МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Інженерно-енергетичний факультет

Кафедра вищої та прикладної математики

ВИЩА МАТЕМАТИКА:

Диференціальне та інтегральне числення

функції однієї змінної

методичні рекомендації
для виконання самостійної роботи
здобувачами першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
ОПП «Агроінженерія» спеціальності 208 «Агроінженерія»
денної та заочної форм здобуття вищої освіти

МИКОЛАЇВ
2023

УДК 517.958
В55

Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету МНАУ (протокол № 8 від 30.03. 2023р.)

Укладачі:

О.В. Бойчук –	к.ф.-м.н., старший викладач кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського національного аграрного університету;
Є.Ю. Борчик –	к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського національного аграрного університету.
С.І. Богданов –	старший викладач кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського національного аграрного університету;
В.В. Поживатенко –	к.ф.-м.н., старший викладач кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського національного аграрного університету;

Рецензент:

Рецензент:

Дармосюк В.М.	– доцент кафедри фізики та математики Миколаївського національного університету ім. В.О. Сухомлинського.

ЗМІСТ

ВСТУП

Диференціальне числення є основним розділом курсу вищої математики в цілому. У методичних рекомендаціях розглядаються завдання для самостійної роботи та роз'яснення прикладів виконання подібних завдань з наступних змістовиих модулів: «Диференціальне числення функції однієї змінної», «Інтегральне числення функції однієї змінної. Невизначений інтеграл», «Інтегральне числення функції однієї змінної. Визначений інтеграл».

Матеріал викладено таким чином, щоб максимально допомогти студентам оволодіти методами та набути основних навиків по знаходженню похідних та інтегралів функцій та їх застосувань.

Методичні рекомендації створено відповідно до програми курсу «Вища математика» для здобувачів освітнього рівня «бакалавр» спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» але їх можуть використовувати студенти інших спеціальностей, для яких програмою передбачено вивчення курсу «Вища математика», зокрема при дистанційній формі навчання.

Модуль 05 „Диференціальне числення функції однієї змінної”

ПОХІДНІ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ. ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

1. Основні поняття та теореми

Похідні елементарних функцій

1	$(C)'=0$	5	$\left(a^x\right)'=a^x\ln a$	9	$(\sin x)'=\cos x$	13	$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2	$x'=1$	6	$\left(e^x\right)'=e^x$	10	$(\cos x)'=-\sin x$	14	$(\arccos x)'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
3	$\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$	7	$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$	11	$(\mathrm{tg}x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	15	$(\mathrm{arctg}x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$
4	$\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	8	$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$	12	$(\mathrm{ctg}x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	16	$(\mathrm{arcctg}x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

Правила диференціювання

Нехай задано диференційовані функції $u=u(x)$ та $v=v(x)$.

1. Похідна суми/різниці диференційованих функцій дорівнює сумі/різниці похідних цих функцій $(u\pm v)'=u'\pm v'$.

2. Похідна добутку двох диференційованих функцій дорівнює сумі добутку похідної першої функції на другу та добутку похідної другої функції на першу: $(u\cdot v)'=u'v+uv'$.

3. Похідна частки: $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

Наслідок 1. Постійний множник можна виносити за знак похідної: $(Cu)'=Cu'$; $\left(\dfrac{u}{C}\right)'=\dfrac{u'}{C}$.

Наслідок 2. $(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'$. **Наслідок 3.** $\left(\dfrac{C}{v}\right)'=-\dfrac{C}{v^2}$.

3. Завдання для самостійного виконання

Варіант			
1	$y=\frac{1}{2}x^3-3e^x+6$	$y=\log_3 x\cdot 2^x$	$y=\dfrac{4e^x}{\sqrt[3]{x^2}}$; $y=\dfrac{4+\cos x}{\sin x}$
	$y=\cos x-2^x-\ln x+\mathrm{tg}x$	$y=x^2\mathrm{arctg}x$	
2	$y=\frac{1}{5}x^3-2\sqrt{x}+2$	$y=\sqrt{x^3}\log_7 x$	$y=\dfrac{x+1}{e^x}$; $y=\dfrac{1-e^x}{\sin x}$
	$y=\sin x-\sqrt{x}+\arccos x$	$y=3^x\sin x$	
3	$y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{x}-8x+5$	$y=\left(x^2+2x\right)3^x$	$y=\dfrac{\sqrt{x}+1}{x-1}$; $y=\dfrac{5+\sin x}{\cos x}$
	$y=3^x+6\cos x-4\ln x+2$	$y=\sin x\cdot\ln x$	
4	$y=\frac{1}{7}x^7-2\log_6 x-3x$	$y=\left(\sqrt{x}+2\right)\log_3 x$	$y=\dfrac{4x^2}{3+x^2}$; $y=\dfrac{5+\sin x}{4-\cos x}$
	$y=e^x+6\sin x-5\log_3 x+2$	$y=\cos x\cdot\log_2 x$	
5	$y=\frac{1}{6}x^4-\frac{5}{2}\sqrt[5]{x^2}+3$	$y=\frac{1}{3}x^9\log_4 x$	$y=\dfrac{12^x}{9+x^2}$; $y=\dfrac{1-\sin x}{\cos x}$
	$y=\mathrm{tg}x-6x+4^x$	$y=\arccos x\cdot 6^x$	
6	$y=\frac{1}{x}-x^2+3\log_2 x$	$y=\left(x+\frac{1}{x}\right)5^x$	$y=\dfrac{x^2-3x+3}{\sqrt{x}-1}$; $y=\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$
	$y=\cos x-5x+7^x$	$y=\mathrm{arctg}x\cdot e^x$	

7	$y=-\dfrac{1}{5}x^3+\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-4$	$y=\left(\sqrt{x}+\dfrac{2}{x}\right)\log_3 x$	$y=\dfrac{4-x^3}{e^x}$; $y=\dfrac{\cos x+\sin x}{x}$
	$y=7\sin x-3x^4+\arccos x$	$y=x^4\,\mathrm{arc\,tg}x$	
8	$y=\dfrac{3^x}{2}-\dfrac{7}{2}x^2-2$	$y=(4x+1)\sqrt[3]{x^2}$	$y=\dfrac{\log_4 x}{e^x+1}$; $y=\dfrac{\cos x-\sin x}{2x}$
	$y=3\cos x-2x^3+\arccos x$	$y=x^3\,\mathrm{arc\,ctg}x$	
9	$y=-\dfrac{1}{3}x^3+e^x+3x-2$	$y=\left(2^x+\dfrac{3}{x}\right)\log_{11} x$	$y=\dfrac{2x^3+1}{\sqrt{x}}$; $y=\dfrac{\sin x}{6-2^x}$
	$y=\sqrt{x}+5x-5\arccos x+4$	$y=(\cos x+1)\ln x$	
10	$y=-\dfrac{1}{x}+2\log_3 x-9$	$y=\left(x^2+x\right)\sqrt[4]{x^3}$	$y=\dfrac{4^x}{x^2+3}$; $y=\dfrac{3+\sin x}{9-e^x}$
	$y=e^x-\sqrt{x}+5-5\cos x+4x$	$y=(\ln x+1)\cos x$	
11	$y=-\dfrac{1}{6}\sqrt{x^3}+2^x-4$	$y=\left(e^x+\dfrac{3}{x}\right)\sqrt{x}$	$y=\dfrac{x^2+1}{\log_3 x}$; $y=\dfrac{x-e^x}{\cos x}$
	$y=3\sqrt{x}-\arccos x-7\ln x$	$y=\left(x^3+\cos x\right)e^x$	
12	$y=-\log_3 x+3x-5$	$y=\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}\right)2^x$	$y=\dfrac{x^3}{2^x+1}$; $y=\dfrac{\cos x-e^x}{x}$
	$y=3\sqrt{x}+\arcsin x-7\log_2 x$	$y=\left(x^3+\arccos x\right)\sin x$	
13	$y=\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{5}{2}\sqrt{x}-2$	$y=\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)\sqrt[3]{x}$	$y=\dfrac{3^x}{x^2+12}$; $y=\dfrac{\sin x}{\sin x-\cos x}$
	$y=4\mathrm{tg}x+4x^2+\arcsin x-\sqrt{x}$	$y=(\mathrm{tg}x+\ln x)\cos x$	
14	$y=-\dfrac{1}{3}x^6+e^x-1$	$y=\left(x^3-2^x\right)\sqrt{x}$	$y=\dfrac{9-x^2}{\log_4 x}$; $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$
	$y=4\sin x-x^{12}+\mathrm{arctg}x-\sqrt{x}$	$y=(\mathrm{tg}x+\log_8 x)\arccos x$	
15	$y=\dfrac{1}{3}\log_2 x-\dfrac{4}{9}\sqrt[9]{x^4}-7x$	$y=\sqrt{x}\left(e^x+\dfrac{1}{x}\right)$	$y=\dfrac{8x}{x^2+4}$; $y=\dfrac{x-\cos x}{\sin x}$
	$y=7\mathrm{tg}x-x^3+5^x$	$y=3^x\cdot\mathrm{tg}x\cdot\sqrt{x}$	
16	$y=\dfrac{1}{6}\log_{13} x-\dfrac{4}{9}\left(\sqrt[5]{x^3}\right)^2-7^x$	$y=\sqrt{x}\left(\log_{17} x+\dfrac{1}{x}\right)$	$y=\dfrac{9\log_3 x-e^x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$; $y=\dfrac{x\cos x}{1-\sin x}$
	$y=6\mathrm{arctg}x-x^4+7e^x$	$y=2^x\cdot\mathrm{ctg}x\cdot\sqrt{x}$	

ЗМІСТ ПОХІДНОЇ ФУНКЦІЇ

1. Основні поняття та теореми

Геометрично похідна являє собою кутовий коефіцієнт дотичної лінії до графіка функції $y=f(x)$ у точці x, тобто $y'=\mathrm{tg}\alpha$, де α – кут нахилу дотичної лінії.

Рівняння дотичної у точці $(x_0;y_0)$ до графіка функції $y=f(x)$: $y=y(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

Рівняння нормалі до графіка функції $y=f(x)$: $y=y(x_0)-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.

Нехай матеріальна точка рухається по траєкторії згідно закону руху $s=s(t)$. Механічно похідна являє собою миттєву швидкість матеріальної точки, тобто $s'=v$.

Нехай швидкість матеріальної точки змінюється згідно закону $v=v(t)$. Механічно похідна являє собою миттєве прискорення матеріальної точки, тобто $v'=a$.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $f(x)=x^3-2x$ у точці $x_0=0$?

Розв’язання: $f'(x)=3x^2-2$; $f'(0)=-2$.

Відповідь: –2.

2. Знайти кутовий коефіцієнт нормалі до графіка функції $f(x)=2x-x^3$ у точці $x_0=0$?

Розв'язання: $f'(x)=2-3x^2$; $f'(0)=2$; $k_\perp=-\frac{1}{2}=-0{,}5$.

Відповідь: –0,5.

3. Скласти рівняння дотичної та нормалі до графіка кривої $y=x^2$ в точці $(1;1)$.

Розв'язання:

$y'=2x$; $y'(1)=2$. Рівняння дотичної до графіка функції: $y=1+2(x-1)$, $y=2x-1$. Рівняння нормалі до графіка функції: $y=1-\frac{1}{2}(x-1)$, $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$.

Відповідь: $y=2x-1$; $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$.

4. Скласти рівняння дотичної та нормалі до графіка кривої $y = 6\sqrt[3]{x}-\frac{16\sqrt[4]{x}}{3}$ в точці $x_0=1$.

Розв'язання:

$y=6x^{\frac{1}{3}}-\frac{16}{3}x^{\frac{1}{4}}$; $y'=\frac{6}{3}x^{-\frac{2}{3}}-\frac{16}{3}\cdot\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$; $y(1)=6-\frac{16}{3}=\frac{2}{3}$; $y'(1)=2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$.

Рівняння дотичної до графіка функції: $y=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}(x-1)$, $y=\frac{2}{3}x$ або $2x-3y=0$. Рівняння нормалі до графіка функції: $y=\frac{2}{3}-\frac{3}{2}(x-1)$, $y=-\frac{3}{2}x+\frac{13}{6}$ або $9x+6y-13=0$.

Відповідь: $2x-3y=0$; $9x+6y-13=0$.

5. Тіло рухається за законом $s(t)=t^3+2t$ (час вимірюється в секундах, шлях у метрах). Визначте швидкість його руху в момент часу $t=2c$.

Розв'язання: $s'(t)=3t^2+2$; $v(t)=s'(2)=3\cdot 2^2+2=14\,м/с$. Відповідь: $14\,м/с$.

