

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Інженерно-енергетичний факультет

Кафедра вищої та прикладної математики

ВИЩА МАТЕМАТИКА:

АЛГЕБРА ТА ГЕОМЕТРІЯ

методичні рекомендації
для виконання самостійної роботи
здобувачами першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
ОПП «Агроінженерія» спеціальності 208 «Агроінженерія»
денної та заочної форм здобуття вищої освіти

МИКОЛАЇВ

2023

УДК 51
В55

Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету (протокол № 8 від 30. 03. 2023р.)

Укладачі:

- О.В. Бойчук – к.ф.-м.н., старший викладач кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського національного аграрного університету;
- С.І. Богданов – старший викладач кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського національного аграрного університету;
- Є.Ю. Борчик – к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського національного аграрного університету;
- В.В. Поживатенко – к.ф.-м.н., старший викладач кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського національного аграрного університету.

Рецензент:

- Дармосюк В.М. – доцент кафедри фізики та математики Миколаївського національного університету ім. В.О. Сухомлинського.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
Модуль 01 “Лінійна та векторна алгебра”	5
МАТРИЦІ. ДІЇ З МАТРИЦЯМИ	5
ВИЗНАЧНИКИ, МІНОРИ ТА АЛГЕБРАЇЧНІ ДОПОВНЕННЯ	7
ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ ТА ЇЇ ЗНАХОДЖЕННЯ	12
МАТРИЧИЙ СПОСІБ РОЗВ’ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ.....	14
ФОРМУЛИ КРАМЕРА. МЕТОД ГАУССА	16
НЕСУМІСНІ І НЕВИЗНАЧЕНІ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ	18
ЛІНІЙНІ ДІЇ НАД ВЕКТОРАМИ. СКАЛЯРНЕ МНОЖЕННЯ ВЕКТОРІВ	23
ВЕКТОРНИЙ ТА МІШАНИЙ ДОБУТКИ ВЕКТОРІВ.....	24
Модуль 02 “Елементи аналітичної геометрії на площині”.....	29
СИСТЕМА ПРЯМОКУТНИХ КООРДИНАТ.....	29
ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ. РІЗНІ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ НА ПЛОЩИНІ.....	32
ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ПРЯМИХ І ТОЧОК НА ПЛОЩИНІ.....	34
ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ НА ПЛОЩИНІ.....	36
Модуль 03 “Аналітична геометрія в просторі”.....	40
ПЛОЩИНА ЯК ПОВЕРХНЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ	40
ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ПЛОЩИН І ТОЧОК У ПРОСТОРІ.....	44
ПРЯМА У ПРОСТОРІ	46
ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ У ПРОСТОРІ.....	47
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	51

ВСТУП

Методичні рекомендації присвячені першим трьом модулям курсу дисципліни «Вища математика», а саме «Лінійна та векторна алгебра», «Аналітична геометрія на площині», «Аналітична геометрія у просторі».

Матеріал викладено таким чином, щоб максимально допомогти студентам оволодіти знаннями та набути основних навичків розв'язування завдань з цих модулів, особливо при дистанційній формі навчання.

У методичних рекомендаціях наводяться стисло теоретичні відомості, необхідні для розв'язування практичних завдань, наводяться приклади розв'язування завдань з роз'ясненнями, приводяться завдання для самостійного виконання.

Методичні рекомендації створено відповідно до програми курсу «Вища математика» для здобувачів освітнього рівня «бакалавр» спеціальності 122 «Комп'ютерні науки», але їх можуть також використовувати студенти інших спеціальностей, що вивчають курс «Вища математика».

Модуль 01 “Лінійна та векторна алгебра”

МАТРИЦІ. ДІЇ З МАТРИЦЯМИ

1. Основні поняття та теореми

Прямокутна таблиця $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$, складена з m рядків і n

стовпців чисел a_{ij} , називається матрицею розміру $m \times n$.

Числа a_{ij} ($i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,n$) називаються елементами матриці, перший індекс вказує номер рядка, в якому стоїть елемент матриці, а другий індекс – номер стовпця.

Основними математичними операціями з матрицями є множення матриці на число, додавання матриць і множення матриць.

Добутком числа λ і матриці $A = [a_{ij}]$ називається матриця $B = [b_{ij}]$ елементи якої підраховують згідно з правилом $b_{ij} = \lambda a_{ij}$.

Властивості операції множення матриці на число: $\lambda A = A\lambda$; $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$.

Сумою двох матриць $A = [a_{ij}]$ і $B = [b_{ij}]$, що мають відповідно рівні кількості рядків і стовпців, називається матриця $S = [s_{ij}]$ такої ж розмірності з елементами, що дорівнюють сумам відповідних елементів матриць A і B : $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Властивості операції додавання матриць: $A + B = B + A$; $(A + B) + C = A + (B + C)$; $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$; $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.

Операція додавання матриць має обернену операцію – віднімання. Різницею матриць $A = [a_{ij}]$ і $B = [b_{ij}]$ називається матриця $D = [d_{ij}]$, складена з різниці відповідних елементів заданих матриць.

Множення матриць. Нехай матриці $A = [a_{ij}]$ і $B = [b_{ij}]$ мають вигляд:

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ і $B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nk} \end{bmatrix}$, тобто кількість стовпців матриці A

збігається з кількістю рядків матриці B . Добутком матриць $A = [a_{ij}]$ і $B = [b_{ij}]$ називається матриця M розміру $m \times k$, елементи якої підраховуються за правилом $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$.

Елемент, що стоїть в i -ому рядку і j -ому стовпці добутку матриць, одержується множенням елементів i -ого рядка матриці A на елементи j -ого стовпця матриці B і додаванням цих добутків.

Операція множення матриць некомутативна $A \cdot B \neq B \cdot A$.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти матрицю $C = 3A + B$, де $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Розв'язування:

$$3A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 6 & -9 & -3 \\ 9 & 3 & 6 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 6 & -9 & -3 \\ 9 & 3 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 8 & -12 & -4 \\ 12 & 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

2. Знайти матрицю $C = A - 2B$, де $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Розв'язування:

$$2B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 5 \\ -1 & -8 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. Знайти матрицю $C = A \cdot B$, де $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Розв'язування:

$$C = \begin{bmatrix} 12+3+0-4 & 8+0+0+0 & -8+4+0+6 \\ -6+0+6-2 & -4+0+3+0 & 4+0+0+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 8 & 2 \\ -2 & -1 & 7 \end{bmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $C = A \cdot B$, де $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Розв'язування: $C = \begin{bmatrix} 4 \cdot 2 + 0 \cdot (-2) + 5 \cdot (-3) \\ 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-3) \\ 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) + 0 \cdot (-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}$.

5. Знайти матриці $C = A \cdot B$ і $D = B \cdot A$, де $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}$.

Розв'язування:

$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$	$D = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}$
$c_{11} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 6 = 4 + 12 = 16$	$d_{11} = 4 \cdot 1 + 5 \cdot (-3) = 4 - 15 = -11$
$c_{12} = 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-8) = 5 - 16 = -11$	$d_{12} = 4 \cdot 2 + 5 \cdot 7 = 8 + 35 = 43$
$c_{21} = -3 \cdot 4 + 7 \cdot 6 = -12 + 42 = 30$	$d_{21} = 6 \cdot 1 + (-8) \cdot (-3) = 6 + 24 = 30$
$c_{22} = -3 \cdot 5 + 7 \cdot (-8) = -15 - 56 = -71$	$d_{22} = 6 \cdot 2 + (-8) \cdot 7 = 12 - 56 = -44$

Відповідь: $C = \begin{bmatrix} 16 & -11 \\ 30 & -71 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -11 & 43 \\ 30 & -44 \end{bmatrix}$.

3. Завдання для самостійного виконання

- Знайти матрицю $D = 3A + B - 2C$, де $A = \begin{bmatrix} -3 + \alpha & 2 + \alpha \\ 1 + \alpha & \alpha \end{bmatrix}$,
 $B = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha \\ 2 + \alpha & 4 + \alpha \end{bmatrix}$ і $C = \begin{bmatrix} 3 + \alpha & -9 + \alpha \\ \alpha & 4 + \alpha \end{bmatrix}$.
- Знайти $C = A \cdot B$, де $A = \begin{bmatrix} 1,5 + \alpha & -4,5 + \alpha & 2 + \alpha \\ \alpha & 2 + \alpha & -1 + \alpha \\ -2 + \alpha & 7 + \alpha & -3 + \alpha \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 + \alpha \\ 1 + \alpha \\ -2 + \alpha \end{bmatrix}$.
- Знайти матриці $C = A \cdot B$ і $D = B \cdot A$, де $A = \begin{bmatrix} 1 + \alpha & 3 + \alpha \\ -1 + \alpha & -7 + \alpha \end{bmatrix}$,
 $B = \begin{bmatrix} 4 - \alpha & 5 - \alpha \\ 6 - \alpha & -2 - \alpha \end{bmatrix}$.

ВИЗНАЧНИКИ, МІНОРИ ТА АЛГЕБРАІЧНІ ДОПОВНЕННЯ

1. Основні поняття та теореми

Нехай задана квадратна матриця $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. Число $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

називається визначником (детермінантом) другого порядку.

Позначається $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, Δ або $\det A$.

Визначник (детермінант) третього порядку визначається як

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Елементи a_{11} , a_{22} , a_{33} утворюють головну діагональ визначника, а елементи a_{13} , a_{22} , a_{31} – бічну діагональ. Для обчислення визначника третього порядку зручне правило Саррюса (рис. 1).

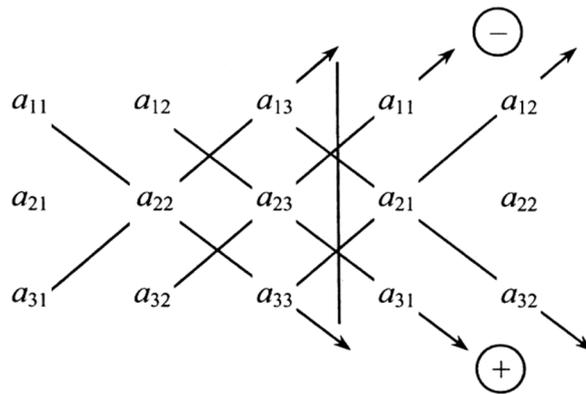


Рис. 1

Якщо визначник матриці дорівнює нулю, то матриця є особливою (виродженою).

Найважливіші властивості визначників:

1. Властивість антисиметрії: Якщо у визначнику поміняти місцями будь-які два стовпці, то абсолютна величина визначника не зміниться, а знак його зміниться на протилежний.
2. Властивість однорідності: Якщо елементи одного з рядків (стовпців) визначника помножити на деяке число, то визначник помножиться на це число.
3. Властивість лінійності: Якщо до одного з рядків (стовпців) визначника додати інший його рядок (стовпець), (можна ще й помножений на деяке число), то визначник не зміниться.

Мінором M_{ij} матриці є визначник матриці без i -го рядка і j -го стовпчика. Алгебраїчні доповнення A_{ij} визначаються через мінори за формулою $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Розглянемо перше із застосувань алгебраїчних доповнень.

Визначник квадратної матриці дорівнює сумі добутків усіх елементів будь-якого рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$, $\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$.

Якщо у деякому рядку (чи стовпці) визначника n порядку всі елементи, крім одного, нулі, то, розклавши його за елементами такого рядка (чи стовпця), отримаємо добуток ненульового елемента на визначник $(n-1)$ порядку.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти визначник другого порядку $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}$.

Розв'язування:

$$\Delta = -1 \cdot 3 + 5 \cdot 6 = -3 + 30 = 27.$$

2. Знаючи визначник $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}$, знайти визначники $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Відповідь: $\Delta_1 = -27$, бо рядки початкового визначника переставили місцями; $\Delta_2 = -27$, бо перший рядок початкового визначника домножений на (-1) ; $\Delta_3 = 27$, бо перший рядок початкового визначника – різниця першого і другого рядків.

3. Знайти визначник третього порядку $\Delta = \begin{vmatrix} -5 & 2 & 4 \\ -2 & 7 & -3 \\ 3 & -4 & 8 \end{vmatrix}$.

Розв'язування:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -5 & 2 & 4 \\ -2 & 7 & -3 \\ 3 & -4 & 8 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -2 & 7 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -5 \cdot 7 \cdot 8 + 2 \cdot (-3) \cdot 3 + 4 \cdot (-2) \cdot (-4) - 4 \cdot 7 \cdot 3 - (-(-5) \cdot (-3) \cdot (-4) - 2 \cdot (-2) \cdot 8) = -280 - 18 + 32 - 84 + 60 + 32 = -258.$$

4. Знайти визначник третього порядку $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -7 & 3 \\ -2 & 7 & -3 \\ 3 & -4 & 8 \end{vmatrix}$.

Відповідь: $\Delta = 0$, бо перший рядок рівний другому помноженому на (-1) .

5. Знайти визначник третього порядку $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -7 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & -4 & 8 \end{vmatrix}$.

Відповідь: $\Delta = 0$, бо третій рядок визначника є сумою перших двох.

6. Знайти мінор M_{21} та алгебраїчне доповнення A_{21} елемента a_{21}

матриці $\begin{bmatrix} 1 & 13 & -4 \\ 0 & -9 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$.

Розв'язування:

Після викреслювання другого рядка і першого стовпчика маємо

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 13 & -4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 91 + 8 = 99, A_{21} = (-1) \cdot 99 = -99.$$

7. Знайти мінор M_{34} та алгебраїчне доповнення A_{34} елемента a_{34}

матриці
$$\begin{bmatrix} 1 & 13 & -4 & 3 \\ 0 & -9 & 2 & -1 \\ 17 & -1 & -23 & 13 \\ 1 & 2 & 7 & 39 \end{bmatrix}.$$

Розв'язування:

$$M_{34} = \begin{vmatrix} 1 & 13 & -4 \\ 0 & -9 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 13 & -4 & 1 & 13 \\ 0 & -9 & 2 & 0 & -9 \\ 1 & 2 & 7 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -63 + 26 - 0 - 36 - 4 - 0 = -77,$$

$$A_{34} = (-1)^{3+4} M_{34} = -M_{34} = 77.$$

8. Знайти визначник
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -5 \\ 6 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Розв'язування:

Розпишемо визначник за елементами першого рядка, маємо

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \quad \text{Так як } A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -6 - 5 = -11,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -(12 + 30) = -42, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 12 = 8, \quad \text{то}$$

$$\Delta = 1 \cdot (-11) + 2 \cdot (-42) + 2 \cdot 8 = -11 - 84 + 16 = -79.$$

9. Знайти визначник
$$\begin{vmatrix} 1 & 13 & -4 \\ 0 & -9 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}.$$

Розв'язування:

Розпишемо визначник за елементами першого стовпчика, маємо

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -9 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -63 - 4 = -67.$$

10. Знайти визначник
$$\begin{vmatrix} 1 & -18 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 19 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язування:

Віднімемо від другого рядка перший і запишемо отримані числа у

другий рядок:
$$\begin{vmatrix} 1 & -18 & 3 \\ 0 & 22 & -1 \\ 0 & 19 & 1 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 22 & -1 \\ 19 & 1 \end{vmatrix} = 22 + 19 = 41.$$

11. Знайти визначник $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 9 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Розв'язування:

Для отримання стовпчика з тільки одним ненульовим елементом запишемо замість другого рядка різницю другого рядка і третього

рядка домноженого на 2: $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(-1-6) = 7$.

