-x}$ при $\left|\frac{x}{2}\right|<1$ або $x\in(-2;\,2)$.

Задачі для самостійної роботи:

1. Записати ряд по заданому загальному члену:

$$1)\ \ a_k=\frac{k}{2k+1};\quad 2)\ \ a_k=(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}\frac{1}{2k+1}$$

2. Дослідити збіжність ряду за ознакою порівняння:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7^n+n};\qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)};\qquad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{n^4+n^2+2};$$

$$4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{n^4+1}};$$

3. Дослідити збіжність ряду за ознакою Д’аламбера:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n};\qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{(n+3)!};$$

4. Дослідити збіжність ряду за радикальною ознакою Коші:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^n;\qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n};$$

5. Знайти радіус збіжності, інтервал збіжності і область збіжності степеневих рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x+1)^n}{n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$;

в)

$(x-2) + \frac{1!}{2^2}(x-2)^2 + \frac{2!}{3^3}(x-2)^3 + \cdots$;

6. Знайти суму ряду: $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$

7. Розкласти функції в ряд Маклорена і вказати область збіжності:

1) $\sin x^2$; 2) $\frac{1}{\sqrt{e^x}}$; 3) $x^3 \operatorname{arctg} x$;

ТЕМА 5. ОСНОВИ ЛІНІЙНОЇ ТА ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ, АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Приклад 1. Знайти лінійну комбінацію матриць: 3·M + 5·N, де

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Розв'язання:

Помножимо кожен елемент матриці M на скаляр 3:

$$3 \cdot M = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-3) & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot (-2) & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot 3 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-4) \end{pmatrix}$$

Помножимо кожен елемент матриці N на скаляр 5:

$$5 \cdot N = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 & 5 \cdot (-1) & 5 \cdot 0 & 5 \cdot 3 \\ 5 \cdot (-2) & 5 \cdot 0 & 5 \cdot 1 & 5 \cdot 2 \\ 5 \cdot 5 & 5 \cdot 1 & 5 \cdot (-3) & 5 \cdot 0 \end{pmatrix}$$

Додамо відповідні елементи матриць, отриманих на кроках 1 і 2:

$$3 \cdot M + 5 \cdot N = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -9 & 0 \\ 12 & -6 & 15 & 3 \\ 0 & 9 & 3 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -5 & 0 & 15 \\ -10 & 0 & 5 & 10 \\ 25 & 5 & -15 & 0 \end{pmatrix}$$

Маємо: $\begin{pmatrix} 11 & -2 & -9 & 15 \\ 2 & -6 & 20 & 13 \\ 25 & 14 & -12 & -12 \end{pmatrix}$.

Приклад 2. Обчислити визначники.

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$.

Розв'язання:

За формулою $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ обчислюємо а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 5$;

б) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - (a-b)^2 = (a+b-a+b)(a+b+a-b) =$
$= 2a \cdot 2b = 4ab$;

в) $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix} = a^2b^2 - (ab)^2 = 0$;

г) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix} = 1^2 - (\sqrt{2})^2 - (2^2 - (\sqrt{3})^2) = 1 - 2 - 4 + 3 = -2$.

Приклад 3. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 7 & -8 & -9 \end{vmatrix}$.

Розв'язання:

За означенням визначника 3-го порядку $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 7 & -8 & -9 \end{vmatrix} =$

$$= 1 \cdot 4 \cdot (-9) + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 5 \cdot (-8) - 3 \cdot 4 \cdot 7 - 2 \cdot 5 \cdot (-9) - 1 \cdot 6 \cdot (-8) =$$
$$= -36 + 84 - 120 - 84 + 90 + 48 = -18.$$

Приклад 4. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 12, \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4, \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 16. \end{cases}$$

Розв'язання:

Помножимо перше рівняння заданої системи послідовно на 3,5,7 і віднімемо відповідно від другого, третього та четвертого рівнянь. В результаті дістанемо систему

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 12, \\ \quad - 4x_2 + 22x_3 - 20x_4 = -36, \\ \quad - 8x_2 + 26x_3 - 32x_4 = -56, \\ \quad -20x_2 + 38x_3 - 44x_4 = -68. \end{cases}$$

Для виключення невідомого x_2 у третьому і четвертому рівняннях отриманої системи зручно скористатися не перетвореним другим рівнянням цієї системи. Помноживши це рівняння на (-2) і на (-5) та додавши його до третього і четвертого рівняння останньої системи, дістанемо систему:

$$\begin{cases} x_1 & +3x_2 & - \ x_3 & + \ 7x_4 = & 12, \\ & -4x_2 & +22x_3 & -20x_4 = & -36, \\ & & -18x_3 & + \ 8x_4 = & 16, \\ & & -72x_3 & +56x_4 = & 112. \end{cases}$$

Помноживши третє рівняння на (-4) і додавши його до четвертого, матимемо

$$\begin{cases} x_1 & +3x_2 & - \ 5x_3 & + \ 7x_4 = & 12, \\ & -4x_2 & +22x_3 & -20x_4 = & -36, \\ & & -18x_3 & + \ 8x_4 = & 16, \\ & & & 24x_4 = & 48. \end{cases}$$

Виконавши зворотній хід в останній системі, знаходимо невідомі:

$$x_4 = 2, x_3 = 0, x_2 = -1, x_1 = 1.$$

Часто в методі Гаусса замість того, щоб виконувати елементарні перетворення над рівняннями системи, виконують ці перетворення з рядками так званої розширеної матриці, яка складається з коефіцієнтів при невідомих і вільних членів системи.