6. Швидкість тіла змінюється за законом $v(t)=3t^2+4t$ (час вимірюється в секундах, швидкість у метрах за секундах). Визначте його прискорення в момент часу $t=1c$.

Розв'язання: $v'(t)=6t+4$; $a(1)=v'(1)=6\cdot 1+4=10\,м/с^2$. Відповідь: $10\,м/с^2$.

3. Завдання для самостійного виконання

Скласти рівняння дотичної та рівняння нормалі до графіка кривої $y=f(x)$ в точці x_0.

1 варіант	$y=\frac{4\beta x-x^2}{4\beta}$	$x_0=2$	$y=2\beta x^2+3x-1$	$x_0=-2$
2 варіант	$y=x-\beta x^3$	$x_0=-1$	$y=x^2+8\beta\sqrt{x}-32$	$x_0=4$
3 варіант	$y=\beta x+\sqrt{x^3}$	$x_0=1$	$y=\frac{\beta x^2-2\beta x+6}{\beta x^2}$	$x_0=-8$
4 варіант	$y=2\beta x^2-3\beta x+1$	$x_0=1$	$y=\frac{2x+\beta}{x}$	$x_0=1$
5 варіант	$y=2x^2+3\beta$	$x_0=-1$	$y=\frac{x}{x^2+\beta}$	$x_0=-2$
6 варіант	$y=\frac{x^2+3x+3}{3\beta}$	$x_0=2$	$y=\frac{1}{3x+\beta}$	$x_0=2$
7 варіант	$y=\frac{3x-2x^3}{3\beta}$	$x_0=1$	$y=\frac{2x}{x^2+\beta}$	$x_0=1$
8 варіант	$y=\frac{\beta x^2}{10}+\beta$	$x_0=2$	$y=\frac{1+\beta x^2}{\beta+x^2}$	$x_0=1$

ПОХІДНА СКЛАДЕНОЇ ФУНКЦІЇ. ЛОГАРИФМІЧНЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

1. Основні поняття та теореми

Нехай змінна y є функцією від змінної u: $y=f(u)$, а змінна u є функцією від незалежної змінної x: $u=\varphi(x)$. Якщо $y=f(u)$ та $u=\varphi(x)$ – диференційовані функції своїх аргументів, то похідна складеної функції існує та рівна похідній даної функції за проміжним аргументом, помноженій на похідну проміжного аргументу за незалежною змінною x: $y'=f'(u)u'=f'(\varphi(x))\varphi'(x)$.

Логарифмічне диференціювання застосовують до функції $y=f(x)^{\varphi(x)}$. Алгоритм:

Крок 1. Прологарифмуємо обидві частини рівності: $\ln y=\ln f(x)^{\varphi(x)}$;

Крок 2. За властивістю логарифма запишемо: $\ln y=\varphi(x)\ln f(x)$;

Крок 3. Диференціюємо: $\frac{1}{y}y'=\varphi'(x)\ln f(x)+\varphi(x)\left(\ln f(x)\right)'=\varphi'(x)\ln f(x)+\frac{\varphi(x)f'(x)}{f(x)}$;

Крок 4. Помножимо обидві частини на y: $y'=y\left(\varphi'(x)\ln f(x)+\frac{\varphi(x)f'(x)}{f(x)}\right)$;

Крок 5. Замінимо y на $f(x)^{\varphi(x)}$: $y=f(x)^{\varphi(x)}\left(\varphi'(x)\ln f(x)+\frac{\varphi(x)f'(x)}{f(x)}\right)$.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти похідну функції $y=\left(4^{\arcsin x}+\sin^2 6x\right)^6$.

Розв’язання:

Функція y – складена. Зовнішня функція – степенева, а внутрішня функція основи – це сума двох складених функцій. Зовнішня функція першої – показникова, а внутрішня – обернено тригонометрична. Зовнішня функція другої – степенева, а внутрішня функція – тригонометрична.

$$y'=6\left(4^{\arcsin x}+\sin^2 6x\right)^5\left(4^{\arcsin x}+\sin^2 6x\right)'=6\left(4^{\arcsin x}+\sin^2 6x\right)^5\left(\left(4^{\arcsin x}\right)'+\left(\sin^2 6x\right)'\right)=$$

$$=6\left(4^{\arcsin x}+\sin^2 6x\right)^5\left(\frac{4^{\arcsin x}\ln 4}{\sqrt{1-x^2}}+12\sin 6x\cos 6x\right).$$

Відповідь: $y'=6\left(4^{\arcsin x}+\sin^2 6x\right)^5\left(\frac{4^{\arcsin x}\ln 4}{\sqrt{1-x^2}}+12\sin 6x\cos 6x\right)$.

2. Знайти похідну функції $y=(x+5)^{\mathrm{arctg}x}$.

Розв’язання:

$\ln y=\ln(x+5)^{\mathrm{arctg}x}=\mathrm{arctg}x\cdot\ln(x+5)$; $\frac{y'}{y}=\frac{1}{1+x^2}\cdot\ln(x+5)+\mathrm{arctg}x\cdot\frac{1}{x+5}$;

$$y'=y\left[\frac{1}{1+x^2}\cdot\ln(x+5)+\mathrm{arctg}x\cdot\frac{1}{x+5}\right]=(x+5)^{\mathrm{arctg}x}\left[\frac{1}{1+x^2}\cdot\ln(x+5)+\mathrm{arctg}x\cdot\frac{1}{x+5}\right].$$

Відповідь: $y'=(x+5)^{\mathrm{arctg}x}\left[\frac{1}{1+x^2}\ln(x+5)+\frac{\mathrm{arctg}x}{x+5}\right]$.

3. Знайти похідну функції $y=(1-\sin 10x)^{x^5}$.

Розв’язання:

$\ln y=\ln(1-\sin 10x)^{x^5}=x^5\ln(1-\sin 10x)$; $\frac{y'}{y}=5x^4\ln(1-\sin 10x)+x^5\frac{10\cos 10x}{1-\sin 10x}$;

$$y'=y\left[5x^4\ln(1-\sin 10x)+\frac{10x^5\cos 10x}{1-\sin 10x}\right]=(1-\sin 10x)^{x^5}\left[5x^4\ln(1-\sin 10x)+\frac{10x^5\cos 10x}{1-\sin 10x}\right].$$

Відповідь: $y'=\left(1-\sin 10x\right)^{x^5}\left[5x^4\ln\left(1-\sin 10x\right)+\frac{10x^5\cos 10x}{1-\sin 10x}\right]$.

3. Завдання для самостійного виконання

1.	$y=\frac{3x-4}{\sqrt{x^3+3x-2}}$; $y=\left(3^{\sin 2x}-\cos^2 2x\right)^3$; $y=\ln\arcsin\sqrt{1-x^2}$; $y=\left(2x+3\right)^{\mathrm{tg}x}$; $y=\left(\sin\sqrt{x}\right)^{\ln\sin x}$
2.	$y=\frac{x+3}{\sqrt{x^3-6x-9}}$; $y=\left(2^{\arcsin x}+\arccos x\right)^4$; $y=\ln\mathrm{tg}x^3$; $y=\left(1+\cos x\right)^{x^2}$; $y=\left(\arcsin x\right)^{\sqrt{1-x^2}}$
3.	$y=\frac{2x}{\sqrt{x^3-5x^2+3}}$; $y=\left(3^{\cos 3x}+\sin 3x\right)^3$; $y=\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{2x-1}$; $y=\left(\mathrm{tg}x\right)^{\sin x}$; $y=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^x$
4.	$y=\frac{3x}{\sqrt{x^3-4x^2+1}}$; $y=\ln\sqrt[4]{\frac{3x^2+2}{x^3+2x}}$; $y=\arcsin\sqrt{1-4x^2}$; $y=\left(x^3+2x\right)^{\sin x}$; $y=x^{e^{\mathrm{arctg}x}}$
5.	$y=\frac{4x}{\sqrt{x^3+5x^2-2}}$; $y=\left(5^{\mathrm{tg}2x}-x^2\right)^3$; $y=\ln\mathrm{arctg}\sqrt{x-1}$; $y=\left(x+1\right)^{\mathrm{arctg}\sqrt{x}}$; $y=\left(\sin x+\ln x\right)^{\frac{1}{x}}$
6.	$y=\frac{4x+1}{\sqrt{x^2-4x-2}}$; $y=\left(4^{\mathrm{tg}\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)^3$; $y=e^{\mathrm{arctg}\sqrt{2x-1}}$; $y=\left(\cos 2x\right)^{\mathrm{tg}2x}$; $y=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{\ln x}$
7.	$y=\frac{2x-3}{\sqrt{x^2+4x-3}}$; $y=\left(3^{\mathrm{arctg}2x}-\ln\left(1+4x^2\right)\right)^4$; $y=e^{\arcsin\sqrt{1-x}}$; $y=\left(\sin\sqrt{x}\right)^{\ln x}$; $y=x^{e^{\cos x}}$
8.	$y=\frac{3x-8}{\sqrt{x^2+3x-4}}$; $y=\left(2^{\cos^2 x}+\sin^2 x\right)^3$; $y=\ln\arcsin\frac{2}{\sqrt{x}}$; $y=\left(x+\cos x\right)^{x^2}$; $y=x^{e^{\sin x}}$
9.	$y=\frac{2x^3+5}{\sqrt{x^4+2x}}$; $y=\left(4^{\arccos 2x}-\sqrt{1-4x^2}\right)^3$; $y=\ln\mathrm{tg}\frac{1}{\sqrt{x}}$; $y=\left(\mathrm{ctg}x\right)^{\cos x}$; $y=\left(x+\sin x\right)^{x^3}$
10.	$y=\frac{x^3-10}{\sqrt{x^4-3x}}$; $y=\left(6^{\mathrm{arcctg}3x}+\mathrm{arcctg}3x\right)^4$; $y=\mathrm{arctg}\frac{2\sqrt{x}}{1-x}$; $y=\left(1-x^2\right)^{\arcsin x}$; $y=x^{e^{\mathrm{tg}2x}}$
11.	$y=\frac{3x+2}{\sqrt{x^2+3x+1}}$; $y=\left(2^{\mathrm{tg}x}-\cos 3x\right)^5$; $y=e^{\mathrm{arctg}\sqrt{x-1}}$; $y=\left(x+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$; $y=\left(1-x^2\right)^{\arccos x}$
12.	$y=\frac{2x}{\sqrt{x^3-5x^2+3}}$; $y=\left(3^{\cos 2x}+\cos^2 x\right)^3$; $y=\ln\cos e^{-x}$; $y=\left(x^2+1\right)^{\mathrm{arctg}x}$; $y=\left(x-\sin 2x\right)^{x^3}$
13.	$y=\frac{2x-7}{\sqrt{x^2+2x-14}}$; $y=\left(5^{\mathrm{ctg}2x}+\cos 2x\right)^3$; $y=\ln\arccos\frac{1}{x}$; $y=\left(\mathrm{tg}2x\right)^{\cos 2x}$; $y=\left(x^3+2\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$
14.	$y=\frac{3x-4}{\sqrt{x^2+9x-6}}$; $y=\left(5^{\sin x}-\cos 2x\right)^3$; $y=e^{\mathrm{arctg}\sqrt{x^2-1}}$; $y=\left(x^4+1\right)^{\frac{1}{x}}$; $y=\left(\arcsin x\right)^{\mathrm{tg}\sqrt{1-x^2}}$
15.	$y=\frac{5x+4}{\sqrt{x^2-5x-2}}$; $y=\left(2^{\arcsin x}-\sqrt{1-x^2}\right)^5$; $y=\log_2\cos\frac{1}{\sqrt{x}}$; $y=\left(x+\ln x\right)^{\frac{1}{x}}$; $y=\left(\sin\sqrt{x}\right)^{e^{\frac{1}{x}}}$
16.	$y=\frac{3x-1}{\sqrt{x^2+9x-1}}$; $y=\left(3^{\mathrm{arctg}2x}+\ln\left(1+x^2\right)\right)^4$; $y=\ln\arccos\frac{1}{\sqrt{2x}}$; $y=\left(\mathrm{ctg}x\right)^{\sin x}$; $y=x^{e^{\mathrm{ctg}x}}$
17.	$y=\frac{2x-3}{\sqrt[3]{x^3-8x+4}}$; $y=\left(5^{\mathrm{tg}^2 x}+\cos^2 x\right)^3$; $y=\ln\mathrm{arcctg}\frac{1}{x}$; $y=x^{\ln x}$; $y=\left(3^{\mathrm{tg}x}+\arcsin x\right)^{3^x}$
18.	$y=\frac{2x+1}{\sqrt[3]{x^3+6+1}}$; $y=\left(4^{\mathrm{tg}2x}-\mathrm{tg}2x\right)^5$; $y=e^{\arccos\sqrt{1-x^2}}$; $y=\left(\sin x\right)^{\cos x}$; $y=\left(\arcsin\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}$
19.	$y=\frac{4x+3}{\sqrt[3]{x^3-x-1}}$; $y=\left(2^{\arccos\sqrt{x}}-\sqrt{1-x}\right)^4$; $y=\ln\mathrm{tg}e^{\sqrt{x}}$; $y=\left(\cos 2x\right)^{\sin x}$; $y=\left(\arcsin\sqrt{x}\right)^{2x}$

ПОХІДНА ФУНКЦІЇ, ЩО ЗАДАНА НЕЯВНО АБО ПАРАМЕТРИЧНО

1. Основні поняття та теореми

Якщо незалежна змінна x та функція y зв'язані рівнянням, що не розв'язується відносно y, то y називається неявною функцією x. Для знаходження похідної функції, заданої наявно, треба продиференціювати рівняння неявної функції по x, враховуючи, що y є функцію від x, а потім з отриманого рівняння виразити похідну y'.