12. Знайти визначник четвертого порядку $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 6 & 10 \\ -4 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$.

Розв'язування:

Зробимо такі перетворення визначника, щоб перший стовпчик містив всі нулі, крім елемента a_{11} :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 6 & 10 \\ -4 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \text{II} - \text{I} \\ \text{III} - \text{I} \\ \text{IV} + 4 \cdot \text{I} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 8 \\ 0 & -3 & 5 & 14 \\ 0 & 8 & 14 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 8 \\ -3 & 5 & 14 \\ 8 & 14 & 4 \end{vmatrix}$$

Знову зробимо такі перетворення визначника, щоб перший стовпчик містив всі нулі, крім елемента a_{11} :

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 8 \\ -3 & 5 & 14 \\ 8 & 14 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \text{II} + 3 \cdot \text{I} \\ \text{III} - 8 \cdot \text{I} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 8 \\ 0 & -4 & 38 \\ 0 & 38 & -60 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -4 & 38 \\ 38 & -60 \end{vmatrix} = 240 - 1444 = -1204$$

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайти визначник другого порядку $\Delta = \begin{vmatrix} 3 + \alpha & 6 \\ 5 & 10 - \alpha \end{vmatrix}$.

2. Знайти визначник третього порядку $\begin{vmatrix} 1 + \alpha & 2 & 4 \\ -2 & 1 - \alpha & 3 \\ 3 & -4 & 2 - \alpha \end{vmatrix}$.

3. Знайти визначник третього порядку $\begin{vmatrix} 1 & 2 + \alpha & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 - \alpha & 1 \end{vmatrix}$.

4. Знайти алгебраїчні доповнення до всіх елементів матриці

$$A = \begin{bmatrix} \alpha - 50 & 1 & 3 \\ 2 & \alpha & 2 \\ \alpha & 2 & \alpha - 45 \end{bmatrix}.$$

5. Знайти визначник четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 + \alpha \\ 1 & 2 & 3 + \alpha & 4 \\ 1 & 3 + \alpha & 6 & 10 \\ 1 + \alpha & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}.$$

ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ ТА ЇЇ ЗНАХОДЖЕННЯ

1. Основні поняття та теореми

Розглянемо друге застосування алгебраїчних доповнень.

Якщо дві матриці A і B – квадратні одного і того ж порядку, а їх добуток $A \cdot B$ – одинична матриця, то матриця B є матрицею оберненою до A і позначається символом A^{-1} .

Квадратна матриця A і її обернена A^{-1} комутативні, тобто

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Для того, щоб квадратна матриця A мала обернену, необхідно і достатньо, щоб визначник матриці A не дорівнював нулю, тобто матриця A не повинна бути особливою (виродженою).

Обернену матрицю A^{-1} знаходимо за формулою $A^{-1} = \frac{\tilde{A}^T}{|A|} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}^T$,

де $\tilde{A}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$ – транспонована союзна (приєднана) матриця для

матриці A (складена із алгебраїчних доповнень усіх елементів матриці A).

Алгоритм знаходження оберненої матриці до матриці A :

- 1) знайти визначник матриці A (якщо він не рівний нулю, то обернена матриця існує);
- 2) визначити алгебраїчні доповнення до всіх елементів матриці A ;
- 3) скласти союзну матрицю \tilde{A} і транспонувати її.

Обернена матриця записується як $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}^T$.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти матрицю обернену до матриці $A = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$.

Розв'язування:

Визначник $|A| = 9 \cdot 14 - 2 \cdot 3 = 120$; алгебраїчні доповнення $A_{11} = 14$,
 $A_{12} = -3$, $A_{21} = -2$, $A_{22} = 9$, тоді $\tilde{A}^T = \begin{bmatrix} 14 & -2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{120} \begin{bmatrix} 14 & -2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$.

2. Знайти матрицю обернену до матриці $A = \begin{bmatrix} 12 & 1 & 11 \\ 4 & 9 & 3 \\ 18 & -3 & 16 \end{bmatrix}$.

Розв'язування:

На першому кроці алгоритму знаходимо визначник матриці
 $|A| = \begin{vmatrix} 12 & 1 & 11 \\ 4 & 9 & 3 \\ 18 & -3 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 1 \\ 4 & 9 \\ 18 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 12 & 1 \\ 4 & 9 \\ 18 & -3 \end{vmatrix} = 1728 + 54 - 132 - 1782 + 108 - 64 = -88$. Матриця

невироджена, отже обернена існує.

На другому кроці алгоритму визначаємо алгебраїчні доповнення до всіх елементів матриці, маємо: $A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ -3 & 16 \end{vmatrix} = 144 + 9 = 153$,

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 18 & 16 \end{vmatrix} = -(64 - 54) = -10, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 18 & -3 \end{vmatrix} = -12 - 162 = -174,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 11 \\ -3 & 16 \end{vmatrix} = -(16 + 33) = -49, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 12 & 11 \\ 18 & 16 \end{vmatrix} = 192 - 198 = -6,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 12 & 1 \\ 18 & -3 \end{vmatrix} = -(-36 - 18) = 54, \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 99 = -96,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 12 & 11 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -(36 - 44) = 8, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 12 & 1 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 108 - 4 = 104.$$

На третьому кроці складаємо союзну матрицю
 $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 153 & -10 & -174 \\ -49 & -6 & 54 \\ -96 & 8 & 104 \end{bmatrix}$, $\tilde{A}^T = \begin{bmatrix} 153 & -49 & -96 \\ -10 & -6 & 8 \\ -174 & 54 & 104 \end{bmatrix}$.

Тоді обернена матриця має вигляд $A^{-1} = -\frac{1}{88} \begin{bmatrix} 153 & -49 & -96 \\ -10 & -6 & 8 \\ -174 & 54 & 104 \end{bmatrix}$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайти матрицю обернену до матриці $A = \begin{bmatrix} 65 - \alpha & 25 \\ 20 & 7 \end{bmatrix}$.

2. Знайти матрицю обернену до матриці. $A = \begin{bmatrix} \alpha - 50 & 1 & 3 \\ 2 & \alpha & 2 \\ \alpha & 2 & \alpha - 45 \end{bmatrix}$.

3. Знайти матрицю обернену до матриці $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 + \alpha & 5 \\ 2 + \alpha & 4 + \alpha & 8 + \alpha \\ 2 & 7 + \alpha & 6 \end{bmatrix}$.

МАТРИЧНИЙ СПОСІБ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ.

1. Основні поняття та теореми

Обернена матриця застосовується при розв'язуванні систем лінійних рівнянь (матричним способом). Розглянемо систему трьох

лінійних рівнянь з трьома невідомими $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases}$ Складаємо

відповідно матрицю з коефіцієнтів a_{ij} при невідомих, матрицю-стовпець з невідомих та матрицю-стовпець з вільних членів

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}. \quad \text{Враховуючи правило множення}$$

матриць та умови рівності двох матриць, систему лінійних рівнянь

можна записати в такому вигляді $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ або,

враховуючи зроблені позначення, всю систему рівнянь можна записати компактно у вигляді одного матричного рівняння $A \cdot X = B$.

Метод працює і для системи n лінійних рівнянь з n невідомими.

Якщо матриця A – невироджена, то вона має обернену матрицю A^{-1} . Перемноживши зліва обидві частини рівняння $A \cdot X = B$ на A^{-1} та враховуючи, що $A^{-1} \cdot A = E$ і $E \cdot X = X$, знаходимо стовпець невідомих X з рівності

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти розв'язки системи лінійних рівнянь $\begin{cases} 21x + 3y + 3z = -6, \\ 2x + y + 6z = -16, \\ 3x + 2y + 2z = 2 \end{cases}$

матричним способом (за допомогою оберненої матриці)

Розв'язування:

$$\begin{bmatrix} 21 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -16 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ звідки } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -6 \\ -16 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Визначимо обернену матрицю $\begin{bmatrix} 21 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$. Для цього знаходимо

$$\text{визначник матриці } \begin{vmatrix} 21 & 3 & 3 & 21 & 3 \\ 2 & 1 & 6 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 42 + 54 + 12 - 9 - 252 - 12 = -165 \neq 0.$$

Визначаємо алгебраїчні доповнення до всіх елементів матриці,

$$\text{маємо: } A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -10, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 14, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 21 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 33, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 21 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -33, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 15, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 21 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -120,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 21 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 15. \text{ Тоді обернена матриця } A^{-1} = -\frac{1}{165} \begin{bmatrix} -10 & 0 & 15 \\ 14 & 33 & -120 \\ 1 & -33 & 15 \end{bmatrix} \text{ і}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{1}{165} \begin{bmatrix} -10 & 0 & 15 \\ 14 & 33 & -120 \\ 1 & -33 & 15 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 \\ -16 \\ 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{165} \begin{bmatrix} 90 \\ -852 \\ 552 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18/33 \\ 284/55 \\ -184/55 \end{bmatrix}.$$

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайти розв'язки системи лінійних рівнянь матричним способом (за допомогою оберненої матриці).

$\begin{cases} x + 2y + 2z = 3, \\ 4x - 2y - 5z = 5, \\ 6x - y + 3z = 1. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x + 2y - z = 3, \\ x - y + 2z = -4, \\ 2x + 2y + z = 4. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x + 3y + 2z = -1, \\ 2x + y - z = 3, \\ x - 2y - 3z = 4. \end{cases}$	$\begin{cases} 5x - 2y + z = -1, \\ 2x + y + 2z = 6, \\ x - 3y - z = -5. \end{cases}$
$\begin{cases} 3x - 2y + 2z = 3, \\ 2x + y - z = -5, \\ 5x - y + 3z = 4. \end{cases}$	$\begin{cases} x + y - 2z = 1, \\ 2x + 3y + z = 0, \\ x - 2y - z = 7. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - 3y + z = 3, \\ x + y - 2z = 4, \\ 3x - 2y + 6z = 0. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + 3y - z = 2, \\ x - y + 3z = -4, \\ 3x + 5y + z = 4. \end{cases}$
$\begin{cases} 4x + 3y - 2z = -1, \\ 3x + y + z = 3, \\ x - 2y - 3z = 8. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1, \\ x + 2y + z = 8, \\ 4x - 3y - 2z = -1. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + 3y - z = 2, \\ x + 2y + 3z = 0, \\ x - y - 2z = 6. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - 3y + 3z = 0, \\ x + y - 2z = -7, \\ x - 2y + 3z = 3. \end{cases}$

ФОРМУЛИ КРАМЕРА. МЕТОД ГАУССА

1. Основні поняття та теореми

Якщо визначник матриці A не рівний нулю, то розв'язок системи лінійних рівнянь можна знайти і за допомогою формул Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

де Δ_i – визначник, одержаний з визначника Δ заміною елементів i -того стовпця відповідними вільними членами.

Якщо визначник $\Delta = 0$, а серед визначників $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ є хоч один, що не дорівнює нулю, то система лінійних рівнянь розв'язків не має (несумісна).

Якщо $\Delta = 0$, а також $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3$, то система має нескінчену множину розв'язків.

Метод Гаусса складається з двох основних етапів.

На першому етапі (прямий хід методу Гаусса) здійснюють послідовне виключення невідомих за допомогою рівносильних перетворень системи. В результаті система зводиться до східчастої форми рівняння.

На другому етапі (зворотний хід методу Гаусса) з останнього рівняння знаходять останнє невідоме. Потім одержане значення підставляють у передостаннє рівняння і визначають з нього наступне невідоме і т.д.

2. Приклади виконання завдань

$$1. \text{ Розв'язати систему лінійних рівнянь } \begin{cases} 3x - 4y + 3z = 19, \\ x - 2y + z = 8, \\ 3x - 8y - 21z = -11 \end{cases} \quad \text{за}$$

допомогою визначників (формул Крамера).

Розв'язування:

$$\text{Маємо } \Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -8 & -21 \end{vmatrix} = 126 - 12 - 24 + 18 + 24 - 84 = 48.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 19 & -4 & 3 \\ 8 & -2 & 1 \\ -11 & -8 & -21 \end{vmatrix} = 798 + 44 - 192 - 66 + 152 - 672 = 64, \quad x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{64}{48} = \frac{4}{3}.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 19 & 3 \\ 1 & 8 & 1 \\ 3 & -11 & -21 \end{vmatrix} = -504 + 57 - 33 - 72 + 33 + 399 = -120, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{120}{48} = -\frac{5}{2}.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 19 \\ 1 & -2 & 8 \\ 3 & -8 & -11 \end{vmatrix} = 66 - 96 - 152 + 114 + 192 - 44 = 80, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{80}{48} = \frac{5}{3}.$$

2. Розв'язати методом Гаусса систему рівнянь
$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = -25, \\ 3x - 8y - 18z = -15, \\ x - 4y - 28z = 25. \end{cases}$$

Розв'язування:

Переставимо місцями перше і останнє рівняння
$$\begin{cases} x - 4y - 28z = 25, \\ 3x - 8y - 18z = -15, \\ 2x - 3y + 4z = -25. \end{cases}$$

Щоб виключити змінну x_1 з другого рівняння помножимо перше рівняння на (-3) і додамо до другого рівняння

$$\begin{cases} x - 4y - 28z = 25, \\ 3x - 8y - 18z = -15, II + (-3) \cdot I \\ 2x - 3y + 4z = -25, \end{cases} \quad \begin{cases} x - 4y - 28z = 25, \\ 4y + 66z = -90, \\ 2x - 3y + 4z = -25. \end{cases}$$

Щоб виключити змінну x_1 з третього рівняння помножимо перше рівняння на (-2) і додамо з першим

$$\begin{cases} x - 4y - 28z = 25, \\ 4y + 66z = -90, \\ 2x - 3y + 4z = -25, III + (-2) \cdot I \end{cases} \quad \begin{cases} x - 4y - 28z = 25, \\ 4y + 66z = -90, \\ 5y + 60z = -75. \end{cases}$$

Друге рівняння поділимо на 2, третє рівняння – на 5, одержимо
$$\begin{cases} x - 4y - 28z = 25, \\ 2y + 33z = -45, \\ y + 12z = -15. \end{cases}$$
 Щоб виключити змінну x_2 з третього рівняння

помножимо третє рівняння на (-2) і додамо з другим

$$\begin{cases} x - 4y - 28z = 25, \\ 2y + 33z = -45, \\ y + 12z = -15, (-4) \cdot III + II \end{cases} \quad \begin{cases} x - 4y - 28z = 25, \\ 2y + 33z = -45, \\ 9z = -15. \end{cases}$$

З останнього рівняння маємо $z = -\frac{15}{9} = -\frac{5}{3}$; з другого рівняння маємо $2y - 55 = -45$, $2y = 10$, $y = 5$; з першого рівняння маємо $x - 4 \cdot 5 - 28 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) = 25$, $x = 45 - \frac{140}{3} = -\frac{5}{3}$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Розв'язати систему лінійних рівнянь за допомогою визначників (формул Крамера).