Приклад 5. Розв’язати систему

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 10, \\ 3x + 7y + 4z = \ 3, \\ x + 2y + 2z = \ 3. \end{cases}$$

Розв’язання:

Обчислимо головний визначник системи, який складається із коефіцієнтів при невідомих

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 7\cdot 2 + 3\cdot 4\cdot 1 + 3\cdot 2\cdot 5 - 5\cdot 7\cdot 1 - 2\cdot 2\cdot 4 - 3\cdot 3\cdot 2 =$$

Так як головний визначник системи відмінний від 0, то значення невідомих x, y, z можна знайти за формулами (2) та (3):

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 10 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 10\cdot7\cdot2 + 3\cdot4\cdot3 + 3\cdot2\cdot5 - 3\cdot7\cdot5 - 3\cdot3\cdot2 - 10\cdot4\cdot2 =$$

$$= 140 + 36 + 30 - 105 - 18 - 80 = 206 - 203 = 3$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot3\cdot2 + 10\cdot4\cdot1 + 3\cdot3\cdot5 - 5\cdot3\cdot1 - 2\cdot4\cdot3 - 10\cdot3\cdot2 =$$

$$= 12 + 40 + 45 - 15 - 24 - 60 = 97 - 99 = -2$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 3 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot7\cdot3 + 3\cdot3\cdot1 + 3\cdot2\cdot10 - 10\cdot7\cdot1 - 2\cdot3\cdot2 - 3\cdot3\cdot3 =$$

$$= 42 + 9 + 60 - 70 - 12 - 27 = 111 - 109 = 2$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{3}{1} = 3, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-2}{1} = -2, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{2}{1} = 2.$$

Перевірка:

$$\begin{cases} 2\cdot3 + 3\cdot(-2) + 5\cdot2 = 10, \\ 3\cdot3 + 7\cdot(-2) + 4\cdot2 = 3, \\ 3 + 2\cdot(-2) + 2\cdot2 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} 10 = 10, \\ 3 = 3, \\ 3 = 3. \end{cases}$$

Відповідь: $x = 3,\ y = -2,\ z = 2$.

Приклад 6. Знайти координати векторів

Дано: $\vec{a} = (2; -4; 2), \vec{b} = (-3; 2; -1)$

Розв’язання:

Вектор $2\vec{a} + 5\vec{b}$:

$$2\vec{a} + 5\vec{b} = 2(2; -4; 2) + 5(-3; 2; -1)$$
$$= (4; -8; 4) + (-15; 10; -5)$$
$$= (-11; 2; -1)$$

Вектор $2\vec{b} - \vec{a}$:

$$2\vec{b} - \vec{a} = 2(-3; 2; -1) - (2; -4; 2)$$
$$= (-6; 4; -2) - (2; -4; 2)$$
$$= (-8; 8; -4)$$

Приклад 7. Знайти координати векторів $\overrightarrow{M_1M_2}$ і $\overrightarrow{M_2M_1}$

Дано: $M_1(1;2;3), M_2(3;-4;6)$

Розв'язання:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (3-1, -4-2, 6-3) = (2;-6;3)$$

$$\overrightarrow{M_2M_1} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$$

$$\overrightarrow{M_2M_1} = (1-3, 2-(-4), 3-6) = (-2;6;-3)$$

Приклад 8. Перевірити колінеарність векторів $\vec{a} = (2;-1;3), \vec{b} = (-6;3;-9)$

Розв'язання:

Вектори колінеарні, якщо існує число λ таке, що $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

$$\frac{-6}{2} = -3, \quad \frac{3}{-1} = -3, \quad \frac{-9}{3} = -3$$

Відповідь: Вектори колінеарні.

Приклад 9. Чи проходить площина $2x + y - 4 = 0$ через точки $A(-1;6;3), B(3;-2;-5), C(0;4;-1), D(-2;0;5)$?

Розв'язання:

У загальне рівняння площини $Ax + By + Cz + D = 0$ підставимо координати точки. Якщо рівність виконується, то площина проходить через точку, якщо ні – то не проходить. Отже, площина проходить через точки A, B і C та не проходить через точку D.

Приклад 10. Які особливості в розміщенні площин:

1)3x - 5y + 1 = 0;

2)2x + 3y - 7z = 0;

3)9y - 2 = 0;

4) x + z - 5 = 0;

5) 8y - 3z = 0?

Розв'язання:

1) проходить паралельно осі OZ;

2) проходить через початок координат O(0; 0; 0);

3) проходить паралельно площині OXZ;

4) проходить паралельно осі OY;

5) проходить через вісь OX.

Приклад 11. Дано вершини тетраедра A(4; 0; 2), B(0; 5; 1), C(4; -1; 3) і D(3; -1; 5). Написати рівняння площини, що проходить через ребро AB і паралельна ребру CD.

Розв'язання:

Щоб знайти задане рівняння, необхідно знайти координати векторів AB і CD.

Маємо:

AB = (0 - 4; 5 - 0; 1 - 2) = (-4; 5; -1), CD = (3 - 4; -1 - (-1); 5 - 3) = (-1; 0; 2).