Якщо функція аргументу x задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ то її похідна буде дорівнюватиме частці від ділення похідних кожної складової: $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти похідну неявної функції $x - y = \arcsin 4x - \arcsin 4y$.

Розв'язання:

Диференціюємо по x обидві частини рівності та враховуємо те, що обидві обернено тригонометричні функції є складеними: $1 - y' = \dfrac{4}{\sqrt{1-16x^2}} - \dfrac{4y'}{\sqrt{1-16y^2}}$.

Перенесемо складові, що не містять y', у праву частину рівності, а складові, що містять y', у ліву частину рівності $\dfrac{4y'}{\sqrt{1-16y^2}} - y' = \dfrac{4}{\sqrt{1-16x^2}} - 1$.

Винесемо y' за дужки $y'\left(\dfrac{4}{\sqrt{1-16y^2}} - 1\right) = \dfrac{4}{\sqrt{1-16x^2}} - 1$, звідки $y' = \dfrac{\dfrac{4}{\sqrt{1-16x^2}} - 1}{\dfrac{4}{\sqrt{1-16y^2}} - 1}$.

Відповідь: $y' = \dfrac{\dfrac{4}{\sqrt{1-16x^2}} - 1}{\dfrac{4}{\sqrt{1-16y^2}} - 1}$.

2. Знайти похідну неявної функції $e^y + y^3 + \sin x = 0$.

Розв'язання: $e^y y' + 3y^2 y' + \cos x = 0$; $y'\left(e^y + 3y^2\right) = -\cos x$; $y' = -\dfrac{\cos x}{e^y + 3y^2}$.

Відповідь: $y' = -\dfrac{\cos x}{e^y + 3y^2}$.

3. Знайти похідну неявної функції $y = 1 + xe^y$.

Розв'язання: $y' = e^y + xe^y y'$; $y'\left(1 - xe^y\right) = e^y$; $y' = \dfrac{e^y}{1 - xe^y}$.

Відповідь: $y' = \dfrac{e^y}{1 - xe^y}$.

4. Знайти похідну функції, заданої параметрично, $\begin{cases} x = \dfrac{18t}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{18t^2}{1+t^3}. \end{cases}$

Розв'язання:

$$y'_t = \frac{36t\left(1+t^3\right) - 3t^2 \cdot 18t^2}{\left(1+t^3\right)^2} = \frac{36t - 18t^4}{\left(1+t^3\right)^2};\ x'_t = \frac{18\left(1+t^3\right) - 3t^2 \cdot 18t}{\left(1+t^3\right)^2} = \frac{18 - 36t^3}{\left(1+t^3\right)^2};\ y'_x = \frac{36t - 18t^4}{18 - 36t^3} = \frac{2t - t^4}{1 - 2t^2}.$$

Відповідь: $y'_x = \dfrac{2t - t^4}{1 - 2t^2}$.

5. Знайти похідну функції, заданої параметрично, $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t. \end{cases}$

Розв’язання:

$$y'_t = 2 \cdot 3\sin^2 t \cdot \cos t = 6\sin^2 t \cos t \text{ ; } x'_t = 2 \cdot 3\cos^2 t \cdot (-\sin t) = -6\cos^2 t \sin t \text{ ; } y'_x = -\frac{6\sin^2 t \cos t}{6\cos^2 t \sin t} = -\mathrm{tg} t .$$

Відповідь: $y' = -\mathrm{tg} t$.

3. Завдання для самостійного виконання

Знайти похідні функцій: у прикладі 1) – використовуючи метод знаходження похідної функції, заданої неявно; у прикладах 2) і 3) – використовуючи формулу знаходження похідної функції, заданої параметрично.

Варіант 1.	$x^5 + y^5 - 2y = 0$,	$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = t + 2\sin t, \end{cases}$	$\begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3. \end{cases}$
Варіант 2.	$x^2 + y^2 - \cos 2y = 0$,	$\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases}$	$\begin{cases} x = t^2 - 2t, \\ y = t^2 + 2t. \end{cases}$
Варіант 3.	$e^{2x} - y^3 - e^{2y} = 0$,	$\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = 3t - t^3, \end{cases}$	$\begin{cases} x = t^3 - 3t, \\ y = t^3 + 3t. \end{cases}$
Варіант 4.	$e^{2x} - 2y - y^4 = 0$,	$\begin{cases} x = \arccos t, \\ y = t - t^3, \end{cases}$	$\begin{cases} x = t - t^4, \\ y = t^2 - t^3. \end{cases}$
Варіант 5.	$5x - \sin 5y - y^5 = 0$,	$\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$	$\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2. \end{cases}$
Варіант 6.	$2\sin x - \arccos 2y - y = 0$,	$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$	$\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 6t - t^2. \end{cases}$
Варіант 7.	$x^3 + y^3 - 3xy = 0$,	$\begin{cases} x = 2t - \sin 2t, \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases}$	$\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2 + t + 1. \end{cases}$
Варіант 8.	$e^{4x} - x^3 y - e^{4y} = 0$	$\begin{cases} x = 2\cos^2 t, \\ y = 3\sin^3 t, \end{cases}$	$\begin{cases} x = t - \ln t, \\ y = 3t^2 - 2t^3. \end{cases}$
Варіант 9.	$x \ln y - e^{2y} + x = 0$	$\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 3\sin^3 t, \end{cases}$	$\begin{cases} x = 2e^t, \\ y = e^{-t}. \end{cases}$
Варіант 10.	$y = \mathrm{ctg} x + \ln\sqrt{4y + 1}$	$\begin{cases} x = \sin t - t\cos t, \\ y = \cos t + t\sin t, \end{cases}$	$\begin{cases} x = t^2 + \ln t, \\ y = 2t^3 + t. \end{cases}$
Варіант 11.	$y + \mathrm{arctg} x - \ln\sqrt{2y + 3} = 0$	$\begin{cases} x = t(1 - \sin t), \\ y = t\cos t, \end{cases}$	$\begin{cases} x = \dfrac{t+1}{t}, \\ y = \dfrac{t-1}{t}. \end{cases}$
Варіант 12.	$y = \cos(x + y)$	$\begin{cases} x = \mathrm{arctg} 3t, \\ y = \ln(1 + 9t^2), \end{cases}$	$\begin{cases} x = \mathrm{arctg} t, \\ y = \dfrac{1}{\cos t}. \end{cases}$
Варіант 13.	$2x - \sin 2xy - y^2 = 0$	$\begin{cases} x = e^{2t}\sin t, \\ y = e^{2t}\cos t, \end{cases}$	$\begin{cases} x = \ln(1 + t^2), \\ y = t - \mathrm{arctg} t. \end{cases}$

ПОХІДНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

1. Основні поняття та теореми

Похідна другого порядку функції $y = f(x)$ – це похідна від похідної першого порядку $y'' = \left(y'\right)'$. Похідна третього порядку функції $y = f(x)$ – це похідна від похідної другого порядку $y''' = \left(y''\right)'$ …

Похідна другого порядку параметрично заданої функції $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ визначається як $y''_{xx} = \dfrac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}$.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти похідну другого порядку функції $y = \left(x^3 + 5\right)^2$.

Розв'язання: $y' = 2\left(x^3 + 5\right)\cdot 3x^2 = 6x^5 + 30x^2$; $y'' = 6\cdot 5x^4 + 30\cdot 2x = 30x^4 + 60x$.

Відповідь: $y'' = 30x^4 + 60x$.

2. Знайти похідну другого порядку функції $y = \left(x^2 + 2\right)e^{2x}$.

Розв'язання: $y' = 2x\cdot e^{2x} + \left(x^2 + 2\right)\cdot e^{2x}\cdot 2$; $y'' = 2\cdot e^{2x} + 2x\cdot e^{2x}\cdot 2 + 2x\cdot e^{2x}\cdot 2 + \left(x^2 + 2\right)\cdot e^{2x}\cdot 2\cdot 2$.

Відповідь: $y'' = 10e^{2x} + 8xe^{2x} + 4x^2e^{2x}$.

3. Знайти похідну другого порядку функції $y = x^2\cdot 5^{2x}$.

Розв'язання:

$y' = 2x\cdot 5^{2x} + x^2\cdot 5^{2x}\cdot\ln 5\cdot 2$; $y'' = 2\cdot 5^{2x} + 2x\cdot 5^{2x}\ln 5\cdot 2 + 2x\cdot 5^{2x}\cdot\ln 5\cdot 2 + x^2\cdot 5^{2x}\cdot\ln^2 5\cdot 2\cdot 2$;

$y'' = 2\cdot 5^{2x} + 8x\cdot 5^{2x}\ln 5 + 4x^2\cdot 5^{2x}\ln^2 5$.

Відповідь: $y'' = \left(2 + 8x\ln 5 + 4x^2\ln^2 5\right)5^{2x}$.

4. Знайти похідну третього порядку функції $y = \arcsin x$.

Розв'язання: $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$; $y'' = \dfrac{2x}{2\left(\sqrt{1 - x^2}\right)^3} = x\left(1 - x^2\right)^{-\frac{3}{2}}$; $y''' = \left(1 - x^2\right)^{-\frac{3}{2}} - x\cdot\dfrac{3}{2}\left(1 - x^2\right)^{-\frac{5}{2}}\cdot(-2x)$.

Відповідь: $y''' = \left(1 - x^2\right)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2\left(1 - x^2\right)^{-\frac{5}{2}}$.

5. Знайти похідну другого порядку функції $y = \operatorname{arctg}\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

Розв'язання:

$$y' = \frac{1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{1 + \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^2} = \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{2 + 2x^2 + 2x\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{2\left(x^2 + 1\right)\left(1 + \sqrt{x^2 + 1}\right)} = \frac{1}{2\left(x^2 + 1\right)};\ y'' = -\frac{2x}{2\left(x^2 + 1\right)^2}.$$

Відповідь: $y'' = -\dfrac{x}{\left(x^2 + 1\right)^2}$.

6. Знайти похідну другого порядку функції, заданої параметрично, $\begin{cases} x = 5\cos 2t, \\ y = 5\sin 2t. \end{cases}$

Розв'язання:

$y'_t = 10\cos 2t$; $x'_t = -10\sin 2t$; $y'_x = -\operatorname{ctg}2t$; $\left(y'_x\right)'_t = \left(-\operatorname{ctg}2t\right)'_t = \dfrac{2}{\sin^2 2t}$; $y''_{xx} = \dfrac{2}{-10\sin^3 2t}$.

Відповідь: $y''_{xx} = -0{,}2\sin^{-3} 2t$.

7. Знайти похідну другого порядку функції, заданої параметрично, $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t). \end{cases}$

Розв'язання:

$y'_t = 2\sin t$; $x'_t = 2 - 2\cos t$; $y'_x = \dfrac{\sin t}{1 - \cos t}$; $\left(y'_x\right)'_t = \dfrac{\cos t(1 - \cos t) - \sin t\cdot\sin t}{(1 - \cos t)^2} = \dfrac{\cos t - 1}{(1 - \cos t)^2}$.

Відповідь: $y''_{xx} = -\dfrac{1}{2(1-\cos t)^2}$.

8. Знайти похідну третього порядку функції, заданої параметрично, $\begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = t^2. \end{cases}$

Розв'язання: $y'_t = 2t$; $x'_t = 2e^{2t}$; $y'_x = \dfrac{t}{e^{2t}}$; $\left(y'_x\right)'_t = \dfrac{e^{2t} - 2te^{2t}}{e^{4t}} = \dfrac{1-2t}{e^{2t}}$; $y''_{xx} = \dfrac{1-2t}{2e^{4t}}$;

$\left(y''_{xx}\right)'_t = \dfrac{-4e^{4t} - (1-2t)8e^{4t}}{4e^{8t}} = \dfrac{4t-3}{e^{4t}}$; $y'''_{xxx} = \dfrac{4t-3}{2e^{6t}}$.