2. Розв'язати методом Гаусса систему лінійних рівнянь.

$\begin{cases} x - 3y + z = 2, \\ 2x + y + 3z = 3, \\ 2x - y - 2z = 8. \end{cases}$	$\begin{cases} x + 5y - z = -1, \\ 2x + y - 2z = 7, \\ x - 4y + z = 0. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - 3y - 5z = 1, \\ 3x + y - 2z = -4, \\ x - 2y + z = 5. \end{cases}$	$\begin{cases} x - 3y - z = 1, \\ 2x + y + z = -7, \\ 2x - y - 3z = 5. \end{cases}$
$\begin{cases} x - 2y + z = 4, \\ 2x + y + 3z = 5, \\ 3x + 4y + z = -2. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x + y - 2z = 1, \\ x - 2y + 3z = 5, \\ 2x + 3y - z = -4. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x + y + 2z = -4, \\ x - 2y - z = -1, \\ 2x + 3y + 2z = 0. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - y + 3z = 3, \\ x + 2y + z = 2, \\ x - 3y + 4z = -1. \end{cases}$
$\begin{cases} 2x + y - 2z = 5, \\ 3x + y + 5z = 7, \\ -x + 3y + 3z = 1. \end{cases}$	$\begin{cases} 7x - 3y - 5z = 2, \\ 5x + 2y - 2z = 2, \\ 2x - y + z = 8. \end{cases}$	$\begin{cases} 5x + y + z = 4, \\ x - 2y - z = -5, \\ 3x + 4y + z = 7. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x + 4y + z = 1, \\ 2x + 2y + 3z = 6, \\ 7x - 6y - z = 11. \end{cases}$
$\begin{cases} x + 2y - 3z = -3, \\ 2x - 3y + 4z = 7, \\ 5x + y + z = 8. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 5, \\ x + 3y + z = -2, \\ 4x - y - 4z = 10. \end{cases}$	$\begin{cases} x - y + 3z = -3, \\ 2x + 2y + z = 3, \\ x + 4y - 5z = 10. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x - 2y - z = 5, \\ 4x - 5y + 2z = 0, \\ x + 3y + z = -1. \end{cases}$
$\begin{cases} -2x + y + z = 6, \\ 3x - 4y + 5z = -5, \\ 4x + 3y + 2z = -3. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x - y - 4z = -3, \\ 2x + 2y - 3z = 1, \\ 5x + 3y - 7z = 0. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + 3y + 3z = 1, \\ 4x - y - 2z = -6, \\ 5x + y + z = -4. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 2, \\ 4x + y - 2z = 0, \\ 6x - y + 3z = 13. \end{cases}$
$\begin{cases} 2x + 2y + z = 5, \\ 4x - y - 5z = 7, \\ 6x - y + 2z = 2. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + 2y - z = 4, \\ x - y + z = -4, \\ 2x + y + z = 1. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + y + z = -1, \\ 3x + y + z = 1, \\ 2x + y + 2z = 0. \end{cases}$	$\begin{cases} x - y + 3z = 0, \\ x + y + z = 2, \\ 2x - 3y + 4z = 2. \end{cases}$
$\begin{cases} 2x + 4y + z = 1, \\ 2x + 2y + 3z = -7, \\ 3x - 4y - z = -1. \end{cases}$	$\begin{cases} x - 2y + z = 3, \\ 2x + 3y - z = 3, \\ 3x - y - 2z = 4. \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y - 3z = 2, \\ x + 5y - z = -1, \\ 2x + 5y - 2z = 3. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = -11, \\ x - 2y - z = 0, \\ 3x + y + z = -1. \end{cases}$

НЕСУМІСНІ І НЕВИЗНАЧЕНІ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

1. Основні поняття та теореми

Рангом матриці називається найвищий порядок мінора відмінного від нуля.

У лінійній алгебрі доведено, що ранг матриці дорівнює максимальному числу лінійно незалежних рядків цієї матриці (тобто рівнянь системи) чи стовпців.

Розглядувані досі системи лінійних рівнянь мали розв'язок і єдиний. Але не кожна система рівнянь має розв'язок. Система рівнянь, що не має розв'язків, називається несумісною.

Так як $\begin{vmatrix} -5 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, то $\text{rang}(A) < 3$.

Оскільки мінор другого порядку $\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -5 - 26 \neq 0$, то $\text{rang}(A) = 2$.

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} x + 2y + 2z = 5, \\ 2x + y - 2z = 1, \\ 5x + 4y - 2z = 3. \end{cases}$

Розв'язування:

Розв'яжемо систему матричним способом: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Але

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 20 + 16 - 10 + 8 + 8 = 0. \quad \text{Для розв'язування системи}$$

матричний метод не підходить.

Спробуємо застосувати формули Крамера. Маємо $\Delta = 0$,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -10 - 12 + 8 - 6 + 40 + 4 = 24 \neq 0, \quad \text{отже дана система}$$

розв'язку не має.

Застосуємо метод Гаусса $\begin{cases} x + 2y + 2z = 5, \\ 2x + y - 2z = 1, -II + 2 \cdot I \\ 5x + 4y - 2z = 3, -III + 5 \cdot I \end{cases} \begin{cases} x + 2y + 2z = 5, \\ 3y + 6z = 9, \\ 6y + 12z = 2, \end{cases}$

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 5, \\ y + 2z = 3, \\ 3y + 6z = 1, III - 3 \cdot II \end{cases} \begin{cases} x + 2y + 2z = 5, \\ y + 2z = 3, \\ 0 = -8. \end{cases} \quad \text{Останнє рівняння є}$$

неправильною рівністю, тобто метод Гаусса теж дає висновок про відсутності розв'язків розглядуваної системи рівнянь.

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} x + 2y + 2z = 5, \\ 2x + y - 2z = 1, \\ 5x + 4y - 2z = 7. \end{cases}$

Розв'язування:

Так як матриця A така ж, як в попередньому випадку, то метод оберненої матриці і в цьому випадку незастосовний.

Спробуємо застосувати формули Крамера. Маємо $\Delta = 0$,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 7 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -10 - 28 + 8 - 14 + 40 + 4 = 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & 7 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 - 50 + 28 - 10 + 14 + 20 = 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 7 + 10 + 40 - 25 - 4 - 28 = 0.$$

Система має безліч розв'язків, проте невідомо яких.

Застосуємо метод Гаусса $\begin{cases} x + 2y + 2z = 5, \\ 2x + y - 2z = 1, \\ 5x + 4y - 2z = 7, \end{cases} \begin{matrix} -II + 2 \cdot I \\ -III + 5 \cdot I \end{matrix} \begin{cases} x + 2y + 2z = 5, \\ 3y + 6z = 9, \\ 6y + 12z = 18, \end{cases}$

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 5, \\ y + 2z = 3, \\ y + 2z = 3, \end{cases} \begin{matrix} \\ \\ III - II \end{matrix} \begin{cases} x + 2y + 2z = 5, \\ y + 2z = 3, \\ 0 = 0. \end{cases} \quad \text{Останнє рівняння є правильною}$$

рівністю, тобто система з трьох рівнянь звелась до системи з двох рівнянь $\begin{cases} x + 2y + 2z = 5, \\ y + 2z = 3. \end{cases}$

Позначимо $z = t$, де t будь-яке дійсне число, тоді з другого рівняння одержимо $y + 2t = 3$, $y = 3 - 2t$, а з першого рівняння $x + 2(3 - 2t) + 2t = 5$, $x + 6 - 4t + 2t = 5$, $x = 2t - 1$.

Метод Гаусса дає можливість знайти всі розв'язки розглядуваної системи рівнянь у вигляді $(2t - 1; 3 - 2t; t)$. Так при $t = 0$ маємо $(-1; 3; 0)$. При $t = 1$ маємо $(1; 1; 1)$. І таких розв'язків безліч.

4. Розв'язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} x + 2y - 4z = 0, \\ 3x + y - 3z = 0, \\ 2x - y + 5z = 0. \end{cases}$

Розв'язування:

Знайдемо визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 12 + 12 + 8 - 3 - 30 = -20 \neq 0.$

Система має єдиний нульовий розв'язок $(0; 0; 0)$.

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} x + 2y + 2z = 0, \\ 2x + y - 2z = 0, \\ 5x + 4y - 2z = 0. \end{cases}$

Розв'язування:

Визначник $\Delta = 0$. Розглядувана однорідна система рівнянь має безліч розв'язків. Знайдемо ненульові розв'язки.

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0, \\ 2x + y - 2z = 0, \\ 5x + 4y - 2z = 0, \end{cases} \begin{matrix} -II + 2 \cdot I \\ -III + 5 \cdot I \end{matrix} \begin{cases} x + 2y + 2z = 0, \\ 3y + 6z = 0, \\ 6y + 12z = 0, \end{cases} \begin{cases} x + 2y + 2z = 0, \\ y + 2z = 0, \\ y + 2z = 0. \end{cases} \quad \text{Система з}$$

трьох рівнянь звелась до системи з двох рівнянь $\begin{cases} x + 2y + 2z = 0, \\ y + 2z = 0. \end{cases}$

Позначимо $z = t$, де t будь-яке дійсне число, тоді з другого рівняння одержимо $y + 2t = 0$, $y = -2t$, а з першого рівняння $x + 2(-2t) + 2t = 0$, $x - 4t + 2t = 0$, $x = 2t$.

Метод Гаусса дає можливість знайти всі розв'язки розглядуваної системи рівнянь у вигляді $(2t; -2t; t)$. Так при $t = 0$ маємо $(0; 0; 0)$. При $t = 1$ маємо $(2; -2; 1)$. І таких розв'язків безліч.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Визначити ранг матриці $A = \begin{bmatrix} -9 & 4 & 18 \\ 2(\alpha - 21) & 3(\alpha - 21) & -4(\alpha - 21) \\ -5 & 6 & 10 \end{bmatrix}$.

2. Знайти всі розв'язки системи рівнянь $\begin{cases} (\alpha + 1)x + 2y - 3z = -10, \\ 5(\alpha + 1)x + 8y - 9z = 5, \\ 3(\alpha + 1)x + 4y - 3z = 25. \end{cases}$

3. Знайти всі розв'язки системи лінійних рівнянь $\begin{cases} x + \alpha y - 4z = 0, \\ 2x + \alpha y - 9z = 0, \\ x + 2\alpha y - 3z = 0. \end{cases}$

4. Знайти всі розв'язки системи рівнянь $\begin{cases} (\alpha + 5)x + 4y + 2z = 0, \\ 2(\alpha + 5)x + 5y + 4z = 0, \\ (\alpha + 5)x + 7y + 2z = 0. \end{cases}$

5. Знайти всі розв'язки системи рівнянь $\begin{cases} 3x + (\alpha + 2)y - 4z = 0, \\ 4x + (\alpha + 2)y - 9z = 0, \\ 5x + 2(\alpha + 2)y - 3z = 0. \end{cases}$

6. Знайти всі розв'язки системи рівнянь $\begin{cases} 2(\alpha + 3)x + 2y - 3z = -10, \\ 7(\alpha + 3)x + 8y - 9z = 5, \\ 3(\alpha + 3)x + 4y - 3z = 25. \end{cases}$

ЛІНІЙНІ ДІЇ НАД ВЕКТОРАМИ. СКАЛЯРНЕ МНОЖЕННЯ ВЕКТОРІВ

1. Основні поняття та теореми

Вектор – напрямлений відрізок. Вектор, початок якого знаходиться в точці A , а кінець – у точці B , позначається \overline{AB} або \vec{a} .

Якщо дані дві точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ – відповідно початок та кінець вектора \vec{a} , то його координати визначаються за формулами $X_a = x_2 - x_1$, $Y_a = y_2 - y_1$.

Відстань між початком вектора і його кінцем називається довжиною (або модулем) вектора і позначається $|\vec{a}|$ або $|\overline{AB}|$ і визначається формулою $|\vec{a}| = \sqrt{X_a^2 + Y_a^2}$.

Для просторового випадку координати вектора $X_a = x_2 - x_1$, $Y_a = y_2 - y_1$, $Z_a = z_2 - z_1$; довжина вектора $|\vec{a}| = \sqrt{X_a^2 + Y_a^2 + Z_a^2}$.

Координати вектора суми $\vec{a} + \vec{b}$ є сумами відповідних координат векторів $\vec{a}(X_a; Y_a)$, $\vec{b}(X_b; Y_b)$: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}(X_a + X_b; Y_a + Y_b)$.

Координати вектора різниці $\vec{a} - \vec{b}$ є різницями відповідних координат векторів $\vec{a}(X_a; Y_a)$, $\vec{b}(X_b; Y_b)$: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{d}(X_a - X_b; Y_a - Y_b)$.

Для просторового випадку маємо $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}(X_a + X_b; Y_a + Y_b; Z_a + Z_b)$, $\vec{a} - \vec{b} = \vec{d}(X_a - X_b; Y_a - Y_b; Z_a - Z_b)$.

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}(X_a; Y_a)$ і $\vec{b}(X_b; Y_b)$ називається число, що дорівнює $\vec{a} \cdot \vec{b} = X_a X_b + Y_a Y_b$. Для просторового випадку скалярним добутком векторів $\vec{a}(X_a; Y_a; Z_a)$ і $\vec{b}(X_b; Y_b; Z_b)$ називається число, що дорівнює $\vec{a} \cdot \vec{b} = X_a X_b + Y_a Y_b + Z_a Z_b$.

Скалярний добуток застосовують для визначення кута між векторами (або прямих, на яких вектора розташовані). Косинус цього

кута рівний $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$, де в чисельнику саме скалярний добуток

векторів, в знаменнику добуток довжин цих векторів. Якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, то кут φ – гострий; якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, то кут φ – тупий; якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, то кут φ – прямий, а вектора ортогональні.

2. Приклади виконання завдань

1. На координатній площині xOy поставити точки $A(15; -5)$ і $B(3; 0)$ та $C(10; 5)$ і $D(4; -3)$. Знайти: координати векторів \overline{AB} і \overline{CD} та їхні довжини; суму і різницю векторів \overline{AB} і \overline{CD} ; скалярний добуток векторів \overline{AB} і \overline{CD} і косинус кута між ними.

Розв'язування:

Координати векторів знайдемо, віднімаючи від координат кінця координати початку $\overrightarrow{AB}(3-15;0+5)=\overline{(-12;5)}$, $\overrightarrow{CD}(4-10;-3-5)=\overline{(-6;-8)}$; тоді довжини векторів $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-12)^2+5^2}=13$ і $|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{(-6)^2+(-8)^2}=10$; сума векторів $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overline{(-12-6;5-8)}=\overline{(-18;-3)}$, різниця векторів $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overline{(-12+6;5+8)}=\overline{(-6;13)}$; скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=-12\cdot(-6)+5\cdot(-8)=72-40=32$; косинус кута між векторами $\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CD}|}=\frac{32}{13\cdot10}\approx 0,246$.