Шукана площина проходить через точку A(4; 0; 2) і має напрямні вектори AB та CD. Для довільної точки M(x; y; z), що належить шуканій площині, вектори AM = (x - 4; y - 0; z - 2), AB і CD повинні задовольняти умові компланарності (їх мішаний добуток дорівнює нулю), тому:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-0 & z-2 \\ -4 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Звідси шукане рівняння має вигляд:

$(x - 4) \cdot (5 \cdot 2 - (-1) \cdot 0) - y \cdot ((-4) \cdot 2 - (-1) \cdot (-1)) + (z - 2) \cdot ((-4) \cdot 0 – 5 \cdot (- 1)) = 0$

Розкриваємо дужки і спрощуємо:

$$(x - 4)\cdot(10 - 0) - y\cdot(-8 - 1) + (z - 2)\cdot(0 + 5) = 0$$

$$10(x - 4) - y(-9) + 5(z - 2) = 0$$

$$10x - 40 + 9y + 5z - 10 = 0$$

Отже: $10x + 9y + 5z - 50 = 0$.

Завдання для самостійної роботи:

1. Знайти лінійну комбінацію матриць:

а) $4\cdot A-7\cdot B,\quad A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 5 & 3\\ 2 & 0 & -3 & 1\\ 5 & -1 & 0 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 7 & -5\\ -8 & 1 & 3 & 0\\ 4 & 2 & -2 & 5\end{pmatrix};$

б) $5A-3B+2C,\quad A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 5 & 1\\ -1 & 2 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5 & 1 & -2\\ -3 & 2 & 7\\ 4 & 0 & -1\end{pmatrix},$

$C=\begin{pmatrix}-5 & 3 & 1\\ 2 & 0 & 5\\ 6 & 4 & 2\end{pmatrix};$

2. Обчислити значення матричного многочлена $f(\mathrm{A})$, якщо

$$\text{а)}\quad f(x)=3x^2+5x-2,\quad A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -3\\ 0 & 1 & 4\\ 5 & -2 & 1\end{pmatrix},$$

$$\text{б)}\quad f(x)=x^3-7x^2+13x-5,\quad A=\begin{pmatrix}5 & 2 & -3\\ 1 & 3 & -1\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}.$$

3. Знайти добуток матриць $(A\cdot B)\cdot C \; i \; A\cdot(B\cdot C)$:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 0\\ -2 & 5 & -1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-2 & 4 & -3 & 0\\ 0 & 2 & 5 & -2\\ 3 & -1 & 2 & 4\end{pmatrix}.$$

4. Обчислити визначники:

$$1)\begin{vmatrix}4 & -1 & -1\\ 11 & 4 & -2\\ 11 & -2 & 4\end{vmatrix};\ 2)\begin{vmatrix}2 & 4 & -1\\ 3 & 11 & -2\\ 3 & 11 & 4\end{vmatrix};\ 3)\begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\ 3 & 4 & -2\\ 3 & -2 & 4\end{vmatrix};\ 4)\begin{vmatrix}1 & 5 & 7\\ 0 & 4 & 3\\ 2 & 5 & 6\end{vmatrix};$$

$$5)\begin{vmatrix}3 & -38 & 4\\ 5 & -35 & 2\\ 2 & -49 & 3\end{vmatrix};\ 6)\begin{vmatrix}4 & -2 & 4\\ 10 & 2 & 12\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix};\ 7)\begin{vmatrix}a & a & a\\ -a & a & x\\ -a & -a & x\end{vmatrix};\ 8)\begin{vmatrix}x-1 & 1\\ x^3 & x^2+x+1\end{vmatrix};$$

$$9)\begin{vmatrix}\alpha^2+1 & \alpha\cdot\beta & \alpha\cdot\gamma\\ \alpha\cdot\beta & \beta^2+1 & \beta\cdot\gamma\\ \alpha\cdot\gamma & \beta\cdot\gamma & \gamma^2+1\end{vmatrix};\ 10)\begin{vmatrix}a+x & x & x\\ x & b+x & x\\ x & x & c+x\end{vmatrix};\ 11)\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha & 1\\ \sin\beta & \cos\beta & 1\\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1\end{vmatrix}$$

5. Розв’язати системи лінійних рівнянь:

1. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6, \\ 2x_1-x_2-2x_3-3x_4=8, \\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=4, \\ 2x_1-3x_2+2x_3+x_4=-8; \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3+x_4-x_5=1, \\ 2x_1-x_2+7x_3-3x_4+5x_5=2, \\ x_1+3x_2-2x_3+x_4-7x_5=3, \\ 3x_1-2x_2+7x_3-5x_4+8x_5=3; \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_4+2x_5=1, \\ x_1-x_2-3x_3+x_4-3x_5=2, \\ 2x_1-3x_2+4x_3-5x_4+2x_5=7, \\ 9x_1-9x_2+6x_3-16x_4+2x_5=25. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5, \\ 2x_1+x_2+2x_3+3x_4=1, \\ 3x_1+2x_2+x_3+2x_4=1, \\ 4x_1+3x_2+2x_3+x_4=-5. \end{cases}$

6. Розв’язати системи лінійних рівнянь за формулами Крамера та виконати перевірку.