Відповідь: $y'''_{xxx} = \dfrac{4t-3}{2e^{6t}}$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайти похідну вказаного порядку.

Варіант 1.	$y = (2x^2 - \beta)\cdot\ln(x-1)$	$y'' - ?$	$y = (x^2 + \beta)\cdot \mathrm{arctg}x$	$y'' - ?$
Варіант 2.	$y = \beta x \cdot \cos x^2$	$y''' - ?$	$y = \dfrac{\ln(x-\beta)}{\sqrt{x-\beta}}$	$y'' - ?$
Варіант 3.	$y = \dfrac{\log_2 x}{\beta x^3}$	$y'' - ?$	$y = (4x^3 + \beta)\cdot e^{2x+1}$	$y'' - ?$
Варіант 4.	$y = x^2 \cdot \sin(5x - \beta)$	$y''' - ?$	$y = (\beta - x^2)\cdot \ln^2 x$	$y'' - ?$
Варіант 5.	$y = (2x + \beta)\cdot\ln^2 x$	$y'' - ?$	$y = \dfrac{\ln^3 x}{\beta x^2}$	$y''' - ?$
Варіант 6.	$y = \dfrac{\beta \ln x}{x^3}$	$y'' - ?$	$y = (4x + \beta)\cdot 2^{-x}$	$y'' - ?$
Варіант 7.	$y = e^{1-2x}\cdot\sin(\beta + 3x)$	$y'' - ?$	$y = \dfrac{\ln(\beta + x)}{\beta + x}$	$y'' - ?$
Варіант 8.	$y = (2x^3 + \beta)\cdot\cos x$	$y''' - ?$	$y = (x^2 + \beta)\cdot\ln(x - \beta)$	$y'' - ?$
Варіант 9.	$y = (\beta - x - x^2)\cdot e^{\frac{\beta - x}{2}}$	$y'' - ?$	$y = \dfrac{\beta \sin 2x}{x}$	$y'' - ?$
Варіант 10.	$y = (x + \beta)\cdot\ln(x + \beta)$	$y'' - ?$	$y = (3x - \beta)\cdot 3^{-x}$	$y'' - ?$
Варіант 11.	$y = \dfrac{\ln(\beta + 2x)}{\beta + 2x}$	$y'' - ?$	$y = e^{\frac{x}{2}}\cdot\beta\sin 2x$	$y'' - ?$
Варіант 12.	$y = \dfrac{\beta \ln x}{x^5}$	$y'' - ?$	$y = x\cdot\ln(\beta - 3x)$	$y'' - ?$
Варіант 13.	$y = (5x - \beta)\cdot 2^{-x}$	$y'' - ?$	$y = \dfrac{\ln(x-\beta)}{x - \beta}$	$y'' - ?$
Варіант 14.	$y = (\beta + 3x + x^2)\cdot e^{3x+2}$	$y'' - ?$	$y = \dfrac{\beta \log_3 x}{x^2}$	$y'' - ?$
Варіант 15.	$y = (\cos 2x - \beta \sin 2x)\cdot e^{-x}$	$y'' - ?$	$y = (5x - \beta)\cdot\ln^2 x$	$y'' - ?$

2. Знайти похідну другого порядку від функції, заданої параметрично.

Варіант			Варіант		
1.	$\begin{cases} x = \cos\beta t + t\sin t, \\ y = \sin\beta t - t\cos t. \end{cases}$	$\begin{cases} x = \cos\beta t, \\ y = \ln\sin\beta t. \end{cases}$	2.	$\begin{cases} x = 2\beta(t - \sin t), \\ y = 4\beta(2 + \cos t). \end{cases}$	$\begin{cases} x = e^{\beta t}, \\ y = \arcsin\beta t. \end{cases}$
3.	$\begin{cases} x = t + \sin\beta t, \\ y = 2 - \cos\beta t. \end{cases}$	$\begin{cases} x = \sqrt{t - 3\beta}, \\ y = \ln(t - 2\beta). \end{cases}$	4.	$\begin{cases} x = \sin\beta t, \\ y = \ln\cos\beta t. \end{cases}$	$\begin{cases} x = \cos^{2\beta} t, \\ y = \mathrm{tg}^{2\beta} t. \end{cases}$

5.	$\begin{cases} x=\cos 2\beta t, \\ y=\dfrac{2}{\cos 2\beta t}. \end{cases}$	$\begin{cases} x=\sqrt{1-t^{2\beta}}, \\ y=\dfrac{1}{\beta t}. \end{cases}$	6.	$\begin{cases} x=\sqrt{\beta t}, \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta t}}. \end{cases}$	$\begin{cases} x=\sin\beta t, \\ y=\dfrac{1}{\cos\beta t}. \end{cases}$
7.	$\begin{cases} x=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2\beta}, \\ y=\dfrac{2\beta}{e^t+e^{-t}}. \end{cases}$	$\begin{cases} x=\dfrac{1}{t}, \\ y=\dfrac{1}{1+t^{2\beta}}. \end{cases}$	8.	$\begin{cases} x=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2\beta}, \\ y=\dfrac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}. \end{cases}$	$\begin{cases} x=\dfrac{1}{t^{2\beta}}, \\ y=\dfrac{1}{t^{2\beta}+1}. \end{cases}$
9.	$\begin{cases} x=e^t\cos\beta t, \\ y=e^t\sin\beta t. \end{cases}$	$\begin{cases} x=\sqrt{\beta t}, \\ y=\sqrt[3]{\beta t-1}. \end{cases}$	10.	$\begin{cases} x=\sqrt{t^{3\beta}-1}, \\ y=\ln\beta t. \end{cases}$	$\begin{cases} x=t+\sin\beta t, \\ y=2+\cos\beta t. \end{cases}$
11.	$\begin{cases} x=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2\beta}, \\ y=\dfrac{\sqrt[3]{e^t+e^{-t}}}{2\beta}. \end{cases}$	$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{\beta t-1}}{\beta}, \\ y=\dfrac{\beta t}{\sqrt{\beta t-1}}. \end{cases}$	12.	$\begin{cases} x=\dfrac{\cos\beta t}{1+2\cos\beta t}, \\ y=\dfrac{\sin\beta t}{1+2\cos\beta x}. \end{cases}$	$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{\beta t-1}}{\beta}, \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{\beta t}}. \end{cases}$
13.	$\begin{cases} x=t-\sin\beta t, \\ y=2-\cos\beta t. \end{cases}$	$\begin{cases} x=\sin\beta t, \\ y=\ln\cos\beta t. \end{cases}$	14.	$\begin{cases} x=\sin t+\cos t, \\ y=\sin 2\beta t. \end{cases}$	$\begin{cases} x=2^{\beta t}, \\ y=\arccos\beta t. \end{cases}$
15.	$\begin{cases} x=\mathrm{tg}\beta t, \\ y=\dfrac{1}{\sin 2\beta t}. \end{cases}$	$\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin^4\dfrac{t}{2\beta}. \end{cases}$	16.	$\begin{cases} x=\mathrm{arctg}t, \\ y=\dfrac{t^2}{2\beta}. \end{cases}$	$\begin{cases} x=\sin t, \\ y=\cos^4\dfrac{t}{2\beta}. \end{cases}$

ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ

1. Основні поняття та теореми

Диференціал змінної (аргументу функції) x є її приріст $\Delta x = x - x_0$. Позначається $dx = \Delta x$.

Диференціалом функції $y = f(x)$ називається добуток похідної функції $f'(x)$ на приріст аргументу Δx. Диференціал функції позначається dy або $df(x)$: $dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$.

Диференціалом функції $y = f(x)$ в точці x_0 називається добуток похідної функції в цій точці, тобто $f'(x_0)$, на приріст аргументу Δx. Диференціал функції в точці x_0 позначається $dy(x_0)$ або $df(x_0)$: $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)dx$.

Диференціали деяких функцій: $d(x^n) = nx^{n-1}dx$; $d(e^x) = e^x dx$; $d(a^x) = a^x \ln a dx$; $d(\ln x) = \dfrac{dx}{x}$; $d(\log_a x) = \dfrac{dx}{x\ln a}$; $d(\sin x) = \cos x dx$; $d(\cos x) = -\sin x dx$; $d(\mathrm{tg}x) = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$; $d(\mathrm{ctg}x) = -\dfrac{dx}{\sin^2 x}$.

Диференціал функції $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$ є головна лінійна (тобто пропорційна Δx) частина приросту функції. Диференціал змінної $dx = \Delta x$.

Так як $f(x) \approx f(x_0) + df(x_0)$ або $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)dx = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$. Формулу $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ використовують для наближених обчислень. Застосуємо $\Delta x = x - x_0$, тоді $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ перепишемо як $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$.

Для $f(x) = \sin x$ маємо $f'(x) = \cos x$; при $x_0 = 0$ одержуємо $f(0) = \sin 0 = 0$, $f'(0) = \cos 0 = 1$; тоді $\sin(\Delta x) \approx \Delta x$ або $\sin\alpha \approx \alpha$ (для малих α).

Для $f(x) = \mathrm{tg}x$ маємо $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; при $x_0 = 0$ одержуємо $f(0) = \mathrm{tg}0 = 0$, $f'(0) = \dfrac{1}{\cos^2 0} = 1$; тоді $\mathrm{tg}(\Delta x) \approx \Delta x$ або $\mathrm{tg}\alpha \approx \alpha$ (для малих α).

2. Приклади виконання завдань

1. Обчислити приріст функції Δy в точці $x_0=1$, якщо $y=f(x)=3x^3+2x-9$, $\Delta x=0{,}1$.

Розв'язання:

Формула $\Delta y(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. Так як $f(x_0)=f(1)=3\cdot 1^3+2\cdot 1-9=-4$, $f(x_0+\Delta x)=f(1+0{,}1)=f(1{,}1)=3\cdot 1{,}1^3+2\cdot 1{,}1-9=-2{,}807$, то $\Delta y(x_0)=-2{,}807-(-4)=1{,}193$.

Відповідь: 1,193.

2. Знайти диференціал функції dy в точці $x_0=1$, якщо $y=f(x)=3x^3+2x-9$, $\Delta x=0{,}1$.

Розв'язання:

Формула $df(x_0)=f'(x_0)\Delta x$. $y'=f'(x)=9x^2+2$, $f'(1)=9\cdot 1^2+2=11$, $df(x_0)=11\cdot 0{,}1=1{,}1$.

Відповідь: 1,1. Різниця між Δy і $dy(x_0)$ становить $0{,}093$.

3. Обчислити наближено значення функції $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+1}}$ в точці $x=1{,}58$.

Розв'язання:

Формула $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$.

Покладемо $x_0=2$, $\Delta x=-0{,}42$. Тоді $y(1{,}58)\approx y(2)+y'(2)\cdot(-0{,}42)$.

$y(2)=\dfrac{1}{\sqrt{2\cdot 2^2+1}}=\dfrac{1}{3}$, $y'=-\dfrac{1}{2}\dfrac{2\cdot 2x}{\sqrt{(2x^2+1)^3}}=-\dfrac{2x}{\sqrt{(2x^2+1)^3}}$, $y'(2)=-\dfrac{2\cdot 2}{\sqrt{(2\cdot 2^2+1)^3}}=-\dfrac{4}{27}$. Отже, $y(1{,}58)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{27}\cdot 0{,}42=\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{9}\cdot 0{,}14=\dfrac{3+0{,}56}{9}=\dfrac{3{,}56}{9}=0{,}39(5)$.

Відповідь: 0,39(5).

4. Обчислити наближено значення функції $y=\sqrt[3]{\dfrac{2-x}{2+x}}$ в точці $x=0{,}15$.

Розв'язання:

Покладемо $x_0=0$, $\Delta x=0{,}15$. Тоді $y(0{,}15)\approx y(0)+y'(0)\cdot(0{,}15)$, але $y(0)=\sqrt[3]{\dfrac{2-0}{2+0}}=1$,

$y'=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\dfrac{-2-x-2+x}{(2+x)^2}=-\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\dfrac{1}{(2+x)^2}$, $y'=-\dfrac{4}{3}(1)^{-\frac{2}{3}}\cdot\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{3}$.

Отже, $y(0{,}15)\approx 1-\dfrac{1}{3}\cdot 0{,}15=0{,}95$.

Відповідь: 0,95.

5. Обчислити наближено значення $\sqrt[3]{1{,}012}$.

Розв'язання:

Переформулюємо задачу: обчислити наближено значення функції $y=\sqrt[3]{x}$ в точці $x=1{,}012$.