2. Дано точки в просторі $A(-2;2;1)$, $B(2;-2;3)$ та $C(0;4;2)$. Знайти: координати векторів \overrightarrow{AB} і \overrightarrow{AC} та їхні довжини; суму і різницю векторів \overrightarrow{AB} і \overrightarrow{AC} ; скалярний добуток векторів \overrightarrow{AB} і \overrightarrow{AC} і косинус кута між ними.

Розв'язування:

Координати векторів відповідно рівні $\overrightarrow{AB}(2+2;-2-2;3-1)=\overline{(4;-4;2)}$, $\overrightarrow{AC}(0+2;4-2;2-1)=\overline{(2;2;1)}$; тоді довжини $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{4^2+(-4)^2+2^2}=6$, $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$; сума векторів $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=(4+2;-4+2;2+1)=\overline{(6;-2;3)}$, різниця векторів $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=(4-2;-4-2;2-1)=\overline{(2;-6;1)}$; скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\cdot 2+(-4)\cdot 2+2\cdot 1=2$; косинус кута між векторами $\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CD}|}=\frac{2}{6\cdot 3}\approx 0,111$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. На координатній площині xOy поставити точки $A(\alpha-5;-5)$, $B(\alpha+7;0)$ та $C(7;5-\alpha)$, $D(4;1-\alpha)$. Знайти: координати векторів \overrightarrow{AB} і \overrightarrow{CD} та їхні довжини; суму і різницю векторів \overrightarrow{AB} і \overrightarrow{CD} ; скалярний добуток векторів \overrightarrow{AB} і \overrightarrow{CD} і косинус кута між ними.

2. Дано точки в просторі $A(2;1+\alpha;-7)$, $B(1;3+\alpha;-9)$ та $C(-9;\alpha-1;3)$. Знайти: координати векторів \overrightarrow{AB} і \overrightarrow{AC} та їхні довжини; суму і різницю векторів \overrightarrow{AB} і \overrightarrow{AC} ; скалярний добуток векторів \overrightarrow{AB} і \overrightarrow{AC} і косинус кута між ними.

ВЕКТОРНИЙ ТА МІШАНИЙ ДОБУТКИ ВЕКТОРІВ

1. Основні поняття та теореми

Векторним добутком двох векторів \vec{a} і \vec{b} (позначається $\vec{a}\times\vec{b}$) називається вектор, що визначається такими трьома умовами:

1. Модуль вектора $|\vec{a} \times \vec{b}|$ рівний $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta$, де θ – кут між векторами \vec{a} і \vec{b} .

2. Вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ перпендикулярний як вектору \vec{a} так і \vec{b} .

3. Упорядкована трійка векторів \vec{a} , \vec{b} , $\vec{a} \times \vec{b}$, відкладених від однієї точки, утворює правий базис.

Векторний добуток залежить від порядку співмножників: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (рис. 2).

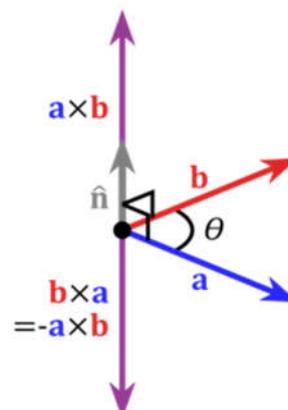


Рис. 2.

Модуль векторного добутку перетворюється на нуль тоді, коли кут між векторами 0° або 180° , тобто вектори \vec{a} і \vec{b} паралельні (колінеарні).

Якщо вектори \vec{a} і \vec{b} задані координатами $\vec{a}(X_1; Y_1; Z_1)$, $\vec{b}(X_2; Y_2; Z_2)$, то векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} визначається формулою

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}.$$

Векторний добуток двох векторів застосовують для визначення площі паралелограма і трикутника, побудованих на цих векторах.

Площі визначають за формулами: $S_\diamond = |\vec{a} \times \vec{b}|$, $S_\Delta = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$.

Мішаним добутком трьох векторів \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} називаються число рівне векторному добутку $\vec{a} \times \vec{b}$, який помножений скалярно на вектор \vec{c} тобто $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Якщо вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} задані своїми координатами $\vec{a}(X_1; Y_1; Z_1)$, $\vec{b}(X_2; Y_2; Z_2)$, $\vec{c}(X_3; Y_3; Z_3)$, то мішаний добуток визначається формулою

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}.$$

Три вектори називаються компланарними, якщо вони лежать в одній площині або в паралельних площинах. Якщо вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, то мішаний добуток $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = 0$.

Мішаний добуток трьох векторів застосовують для визначення об'єму паралелепіпеда та піраміди, побудованих на цих векторах.

Об'єми визначають за формулами: $\pm V_{\text{паралелепіпеда}} = (\vec{a}\vec{b}\vec{c})$, $\pm V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{6} (\vec{a}\vec{b}\vec{c})$.

2. Приклади виконання завдань

1. Дано вектори $\vec{a}(7;-4;4)$, $\vec{b}(-3;2;6)$, $\vec{c}(-4;4;2)$. Знайти скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$, векторний добуток $\vec{a} \times \vec{b}$, мішаний добуток $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$.

Розв'язування:

Скалярний добуток: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 7 \cdot (-3) + (-4) \cdot 2 + 4 \cdot 6 = -21 - 8 + 24 = -5$.

Векторний добуток:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 7 & -4 & 4 \\ -3 & 2 & 6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 7 & -4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -24\vec{i} - 12\vec{j} + 14\vec{k} - 12\vec{k} - 8\vec{i} - 42\vec{j} = -32\vec{i} - 54\vec{j} + 2\vec{k}$$

Мішаний добуток:

1 спосіб $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (-32; -54; 2) \cdot (-4; 4; 2) = -32 \cdot (-4) + (-54) \cdot 4 + 2 \cdot 2 = -84$.

$$2 \text{ спосіб } (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 7 & -4 \\ -3 & 2 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 28 + 96 - 48 + 32 - 168 - 24 = -84.$$

2. Визначити при яких значеннях β і γ вектори $\vec{a} = -0,5\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ і $\vec{b} = \gamma\vec{i} - 6\vec{j} - 0,5\vec{k}$ колінеарні.

Розв'язування:

Якщо вектори колінеарні, то їхні координати пропорційні $\frac{-0,5}{\gamma} = \frac{3}{-6} = \frac{\beta}{-0,5}$, тоді $\frac{-0,5}{\gamma} = \frac{1}{-2}$, $\gamma = 1$; $\frac{1}{-2} = \frac{\beta}{-0,5}$, $\beta = 0,25$.

3. Дано два вектори $\vec{a}(-2;3;4)$, $\vec{b}(2;2;1)$. Знайти векторний добуток векторів, площу паралелограма і трикутника, побудованих на цих векторах.

Розв'язування:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ -2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k} - 6\vec{k} - 8\vec{i} + 2\vec{j} = -5\vec{i} + 10\vec{j} - 10\vec{k}.$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-5)^2 + 10^2 + (-10)^2} = \sqrt{225} = 15, S_{\diamond} = |\vec{a} \times \vec{b}| = 15 \text{ кв.од.}, S_{\Delta} = 7,5 \text{ кв.од.}$$

4. Чи лежать в одній площині точки $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$, $D(2;1;3)$?

Розв'язування:

Для відповіді на питання встановимо: чи лежать в одній площині вектора $\vec{AB}(-1;-1;6)$, $\vec{AC}(-2;0;2)$, $\vec{AD}(1;-1;4)$.

Для цього досить знайти мішаний добуток векторів.

$$(\overline{AB} \times \overline{AC}) \cdot \overline{AD} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 2 + 12 - 0 - 2 - 8 = 0. \text{ Так.}$$

5. При якому значенні параметра t вектори $\vec{a}(1;-1;3)$, $\vec{b}(1;9;-11)$, $\vec{c}(2;3t;-1)$ компланарні?

Розв'язування:

Вектори компланарні, якщо їх мішаний добуток дорівнює нулю

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & -11 \\ 2 & 3t & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 9 \\ 2 & 3t \end{vmatrix} = -9 + 22 + 9t - 54 + 33t - 1 = 42t - 42 = 0, \quad t = 1.$$

6. Знайти мішаний добуток векторів $\overline{AB}(4;1;1)$, $\overline{AC}(1;1;0)$, $\overline{AD}(0;0;58)$, визначити об'єм паралелепіпеда та об'єм піраміди, побудованих на них.

Розв'язування:

Мішаний добуток векторів знайдемо, обчисливши визначник:

$$(\overline{AB} \times \overline{AC}) \cdot \overline{AD} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 58 \end{vmatrix} = 58 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 58 \cdot 3 = 174.$$

$$\pm V_{\text{паралелепіпеда}} = (\overline{AB} \times \overline{AC}) \cdot \overline{AD} = 174 \text{ куб.од.}, \quad \pm V_{\text{піраміди}} = \frac{174}{6} = 29 \text{ куб.од.}$$

7. Задані координати вершин піраміди $A(1;2;3)$, $B(-3;10;4)$, $C(8;6;-1)$, $D(-2;4;9)$. Знайти: 1) координати і довжини векторів \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{AD} ; 2) кут між векторами \overline{AB} та \overline{AC} (відповідними ребрами піраміди); 3) площу грані ABC ; 4) об'єм піраміди $ABCD$.

Розв'язування:

1) Координати та відповідно рівні $\overline{AB}(-4;8;1)$, $\overline{AC}(7;4;-4)$, $\overline{AD}(-3;2;6)$

$$\text{Довжини векторів } |\overline{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 8^2 + 1^2} = 9, \quad |\overline{AC}| = \sqrt{7^2 + 4^2 + (-4)^2}; \\ |\overline{AD}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 6^2} = 7.$$

2) Скалярний добуток векторів \overline{AB} та \overline{AC} :

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = -4 \cdot 7 + 8 \cdot 4 + 1 \cdot (-4) = 0, \text{ отже } \widehat{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} = 90^\circ.$$

3) Векторний добуток векторів \overline{AB} та \overline{AC} :

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 8 & 1 \\ 7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = -32\vec{i} + 7\vec{j} - 16\vec{k} - 56\vec{k} - 4\vec{i} - 16\vec{j} = -36\vec{i} - 9\vec{j} - 72\vec{k}.$$

Модуль векторного добутку векторів \overline{AB} та \overline{AC} :

$$|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{(-36)^2 + (-9)^2 + (-72)^2} = 81, \text{ тоді } S_{ABC} = \frac{81}{2} = 40,5 \text{ кв.од.}$$

4) Мішаний добуток векторів \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{AD} :

$$(\overline{AB} \times \overline{AC}) \cdot \overline{AD} = \begin{vmatrix} -4 & 8 & 1 \\ 7 & 4 & -4 \\ -4 & 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -4 & 8 \\ 7 & 4 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = -96 + 96 + 14 + 12 - 32 - 336 = -342, \text{ тоді}$$

$$V_{ABCD} = \frac{342}{6} = 57 \text{ куб.од.}$$

3. Завдання для самостійного виконання

1. Дано вектори $\vec{a}(\alpha-3; -\alpha; \alpha)$, $\vec{b}(\alpha-7; \alpha+2; \alpha+6)$, $\vec{c}(-2\alpha; 2\alpha; \alpha)$. Знайти скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$, векторний добуток $\vec{a} \times \vec{b}$, мішаний добуток $(\vec{a} \vec{b} \vec{c})$.

2. Визначити при яких значеннях β і γ вектори $\vec{a} = (2 + (\alpha - 10) \cdot 0, 1) \vec{i} - 6 \vec{j} + \beta \vec{k}$ і $\vec{b} = \gamma \vec{i} + 3 \vec{j} + (2 + (\alpha - 10) \cdot 0, 1) \vec{k}$ колінеарні.

3. Дано два вектори $\vec{a}(-2; -3; 4)$ і $\vec{b}(2\alpha; -2\alpha; \alpha)$. Знайти векторний добуток векторів, площу паралелограма і трикутника, побудованих на цих векторах.

4. При якому значенні параметра t вектори $\vec{a}(\alpha; 2\alpha; 3\alpha)$, $\vec{b}(4; 5; 6)$, $\vec{c}(7; 2t; 9)$ компланарні?

5. Знайти мішаний добуток векторів $\overline{AB}(5; \alpha; 36)$, $\overline{AC}(1; 1; 0)$, $\overline{AD}(0; 0; 36)$, визначити об'єм паралелепіпеда та об'єм піраміди, побудованих на них.

6. Задані координати вершин піраміди A , B , C , D . Знайти:

1) координати і довжини векторів \overline{AB} , \overline{AC} та \overline{AD} ; 2) кут між векторами \overline{AB} та \overline{AC} ; 3) площу грані ABC ; 4) об'єм піраміди $ABCD$.

$(-5; 0; 1)$, $(-4; -2; 3)$, $(6; 2; 11)$, $(3; 4; 9)$	$(-2; -3; 2)$, $(-1; -5; 4)$, $(9; -1; 12)$, $(6; 1; 10)$
$(1; -4; 0)$, $(2; -6; 2)$, $(12; -2; 10)$, $(9; 0; 8)$	$(0; 2; -10)$, $(1; 0; -8)$, $(11; 4; 0)$, $(8; 6; -2)$
$(-4; 5; -5)$, $(-3; 3; -3)$, $(7; 7; 5)$, $(4; 9; 3)$	$(3; 3; -3)$, $(7; 7; -5)$, $(5; 14; -13)$, $(3; 5; -2)$
$(0; -1; -7)$, $(1; -3; -5)$, $(11; 1; 3)$, $(8; 3; 1)$	$(1; 3; -9)$, $(2; 1; -7)$, $(12; 5; 1)$, $(9; 7; -1)$
$(4; 2; -1)$, $(5; 0; 1)$, $(15; 4; 9)$, $(12; 6; 7)$	$(-7; 4; 0)$, $(-6; 2; 2)$, $(4; 6; 10)$, $(1; 8; 8)$
$(0; 4; 3)$, $(4; 8; 1)$, $(2; 15; -7)$, $(0; 6; 4)$	$(-2; 5; -2)$, $(-1; 3; 0)$, $(9; 7; 8)$, $(6; 9; 6)$
$(4; -2; 5)$, $(8; 2; 3)$, $(6; 9; -5)$, $(4; 0; 6)$	$(2; -3; 1)$, $(3; -5; 3)$, $(13; -1; 11)$, $(10; 1; 9)$
$(1; -4; 0)$, $(5; 0; -2)$, $(3; 7; -10)$, $(1; -2; 1)$	$(-4; 1; 2)$, $(-3; -1; 4)$, $(7; 3; 12)$, $(4; 5; 10)$
$(-3; 4; -3)$, $(-2; 2; -1)$, $(8; 6; 7)$, $(5; 8; 5)$	$(2; -1; -4)$, $(3; -3; -2)$, $(13; 1; 6)$, $(10; 3; 4)$
$(2; -3; 1)$, $(6; 1; -1)$, $(4; 8; -9)$, $(2; -1; 2)$	$(5; -1; -4)$, $(9; 3; -6)$, $(7; 10; -14)$, $(5; 1; -3)$
$(3; 1; -2)$, $(4; -1; 0)$, $(14; 3; 8)$, $(11; 5; 6)$	$(-8; 3; -1)$, $(-7; 1; 1)$, $(3; 5; 9)$, $(0; 7; 7)$

Модуль 02 “Елементи аналітичної геометрії на площині” СИСТЕМА ПРЯМОКУТНИХ КООРДИНАТ

1. Основні поняття та теореми

Відстань між точками $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ на площині визначається за формулою $d = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Якщо точка $M(x; y)$ лежить на прямій, що проходить через точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$, і ділить відрізок AB у відношенні $\lambda = AM/MB$, то координати точки M визначаються як $x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$, $y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$.