а) $\begin{cases} 7x_1+9x_2+4x_3+2x_4=2, \\ 2x_1-2x_2+x_3+x_4=6, \\ 5x_1+6x_2+3x_3+2x_4=3, \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4=0. \end{cases}$; б) $\begin{cases} 6x+5y-2z+4t+4=0, \\ 9x-y+4z-t-13=0, \\ 3x+4y+2z-2t-1=0, \\ 3x-9y+2t-11=0. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x-y-6z+3t+1=0, \\ 7x-4y+2z-15t+32=0, \\ x-2y-4z+9t-5=0, \\ x-y+2z-6t+8=0, \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x+y+4z+8t=-1, \\ x+3y-6z+2t=3, \\ 3x-2y+2z-2t=8, \\ 2x-y+2z=4. \end{cases}$

7. Знайти координати векторів $3\vec{a}-2\vec{b}$ та $\vec{a}+4\vec{b}$, якщо $\vec{a}=(1;3;-2),\ \vec{b}=(2;-1;4)$.

8. Дано точки $P_1(2;-1;5)$ та $P_2(-1;4;2)$. Знайти координати векторів $\vec{P_1P_2}$ та $\vec{P_2P_1}$.

9. Перевірити колінеарність векторів:

а) $\vec{u}=(1;2;-1)$ і $\vec{v}=(2;4;-2)$

б) $\vec{u}=(0;3;5)$ і $\vec{v}=(1;-2;4)$

10. Дано $\vec{a}=(2;-1;3),\ \vec{b}=(0;4;-2),\ \vec{c}=(1;1;0),\ \vec{d}=(3;-2;5)$.

Знайти координати векторів – лінійних комбінацій:

$-2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}+2\vec{d},$

$\vec{a}-\vec{b}+4\vec{c}-\vec{d}.$

11. Дано вершини тетраедра: A(4; 0; 2), B(0; 5; 1), C(4; 1; 3), D(3; 1; 5).

Написати рівняння площини, що проходить через вершину A і паралельна грані BCD.

12. Скласти рівняння площини, що проходить через вісь OY і точку M(1; 2; 5).

13. Скласти рівняння площини, яка проходить через початок координат і перпендикулярна до двох площин: $2x - 3y + z - 10 = 0$, $2x + y + z = 0$.

14. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку M(2; 3; 7) і паралельна площині: $2x - 6y - 3z + 5 = 0$.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1. Реалізація числових послідовностей та їх границь у Python

Завдання: Дослідження послідовності $\{a_n\}$, де $a_n = \frac{3n^2-n+1}{n^2+5n}$.

Вимоги до програми:

1) Створити функцію generate_sequence(N) для генерування перших N елементів послідовності.
2) Реалізувати функцію find_limit(sequence) – чисельна оцінка границі (середнє останніх 10 елементів).
3) Порівняти числове значення границі з аналітичним ($\lim a_n = 3$).
4) Побудувати графік a_n при N = 100 з горизонтальною лінією y = 3.

2. Порівняння нескінченно великих величин

Завдання: Функції: $f(x) = x^4 + \ln(x)$; $g(x) = e^{(0.5x)}$ при $x \to \infty$.

Вимоги:

1) Створити функцію для обчислення відношення $\frac{f(x)}{g(x)}$.
2) Обчислити це відношення для x = 10, 50, 100, 500.
3) Зробити висновок про швидкість зростання функцій.
4) Побудувати графіки f(x) і g(x) на інтервалі [1, 20].

3. Обчислення похідних та дослідження функції

Функція: $f(x) = x^4 – 8x^2 + 3$

Вимоги:

1) Реалізувати числову похідну: $f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$, $h = 10^{-6}$.
2) Знайти локальні екстремуми, шукаючи корені рівняння $f'(x) = 0$ перебором на інтервалі [-3, 3].
3) Побудувати графік *f(x)* з позначенням мінімумів та максимумів.

4. Обчислення визначеного інтеграла

Інтеграл: $I = \int_{-1}^{2}(x^3 + 2x^2)dx$.

Вимоги:

1) Метод середніх прямокутників: integrate_rectangles(f, a, b, n)
2) Метод трапецій: integrate_trapezoids(f, a, b, n)
3) Обчислити інтеграл обома методами для n = 10, 100, 1000 розбиттів. Точне аналітичне значення інтеграла: I = 7.5.
4) Складіть таблицю (або виведіть у консоль) для порівняння отриманих значень та абсолютної похибки $(|I_{\text{чис}} - 7.5|)$ для кожного методу і кожного n.

5. Реалізація методів оптимізації (лінійного та нелінійного програмування) на Python

Завдання: Розв'язання двох типів задач оптимізації з використанням бібліотеки SciPy.

Вимоги:

1) Лінійне програмування (SciPy linprog): Знайти максимум функції

$$F(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2$$

Обмеження:

$$x_1 + 2x_2 \leq 16$$

$$3x_1 + x_2 \leq 18$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

(Пам'ятайте, що linprog мінімізує, тому необхідно мінімізувати – $F(x_1, x_2)$)

2) Нелінійне програмування (SciPy minimize): Знайти мінімум функції $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x + 8y + 5$

3) Виведіть оптимальні значення змінних (x_1^*, x_2^*) та мінімальне/ максимальне значення цільової функції для обох задач.