Покладемо $x_0=1$, $\Delta x=0{,}012$. Тоді $y(1{,}012)\approx y(1)+y'(1)\cdot 0{,}012$, але $y(1)=\sqrt[3]{1}=1$,

$y'=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'=\dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $y'(1)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{1^2}}=\dfrac{1}{3}$. Отже, $y(1{,}012)\approx 1+\dfrac{1}{3}\cdot 0{,}012=1{,}004$.

Відповідь: 1,004.

6. Обчислити наближено значення $\ln 1{,}1$.

Розв'язання:

Переформулюємо задачу: обчислити наближено значення функції $y=\ln x$ в точці $x=1{,}1$.

Покладемо $x_0=1$, $\Delta x=0{,}1$. Тоді $y(1{,}1)\approx y(1)+y'(1)\cdot 0{,}1$, але $y(1)=\ln 1=0$, $y'=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$, $y'(1)=1$. Отже, $\ln(1{,}1)\approx 0+1\cdot 0{,}1=0{,}1$.

Відповідь: 0,1.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайти наближено за допомогою диференціала значення функції:

Варіант 1.	$y = x^4$	$x = 3{,}998$	$y = \sqrt[3]{x}$	$x = 1{,}21$
Варіант 2.	$y = x^5$	$x = 2{,}997$	$y = \sqrt[3]{x}$	$x = 7{,}76$
Варіант 3.	$y = x^{11}$	$x = 1{,}021$	$y = \sqrt[3]{x}$	$x = 27{,}54$
Варіант 4.	$y = x^6$	$x = 2{,}01$	$y = \sqrt[3]{x}$	$x = 26{,}46$
Варіант 5.	$y = x^7$	$x = 1{,}996$	$y = \sqrt[3]{x}$	$x = 8{,}24$
Варіант 6.	$y = x^7$	$x = 2{,}002$	$y = \sqrt[3]{x}$	$x = 0{,}98$
Варіант 7.	$y = x^{21}$	$x = 0{,}998$	$y = \sqrt[3]{x}$	$x = 8{,}36$
Варіант 8.	$y = \ln x$	$x = 0{,}8$	$y = \sqrt[3]{x}$	$x = 7{,}64$
Варіант 9.	$y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x = 4{,}16$	$y = \sqrt{4x+1}$	$x = 2{,}16$
Варіант 10.	$y = \sqrt[3]{x^2}$	$x = 1{,}03$	$y = \sqrt{4x+1}$	$x = 1{,}78$
Варіант 11.	$y = \sqrt[5]{x^2}$	$x = 1{,}03$	$y = \sqrt{x^2+5}$	$x = 1{,}97$
Варіант 12.	$y = \arcsin x$	$x = 0{,}08$	$y = \sqrt{x^2+x+3}$	$x = 1{,}97$
Варіант 13.	$y = \mathrm{arctg} x$	$x = 0{,}08$	$y = \sqrt[3]{x^3+7x}$	$x = 1{,}012$
Варіант 14.	$y = \sqrt{1+x+\sin x}$	$x = 0{,}01$	$y = \sqrt[3]{x^2+2x+5}$	$x = 0{,}97$
Варіант 15.	$y = \sqrt[3]{3x+\cos x}$	$x = 0{,}01$	$y = \dfrac{1}{\sqrt{2x^2+x+1}}$	$x = 1{,}01$

РОЗКРИТТЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ ЗА ПРАВИЛОМ ЛОПІТАЛЯ

1. Основні поняття та теореми

Правило Лопіталя – метод знаходження границь функцій, що розкриває невизначеності виду $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ і $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$. Суть правила: границя відношення функцій дорівнює границі відношення їхніх похідних (похідні окремо тільки від чисельника і тільки від знаменника, а не від дробу!!!) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Невизначеність $\{\infty \cdot 0\}$ теж можна розкрити за правилом Лопіталя, попередньо змінивши добуток функцій на відношення.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти границю функції за допомогою правила Лопіталя $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x - \sin 2x}{x^3}$.

Розв'язання:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x-\sin 2x}{x^3} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0} \frac{2-2\cos 2x}{3x^2} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0} \frac{4\sin 2x}{6x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0} \frac{8\cos 2x}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

Відповідь: $4/3$.

2. Знайти границю функції за допомогою правила Лопіталя $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^6-1}{x^3+x^2-x-1}$.

Розв'язання: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^6-1}{x^3+x^2-x-1} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{6x^5}{3x^2+2x-1} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$.

Відповідь: $3/2$.

3. Знайти границю функції за допомогою правила Лопіталя $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

Розв'язання: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$.

Відповідь: 2.

4. Знайти границю функції за допомогою правила Лопіталя $\lim\limits_{x\to 50}\left(\ln\left(2-\dfrac{x}{50}\right)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{100}\right)$.

Розв'язання:

Маємо невизначеність $\{0\cdot\infty\}$. Перепишемо добуток у вигляді частки, маємо

$$\lim_{x\to 50}\frac{\ln\left(2-\dfrac{x}{50}\right)}{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{100}}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 50}\frac{\left(-\dfrac{1}{50}\right)\sin^2\dfrac{\pi x}{100}}{-\dfrac{\pi}{100}\left(2-\dfrac{x}{50}\right)}=\lim_{x\to 50}\frac{\sin^2\dfrac{\pi x}{100}}{\dfrac{\pi}{2}\left(2-\dfrac{x}{50}\right)}=\frac{1^2}{\dfrac{\pi}{2}\cdot(2-1)}=\frac{2}{\pi}.$$

Відповідь: $2/\pi$.

5. Знайти границю функції за допомогою правила Лопіталя $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

Розв'язання:

Маємо невизначеність $\{\infty-\infty\}$. Приведемо дроби до спільного знаменника

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1-x}{xe^x-x}\right)=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{e^x+xe^x-1}\right)=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x}{e^x+xe^x+e^x}\right)=\frac{1}{2}.$$

Відповідь: 0,5.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайти границі, застосовуючи правило Лопіталя:

Варіант			Варіант		
1	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2x-1}{2x^3+3}$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$	2	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3+3x-5}{x^3-6x^2+5}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}+x-1}{x^2}$
3	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-3x^2+7x-5}{x^4-5x+4}$	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{\pi-2x}$	4	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{40}-40x+39}{x^{78}-78x+77}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{\sin^3 x}$
5	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-2\cos x+e^{-x}}{x\cdot\sin x}$	6	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2-6x+8}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cdot e^x-5x}{4x^2+7x}$
7	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+6x}{e^{3x}}$	$\lim\limits_{\varphi\to 0}\dfrac{\varphi-\arcsin\varphi}{\sin^3\varphi}$	8	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^4 x}{e^{x^2}-1-x^2}$	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$
9	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\sin x-1}{\ln(1+x)}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\operatorname{tg}x}{\sin^3 x}$	10	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^n-1}$	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\operatorname{tg}x}{\cos 2x}$
11	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x-\sin x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\cos x)}{\ln\operatorname{tg}x}$	12	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x^3-x-2x}}{\sqrt[5]{x^2}-1}$
13	$\lim\limits_{x\to b}\dfrac{\sin x-\sin b}{x-b}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\arcsin^2 x}{x\cos x-\sin x}$	14	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x-\sin x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$

АСИМПТОТИ, ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ

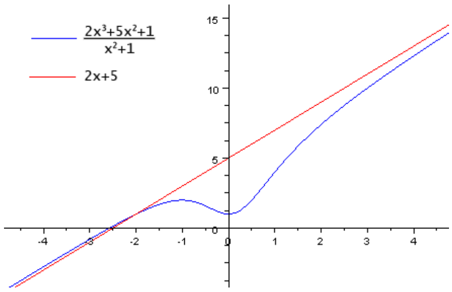
1. Основні поняття та теореми

Пряма називається асимптотою кривої, якщо точка кривої необмежено наближається до неї при зростанні абсциси чи ординати. Асимптоти поділяють на вертикальні, похилі (горизонтальні).

Графік функції $y=f(x)$ при змінній, що прямує до деякої точки $x\to a$, має вертикальну асимптоту, якщо границя функції нескінченна $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\pm\infty$.

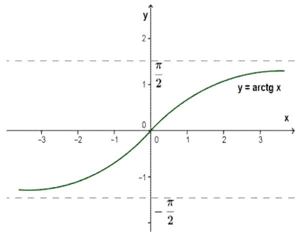
Точка $x=a$ є точкою розриву ІІ роду, а рівняння вертикальної асимптоти має вигляд $x=a$.

Рівняння похилої асимптоти задається рівнянням прямої на площині $y=kx+b$, де кутовий коефіцієнт k та вільний коефіцієнт b – границі, що обчислюються як $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)$. Якщо обидві границі існують і скінченні, то функція має похилу асимптоту, інакше – не має.



Іноді слід окремо розглядати випадки, коли змінна прямує до плюс безмежності $x\to+\infty$ та мінус $x\to-\infty$.

Графік функції $y=f(x)$ має горизонтальну асимптоту $y=b$, коли $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$, та існує скінченна границя функції при змінній прямуючій до безмежності $x\to+\infty$, $x\to-\infty$, і ця границя рівна сталій $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)$.



Графіки можуть мати кілька видів асимптот.

Проміжки зростання-спадання, екстремуми функції:

- функція зростає на проміжку, де $y'>0$; функція спадає на проміжку, де $y'<0$;
- в точках, де $y'=0$ або не існує, може бути екстремум (максимум або мінімум).

Проміжки опуклості-вгнутості графіка, перегини функції:

- функція вгнута на проміжку, де $y''>0$; функція опукла на проміжку, де $y''<0$;
- в точках, де $y''=0$ або не існує, може бути перегин.

Схема повного дослідження функції та побудова її графіку.

1. Знайти область визначення та область значень функції.
2. Дослідити функцію на парність – непарність.
3. Знайти інтервали монотонності (зростання та спадання) функції, точки локальних екстремумів та значення функції в цих точках.
4. Знайти точки перегину графіка функції та інтервали опуклості і вгнутості.
5. Дослідити графік функції на наявність асимптот.
6. Скласти таблицю значень функції для деяких значень її аргументу.
7. Використовуючи всі отримані результати, побудувати графік функції.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти асимптоти графіка функції $y=\dfrac{x^3+9x}{x^2-4}$.

Розв'язання:

Область визначення функції $(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$, тобто $x\neq\pm2$.

В точках $x=-2$ та $x=2$ функція невизначена, в цих точках можуть існувати вертикальні асимптоти.

Так як $\lim\limits_{x\to-2-0}\dfrac{x^3+9x}{x^2-4}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-2+0}\dfrac{x^3+9x}{x^2-4}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+2-0}\dfrac{x^3+9x}{x^2-4}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+2+0}\dfrac{x^3+9x}{x^2-4}=+\infty$, то $x=-2$ та $x=2$ – вертикальні асимптоти.

Перевіримо наявність похилих асимптот.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+9x}{x^3-4x}=1,\ b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+9x}{x^2-4}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{13x}{x^2-4}=0\cdot$$

Отже, рівняння похилої асимптоти буде мати наступний вигляд: $y=x$.

Відповідь: $x=-2$ та $x=2$ – вертикальні асимптоти; похила асимптота $y=x$.

2. Провести повне дослідження функції $y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-3x+2$ та побудувати її графік.

Розв'язання:

1. Область визначення функції $x\in(-\infty;+\infty)$. Область значень функції: $y\in(-\infty;+\infty)$.

2. Для дослідження функції на парність-непарність аргумент x замінимо на $(-x)$, тоді $y(-x)=\frac{1}{3}(-x)^3-(-x)^2-3(-x)+2=-\frac{1}{3}x^3-x^2+3x+2$, тобто $y(-x)\neq y(x)$ і $y(-x)\neq -y(x)$. Отже задана функція не є парною і не є непарною, тобто є функцією загального вигляду.

3. Дослідимо задану функцію на екстремум за допомогою необхідної і достатньої ознак. Визначимо критичні точки. Для цього знаходимо першу похідну даної функції і прирівнюємо її до нуля: $y'=x^2-2x-3=0$.

Розв'язкам рівняння $x^2-2x-3=0$ є $x_1=-1$ та $x_2=3$. Таким чином, $x_1=-1$ та $x_2=3$ – критичні точки. Оскільки похідна існує при будь-якому x, то інших критичних точок немає.

За допомогою методу інтервалів визначимо знаки похідної зліва та справа від критичних точок. При $x\in(-\infty;-1)$ похідна функції додатна $y'(x)>0$; якщо $x\in(-1;3)$ похідна функції від'ємна $y'(x)<0$; якщо $x\in(3;+\infty)$, то похідна знов додатна $y'(x)>0$. Функція зростає на проміжках $x\in(-\infty;-1)$ та $x\in(3;+\infty)$. Функція спадає на проміжку $x\in(-1;3)$.