Якщо точка C – середина відрізка AB , то її координати визначаються за формулами $x_C = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_C = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Пригадаємо наступне:

Медіана трикутника поділяє протилежну сторону навпіл.

Бісектриса трикутника поділяє протилежну сторону на два відрізки, які відносяться один до одного як відповідні бічні сторони.

Центр трикутника – точка перетину його медіан, в цій точці медіани діляться у відношенні $2 \div 1$, починаючи від вершин.

Площа трикутника за координатами його вершин $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$ визначається за формулою $\pm S = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$.

2. Приклади виконання завдань

1. На координатній площині xOy знайти відстань між точками $A(15; -5)$ і $B(3; 0)$; координати точок M_1 і M_2 , що поділяють відрізок AB у відношеннях $\lambda = \frac{AM_1}{M_1B} = \frac{3}{1}$, $\lambda = \frac{AM_2}{M_2B} = \frac{1}{3}$ відповідно.

Розв'язування:

$$d = |AB| = \sqrt{(3 - 15)^2 + (0 + 5)^2} = \sqrt{169} = 13.$$

$$x_{M_1} = \frac{15 + 3 \cdot 3}{1 + 3} = \frac{24}{4} = 6; \quad y_{M_1} = \frac{-5 + 3 \cdot 0}{1 + 3} = \frac{-5}{4} = -1,25.$$

$$x_{M_2} = \frac{15 + \frac{1}{3} \cdot 3}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{16}{\frac{4}{3}} = 12; \quad y_{M_2} = \frac{-5 + \frac{1}{3} \cdot 0}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{-5}{\frac{4}{3}} = \frac{-15}{4} = -3,75.$$

2. На координатній площині xOy задано вершини трикутника $A(4; 1)$, $B(-1; 3)$, $C(2; -1)$. Знайти довжини медіани BM і висоти AN трикутника.

Розв'язування:

Координати точки M як середини AC : $x_M = \frac{4+2}{2} = 3$, $y_M = \frac{1-1}{2} = 0$.

Тоді довжина медіани $|BM| = \sqrt{(-1-3)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{25} = 5$.

Оскільки $S_{\Delta} = \frac{1}{2}BC \cdot AN$, то $AN = \frac{2S_{\Delta}}{BC}$. Площа трикутника ABC :

$$\pm S = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -1-4 & 3-1 \\ 2-4 & -1-1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 7 \text{ кв.од.}.$$
 Довжина сторони BC :

$$|BC| = \sqrt{(2+1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{25} = 5. \text{ Тоді довжина висоти: } AN = \frac{2 \cdot 7}{5} = 2,8.$$

3. На координатній площині xOy задано вершини трикутника: $A(-4;0)$, $B(-1;4)$, $C(2;-8)$. Знайти довжину бісектриси AD трикутника.

Розв'язування:

Бісектриса AD поділяє сторону BC у відношенні $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$. Так як

$$|AB| = \sqrt{(-1+4)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{25} = 5, \quad |AC| = \sqrt{(2+4)^2 + (-8-0)^2} = \sqrt{100} = 10, \text{ то}$$

$$\frac{BD}{CD} = \frac{5}{10} = 0,5 = \lambda. \text{ Координати точки } D: x_D = \frac{x_B + \lambda x_C}{1 + \lambda} = \frac{-1 + 0,5 \cdot 2}{1 + 0,5} = \frac{0}{1,5} = 0,$$

$$y_D = \frac{y_B + \lambda y_C}{1 + \lambda} = \frac{4 + 0,5 \cdot (-8)}{1 + 0,5} = \frac{0}{1,5} = 0. \text{ Тоді довжина бісектриси } AD:$$

$$|AD| = \sqrt{(0+4)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{16} = 4.$$

4. На координатній площині xOy задано вершини $A(7;0)$, $B(3;4)$, $C(4;-3)$ трикутника. Знайти довжини сторін, площу трикутника, висоту AD , кут B , бісектрису BE , медіану CF і центр трикутника O .

Розв'язування:

Довжини сторін трикутника: $|AB| = \sqrt{(3-7)^2 + (4-0)^2} = 4\sqrt{2}$,

$$|BC| = \sqrt{(4-3)^2 + (-3-4)^2} = 5\sqrt{2}, \quad |CA| = \sqrt{(7-4)^2 + (0+3)^2} = 3\sqrt{2}.$$

$$\text{Площа трикутника } ABC: \pm S = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 3-7 & 4-0 \\ 4-7 & -3-0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = 12 \text{ кв.од.}$$

Оскільки $S_{\Delta} = \frac{1}{2}BC \cdot AD$, то $AD = \frac{2S_{\Delta}}{BC}$. Тоді $AN = \frac{2 \cdot 12}{5\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{5}$.

Так як $\angle B = \arcsin \frac{AD}{AB}$, то $\angle B = \arcsin \frac{12\sqrt{2}}{5 \cdot 4\sqrt{2}} = \arcsin 0,6$; $\angle B \approx 36,87^\circ$.

Бісектриса BE поділяє сторону AC на відрізки у відношенні

$$\frac{AE}{EC} = \frac{BA}{BC} = \frac{4\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = 0,8 = \lambda.$$

Тоді координати точки E , що поділяє сторону AC у заданому відношенні: $x_E = \frac{x_A + \lambda x_C}{1 + \lambda} = \frac{7 + 0,8 \cdot 4}{1 + 0,8} = \frac{17}{3}$, $y_E = \frac{y_A + \lambda y_C}{1 + \lambda} = \frac{0 + 0,8 \cdot (-3)}{1 + 0,8} = -\frac{4}{3}$.

Довжина бісектриси $|BE| = \sqrt{\left(\frac{17}{3} - 3\right)^2 + \left(-\frac{4}{3} - 4\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(-\frac{16}{3}\right)^2} = \frac{8}{3}\sqrt{5}$.

Координати точки F : $x_F = \frac{7+3}{2} = 5$, $y_F = \frac{0+4}{2} = 2$. Довжина медіани $|CF| = \sqrt{(5-4)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{26}$.

Координати центра трикутника O , як точки, що поділяє медіани у відношенні $2 \div 1$, починаючи від вершин трикутника, становлять:

$$x_O = \frac{x_C + 2x_F}{1+2} = \frac{4 + 2 \cdot 5}{1+2} = \frac{14}{3}, \quad y_O = \frac{y_C + 2y_F}{1+2} = \frac{-3 + 2 \cdot 2}{1+2} = \frac{1}{3}.$$

3. Завдання для самостійного виконання

1. На координатній площині xOy знайти відстань між точками $A(\alpha + 5; 2\alpha + 1)$ і $B(-2\alpha + 2; -2\alpha - 3)$; координати точок M_1 і M_2 , що поділяють відрізок AB у відношеннях $\lambda = \frac{AM_1}{M_1B} = \frac{4}{1}$, $\lambda = \frac{AM_2}{M_2B} = \frac{1}{4}$ відповідно.

2. На координатній площині xOy задано вершини трикутника ABC . Знайти довжину його висоти, яка проведена з вершини C та довжину бісектриси його внутрішнього кута при вершині A .

Варіант	A	B	C	Варіант	A	B	C
1.	(-3;1)	(0;5)	(6;-11)	2.	(-2;2)	(1;6)	(7;-10)
3.	(-1;3)	(2;7)	(8;-9)	4.	(0;4)	(3;8)	(9;-8)
5.	(1;5)	(4;9)	(10;-7)	6.	(2;6)	(5;10)	(11;-6)
7.	(3;7)	(6;11)	(12;-5)	8.	(4;8)	(7;12)	(13;-4)
9.	(5;9)	(8;13)	(14;-3)	10.	(-3;1)	(6;-11)	(0;5)
11.	(-2;2)	(7;-10)	(1;6)	12.	(-1;3)	(8;-9)	(2;7)
13.	(0;4)	(9;-8)	(3;8)	14.	(1;5)	(10;-7)	(4;9)
15.	(2;6)	(11;-6)	(5;10)	16.	(3;7)	(12;-5)	(6;11)
17.	(4;8)	(13;-4)	(7;12)	18.	(5;9)	(14;-3)	(8;13)
19.	(-4;0)	(2;-8)	(-1;4)	20.	(-3;1)	(3;-7)	(0;5)
21.	(-2;2)	(4;-6)	(1;6)	22.	(-1;3)	(5;-5)	(2;7)
23.	(0;4)	(6;-4)	(3;8)	24.	(1;5)	(7;-3)	(4;9)
25.	(2;6)	(8;-2)	(5;10)	26.	(3;7)	(9;-1)	(6;11)
27.	(4;8)	(10;0)	(7;12)	28.	(5;9)	(11;1)	(8;13)

ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ. РІЗНІ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ НА ПЛОЩИНІ

1. Основні поняття та теореми

Рівняння прямої, що проходить через дві точки $(x_1; y_1)$ та $(x_2; y_2)$, має вигляд $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Загальне рівняння прямої $Ax + By + C = 0$. Вектор $\vec{n}(A; B)$ – є нормаллю до прямої.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $y = kx + b$, де $k = \operatorname{tg}\alpha$ – кутовий коефіцієнт прямої, тобто тангенс кута, який утворює пряма з додатнім напрямком осі Ox , причому цей кут відраховується від осі Ox до прямої проти руху часової стрілки; b – величина відрізка, який пряма відтинає на осі ординат.

Рівняння прямої у відрізках на осях $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, де a – відрізок, який пряма відтинає на осі абсцис від початку координат, а b – відрізок, який пряма відтинає на осі ординат від початку координат.

Нормальне рівняння прямої $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$, де p – довжина перпендикуляра, який опущено з початку координат на пряму (рис. 3), α – кут, який перпендикуляр утворює з додатнім напрямком осі Ox і відлічується від осі проти годинникової стрілки.

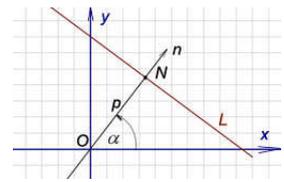


Рис. 3.

Для приведення загального рівняння прямої до нормального вигляду обидві його частини потрібно помножити на нормуючий множник $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Знак множника вибирається протилежним знаку C у загальному рівнянні прямої.

2. Приклади виконання завдань

1. Дано точки $A(-1; 2)$, $B(2; 3)$. Знайти загальне рівняння прямої AB , кутовий коефіцієнт прямої, точки перетину прямої з осями координат, відстань до початку координат.

Розв'язування:

Застосуємо рівняння прямої, яка проходить через дві точки, маємо $\frac{x+1}{2+1} = \frac{y-2}{3-2}$; $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1}$. Застосуємо властивість пропорції $1(x+1) = 3(y-2)$, звідки $x+1 = 3y-6$, тоді загальне рівняння $x-3y+7=0$.

Для визначення кутового коефіцієнта прямої виразимо y із загального рівняння прямої, маємо $-3y = -x - 7$, $y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$, тому $k = \frac{1}{3}$.

Перетворимо рівняння $x - 3y + 7 = 0$ у рівняння у відрізках на осях, маємо $x - 3y = -7$, $\frac{x}{-7} + \frac{3y}{7} = 1$, $\frac{x}{-7} + \frac{y}{\frac{7}{3}} = 1$, тоді точки перетину з осями

$$(-7; 0) \text{ і } \left(0; \frac{7}{3}\right).$$

Точки перетину з осями можна визначити і іншим методом.

При $x = 0$ маємо $0 - 3y + 7 = 0$, $-3y = -7$, $y = \frac{7}{3}$, тоді точка перетину з віссю ординат $\left(0; \frac{7}{3}\right)$.

При $y = 0$, маємо $x - 3 \cdot 0 + 7 = 0$, $x = -7$, тоді точка перетину з віссю абсцис $(-7; 0)$.

Запишемо нормальне рівняння прямої. Для цього знайдемо нормуючий множник $\mu = -\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ (знак «мінус», бо $C = 7$ «з плюсом»), тоді нормальне рівняння $-\frac{x}{\sqrt{10}} + \frac{3y}{\sqrt{10}} - \frac{7}{\sqrt{10}} = 0$.

Звідки відстань до початку відліку $d = \frac{7\sqrt{10}}{10}$.

3. Завдання для самостійного виконання

1.	$A(-6; 3), B(6; -6), C(4; 8)$	2.	$A(-7; -2), B(5; -11), C(9; 11)$
3.	$A(-2; 1), B(10; -8), C(14; 14)$	4.	$A(-6; 8), B(6; -1), C(10; 21)$
5.	$A(-1; -2), B(11; -11), C(15; 11)$	6.	$A(-10; 5), B(2; -4), C(6; 18)$
7.	$A(-1; 1), B(11; -8), C(15; 14)$	8.	$A(-10; 4), B(2; -5), C(6; 17)$
9.	$A(-8; 4), B(4; -5), C(8; 17)$	10.	$A(-6; -1), B(6; -10), C(10; 12)$
11.	$A(-7; 7), B(5; -2), C(3; 12)$	12.	$A(-2; 1), B(10; -8), C(8; 6)$
13.	$A(-6; 5), B(6; -4), C(4; 10)$	14.	$A(2; -1), B(14; -10), C(12; 4)$
15.	$A(-5; 8), B(7; -1), C(5; 13)$	16.	$A(-9; 7), B(3; -2), C(1; 12)$
17.	$A(-9; 6), B(3; -3), C(1; 11)$	18.	$A(-1; 2), B(11; -7), C(9; 7)$
19.	$A(-9; 5), B(3; -4), C(1; 10)$	20.	$A(-5; 4), B(7; -5), C(5; 9)$
21.	$A(-4; 1), B(8; -8), C(12; 14)$	22.	$A(-3; 0), B(9; -9), C(13; 13)$
23.	$A(-4; 5), B(8; -4), C(12; 14)$	24.	$A(-4; 0), B(8; -9), C(12; 13)$
25.	$A(-9; 3), B(3; -6), C(7; 16)$	26.	$A(-3; 2), B(9; -7), C(13; 15)$
27.	$A(-9; 10), B(3; 1), C(7; 23)$	28.	$A(-11; 0), B(1; -9), C(5; 13)$
29.	$A(-4; 8), B(8; -1), C(12; 21)$	30.	$A(-3; 10), B(9; 1), C(7; 15)$

1. Дані вершини трикутника ABC . Знайти: рівняння сторін AB , BC , їхні кутові коефіцієнти; перетин з осями координат, відстань до початку координат.

ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ПРЯМИХ І ТОЧОК НА ПЛОЩИНІ

1. Основні поняття та теореми

Якщо дві прямі задані рівняннями $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, то кут між прямими φ визначається за формулою $\operatorname{tg}\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|$.

Якщо рівняння прямих задані в загальному вигляді, то кут між ними визначається за формулою $\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$.

Прямі паралельні, якщо $k_1 = k_2$ або $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.

Прямі перпендикулярні, якщо $k_1 = -\frac{1}{k_2}$ або $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

Рівняння прямої, що проходить через задану точку $(x_0; y_0)$ в даному напрямі, який визначається кутовим коефіцієнтом k , має вигляд $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Координати точки перетину двох прямих знаходять, розв'язуючи систему рівнянь $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$

Відстань від точки $(x_0; y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ визначає формула $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

2. Приклади виконання завдань

1. Дано вершини $A(5;0)$, $B(0;1)$, $C(3;3)$ трикутника. Знайти рівняння сторін, кути трикутника.

Розв'язування:

Рівняння сторін визначаємо за двома відповідними вершинами

$$AB: \frac{x-5}{0-5} = \frac{y-0}{1-0}; \frac{x-5}{-5} = \frac{y}{1}; 1 \cdot (x-5) = -5 \cdot y; x-5 = -5y; x+5y-5=0.$$

$$BC: \frac{x-0}{3-0} = \frac{y-1}{3-1}; \frac{x}{3} = \frac{y-1}{2}; 2x = 3(y-1); 2x = 3y-3; 2x-3y+3=0.$$

$$CA: \frac{x-3}{5-3} = \frac{y-3}{0-3}; \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{-3}; -3(x-3) = 2(y-3); -3x+9 = 2y-6;$$

$$-3x-2y+3=0 \text{ або } 3x+2y-3=0.$$

Кути знайдемо за формулою $\cos \varphi = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$. Кут між

прямими AB і CA : $\cos \angle A = \frac{1 \cdot 3 + 5 \cdot 2}{\sqrt{1^2 + 5^2} \cdot \sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{13}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\angle A = 45^\circ$;

кут між AB і BC : $\cos \angle B = \frac{|1 \cdot 2 + 5 \cdot (-3)|}{\sqrt{1^2 + 5^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{13}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\angle B = 45^\circ$;

тоді кут $\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 90^\circ$.

2. Написати рівняння прямих, що проходять через точку $(1;2)$ перпендикулярно і паралельно прямій $3x + 2y - 7 = 0$.

Розв'язування:

Спочатку визначимо кутовий кофіцієнт прямої $2y = -3x + 7$.

Маємо $y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$, $k = -\frac{3}{2}$.

Кутовий кофіцієнт паралельної прямої $k_{//} = -\frac{3}{2}$. Тоді рівняння

паралельної прямої, що проходить через задану точку: $y - 2 = -\frac{3}{2}(x - 1)$,

звідки $y - 2 = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$, $y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} + 2$ або $y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$.

Кутовий кофіцієнт перпендикулярної прямої $k_{\perp} = \frac{2}{3}$. Тоді рівняння

перпендикулярної прямої, що проходить через задану точку:

$y - 2 = \frac{2}{3}(x - 1)$, звідки $y - 2 = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$, $y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} + 2$ або $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$.

3. Знайти відстань від прямої $3x - 4y + 6 = 0$ до точки $(-1;2)$.

Розв'язування:

Застосуємо формулу відстані від точки до прямої

$$d = \frac{|3x_0 - 4y_0 + 6|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|3 \cdot (-1) - 4 \cdot 2 + 6|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|-3 - 8 + 6|}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1.$$

4. Точки $A(1;-3)$, $B(3;1)$, $C(-4;7)$ – вершини трикутника ABC . Скласти рівняння висоти CD та знайти її довжину.

Розв'язування:

Висота CD перпендикулярна стороні AB

$$AB: \frac{x-1}{3-1} = \frac{y+3}{1+3}; \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} \cdot 4; \quad 2(x-1) = y+3; \quad 2x-2 = y+3;$$

$$2x - y - 5 = 0; \quad -y = -2x + 5; \quad y = 2x - 5; \quad k_{AB} = 2 = \frac{2}{1}.$$

$$\text{Тоді кутовий коефіцієнт висоти } k_{CD} = -\frac{1}{2}.$$

Висота CD проходить через точку $C(-4;7)$. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, що проходить через дану точку: $y - y_0 = k(x - x_0)$; тоді маємо $y - 7 = -\frac{1}{2}(x + 4)$, $2(y - 7) = -(x + 4)$, $2y - 14 = -x - 4$, $x + 2y - 10 = 0$ – рівняння висоти.

Довжина висоти CD – це відстань від точки $C(-4;7)$ до прямої $2x - y - 5 = 0$, тому

$$d = \frac{|2x_0 - y_0 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|2(-4) - 7 - 5|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|-8 - 7 - 5|}{\sqrt{5}} = \frac{20}{\sqrt{5}} = \frac{20\sqrt{5}}{5} = 4\sqrt{5}.$$

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайти кут φ між сторонами AB , BC із задачі попереднього дз.
2. Знайти кут φ між прямими $3x - 3y + 1 = 0$ і $(\alpha + 1)x - y + 4 = 0$.
3. Знайти відстань від точки $(-1;2)$ до прямої $5x - 3y + 7 = 0$.
4. Знайти відстань від точки $(-2;-4)$ до прямої $3x - 4y + 6 = 0$.
5. Знайти рівняння висоти CD та її довжину із задачі попереднього дз.

ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ НА ПЛОЩИНІ

1. Основні поняття та теореми

Коло – це геометричне місце точок, кожна з яких рівновіддалена від однієї і тієї ж точки, яка називається центром кола. Рівняння кола має такий вигляд $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, де $(x_0; y_0)$ – координати центра кола, r – радіус кола.

Якщо центр кола знаходиться у точці $(0;0)$, а радіус $r = a$, то рівняння кола має вигляд $x^2 + y^2 = a^2$.

Еліпсом називається геометричне місце точок, для кожної з яких сума відстаней від двох фіксованих точок площини (F_1 і F_2), які називаються фокусами, є величина стала.

Канонічне (найпростіше) рівняння еліпса має вигляд $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, де a – велика піввісь еліпса, b – мала піввісь еліпса (при умові $a > b$).

Фокуси еліпса $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ розташовані на великій півосі, відстань між фокусами (фокальна відстань) рівна $2c$ (рис. 4).

Величини a , b , c пов'язані рівністю $c^2 = a^2 - b^2$.

Ексцентриситет еліпса (ε) – відношення фокальної відстані ($2c$) до довжини його великої осі ($2a$), тобто $\varepsilon = \frac{c}{a}$. Для еліпса $\varepsilon < 1$.

Дві прямі, перпендикулярні до більшої осі, які розташовані симетрично відносно центра на відстані $\frac{a}{\varepsilon}$ від нього, називаються

директрисами еліпса. Рівняння директрис мають вигляд $x = \pm \frac{a}{\varepsilon} = \pm \frac{a^2}{c}$.

Якщо $a = b$, то канонічне рівняння еліпса має вигляд $x^2 + y^2 = a^2$, тобто такий еліпс є колом (Коло – еліпс з нульовою фокальною відстанню або фокуси якого співпадають).

Гіперболою називається геометричне місце точок, для кожної з яких різниця відстаней від двох фіксованих точок площини (F_1 і F_2), які називаються фокусами, є величина стала.

Канонічне (найпростіше) рівняння гіперболи має вигляд $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, де a – дійсна піввісь, b – уявна піввісь гіперболи.

Фокуси гіперболи $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ розташовані на її дійсній півосі, відстань між фокусами $2c$ (рис. 5).

Величини a , b , c пов'язані рівністю $c^2 = a^2 + b^2$.

Ексцентриситет гіперболи (ε) – це відношення фокальної відстані ($2c$) до довжини її дійсної осі ($2a$), тобто $\varepsilon = \frac{c}{a}$. Для гіперболи $\varepsilon > 1$.

Дві прямі, перпендикулярні до дійсної осі гіперболи, які розташовані симетрично відносно центра на відстані $\frac{a}{\varepsilon}$ від нього, –

директриси гіперболи. Рівняння директрис мають вигляд $x = \pm \frac{a}{\varepsilon} = \pm \frac{a^2}{c}$.

Якщо $a = b$, то гіпербола називається рівнобічною, її рівняння при цьому має вигляд $x^2 - y^2 = a^2$.

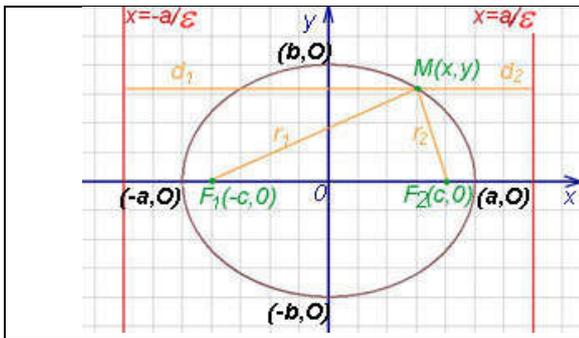


Рис. 4

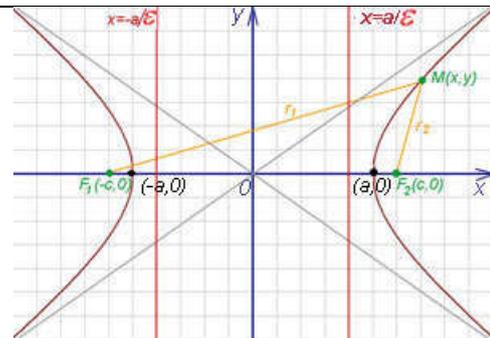


Рис. 5

Асимптоти гіперболи – прямі, які задаються рівняннями $y = \pm \frac{b}{a}x$.

Асимптоти застосовують для побудови гіперболи. Для цього будують прямокутник через точки $(a;0)$, $(-a;0)$, $(0;b)$, $(0;-b)$ зі сторонами паралельними координатним осям, проводять діагоналі прямокутника і продовжують їх за межі прямокутника – це асимптоти. Далі з точок $(a;0)$, $(-a;0)$ (якщо дійсна піввісь a) або з точок $(0;b)$, $(0;-b)$ (якщо дійсна піввісь b) проводимо вітки гіперболи наближаючись до асимптот, але не перетинаючи їх (рис. 6).

Параболою є геометричне місце точок для кожної з яких відстань до деякої фіксованої точки площини (F), яка називається фокусом, дорівнює відстані до деякої фіксованої прямої, яка називається директрисою (ця пряма не повинна проходити через фокус) (рис. 7).

Канонічне (найпростіше) рівняння параболи з фокусом $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ та директрисою $x = -\frac{p}{2}$ має вигляд $y^2 = 2px$, де p – параметр параболи.

Ексцентриситет параболи $\varepsilon = 1$.

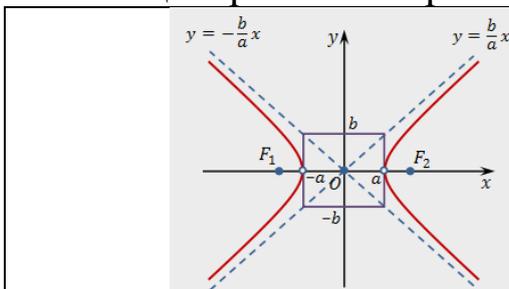


Рис. 6

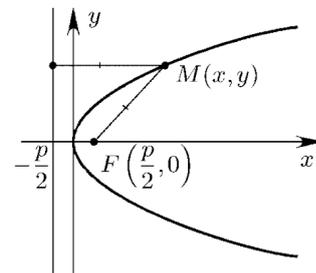


Рис. 7

2. Приклади виконання завдань

1. Записати канонічне рівняння еліпса $144x^2 + 169y^2 = 24336$, визначити піввісі, фокуси, фокальну відстань, ексцентриситет, директриси, зобразити еліпс.

Розв'язування:

Поділимо обидві частини $144x^2 + 169y^2 = 24336$ на 24336 , отримаємо $\frac{144x^2}{24336} + \frac{169y^2}{24336} = \frac{24336}{24336}$. Скоротимо дроби $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$. Отримали канонічне рівняння $\frac{x^2}{13^2} + \frac{y^2}{12^2} = 1$. Отже, це еліпс з піввісями $a = 13$ (по Ox), $b = 12$ (по Oy) (рис. 8).

Визначаємо $c^2 = a^2 - b^2 = 169 - 144 = 25$, тоді $c = 5$, отже фокусами є $F_1(-5;0)$ та $F_2(5;0)$, фокальна відстань (відстань між фокусами) $2c = 10$.

Ексцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{13}$. Рівняння директрис $x = \pm \frac{a^2}{c} = \pm \frac{169}{5}$.

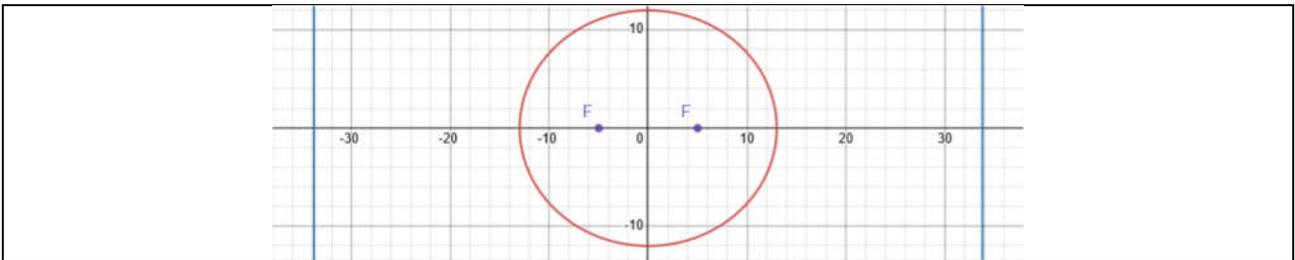


Рис. 8

2. Записати канонічне рівняння гіперболи $25x^2 - 144y^2 = 3600$, визначити півосі, фокуси, фокальну відстань, ексцентриситет, рівняння директрис, рівняння асимптот, зобразити гіперболу.

Розв'язування:

Поділимо $25x^2 - 144y^2 = 3600$ на 3600 , маємо $\frac{25x^2}{3600} - \frac{144y^2}{3600} = \frac{3600}{3600}$ або $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$. Тоді канонічне рівняння $\frac{x^2}{12^2} - \frac{y^2}{5^2} = 1$. Це гіпербола з центром $(0;0)$ і півосями $a = 12$ (дійсна), $b = 5$ (уявна) (рис. 9).

Визначаємо $c^2 = a^2 + b^2 = 144 + 25 = 169$, тоді $c = 13$, отже фокусами є $F_1(-13;0)$ та $F_2(13;0)$, фокальна відстань $2c = 26$.

Ексцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{13}{12}$. Рівняння директрис $x = \pm \frac{a^2}{c} = \pm \frac{144}{13}$.