6. Апроксимація даних методом найменших квадратів у Python

Завдання: Апроксимація даних, що описують залежність тиску від температури.

Вимоги:

Дані для аналізу: T = [10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80] (Температура, °C); P = [15.2, 19.8, 26.5, 35.1, 46.9, 62.0, 80.5, 103.8] (Тиск, атм).

Вимоги:

1) Виконайте апроксимацію даних поліномом **першого ступеня (**Лінійна регресія $P = aT + b$) та поліномом **третього ступеня (**Кубічна регресія $P = aT^3 + bT^2 + cT + d$) за допомогою функції numpy.polyfit.
2) Побудуйте графік точок і обох кривих.
3) Обчисліть середньоквадратичну похибку RMSE для обох моделей.

7. Розв'язання диференціальних рівнянь за допомогою ітераційних методів

Завдання: Розв'язання задачі Коші для диференціального рівняння $\frac{dy}{dx} = 2x - 3y$ з початковою умовою y(0) = 0 на інтервалі x є [0, 4].

Вимоги:

1) Реалізуйте функцію, яка виконує ітераційний розрахунок за методом Ейлера з фіксованим кроком h.
2) Виконайте чисельний розв'язок для кроку h=0.05.
3) Порівняння: Аналітичний розв'язок цього рівняння $y(x) = \frac{2}{9}(3x - 1) + \frac{2}{9}e^{-3x}$.
4) Побудуйте графік чисельного та аналітичного розв'язків на одному полі для візуального порівняння точності методу Ейлера.

8. Реалізація числових рядів та аналіз їх збіжності на Python

Завдання: Дослідження збіжності ряду Лейбніца для $\frac{\pi}{4}$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$

Вимоги:

1) Створіть функцію partial_sum_leibniz(N), яка обчислює часткову суму S_N для заданої кількості доданків N.
2) Обчисліть значення часткових сум S_N для N=10, 100, 1000 і порівняйте результат $4 \cdot S_N$ з бібліотечним значенням π.
3) Оцінка похибки: Визначте, скільки доданків N необхідно взяти, щоб наближене значення $4 \cdot S_N$ відрізнялося від π менше ніж на $\varepsilon = 10^{-3}$.

9. Програмування операцій над матрицями

Завдання: Виконання операцій над матрицею A розміром 3×3 за допомогою бібліотеки NumPy.

Вимоги:

1) Задайте матрицю A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2) Обчисліть визначник матриці det(A).
3) Знайдіть обернену матрицю A^{-1}. Перевірте результат, обчисливши добуток $A \cdot A^{-1}$.
4) Обчисліть власні числа та відповідні власні вектори матриці A.
5) Для одного з власних чисел λ і відповідного власного вектора v перевірте рівність $Av = \lambda v$.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДО ТЕМИ 1

1. Якою нерівністю визначається обмежена послідовність $\{x_n\}$?

A. $x_{n+1} > x_n$

B. для всіх $M \in R$ існує $n_0 \in N$: $|x_{n0}| > M$

C. існує $M \in R$ для всіх $n \in N$: $|x_n| \leq M$

D. $x_{n+1} \geq x_n$

2. Як називається послідовність $\{x_n\}$, якщо $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$?

A. Збіжна послідовність

B. Необмежена послідовність

C. Нескінченно велика послідовність

D. Нескінченно мала послідовність

3. За якої умови нескінченно малі величини $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x \to x_0$ (або $x \to \infty$) називаються еквівалентними?

A. $\lim_{x\to x_0} \alpha(x)/\beta(x) = 0$

B. $\lim_{x\to x_0} \alpha(x)/\beta(x) = k, k \neq 0$

C. $\lim_{x\to x_0} \alpha(x)/\beta(x) = 1$

D. $\lim_{x\to x_0} \alpha(x)/\beta(x) = \infty$

4. Що станеться з границею послідовності, якщо від неї відкинути скінченну кількість членів?

A. Границя зміниться на скінченну величину

B. Наявність границі не зміниться, але її величина зміниться

C. Це не вплине ні на існування, ні на величину границі

D. Послідовність стане розбіжною

5. Який вид невизначеності означає знайти границю добутку нескінченно малої та нескінченно великої послідовностей?

A. ∞/∞

B. 0/0

C. ∞ − ∞

D. 0·∞

6. Якщо функція f(x) у точці x_0 має скінченну похідну, як вона називається в цій точці?

A. Обмеженою

B. Монотонною

C. Диференційованою

D. Збіжною

7. Яке правило застосовується для знаходження похідної від складеної функції y = y(U), де U = U(x)?

A. $(U\cdot V)' = U'V + UV'$

B. $(C)' = 0$

C. $y'_x = y'_u \cdot U'_x$

D. $(U/V)' = (U'V - UV') / V^2$

8. Яка формула відповідає похідній (ln x)'?

A. $1 / (x\cdot \ln a)$

B. $1 / x$

C. $1 / \sqrt{(1 - x^2)}$

D. $-\sin x$

9. Використовуючи правила диференціювання, знайдіть похідну (U + V)', де U та V – диференційовані функції.

A. $U'V + UV'$

B. $(U'V - UV') / V^2$

C. $U' + V'$

D. 0

10. Як записується границя, що визначає число e?