Згідно достатній умові існування екстремуму функції $x_{\max}=-1$, а $x_{\min}=3$. Визначимо значення функції в точках мінімуму та максимуму. $y_{\max}=y(-1)=-\frac{1}{3}-1+3+2=3\frac{2}{3}$; $y_{\min}=y(3)=9-9-9+2=-7$. Таким чином, точка максимуму $A\left(-1;3\frac{2}{3}\right)$, точка мінімуму $B(3;-7)$.

4. Знайдемо точки перегину графіка функції та інтервали опуклості та вгнутості.

Для цього знаходимо другу похідну, прирівняємо її до нуля та знайдемо корені рівняння: $y''(x)=2x-2=0$. Тоді $x=1$ – критична точка другого роду.

Запишемо другу похідну у вигляді $y''(x)=2(x-1)$. З правої частини цієї рівності випливає, що при $x<1$ друга похідна від'ємна $y''(x)<0$, а при $x>1$ друга похідна додатна $y''(x)>0$.

На інтервалі $x\in(-\infty;1)$ графік функції є опуклим, на інтервалі $x\in(1;+\infty)$ – вгнутим.

Друга похідна при переході через точку $x=1$ змінює свій знак. Отже, $x=1$ є абсцисою точки перегину. Обчислимо ординату цієї точки: $y(1)=\frac{1}{3}-1-3+2=-\frac{5}{3}$. Таким чином, точка $P\left(1;-\frac{5}{3}\right)$ є точкою перегину графіка функції.

5. З'ясуємо наявність асимптот графіка функції.

Вертикальних асимптот немає, бо функція визначена при всіх дійсних значеннях аргумента.

Похилих асимптот також нема, бо $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$.

6. Складемо таблицю значень функції для деяких значень її аргументу:

x	$x\in(-\infty;-1)$	-1	$x\in(-1;1)$	1	$x\in(-1;3)$	3	$x\in(3;+\infty)$
y	зростає опуклий	$3\frac{2}{3}$	спадає опуклий	$-1\frac{2}{3}$	спадає вгнутий	-7	зростає вгнутий

7. Скориставшись отриманими результатами, побудуємо графік функції.

3. Провести повне дослідження функції $y=\frac{x^3}{x^2-1}$, побудувати її графік.

Розв'язання:

1) Знаходимо область визначення функції. Такяк $x^2-1\neq 0$, $x\neq\pm\sqrt{1}$, $x\neq -1$, $x\neq 1$, то область визначення є об'єднання інтервалів: $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

2) Досліджуємо функцію на парність-непарність: $f(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x)^2-1}=-\frac{x^3}{x^2-1}=f(x)$.

Отже, функція непарна, графік функції симетричний відносно початку координат.

3) Знаходимо точки перетину графіка функції з осями координат. Для цього прирівнюємо функцію до нуля: $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1} = 0$, $x^3 = 0$, $x = 0$. Графік перетинає вісь Ox тільки в одній точці $x = 0$.

Знаходимо інтервали знакосталості функції з урахуванням області визначення. Щоб знайти знак функції на інтервалі $x \in (-\infty; -1)$, знайдемо, наприклад, $y(-2) = \dfrac{(-2)^3}{(-2)^2 - 1} = \dfrac{-8}{4-1} < 0$, таким чином на інтервалі $(-\infty; -1)$ функція від'ємна. Аналогічні дослідження проведемо для інтервалу $x \in (-1; 0)$: $y(-0,5) = \dfrac{-0,125}{0,25 - 1} > 0$ (на інтервалі $(-1; 0)$ функція додатна); для інтервалу $x \in (0; 1)$: $y(0,5) = \dfrac{0,125}{0,25 - 1} < 0$ (на інтервалі $(0; 1)$ функція від'ємна); для інтервалу $x \in (1; +\infty)$: $y(2) = \dfrac{8}{4-1} > 0$ (на інтервалі $(1; +\infty)$ функція додатна).

4) Знаходимо точки розриву і перевіряємо наявність вертикальних асимптот. Точки розриву: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Так як $\lim\limits_{x \to -1-0} \dfrac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -1+0} \dfrac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty$, то прямі $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ є вертикальними асимптотами.

Перевіримо функцію на наявність похилої асимптоти: $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3}{x(x^2 - 1)} = 1$,

$b = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2 - 1} - 1 \cdot x \right) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{x^2 - 1} = 0$. Отже, існує похила асимптота $y = 1 \cdot x + 0 = x$, тобто $y = x$.

5) Шукаємо інтервали зростання та спадання функції і її екстремуми.

Перевіряємо необхідну умову: якщо функція $y = f(x)$ має в точці $x = x_0$ локальний екстремум, то її похідна в цій точці дорівнює 0 або не існує. В нашому випадку

$$y' = \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} \right)' = \frac{3x^2 (x^2 - 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{(x^2 - 3) x^2}{(x^2 - 1)^2}.$$

Прирівнюючи першу похідну до нуля, знаходимо стаціонарні точки (точки підозрілі на екстремум): $y' = \dfrac{(x^2 - 3) x^2}{(x^2 - 1)^2} = 0$, $x^2 (x^2 - 3) = 0$, $x_{1,2} = 0$, $x_3 = -\sqrt{3}$, $x_4 = \sqrt{3}$. Критичними є також точки, де похідна не існує. В нашому випадку це точки $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Критичні точки розбивають область визначення на інтервали зростання і спадання функції: $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$.

Враховуючи знаки першої похідної в інтервалах і обчислюючи значення функції в критичних точках, складаємо зведену таблицю:

x	$(-\infty; -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}; -1)$	$-1-0$	$-1+0$	$(-1; 0)$
$f'(x)$	>0	0	<0	$\overline{\exists}$	$\overline{\exists}$	<0
$f(x)$	$\uparrow$	$-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$	$\downarrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\downarrow$
0	$(0; 1)$	$1-0$	$1+0$	$(1; \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}; +\infty)$
0	<0	$\overline{\exists}$	$\overline{\exists}$	<0	0	>0
0	$\downarrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\downarrow$	$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$	$\uparrow$

6) Шукаємо точки перегину й інтервали опуклості та угнутості.

$$y''=\left(\frac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}\right)'=\left(\frac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2}\right)'=\frac{\left(4x^3-6x\right)\cdot\left(x^2-1\right)^2-2\left(x^2-1\right)\cdot 2x\cdot\left(x^4-3x^2\right)}{\left(x^2-1\right)^4}=$$

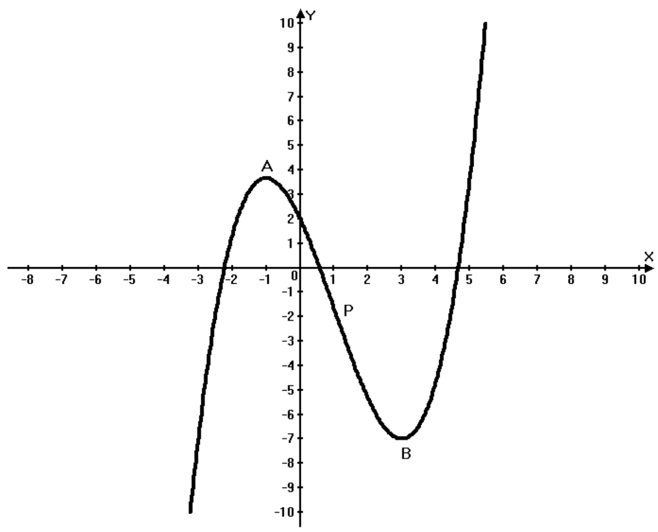
$$=\frac{\left(4x^3-6x\right)\cdot\left(x^2-1\right)-4x\cdot\left(x^4-3x^2\right)}{\left(x^2-1\right)^3}=\frac{4x^5-6x^3-4x^3+6x-4x^5+12x^3}{\left(x^2-1\right)^3}=\frac{2x^3+6x}{\left(x^2-1\right)^3}=\frac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3},$$

$y''=\dfrac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}=0$, звідки $x_1=0$. Крім того, друга похідна не існує в точках $x_1=-1$, $x_2=1$. Отже, область визначення розбивається на інтервали: $\left(-\infty;-1\right)\cup\left(-1;0\right)\cup\left(0;1\right)\cup\left(1;+\infty\right)$.

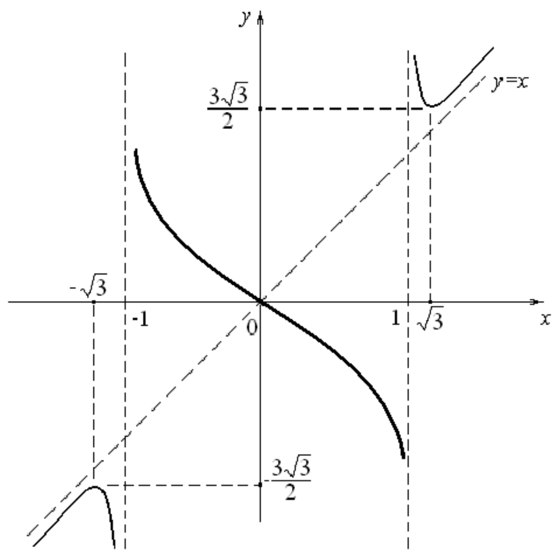
Враховуючи знаки другої похідної в інтервалах і обчислюючи значення функції в точках перегину, складаємо зведену таблицю:

x	$\left(-\infty;-1\right)$	$\left(-1;0\right)$	0	$\left(0;1\right)$	$\left(1;+\infty\right)$
$f'(x)$	<0	>0	0	<0	>0
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	0	$\cap$	$\cup$

7) Будуємо графік функції. Починаємо із проведення асимптот. Провівши асимптоти, наносимо координати точок мінімуму, максимуму та перегину. Після цього, користуючись даними таблиць, будуємо графік функції.



графік $y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-3x+2$



графік $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайти асимптоти графіка функції.

1. $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$ 2. $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ 3. $y=\dfrac{2}{x^2+2x}$ 4. $y=\dfrac{4x^2}{3-x^2}$

5. $y=\dfrac{12x}{9-x^2}$ 6. $y=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$ 7. $y=\dfrac{4-x^3}{x^2}$ 8. $y=\dfrac{x^2-4x+1}{x-4}$

9. $y=\dfrac{2x^3+1}{x^2}$ 10. $y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}$ 11. $y=\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$ 12. $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2$

13. $y=\dfrac{12-3x^2}{x^2+x}$ 14. $y=\dfrac{9+6x-3x^2}{x^2-2x-3}$ 15. $y=-\dfrac{8x}{x^2-4}$ 16. $y=\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$

17. $y=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$ 18. $y=\dfrac{4x}{(x+1)^2}$ 19. $y=\dfrac{8(x-1)}{(x+1)^2}$ 20. $y=\dfrac{1-2x^3}{x^2}$

2. Провести повне дослідження функції та побудувати графік.

1. $y=\frac{1}{2}x^3-3x^2+6$ 2. $y=\frac{1}{5}x^3-2x^2+2$ 3. $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-8x+5$ 4. $y=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{8}x^2-3x$

5. $y=\frac{1}{6}x^3-\frac{5}{2}x^2+3$ 6. $y=-\frac{1}{5}x^3+\frac{3}{2}x^2-4$ 7. $y=\frac{1}{9}x^3-3x^2+3$ 8. $y=\frac{1}{2}x^3-\frac{7}{2}x^2-2$

9. $y=-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x-2$ 10. $y=-\frac{1}{8}x^3+2x-3$ 11. $y=-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{2}x^2-4$ 12. $y=-\frac{1}{9}x^3+3x-5$

13. $y=\frac{1}{2}x^3-\frac{5}{2}x^2-2$ 14. $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{9}x^2-4$ 15. $y=-\frac{1}{3}x^3+6x^2-1$ 16. $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{3}x^2+2$

17. $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{3}x^2+2$ 18. $y=\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{3}x^2-3$ 19. $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x^2-4x$ 20. $y=\frac{1}{6}x^3-\frac{7}{2}x^2-5$

3. Розв’язати задачу.

1. Нехай виробнича функція залежить лише від чисельності персоналу фірми і має вигляд $f(x)=6x^2-0,2x^3$, де f – випуск продукції, x – число працівників. Знайти чисельність штату, при якій випуск продукції досягає найбільшого значення.

2. Функція повних витрат має вигляд $f(x)=x^3-6x^2-15x$, де x – обсяг виробленої продукції. При якому обсязі виробництва середні витрати $S=f(x)/x$ будуть мінімальними?