Рівняння асимптот гіперболи $y = \pm \frac{5}{12}x$.

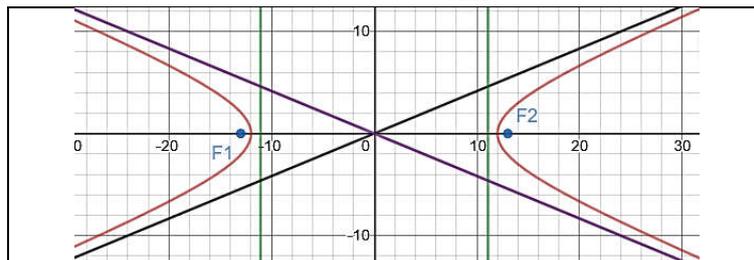


Рис. 9.

3. Записати канонічне рівняння, визначити параметр, фокус, рівняння директриси параболу $y^2 + 20x = 0$, зобразити її.

Розв'язування:

Канонічне рівняння $y^2 = -20x$. Це парабола з вершиною $(0;0)$, параметром $p = -10$, фокусом $F(-5;0)$, директрисою $x = 5$ (рис. 10).

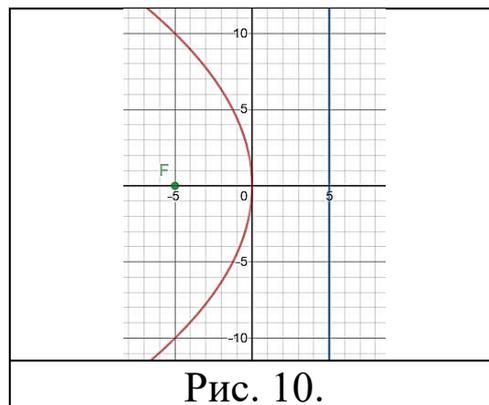


Рис. 10.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Записати канонічне рівняння еліпса, визначити півосі, фокуси, фокальну відстань, ексцентриситет, директриси, зобразити еліпс.

В-1, 6, 11, 16, 21, 26	$9x^2 + 25y^2 = 225$
В-2, 7, 12, 17, 22, 27	$16x^2 + 25y^2 = 400$
В-3, 8, 13, 18, 23, 28	$25x^2 + 169y^2 = 4225$
В-4, 9, 14, 19, 24, 29	$64x^2 + 100y^2 = 6400$
В-5, 10, 15, 20, 25, 30	$36x^2 + 100y^2 = 3600$

2. Записати канонічне рівняння гіперболи, визначити півосі, фокуси, фокальну відстань, ексцентриситет, рівняння директрис, рівняння асимптот, зобразити гіперболу.

В-1, 6, 11, 16, 21, 26	$9x^2 - 16y^2 = 144$
В-2, 7, 12, 17, 22, 27	$16x^2 - 9y^2 = 144$
В-3, 8, 13, 18, 23, 28	$144x^2 - 25y^2 = 3600$
В-4, 9, 14, 19, 24, 29	$36x^2 - 64y^2 = 2304$
В-5, 10, 15, 20, 25, 30	$64x^2 - 36y^2 = 2304$

3. Записати канонічне рівняння, визначити параметр, фокус, рівняння директриси параболу, зобразити її.

В-1, 11, 21	$y^2 - 10x = 0$	В-6, 16, 26	$y^2 + 10x = 0$
В-2, 12, 22	$y^2 - 12x = 0$	В-7, 17, 27	$y^2 + 12x = 0$
В-3, 13, 23	$y^2 - 14x = 0$	В-8, 18, 28	$y^2 + 14x = 0$
В-4, 14, 24	$y^2 - 16x = 0$	В-9, 19, 29	$y^2 + 16x = 0$
В-5, 15, 25	$y^2 - 18x = 0$	В-10, 20, 30	$y^2 + 18x = 0$

Модуль 03 “Аналітична геометрія в просторі” ПЛОЩИНА ЯК ПОВЕРХНЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

1. Основні поняття та теореми

Загальне рівняння площини $Ax + By + Cz + D = 0$. Вектор $\vec{n}(A; B; C)$ – є нормаллю до площини.

Рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і має вектор нормалі $\vec{n}(A; B; C)$ має вигляд $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Рівняння площини, яка проходить через задані точки $(x_1; y_1; z_1)$, $(x_2; y_2; z_2)$, $(x_3; y_3; z_3)$ знаходиться як

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Рівняння площини у відрізках на координатних осях $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Нормальне рівняння площини записується у вигляді $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$, де p – довжина перпендикуляра, який опущено з початку координат на площину (рис. 11), α, β, γ – кути, які цей перпендикуляр утворює з додатніми напрямками осей Ox, Oy, Oz відповідно.

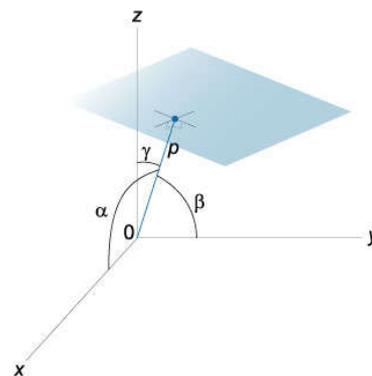


Рис. 11

Для приведення загального рівняння площини до нормального вигляду обидві його частини потрібно помножити на нормуючий

множник $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Знак множника вибирається протилежним

знаку D у загальному рівнянні площини.

2. Приклади виконання завдань

1. Записати рівняння площини, що проходить через точку $(2; 1; -1)$ і має нормаль $\vec{n}(1; -2; 3)$. Які відрізки відтинає площина на координатних осях?

Розв'язування:

Підставимо координати точки і нормалі у рівняння $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, маємо $1(x - 2) - 2(y - 1) + 3(z + 1) = 0$, звідки $x - 2 - 2y + 2 + 3z + 3 = 0$ або $x - 2y + 3z + 3 = 0$.

Перетворимо отримане загальне рівняння площини у рівняння площини у відрізках на осях $x - 2y + 3z = -3$, $\frac{x}{-3} - \frac{2y}{-3} + \frac{3z}{-3} = \frac{-3}{-3}$ або

$\frac{x}{-3} + \frac{y}{\frac{3}{2}} + \frac{z}{-1} = 1$. Площина відтинає відрізок -3 на осі абсцис (тобто з

від'ємної сторони), відрізок $\frac{3}{2}$ на осі ординат і відрізок -1 (тобто з від'ємної сторони) на осі абсцис.

2. Яка відстань від площини $10x + 15y - 6z - 380 = 0$ до початку відліку?

Розв'язування:

Для відповіді на питання перетворимо загальне рівняння площини в нормальне. Так як $A=10$, $B=15$, $C=-6$, D має знак мінус, то нормуючий множник $\mu = +\frac{1}{\sqrt{10^2 + 15^2 + (-6)^2}} = \frac{1}{19}$.

Тоді нормальне рівняння площини $\frac{10}{19}x + \frac{15}{19}y - \frac{6}{19}z - \frac{380}{19} = 0$ або

$$\frac{10}{19}x + \frac{15}{19}y - \frac{6}{19}z - 20 = 0.$$

Відстань від площини до початку відліку $d = 20$.

3. Які кути з координатними осями утворює перпендикуляр до площини $x + y + \sqrt{2}z - 2 = 0$, проведений з початку відліку?

Розв'язування:

Для відповіді на питання перетворимо загальне рівняння площини в нормальне. Так як $A=1$, $B=1$, $C=\sqrt{2}$, D має знак мінус, то $\mu = +\frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (\sqrt{2})^2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$. Нормальне рівняння $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z - 1 = 0$.

Звідки маємо $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\beta = \frac{1}{2}$, $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$, тобто $\alpha = \beta = 60^\circ$, $\gamma = 45^\circ$.

4. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $(3; -1; 2)$, $(4; -1; -1)$, $(2; 0; 2)$.

Розв'язування:

Підставимо точки у рівняння площини $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$,

маємо $\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 4-3 & -1+1 & -1-2 \\ 2-3 & 0+1 & 2-2 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, розкриваємо

визначник $\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x-3 & y+1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3(y+1) + (z-2) + 3(x-3) = 0$, тоді

$$3x + 3y + z - 8 = 0.$$

5. Задано точки $M_1(-1;1;-2)$, $M_2(1;0;4)$, $M_3(3;2;1)$. Знайти рівняння площини, що проходить через ці точки; рівняння площини у загальному вигляді; вектор нормалі до площини; рівняння площини у відрізках на осях; рівняння площини у нормальному вигляді.

Розв'язування:

Підставивши координати точок у рівняння площини через три

точки, дістанемо $\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z+2 \\ 1+1 & 0-1 & 4+2 \\ 3+1 & 2-1 & 1+2 \end{vmatrix} = 0$ або $\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z+2 \\ 2 & -1 & 6 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$.

Для отримання загального рівняння площини розкриємо визначник, $-3(x+1) + 24(y-1) + 2(z+2) + 4(z+2) - 6(x+1) - 6(y-1) = 0$, зведемо подібні доданки $-9(x+1) + 18(y-1) + 6(z+2) = 0$, звідки отримаємо $3(x+1) - 6(y-1) - 2(z+2) = 0$ або $3x - 6y - 2z + 5 = 0$.

Вектор нормалі до площини $-\vec{n}(3; -6; -2)$.

Для отримання рівняння площини у відрізках на осях виконаємо перетворення загального рівняння площини $3x - 6y - 2z + 5 = 0$, маємо

$$3x - 6y - 2z = -5, \quad \frac{3x}{-5} - \frac{6y}{-5} - \frac{2z}{-5} = 1 \quad \text{або} \quad \frac{x}{-\frac{5}{3}} + \frac{y}{\frac{5}{6}} + \frac{z}{\frac{5}{2}} = 1.$$

Нормуючий множник $\mu = -\frac{1}{\sqrt{3^2 + (-6)^2 + (-2)^2}} = -\frac{1}{7}$. Тоді нормальне

рівняння площини має вигляд $-\frac{3}{7}x + \frac{6}{7}y + \frac{2}{7}z - \frac{5}{7} = 0$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Задано точки M_1 , M_2 , M_3 . Знайти рівняння площини, що проходить через ці точки; рівняння площини у загальному вигляді; вектор нормалі до площини; рівняння площини у відрізках на осях; рівняння площини у нормальному вигляді.

1.	$(0; -2; -1), (2; 4; -2), (3; 2; 0)$	2.	$(-1; 0; -2), (-2; 4; -5), (7; 2; 5)$
3.	$(4; 0; 3), (-1; 2; -3), (2; 0; 1)$	4.	$(8; 7; 4), (2; 1; 1), (6; 1; 5)$
5.	$(5; 8; 0), (2; 4; -1), (3; 0; 2)$	6.	$(3; -2; 3), (6; 6; 2), (1; 4; -2)$
7.	$(6; 8; 1), (9; 4; 6), (0; 2; -2)$	8.	$(2; 8; -3), (10; 4; 7), (4; 8; -1)$
9.	$(0; 6; -4), (2; -4; 3), (6; 4; 3)$	10.	$(-2; 0; -3), (3; 10; -3), (2; 6; -2)$

11.	(5;6;1), (4;-2;4), (7;8;2)	12.	(-3;-2;-4), (-4;2;-7), (5;0;3)
13.	(2;-2;1), (-3;0;-5), (0;-2;-1)	14.	(5;4;1), (-1;-2;-2), (3;-2;2)
15.	(3;6;-2), (0;2;-3), (1;-2;0)	16.	(1;-4;1), (4;4;0), (-1;2;-4)
17.	(4;6;-1), (7;2;4), (-2;0;-4)	18.	(0;6;-5), (8;2;5), (2;6;-3)
19.	(-2;4;-6), (0;-6;1), (4;2;1)	20.	(-4;-2;-5), (1;8;-5), (0;4;-4)
21.	(3;4;-1), (2;-4;2), (5;6;0)	22.	(7;9;2), (10;5;7), (1;3;-1)
23.	(0;1;-1), (-1;5;-4), (8;3;6)	24.	(5;1;4), (0;3;-2), (3;1;2)
25.	(6;9;1), (3;5;0), (4;1;3)	26.	(4;-1;4), (7;7;3), (2;5;-1)
27.	(6;7;2), (5;-1;5), (8;9;3)	28.	(3;9;-2), (11;5;8), (5;9;0)
29.	(1;7;-3), (3;-3;4), (7;5;4)	30.	(-1;1;-2), (4;11;-2), (3;7;-1)

ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ПЛОЩИН І ТОЧОК У ПРОСТОРИ

1. Основні поняття та теореми

Кут між площинами $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ рівний куту між нормальними цими площинами і визначається формулою

$$\cos \varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Умова паралельності двох площин має вигляд $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Умова перпендикулярності двох площин має вигляд $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Відстань від точки $(x_0; y_0; z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ визначається формулою $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти кут між площинами $x + 2y + 2z - 3 = 0$ та $16x + 12y - 15z - 1 = 0$.

Розв'язування:

Використовуючи формулу кута між площинами, дістанемо

$$\cos \varphi = \frac{|1 \cdot 16 + 2 \cdot 12 + 2 \cdot (-15)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{16^2 + 12^2 + (-15)^2}} = \frac{10}{3 \cdot 25} \approx 0,1333, \quad \varphi \approx 82^\circ.$$

2. При якому значенні параметра k площина $72x + 36y - kz + 5 = 0$ паралельна площині $2x + y - 3z - 1 = 0$?

Розв'язування:

Використаємо умову паралельності двох площин $\frac{72}{2} = \frac{36}{1} = \frac{-k}{-3}$,

звідки $\frac{36}{1} = \frac{k}{3}$, звідки $k = 108$.

3. При якому значенні параметра k площина $72x + 36y - kz + 5 = 0$ перпендикулярна площині $2x + y - 3z - 1 = 0$?

Розв'язування:

Згідно умови перпендикулярності площин $72 \cdot 2 + 36 \cdot 1 + (-k) \cdot (-3) = 0$, звідки $144 + 36 + 3k = 0$, $3k = -180$, $k = -60$.

4. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(1; -2; -3)$ і паралельна до площини $2x - 3y + 5z + 2 = 0$.

Розв'язування:

В якості нормалі шуканої площини візьмемо нормаль даної паралельної площини $\vec{n}(2; -3; 5)$, тоді рівняння шуканої площини $2(x-1) - 3(y+2) + 5(z+3) = 0$ або $2x - 3y + 5z + 7 = 0$.

5. Знайти відстань від точки $(-10; 6; -8)$ до площини $3x - 6y - 2z + 5 = 0$.

Розв'язування:

Скористаємось формулою відстані від площини до точки, маємо $d = \frac{|3 \cdot (-10) - 6 \cdot 6 - 2 \cdot (-8) + 5|}{\sqrt{3^2 + (-6)^2 + (-2)^2}} = \frac{77}{7} = 11$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайти кут між площинами $2x + y - 2z + \alpha = 0$ і $6x + 2y - 3z - 4 = 0$.