A. $\lim_{n\to\infty}(1 - 1/n)^n$

B. $\lim_{n\to 0}(1 + n)^{1/n}$

C. $\lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n$

D. $\lim_{n\to\infty}(1 + n)^{1/n}$

11. Обчисліть границю послідовності: $\lim_{n\to\infty}(3n^2 - 5n + 1)/(2n^2 + n - 4)$.

A. 0

B. ∞

C. 3

D. 3/2

12. Обчисліть похідну функції $y = (4x^3 - 2) \cdot \ln x$.

A. $y' = 12x^2 \ln x + 4x^3 - 2$

B. $y' = 12x^2 \ln x + (4x^3 - 2)/x$

C. $y' = 12x^2 \ln x + 4x^2 - 2/x$

D. $y' = 12x^2 \ln x + 4x^3$

13. Обчисліть границю: $\lim(x\to 0) \sin(2x) / (5x)$.

A. 1/5

B. 2/5

C. 0

D. ∞

14. Знайдіть похідну складеної функції $y = \cos(x^2 + 3)$.

A. $y' = 2x \sin(x^2 + 3)$

B. $y' = \sin(x^2 + 3)$

C. $y' = -\sin(x^2 + 3) \cdot 2x$

D. $y' = -\sin(x^2 + 3)$

15. Обчисліть границю: $\lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^{5n}$.

A. e

B. e^5

C. 5e

D. 1

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДО ТЕМИ 2

1. Яка рівність повинна виконуватися для того, щоб функція $F(x)$ називалася первісною функції $f(x)$ на проміжку $\langle a; b\rangle$?

A. $\int F(x)dx = f(x)$

B. $f'(x) = F(x)$

C. $F'(x) = f(x)$

D. $F(x) - f(x) = C$

2. Як називається множина всіх первісних функцій $f(x)$ на проміжку $\langle a; b\rangle$?

A. Границя функції

B. Диференціал функції

C. Невизначений інтеграл

D. Визначений інтеграл

3. Операція знаходження невизначеного інтеграла $\int f(x)dx$ є оберненою до якої математичної операції?

A. Множення

B. Піднесення до степені

C. Диференціювання

D. Логарифмування

4. Якщо $F_1(x)$ і $F_2(x)$ – дві довільні первісні для функції $f(x)$ на проміжку $\langle a; b\rangle$, то чому дорівнює їх різниця?

A. x

B. $f(x)$

C. 0

D. Стала величина C

5. Метод інтегрування частинами ($\int u\, dv = uv - \int v\, du$) вважається ефективним, якщо інтеграл $\int v\, du$ порівняно з $\int u\, dv$ є:

A. Більш складним для обчислення

B. Простішим для обчислення

C. Тотожно рівним

D. Нескінченно великим

6. Обчисліть інтеграл $\int (2x + 3)^5\, dx$:

A. $(2x + 3)^6 / 6 + C$

B. $(2x + 3)^6 / 12 + C$

C. $(2x + 3)^5 / 5 + C$

D. $5(2x + 3)^4 + C$

7. Обчисліть інтеграл $\int (1/\sqrt{x} - 4x^3)\, dx$:

A. $(2/3)x^{(3/2)} - x^4 + C$

B. $1/(2\sqrt{x}) - 12x^2 + C$

C. $2\sqrt{x} - x^4 + C$

D. $\ln|\sqrt{x}| - x^4 + C$

8. Обчисліть інтеграл $\int x\, e^x\, dx$:

A. $e^x + C$

B. $x\, e^x - e^x + C$

C. $(x^2/2)\, e^x + C$

D. $x\, e^x + e^x + C$

9. Обчисліть інтеграл $\int x/(x^2 + 1)\, dx$:

A. $\ln|x^2 + 1| + C$

B. $(x^2/2) \ln|x^2 + 1| + C$

C. $1/2 \ln|x^2 + 1| + C$

D. $\arctan(x) + C$

10. Обчисліть інтеграл $\int \ln x \, dx$:

A. $1/x + C$

B. $x \ln x - x + C$

C. $x \ln x + x + C$

D. $\ln|x| + C$

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДО ТЕМИ 3

1. Яка основна мета Методу найменших квадратів (МНК) у задачі апроксимації (або регресії)?

A. Знайти функцію, що проходить через усі задані експериментальні точки.

B. Знайти параметри функції, що мінімізують суму квадратів відхилень між експериментальними та апроксимованими значеннями.

C. Обчислити середнє значення залежної змінної.

D. Визначити, чи є залежність між показниками X та Y.

2. Яка величина повинна набувати мінімального значення для досягнення найкращого наближення в розумінні МНК?

A. Сума абсолютних значень відхилень $\sum|y_i - \hat{y}_i|$.

B. Середньоквадратичне відхилення $\sqrt{(1/n \sum(y_i - \hat{y}_i)^2)}$.

C. Сума квадратів відхилень $\sum(y_i - \hat{y}_i)^2$.

D. Максимальне відхилення $\max|y_i - \hat{y}_i|$.

3. Що позначає відхилення (помилка) ε_i (або δ_i) у контексті МНК?

A. Різниця між двома сусідніми значеннями $x_{i+1} - x_i$.

B. Різниця між значенням x_i та середнім значенням $\bar{x}$.

C. Різниця між експериментальним значенням y_i та апроксимуючим значенням $\hat{y}_i$.

D. Різниця між середнім значенням Y та середнім значенням X.

4. У загальній постановці задачі апроксимації, де досліджуються показники X та Y, що саме є шуканою величиною?