3. Підприємство виробляє x одиниць продукції за місяць. Залежність фінансових нагромаджень підприємства f від обсягу випуску продукції визначається формулою $f(x)=-0,01x^3+300x-500$. Знайти, при якому обсязі випуску продукції фінансові нагромадження зменшуються.

4. Загальна вартість вироблених x одиниць продукції $f(x)=100000+1500x+0,2x^3$. Знайти скільки одиниць продукції x слід випускати, щоб середня вартість одиниці продукції $S=f(x)/x$ була мінімальною.

5. Залежність між урожайністю озимої пшениці y (ц/га) та нормою засіву зерна x (млн. зерен/га) виражається функцією $y=4,8+7,2x-0,6x^2$. Визначити оптимальну норму засіву зерна для одержання максимального урожаю.

6. Функція доходу $P(x)=100x-x^2$, а функція витрат $S=x^3-37x^2+169x+4000$, де x – кількість реалізованого товару. Дослідити на максимум функцію прибутку $\Pi(x)=P(x)-S(x)$.

7. На малому підприємстві виготовляють продукцію одного виду. Витрати на виробництво x одиниць продукції виражаються функцією $V(x)=x^3-30x^2-160x+900$ (грн.), а прибуток, одержаний від її реалізації (загальна вартість продукції), $D(x)=80x-6x^2$ (грн.). Визначити, яку кількість продукції треба виготовити, щоб прибуток був максимальним.

8. Нехай функція $V(x)=250+120x-0,2x^2$ виражає витрати підприємства на виробництво x одиниць продукції (у гривнях). Визначити, чи зростатимуть витрати при збільшені виробництва продукції: а) від 250 до 300 одиниць, б) від 300 до 350 одиниць. При якому значенні x витрати будуть максимальними?

9. Функція середніх витрат $\Pi(x)=x$, а функція попиту $P(x)=10-3x$. Знайти, при якому обсязі виробництва прибуток виробника буде найбільшим. (Врахувати, що повні витрати $K(x)=x\cdot\Pi(x)$, сумарний виторг $U(x)=x\cdot P(x)$, а прибуток $Z(x)=U(x)-K(x)$).

Модуль 06 „Інтегральне числення функції однієї змінної. Невизначений інтеграл”

БЕЗПОСЕРЕДНЄ ІНТЕГРУВАННЯ

1. Основні поняття та теореми

Інтеграли основних функцій

1.	$\int 0dx = C$	5.	$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$	10.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg}\, x + C$
2.	$\int 1dx = x + C$	6.	$\int e^x dx = e^x + C$	11.	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
3.	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	7.	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$	12.	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \text{arctg}\, \frac{x}{a} + C$
3\`.	$\int \frac{dx}{x^n} = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$	8.	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$	13.	$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{a-x}{a+x}\right\| + C$
4.	$\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$	9.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{ctg} x + C$	14.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$

Інтеграл від суми (різниці) функцій дорівнює сумі (різниці) інтегралів від цих функцій $\int \big(f_1(x) \pm f_2(x)\big)\, dx = \int f_1(x)\, dx \pm \int f_2(x)\, dx$.

Сталий множник можна винести за знак інтеграла $\int kf(x)\, dx = k\int f(x)\, dx$.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти інтеграл $\int \sqrt[3]{x}dx$.

Розв’язання: $\int \sqrt[3]{x}dx = \int x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C$. Відповідь: $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C$.

2. Знайти інтеграл $\int \left(5 - x^3\right)^2 dx$.

Розв’язання:

$$\int \left(25 - 10x^3 + x^6\right)dx = \int 25dx - \int 10x^3dx + \int x^6dx = 25\int dx - 10\int x^3dx + \int x^6dx = 25x - 10\frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} + C.$$

Відповідь: $25x - \frac{5}{2}x^4 + \frac{x^7}{7} + C$.

3. Знайти інтеграл $\int \left(\frac{17}{\sqrt{x^3}} + \frac{1}{x^{12}} - x^{20}\right)dx$.

Розв’язання: $\int \left(\frac{17}{\sqrt{x^3}} + \frac{1}{x^{12}} - x^{20}\right)dx = \int \left(\frac{17}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{x^{12}} - x^{20}\right)dx = -\frac{34}{\sqrt{x}} - \frac{1}{11x^{11}} - \frac{x^{21}}{21} + C$.

Відповідь: $-\frac{34}{\sqrt{x}} - \frac{1}{11x^{11}} - \frac{x^{21}}{21} + C$.

4. Знайти інтеграл $\int \frac{7\sqrt{x} - x^{20}}{x^{12}}dx$.

Розв’язання:

$$\int \frac{7\sqrt{x} - x^{20}}{x^{12}}dx = \int \left(7x^{\frac{1}{2}-12} - x^{20-12}\right)dx = \int \left(7x^{-\frac{23}{2}} - x^8\right)dx = 7\int x^{-\frac{23}{2}}dx - \int x^8dx = = -\frac{2}{3\sqrt{x^{21}}} - \frac{x^9}{9} + C.$$

Відповідь: $-\frac{2}{3\sqrt{x^{21}}} - \frac{x^9}{9} + C$.

5. Знайти інтеграл $\int\left(7x+\frac{2}{x}-\sin x+5^x\right)dx$.

Розв’язання:

$$\int\left(7x+\frac{2}{x}-\sin x+5^x\right)dx=7\int xdx+2\int\frac{dx}{x}-\int\sin xdx+\int 5^x dx=7\frac{x^2}{2}+2\ln|x|+\cos x+\frac{5^x}{\ln 5}+C.$$

Відповідь: $7\frac{x^2}{2}+2\ln|x|+\cos x+\frac{5^x}{\ln 5}+C$.

6. Знайти інтеграл $\int\left(2+\frac{4}{x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$.

Розв’язання: $\int\left(2+\frac{4}{x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx=2\int dx+4\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{\sin^2 x}=7x+4\ln|x|+\mathrm{ctg}x+C$.

Відповідь: $7x+4\ln|x|+\mathrm{ctg}x+C$.

7. Знайти інтеграл $\int(2\cos x-4e^x+3)dx$.

Розв’язання: $\int(2\cos x-4e^x+3)dx=2\int\cos xdx-4\int e^x dx+3\int dx=-2\sin x-4e^x+3x+C$.

Відповідь: $-2\sin x-4e^x+3x+C$.

8. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{x^2+3}$.

Розв’язання:

Застосуємо формулу 12 ($a=\sqrt{3}$), маємо $\int\frac{dx}{x^2+3}=\int\frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$.

Відповідь: $\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$.

9. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{x^2-3}$.

Розв’язання:

Застосуємо різновид формули 13 ($a=\sqrt{3}$): $\int\frac{dx}{x^2-3}=\int\frac{dx}{x^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+C$.

Відповідь: $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+C$.

10. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$.

Розв’язання:

Застосуємо формулу 11 ($a=5$), маємо $\int\frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{5^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{5}+C$.

Відповідь: $\arcsin\frac{x}{5}+C$.

11. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{12+x^2}}$.

Розв’язання:

Застосуємо формулу 14, маємо $\int\frac{dx}{\sqrt{12+x^2}}=\ln\left|x+\sqrt{12+x^2}\right|+C$.

Відповідь: $\ln\left|x+\sqrt{12+x^2}\right|+C$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. $\int\left(x^9-\frac{1}{x^3}+2\sqrt[3]{x^4}\right)dx$, $\int\left(x^3+\frac{2}{x^3}-\sqrt[4]{x^5}\right)dx$, $\int\left(2x^4+\frac{1}{x^3}-\frac{2}{\sqrt[5]{x}}\right)dx$, $\int\left(3x^4-\frac{10}{x^2}+9\sqrt[3]{x^2}\right)dx$,

$\int\left(3x-\frac{4}{x^4}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$, $\int\left(2x^3-\sqrt[4]{x}+\frac{2}{x^4}\right)dx$, $\int\left(x^8+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{10}-3\sqrt[2]{x^3}\right)dx$, $\int\left(9x^8-\frac{10}{x^{19}}+11\sqrt[3]{x^8}\right)dx$,

$\int\left(\frac{x^7}{2}+\frac{x}{3}+\frac{1}{4x^7}-\frac{1}{5}\sqrt[5]{x^6}\right)dx$, $\int\left(x^4+\frac{1}{x^4}-3\sqrt[3]{x^5}\right)dx$, $\int\frac{\sqrt{x}+x-x^2}{x^4}dx$, $\int\frac{2\sqrt{x}+3x-4x^{12}}{x^7}dx$.

2. $\int\left(9-\frac{4}{x}-\frac{2}{\cos^2 x}+10^x\right)dx$, $\int\left(6e^x-7\sin x+8\cos x-\frac{9}{\sin^2 x}\right)dx$, $\int\left(9x+\frac{3}{x}-\cos x+7^x\right)dx$,

$\int\left(4-\frac{2}{x}-\frac{3}{\cos^2 x}\right)dx$, $\int(6\sin x-8e^x+1)dx$.

3. $\int\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$, $\int\frac{dx}{x^2-25}$, $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-10}}$, $\int\frac{dx}{x^2+16}$, $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-16}}$, $\int\frac{dx}{x^2+36}$, $\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$, $\int\frac{dx}{x^2-49}$.

ЗМІНА ЗМІННОЇ ПІД ЗНАКОМ ДИФЕРЕНЦІАЛА

1. Основні поняття та теореми

Якщо аргумент функції і змінна під знаком диференціала однакові, можна застосувати формулу з таблиці інтегралів: $\int\cos\square d\square=\sin\square+C$; $\int\sin\square d\square=-\cos\square+C$; $\int e^{\square}d\square=e^{\square}+C$; $\int\square^n d\square=\frac{\square^{n+1}}{n+1}+C$; $\int\frac{d\square}{\square}=\ln|\square|+C$; $\int\frac{d\square}{\sin^2\square}=-\mathrm{ctg}\square+C$; $\int\frac{d\square}{\cos^2\square}=\mathrm{tg}\square+C$; $\int\frac{d\square}{\square^2+a^2}=\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{\square}{a}+C$.

Під знаком диференціала можна додати (відняти) будь-яку сталу, бо $d(x\pm C)=dx\pm dC$, а так як $dC=0$, то $dx=d(x\pm C)$. Під знаком диференціала можна домножити (поділити) змінну на будь-яку сталу, при цьому сам інтеграл треба поділити (помножити) на цю сталу, бо $d(Cx)=Cdx\pm xdC$, $dC=0$, тоді $d(Cx)=Cdx$.

Так як $d\left(x^2\right)=\left(x^2\right)'dx=2xdx$, то $2xdx=d\left(x^2\right)$ ($2x$ внесли під знак диференціала). Аналогічно: $3x^2dx=d\left(x^3\right)$ ($3x^2$ внесли під знак диференціала), $\cos xdx=d(\sin x)$ ($\cos x$ внесли під знак диференціала), $\sin xdx=-d(\cos x)$ ($\sin x$ внесли під знак диференціала), $e^xdx=d\left(e^x\right)$ (e^x внесли під знак диференціала), $\frac{dx}{x}=d(\ln x)$ ($\frac{1}{x}$ внесли під знак диференціала), $\frac{dx}{2\sqrt{x}}=d\left(\sqrt{x}\right)$ ($\sqrt{x}$ внесли під знак диференціала), $\frac{dx}{\cos^2 x}=d(\mathrm{tg}x)$ ($\frac{1}{\cos^2 x}$ внесли під знак диференціала).

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти інтеграл $\int\cos(x-3)dx$.

Розв'язання: $\int\cos(x-3)dx=\int\cos(x-3)d(x-3)=\sin(x-3)+C$.

Відповідь: $\sin(x-3)+C$.

2. Знайти інтеграл $\int e^{x+7}dx$.

Розв'язання: $\int e^{x+7}dx=\int e^{x+7}d(x+7)=e^{x+7}+C$. Відповідь: $e^{x+7}+C$.

3. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{(x+2)^2}$.

Розв'язання: $\int\frac{dx}{(x+2)^2}=\int\frac{d(x+2)}{(x+2)^2}=\int(x+2)^{-2}d(x+2)=\frac{(x+2)^{-1}}{-1}+C=-\frac{1}{x+2}+C$.

Відповідь: $-\dfrac{1}{x+2}+C$.

4. Знайти інтеграл $\int \dfrac{dx}{x-5}$.

Розв'язання: $\int \dfrac{dx}{x-5}=\int \dfrac{d(x-5)}{x-5}=\ln|x-5|+C$. Відповідь: $\ln|x-5|+C$.

5. Знайти інтеграл $\int e^{3x}dx$.