2. При якому значенні параметра k площина $(4 + 2\alpha)x + (2 + \alpha)y - kz + 5 = 0$ паралельна/перпендикулярна площині $2x + y - 2z - 1 = 0$?

3. Знайти відстань від точки $(\alpha; \alpha + 1; -3\alpha)$ до площини $2x + y - 2z - 1 = 0$.

4. Записати рівняння площини, що проходить через точку M (в таблиці) паралельно до площини, яку отримали в попередньому домашньому.

5. Знайти відстань від точки M (в таблиці) до площини, яку отримали в попередньому домашньому.

1.	$(-11; 8; 10)$	2.	$(-6; 6; 8)$	3.	$(-12; 3; 2)$	4.	$(-10; 8; 8)$	5.	$(-7; 10; 11)$
6.	$(-12; 3; 5)$	7.	$(-4; 13; 14)$	8.	$(-8; 10; 13)$	9.	$(-9; 3; 5)$	10.	$(-5; 13; 16)$
11.	$(-6; 9; 11)$	12.	$(-9; 7; 8)$	13.	$(-12; 7; 8)$	14.	$(-9; 8; 9)$	15.	$(-12; 13; 14)$
16.	$(-3; 13; 14)$	17.	$(-5; 10; 12)$	18.	$(-8; 7; 12)$	19.	$(-2; 13; 12)$	20.	$(-8; 12; 11)$

21.	(-5;15;14)	22.	(-10;9;12)	23.	(-2;13;18)	24.	(-7;9;15)	25.	(-4;12;15)
26.	(-9;16;14)	27.	(-11;11;19)	28.	(-7;12;12)	29.	(-6;14;18)	30.	(-12;9;10)

ПРЯМА У ПРОСТОРИ

1. Основні поняття та теореми

Пряму в просторі можна задати як перетин двох площин, тобто

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Рівняння прямої в просторі, яка проходить через дві задані точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ та $M_2(x_2; y_2; z_2)$, має вигляд $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

Канонічне рівняння прямої лінії, яка проходить через відому точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ в заданому вектором $\vec{a}(l; m; p)$ напрямі (\vec{a} – спрямовуючий вектор прямої), має вигляд $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{p}$.

Параметричні рівняння прямої у просторі записують наступним чином: $x = x_0 + lt$, $y = y_0 + mt$, $z = z_0 + pt$, де t – параметр.

Кут між двома прямими визначається як кут між їхніми спрямовуючими векторами, тобто $\cos \varphi = \frac{|l_1l_2 + m_1m_2 + p_1p_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + p_2^2}}$.

Умова паралельності двох прямих у просторі має вигляд $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1}{p_2}$.

Умова перпендикулярності двох прямих має вигляд $l_1l_2 + m_1m_2 + p_1p_2 = 0$.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти канонічне рівняння та спрямовуючий вектор прямої, що проходить через дві точки $M_1(2;3;5)$ та $M_2(4;8;9)$. Записати рівняння прямої у параметричному вигляді.

Розв'язування:

Запишемо рівняння прямої, яка проходить через дві точки, маємо $\frac{x-2}{4-2} = \frac{y-3}{8-3} = \frac{z-5}{9-5}$, звідки $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-5}{4}$. Це і є канонічне рівняння, звідки спрямовуючий вектор прямої $\vec{a}(2;5;4)$.

Для знаходження параметричних рівнянь прямої прирівняємо до t кожен дріб канонічного рівняння: $\frac{x-2}{2}=t$, $\frac{y-3}{5}=t$, $\frac{z-5}{4}=t$. Звідки

$$\begin{cases} x-2=2t, \\ y-3=5t, \\ z-5=4t, \end{cases} \text{ параметричні рівняння } \begin{cases} x=2t+2, \\ y=5t+3, \\ z=4t+5. \end{cases}$$

2. Знайти кут між прямими $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{-2}$ та $\frac{x}{-4}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-2}{7}$.

Розв'язування: Застосуємо формулу кута між прямими в просторі, маємо $\cos \varphi = \frac{|2 \cdot (-4) + 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 7|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 7^2}} = \frac{18}{3 \cdot 9} \approx 0,6667$, $\varphi \approx 48^\circ$.

3. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $(4; -1; 5)$ паралельно прямій $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+1}{2}$.

Розв'язування:

В якості спрямовуючого вектора шуканої прямої візьмемо спрямовуючий вектор даної прямої $\vec{a}(1; 3; 2)$.

Канонічне рівняння прямої, яка проходить через відому точку в заданому напрямі \vec{a} , має вигляд $\frac{x-4}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-5}{2}$. Що і є рівнянням шуканої прямої.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайти канонічне рівняння та напрямлений вектор прямої, що проходить через дві дані точки $M_1(3-\alpha; \alpha; \alpha+3)$ та $M_2(30-\alpha; \alpha+5; \alpha+30)$. Записати рівняння прямої у параметричному вигляді. α – номер за списком.

2. Знайти кут між прямими $\frac{x-4}{11}=\frac{y-4}{7}=\frac{z-1}{3}$, $\frac{x-7}{3}=\frac{y+8}{-3}=\frac{z+7}{-4}$.

ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ У ПРОСТОРИ

1. Основні поняття та теореми

Синус кута, який пряма $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{p}$ утворює з площиною

$$Ax + By + Cz + D = 0, \text{ визначається як } \sin \varphi = \frac{|Al + Bm + Cp|}{\sqrt{l^2 + m^2 + p^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Умова перпендикулярності прямої і площини має вигляд $\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{p}$. Умова паралельності прямої та площини має вигляд

$$Al + Bm + Cp = 0.$$

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти кут між прямою $\frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6}$ та площиною $4x + 4y - 7z + 3 = 0$.

Розв'язування:

Кут між прямою і площиною визначимо формулою $\sin \varphi = \frac{|4 \cdot 3 + 4 \cdot 2 - 7 \cdot 6|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2} \cdot \sqrt{4^2 + 4^2 + (-7)^2}} = \frac{62}{63}$, тоді $\varphi \approx 80^\circ$.

2. При якому значенні l площина $3x + 2y - 7z + 1 = 0$ і пряма $\frac{x-2}{l} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-5}{4}$ будуть паралельні?

Розв'язування:

Використаємо умову паралельності прямої та площини $Al + Bm + Cp = 0$. Маємо $3l + 2 \cdot 5 - 7 \cdot 4 = 0$, $3l = 18$, $l = 6$.

3. Знайти канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $(2; -3; -5)$ перпендикулярно площині $6x - 3y - 5z + 2 = 0$.

Розв'язування:

В якості спрямовуючого вектора шуканої прямої візьмемо нормаль даної площини $\vec{a} = \vec{n}(6; -3; -5)$.

Тоді канонічне рівняння прямої лінії, яка проходить через задану точку в заданому вектором \vec{a} напрямі, має вигляд $\frac{x-2}{6} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z+5}{-5}$.

4. Знайти рівняння площини, що проходить через точку $(3; -2; 1)$ перпендикулярно прямій $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z+5}{3}$.

Розв'язування:

В якості нормалі шуканої площини візьмемо спрямовуючий вектор даної прямої $\vec{n} = \vec{a}(1; -2; 3)$.

Тоді рівняння площини, що проходить через задану точку і має нормаль \vec{n} , має вигляд $1(x-3) - 2(y+2) + 3(z-1) = 0$ або $x - 2y + 3z - 10 = 0$.

5. Знайти точку перетину площини $2x + 3y + z - 1 = 0$ з прямою $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$.

Розв'язування:

Запишемо рівняння прямої в параметричному вигляді:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6} = t, \quad \begin{cases} x-1=1 \cdot t, \\ y+1=-2 \cdot t, \\ z=6 \cdot t, \end{cases} \quad \begin{cases} x=t+1, \\ y=-2t-1, \\ z=6t. \end{cases}$$

Підставляючи ці вирази для x , y та z в рівняння площини, одержимо $2(t+1)+3(-2t-1)+6t-1=0$, звідки $2t+2-6t-3+6t+1=0$, $2t-2=0$, $t=1$.

Це значення параметра відповідає точці перетину прямої і площини. Таким чином координати точки перетину:
$$\begin{cases} x_x = 1+1 = 2, \\ y_x = -2 \cdot 1 - 1 = -3, \\ z_x = 6 \cdot 1 = 6. \end{cases}$$

Тобто точка перетину прямої і площини $(2; -3; 6)$.

6. Знайти відстань від точки $(1; -1; -2)$ до прямої $\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2}$.

Розв'язування:

Введемо допоміжну площину, що проходить через задану точку перпендикулярно заданій прямій. Тоді рівняння допоміжної площини $3(x-1)+2(y+1)-2(z+2)=0$ або $3x+2y-2z-5=0$.

Знайдемо точку перетину даної прямої з допоміжною площиною.

Для цього параметричні рівняння даної прямої
$$\begin{cases} x = 3t - 3, \\ y = 2t - 2, \\ z = -2t + 8 \end{cases}$$
 підставимо у

рівняння допоміжної площини $3(3t-3)+2(2t-2)-2(-2t+8)-5=0$, звідки маємо $17t-34=0$, $t=2$, тоді координати точки перетину даної прямої з допоміжною площиною $(3; 2; 4)$.

Шукана відстань є відстанню між даною точкою та точкою перетину даної прямої з допоміжною площиною, тому застосуємо формулу відстані між двома точками $d = \sqrt{(3-1)^2 + (2+1)^2 + (4+2)^2} = 7$.

7. Дано три точки $D(2; -5; -11)$, $E(5; -7; -16)$, $F(1; 0; -6)$. Потрібно: записати канонічне рівняння прямої DE ; записати рівняння площини, що проходить через точку F перпендикулярно до прямої DE ; знайти точку перетину цієї площини з прямою DE ; знайти відстань від точки F до прямої DE .

Розв'язування:

Скористуємось рівнянням прямої, що проходить через дві точки, маємо $\frac{x-2}{5-2} = \frac{y+5}{-7+5} = \frac{z+11}{-16+11}$, $\frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z+11}{-5}$. Це канонічне рівняння прямої DE .

Так як спрямовуючий вектор прямої DE беремо в якості нормалі площини, що перпендикулярна прямій DE , тобто $\vec{n} = \vec{a}(3; -2; -5)$. Тоді рівняння шуканої площини $3(x-1) - 2(y-0) - 5(z+6) = 0$, звідки $3x - 3 - 2y - 5z - 30 = 0$ або $3x - 2y - 5z - 33 = 0$.

Знаходимо точку перетину прямої DE з площиною. Для цього параметричні рівняння даної прямої $\begin{cases} x = 3t + 2, \\ y = -2t - 5, \\ z = -5t - 11 \end{cases}$ підставимо у рівняння

знайденої площини $3(3t+2) - 2(-2t-5) - 5(-5t-11) - 33 = 0$, звідки маємо $38t + 38 = 0$, $t = -1$, тоді координати точки перетину прямої з площиною $(-1; -3; -6)$.

Відстань від точки F до прямої DE є відстанню між точкою F та точкою перетину прямої з площиною, тому застосуємо формулу відстані між двома точками $d = \sqrt{(1+1)^2 + (0+3)^2 + (-6+6)^2} = \sqrt{13}$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Дано три точки D , E , F . Потрібно: записати канонічне рівняння прямої DE ; записати рівняння площини, що проходить через точку F перпендикулярно до прямої DE ; знайти точку перетину цієї площини з прямою DE ; знайти відстань від точки F до прямої DE .

1.	(5;1;7), (9;3;3), (6;0;3)	2.	(1;4;5), (5;6;1), (2;3;1)
3.	(4;-1;9), (8;1;5), (5;-2;5)	4.	(2;0;8), (6;2;4), (3;-1;4)
5.	(-2;2;3), (2;4;-1), (-1;1;-1)	6.	(-1;4;2), (3;6;-2), (0;3;-2)
7.	(-2;2;10), (2;4;6), (-1;1;6)	8.	(3;6;2), (7;8;-2), (4;5;-2)
9.	(6;-2;11), (10;0;7), (7;-3;7)	10.	(3;3;2), (7;5;-2), (4;2;-2)
11.	(3;-1;5), (7;1;1), (4;-2;1)	12.	(-1;2;3), (3;4;-1), (0;1;-1)
13.	(2;-3;7), (6;-1;3), (3;-4;3)	14.	(0;-2;6), (4;0;2), (1;-3;2)
15.	(-3;1;2), (1;3;-2), (-2;0;-2)	16.	(-2;3;1), (2;5;-3), (-1;2;-3)
17.	(-4;0;8), (0;2;4), (-3;-1;4)	18.	(1;4;0), (5;6;-4), (2;3;-4)
19.	(4;-4;9), (8;-2;5), (5;-5;5)	20.	(5;5;4), (9;7;0), (6;4;0)
21.	(1;-1;3), (5;1;-1), (2;-2;-1)	22.	(-3;0;1), (1;2;-3), (-2;-1;-3)
23.	(1;-4;6), (5;-2;2), (2;-5;2)	24.	(1;-1;7), (5;1;3), (2;-2;3)
25.	(-5;-1;0), (-1;1;-4), (-4;-2;-4)	26.	(-3;2;0), (1;4;-4), (-2;1;-4)
27.	(-3;1;9), (1;3;5), (-2;0;5)	28.	(-1;2;-2), (3;4;-6), (0;1;-6)
29.	(2;-6;7), (6;-4;3), (3;-7;3)	30.	(3;3;2), (7;5;-2), (4;2;-2)

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Васильків, І. М. Вища математика: Ч.1: лінійна алгебра і аналітична геометрія: навчальний посібник. Львів : Львівський національний університет імені Івана Франка, 2021. 64 с.
2. Вища математика. Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Елементи векторної алгебри : конспект лекцій / О. В. Кузьма, О. В. Суліма, Т. О. Рудик [та ін.]. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 127 с.
3. Дубовик В.П. Вища математика : навчальний посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрик Київ : А.С.К., 2003. 648 с.
4. Козира В. М. Елементарна та вища математика : посібник-довідник. Тернопіль : Астон, 2021. 168 с.
5. Коляда Р. В., Мельник І. О., Мельник О. М. Вища математика : навчальний посібник. Львів : Магнолія 2006. 342 с.
6. Лозовий Б.Л. Практикум з вищої математики : навчальний посібник / Б.Л.Лозовий, Я.С. Пушак, О.Е. Шабат. Львів: Магнолія 2006, 2021. 288 с.
7. Практикум з вищої математики. Комп'ютерна система для дистанційного навчання. в 2-х ч. – ч.1 В.С. Шибанін, О.В. Шибаніна, І.П. Атаманюк та ін. Миколаїв: МНАУ, 2016. 229 с.
8. Скуратовський, Р. В. Вища математика з прикладами та задачами : підручник. Київ : Національна академія управління, 2021. 232 с.

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА ТА ГЕОМЕТРІЯ

Методичні рекомендації

Укладачі: **Бойчук** Олена Володимирівна
Богданов Сергій Іванович
Борчик Євген Юрійович
Поживатенко Віталій Володимирович

Формат 60x84/16 Ум. друк. арк.

Тираж __ прим. Зам. №

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Г. Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.