A. Числові значення показника X.

B. Середнє значення показника Y.

C. Вид функції $\hat{y} = f(x; a_0, a_1, \ldots)$ та її оптимальні параметри a_i.

D. Максимальне значення X.

5. Якщо функція y = f(x) отримана за допомогою МНК, що означає, що вона є «найкращим наближенням» у своєму сімействі?

A. Вона є неперервною на всьому проміжку.

B. Вона проходить через найбільшу кількість експериментальних точок.

C. Вона забезпечує найменше значення показника суми квадратів відхилень ($\sum\varepsilon_i^2$).

D. Її похідна в нулі дорівнює нулю.

6. Яке основне припущення щодо X та Y лежить в основі задачі апроксимації?

A. X та Y є незалежними.

B. Існує підстава вважати, що показник Y залежить від показника X.

C. X та Y завжди є лінійно залежними.

D. Кількість спостережень n повинна бути парною.

7. Які дані є відправною точкою для застосування МНК?

A. Тільки вид апроксимуючої функції.

B. Скінченна множина числових пар (експериментальних точок) $M_i(x_i, y_i)$.

C. Тільки середні значення X та Y.

D. Похідна від залежності.

8. Якщо ми порівнюємо дві різні моделі апроксимації, який критерій використовується?

A. Функція, яка має більший нахил.

B. Функція, яка дає найбільше значення Y.

C. Функція, для якої сума квадратів відхилень ($\sum\varepsilon_i^2$) є меншою.

D. Функція, яка має більше параметрів.

9. Як класифікуються змінні X і Y у прикладі з торговою площею та товарообігом?

A. Обидва показники незалежні.

B. X – залежна, Y – незалежна.

C. X – незалежна змінна, Y – залежна змінна.

D. Обидва показники залежні.

10. До якої загальної області належить МНК?

A. Теоретична математика.

B. Інтегрування раціональних функцій.

C. Фундаментальна Дисципліна Змінних (ФДЗ) та має широке застосування.

D. Тільки для побудови лінійних функцій.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДО ТЕМИ 4

1. Яка умова (ознака) є НЕОБХІДНОЮ для збіжності числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

A. $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$

B. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

C. $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$

D. Ряд є знакопочережним.

2. За ознакою Д'Аламбера, при якій умові додатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є збіжним?

A. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

B. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$

C. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$

D. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = K > 1$

3. Який ряд називається умовно (не абсолютно) збіжним?

A. $\sum a_n$ збіжний, а $\sum |a_n|$ розбіжний.

B. $\sum a_n$ збіжний, і $\sum |a_n|$ збіжний.

C. $\sum a_n$ розбіжний.

D. $\sum a_n$ є знакопочережним.

4. Використовуючи правила диференціювання, знайдіть похідну (C·U·V)′, де C=const, а U(x) і V(x) – диференційовані функції.

A. CU′V′+CUV

B. C(U′V′+UV)

C. C(U′V+UV′)

D. U′V+UV′

5. Обчисліть границю: $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n/2}$.

A. e^2

B. $e^{1/2}$

C. 1/2

D. e

6. Як називається множина всіх значень xxx, для яких функціональна послідовність $\{f_n(x)\}$ є збіжною?

A. Інтервал монотонності

B. Область визначення

C. Множина (область) збіжності

D. Область допустимих значень

7. Який вигляд має степеневий ряд (ряд Маклорена)?

A. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

B. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx)$

C. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$

D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x-x_0}{n!}$

8. Якою формулою визначається коефіцієнт Тейлора c_n у степеневому ряді?

A. $c_n = \frac{f(x_0)}{n!}$

B. $c_n = \frac{f'(x_0)}{(n+1)!}$

C. $c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

D. $c_n = n!\, f^{(n)}(x_0)$

9. Як визначається радіус збіжності R для степеневого ряду $\sum c_n (x-x_0)^n$?

A. $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$

B. $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$

C. $R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$

D. $R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}(1/|c_n|)}$

10. Який розклад має функція e^x у ряд Маклорена?

A. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

B. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

C. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

D. $e^x = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \dots$

11. Диференціальне рівняння вигляду $F(x,y,y',y'')=0$ є рівнянням якого порядку?

A. Першого

B. Другого

C. Третього

D. Нульового

12. Що є розв'язком диференціального рівняння другого порядку $F(x,y,y',y'')=0$?

A. Константа, що задовольняє рівняння

B. Функція $y=\varphi(x)$, що перетворює рівняння на тотожність

C. Область $D \subset R^3$

D. Вираз $y''=f(x,y,y')$

13. Якщо рівняння другого порядку можна розв'язати відносно старшої похідної, то воно записується як:

A. $y'=f(x,y)$

B. $y''=f(x,y,y')$

C. $y=f(x,y',y'')$

D. $y'=f(x,y,y'')$

14. Скільки початкових умов потрібно для задачі Коші для рівняння другого порядку?

A. Одна умова

B. Три умови

C. Дві умови

D. Жодної умови

15. Який тип диференціальних рівнянь другого порядку розглядається після загальних понять (за планом лекції)?

A. Лінійні рівняння зі сталими коефіцієнтами

B. Рівняння, що допускають пониження порядку

C. Однорідні рівняння

D. Рівняння Бернуллі

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДО ТЕМИ 5

1. Що називається матрицею?

A. Алгебраїчна сума елементів, взятих з квадратного масиву чисел.

B. Вектор-стовпець, складений із вільних членів системи лінійних рівнянь.

C. Прямокутна таблиця чисел, яка має mmm рядків і nnn стовпців.

D. Число, що характеризує квадратну матрицю.

2. За якої умови матриця називається квадратною?

A. Якщо всі її елементи рівні нулю.

B. Якщо вона має лише один рядок або один стовпець.

C. Якщо елементи, що не лежать на головній діагоналі, дорівнюють нулю.

D. Якщо кількість рядків mmm дорівнює кількості стовпців n.

3. Як отримується транспонована матриця A^T з матриці A?

A. Шляхом множення матриці A на скаляр.

B. Шляхом зміни знаків усіх елементів A.

C. Шляхом заміни рядків матриці A стовпцями, а стовпців – рядками.

D. Шляхом піднесення матриці A до степені −1.

4. Обчисліть суму матриць A+B, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$.

A. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

5. Обчисліть 3A, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

A. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

6. Чому дорівнює визначник другого порядку матриці $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$?

A. $a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22}$

B. $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

C. $a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22}$

D. $a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}$

7. Якщо всі елементи деякого рядка або стовпця визначника дорівнюють нулю, то чому дорівнює сам визначник?

A. 1

B. Нескінченності

C. 0

D. ±1

8. Обчисліть визначник матриці $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

A. 13

B. 17

C. 15

D. 17

9. Якщо визначник має два однакових або пропорційних рядки (або стовпці), то чому він дорівнює?

A. Добутку цих рядків

B. Одиниці

C. Нулю

D. Різниці між рядками

10. Як змінюється визначник при транспонуванні матриці $A \rightarrow A^T$?

A. Змінює знак

B. Не змінює значення

C. Збільшується в nnn разів

D. Стає рівним нулю

11. Що називається розв'язком системи лінійних рівнянь з nnn невідомими?

A. Кількість рівнянь

B. Сукупність чисел $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, що перетворює систему на тотожність

C. Визначник основної матриці

D. Вектор-стовпець вільних членів

12. Система лінійних рівнянь називається сумісною, якщо…

A. Усі вільні члени дорівнюють нулю

B. Має хоча б один розв'язок

C. Не має розв'язків

D. Кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих

13. Система лінійних рівнянь називається несумісною, якщо…

A. Має нескінченну множину розв’язків

B. Усі коефіцієнти дорівнюють нулю

C. Не має розв’язків

D. Визначник основної матриці не дорівнює нулю

14. Обчисліть головний визначник Δ системи

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x - y = 4 \end{cases}.$$

A. 1

B. 5

C. –5

D. 7

15. У системі, поданій у вигляді розширеної матриці

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

чому дорівнює вираз для невідомої x_2?

A. $5-2x_3$

B. $3-x_3$

C. $3+x_3$

D. x_3

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ТА ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Вища математика. Аналітична геометрія: методичні рекомендації для практичних занять для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти ОПП «Менеджмент» спеціальності D3 «Менеджмент» денної та заочної форм здобуття вищої освіти / уклад. В. М. Дармосюк. Миколаїв: МНАУ, 2025. 53 с.

2. Вища математика: Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії: Навчальний посібник: навч. посіб. для студ. Спеціальності 122 «Комп'ютерні науки та інформаційні технології» /КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: Т. О. Єрьоміна, О. А. Поварова. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 112 с.

3. Маловічко, Т. В. Математичний аналіз. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Конспект лекцій: навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю 104 Фізика та астрономія / Т. В. Маловічко ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025. 151 с.

4. Математичне моделювання систем і процесів : конспект лекцій / уклад. Н. В. Богданова, О. В. Богданов. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 85 с. URL: https://ela.kpi.ua/server/api/core/bitstreams/b0f1b40c-289d-4385-956e-0791d55ede37/content.

5. Математичні методи в задачах автоматизації : навчальний посібник / уклад.: А. І. Жученко, Л. Д. Ярощук, Т. А. Дунаєва. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 385 с. URL: https://ela.kpi.ua/33bitstreams/0cf19009-04aa-490e-a00f-71a0715bf1c0/download.

6. Методи оптимізації. Компьютерний практикум : навчальний посібник / уклад.: А. П. Яковлева, І. Я. Спекторський. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 82 с. URL: https://ela.kpi.ua/bitstreams/222e5ba9-a5a6-4f94-acae-77bef6b23df7/download.

7. Скуратовський Р. В. Вища математика з прикладами і задачами: Підручник. Київ : Національна академія управління, 2021. 232 с.

8. Яровий А. А., Ваховська Л. М., Крилик Л. В. Математичні методи дослідження операцій. Лінійне програмування: навчальний посібник. Вінниця: ВНТУ, 2020. Ч. 1. 86 с. URL: https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/IRVC/Yarovij_P1_2020_86.pdf

Навчальне видання

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ В ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЯХ

Методичні рекомендації

Укладачі:

Пархоменко Олександр Юрійович
Богатєнкова Олександра Євгенівна

Формат 60х84 1/16. Ум. друк. арк. 6,25.
Наклад 50 прим. Зам. № _____

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.