Розв'язання: $\int e^{3x}dx=\dfrac{1}{3}\int e^{3x}d(3x)=\dfrac{1}{3}e^{3x}+C$. Відповідь: $\dfrac{1}{3}e^{3x}+C$.

6. Знайти інтеграл $\int \cos 2x dx$.

Розв'язання: $\int \cos 2x dx=\dfrac{1}{2}\int \cos 2x d(2x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x+C$. Відповідь: $\dfrac{1}{2}\sin 2x+C$.

7. Знайти інтеграл $\int \dfrac{dx}{\cos^2 \dfrac{x}{3}}$.

Розв'язання: $\int \dfrac{dx}{\cos^2 \dfrac{x}{3}}=3\int \dfrac{d\left(\dfrac{x}{3}\right)}{\cos^2 \dfrac{x}{3}}=3\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}+C$. Відповідь: $3\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}+C$.

8. Знайти інтеграл $\int \cos(2x+3)dx$.

Розв'язання:

$$\int \cos(2x+3)dx=\frac{1}{2}\int \cos(2x+3)d(2x)=\frac{1}{2}\int \cos(2x+3)d(2x+3)=\frac{1}{2}\sin(2x+3)+C.$$

Відповідь: $\dfrac{1}{2}\sin(2x+3)+C$.

9. Знайти інтеграл $\int \dfrac{dx}{\sin^2\left(\dfrac{x}{3}-1\right)}$.

Розв'язання: $\int \dfrac{dx}{\sin^2\left(\dfrac{x}{3}-1\right)}=3\int \dfrac{d\left(\dfrac{x}{3}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{x}{3}-1\right)}=3\int \dfrac{d\left(\dfrac{x}{3}-1\right)}{\sin^2\left(\dfrac{x}{3}-1\right)}=-3\operatorname{ctg}\left(\dfrac{x}{3}-1\right)+C$.

Відповідь: $-3\operatorname{ctg}\left(\dfrac{x}{3}-1\right)+C$.

10. Знайти інтеграл $\int e^{x^2}2xdx$.

Розв'язання: $\int e^{x^2}2xdx=\int e^{x^2}d(x^2)=e^{x^2}+C$. Відповідь: $e^{x^2}+C$.

11. Знайти інтеграл $\int \dfrac{xdx}{1+x^2}$.

Розв'язання: $\int \dfrac{xdx}{1+x^2}=\dfrac{1}{2}\int \dfrac{2xdx}{1+x^2}=\dfrac{1}{2}\int \dfrac{d\left(x^2\right)}{1+x^2}=\dfrac{1}{2}\int \dfrac{d\left(x^2+1\right)}{1+x^2}=\dfrac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|+C$.

Відповідь: $\dfrac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|+C$.

12. Знайти інтеграл $\int \dfrac{\cos x dx}{\sin^7 x}$.

Розв'язання: $\int\frac{\cos xdx}{\sin^7 x}=\int\frac{d\left(\sin x\right)}{\sin^7 x}=\int\sin^{-7}xd\left(\sin x\right)=\frac{\sin^{-6}x}{-6}+C$. Відповідь: $\frac{\sin^{-6}x}{-6}+C$.

13. Знайти інтеграл $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^3}}$.

Розв'язання: $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^3}}=\frac{1}{3}\int\left(1+x^3\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 3x^2dx=\frac{1}{3}\int\left(1+x^3\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot d\left(1+x^3\right)=\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}+C$.

Відповідь: $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}+C$.

14. Знайти інтеграл $\int\frac{e^xdx}{e^{2x}+4}$.

Розв'язання: $\int\frac{e^xdx}{e^{2x}+4}=\int\frac{d\left(e^x\right)}{e^{2x}+4}=\int\frac{d\left(e^x\right)}{2^2+\left(e^x\right)^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{e^x}{2}+C$. Відповідь: $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{e^x}{2}+C$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайти інтеграли методом зміни змінної під знаком диференціала (по два з рядка):

а) $\int\sin\left(8+x\right)dx$; б) $\int\frac{1}{\cos^2\left(8+x\right)}dx$; в) $\int\frac{dx}{x+1}$; г) $\int\left(x-3\right)^3dx$; ґ) $\int\sqrt{x-5}dx$; д) $\int 7^{x-8}dx$;

е) $\int\cos 8xdx$; є) $\int\sin 9xdx$; ж) $\int\frac{1}{\sin^2 8x}dx$; з) $\int\frac{1}{\cos^2\left(x/10\right)}dx$; и) $\int e^{\frac{x}{8}}dx$.

2. Знайти інтеграли методом зміни змінної під знаком диференціала (по два з рядка):

а) $\int\frac{dx}{5x-1}$; б) $\int e^{\frac{x}{2}+3}dx$; в) $\int\sin\left(\frac{x}{5}-3\right)dx$; г) $\int\frac{1}{\cos^2\left(8-x\right)}dx$; ґ) $\int\frac{1}{\left(2x+3\right)^8}dx$; д) $\int\frac{dx}{\left(2-x/3\right)^2}$.

3. Знайти інтеграли методом внесенням під знак диференціала (по одному з рядка):

1) $\int\cos^3 x\sin xdx$, 2) $\int\frac{\cos xdx}{\left(1+\sin x\right)^2}$, 3) $\int\frac{\sin xdx}{1+2\cos x}$, 4) $\int\sqrt{1+2\cos x}\sin xdx$, 5) $\int\frac{\cos xdx}{\sqrt{1+2\sin x}}$;

6) $\int\frac{2xdx}{\sqrt[3]{x^2+1}}$, 7) $\int\frac{3x^2dx}{\sqrt{x^3-2}}$, 8) $\int x^3\sqrt{2+x^4}dx$, 9) $\int\frac{2xdx}{\sqrt[5]{x^2-1}}$, 10) $\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$, 11) $\int xe^{-x^2}dx$;

12) $\int\operatorname{tg}xdx$, 13) $\int\operatorname{ctg}xdx$, 14) $\int\frac{\operatorname{tg}^3xdx}{\cos^2 x}$, 15) $\int\frac{dx}{\cos^2 x\cdot\operatorname{tg}^3 x}$, 16) $\int\frac{\operatorname{ctg}xdx}{\ln\sin x}$;

17) $\int\frac{e^xdx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$, 18) $\int\frac{e^xdx}{e^x+3}$, 19) $\int\frac{\ln x}{x}dx$, 20) $\int\frac{dx}{x\sqrt{3-\ln x}}$, $\int\frac{\sqrt{\ln x}dx}{x}$, 22) $\int\frac{\cos\left(\ln x\right)}{x}dx$;

23) $\int\frac{3^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx$, 24) $\int\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx$, 25) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$, 26) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(2-\sqrt{x}\right)}$, 27) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(x+1\right)}$.

ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ

1. Основні поняття та теореми

Формулу інтегрування частинами $\int udv=uv-\int vdu$ застосовують:

1) в інтегралах вигляду $\int P\left(x\right)e^xdx$; $\int P\left(x\right)a^xdx$; $\int P\left(x\right)\sin xdx$; $\int P\left(x\right)\cos xdx$ (де $P\left(x\right)$ – многочлен) позначають $u=P\left(x\right)$, dv – залишок);
2) в інтегралах вигляду $\int P\left(x\right)\ln xdx$; $\int P\left(x\right)\log_a xdx$; $\int P\left(x\right)\arcsin xdx$; $\int P\left(x\right)\arccos xdx$; $\int P\left(x\right)\operatorname{arcctg}xdx$; $\int P\left(x\right)\operatorname{arctg}xdx$ (добуток многочлена і оберненої функції) позначають u – обернена функція, $dv=P\left(x\right)dx$.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти інтеграл $\int(1-4x)\sin 2x dx$.

Розв’язання:

$$\begin{bmatrix} u=1-4x & du=-4dx \\ dv=\sin 2x dx & v=\frac{1}{2}\int \sin 2x d(2x)=-\frac{1}{2}\cos 2x \end{bmatrix}=-(1-4x)\frac{1}{2}\cos 2x-\int\frac{1}{2}\cos 2x\cdot 4dx=$$

$$=-(1-4x)\frac{1}{2}\cos 2x-\int\cos 2x\cdot 2dx=-(1-4x)\frac{1}{2}\cos 2x-\sin 2x+C.$$

Відповідь: $\left(2x-\frac{1}{2}\right)\cos 2x-\sin 2x+C$.

2. Знайти інтеграл $\int(2x-1)e^{-3x}dx$.

Розв’язання:

$$\begin{bmatrix} u=2x-1 & du=2dx \\ dv=e^{-3x}dx & v=-\frac{1}{3}\int e^{-3x}d(-3x)=-\frac{1}{3}e^{-3x} \end{bmatrix}=-(2x-1)\frac{1}{3}e^{-3x}+\frac{2}{3}\int e^{-3x}dx=$$

$$=-(2x-1)\frac{1}{3}e^{-3x}-\frac{2}{9}\int e^{-3x}d(-3x)=-(2x-1)\frac{1}{3}e^{-3x}-\frac{2}{9}e^{-3x}+C.$$

Відповідь: $\left(\frac{1}{3}-\frac{2x}{3}\right)e^{-3x}-\frac{2}{9}e^{-3x}+C$.

3. Знайти інтеграл $\int\ln(x-8)dx$.

Розв’язання:

$$\begin{bmatrix} u=\ln(x-8) & du=\dfrac{dx}{x-8} \\ dv=dx & v=x \end{bmatrix}=x\ln(x-8)-\int\frac{x}{x-8}dx=x\ln(x-8)-\int\frac{x-8+8}{x-8}dx=$$

$$=x\ln(x-8)-\int\left(1+\frac{8}{x-8}\right)dx=x\ln(x-8)-x-8\int\frac{d(x-8)}{x-8}=x\ln(x-8)-x-8\ln|x-8|+C.$$

Відповідь: $x\ln(x-8)-x-8\ln|x-8|+C$.

4. Знайти інтеграл $\int\arccos x dx$.

Розв’язання:

$$\begin{bmatrix} u=\arccos x & du=-\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv=dx & v=x \end{bmatrix}=x\arccos x+\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=x\arccos x+\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2)}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=x\arccos x-\frac{1}{2}\int(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-x^2)=x\arccos x-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+C.$$

Відповідь: $x\ln(x-8)-x-8\ln|x-8|+C$.

5. Знайти інтеграл $\int\operatorname{arctg}2x dx$.

Розв’язання:

$$\begin{bmatrix} u=\operatorname{arctg}2x & du=\dfrac{2dx}{1+4x^2} \\ dv=dx & v=x \end{bmatrix}=x\cdot\operatorname{arctg}x-\int\frac{2x}{1+4x^2}dx=x\cdot\operatorname{arctg}x-\int\frac{d(x^2)}{1+4x^2}=x\cdot\operatorname{arctg}x-\frac{1}{4}\int\frac{d(4x^2+1)}{1+4x^2}=$$

$$=x\cdot\operatorname{arctg}x-\frac{1}{4}\ln|1+4x^2|+C.$$

Відповідь: $x\cdot\operatorname{arctg}x-\frac{1}{4}\ln|1+4x^2|+C$.

3. Завдання для самостійного виконання

Знайти інтеграли методом інтегрування частинами (по одному прикладу з комірок таблиці)

$\int (x-1)\cos 3x dx$; $\int (x-1)\sin 4x dx$; $\int (x+2)\sin 3x dx$; $\int (x-3)\sin 2x dx$; $\int (7x-10)\sin 5x dx$; $\int (3x-1)\cos 5x dx$; $\int (2x-3)\cos 5x dx$; $\int (1-5x)\sin 3x dx$; $\int x\cos(x-2)\,dx$; $\int x\sin(3x-1)\,dx$; $\int x\cos(5-3x)\,dx$; $\int 3x\sin(5x+2)\,dx$.	$\int xe^{x+5}dx$; $\int (x+7)e^{x}dx$; $\int (2x+3)e^{x}dx$; $\int (x+5)e^{3x}dx$; $\int (x+2)e^{3x}dx$; $\int (1-2x)e^{3x}dx$; $\int (x+3)e^{2x}dx$; $\int (5-2x)e^{-x}dx$; $\int (x+5)e^{-4x}dx$; $\int xe^{-x}dx$; $\int (3-2x)4^{x}dx$; $\int (2x+1)\cdot 2^{-x}dx$.
$\int \operatorname{arctg} x dx$; $\int \arcsin x dx$ $\int \operatorname{arctg} 3x dx$.	$\int x\ln x dx$; $\int x\ln(x+13)\,dx$; $\int \ln x dx$; $\int \ln(2x+3)dx$.

ІНТЕГРУВАННЯ НАЙПРОСТІШИХ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ

1. Основні поняття та теореми

Перший тип $\int \frac{A}{Bx\pm\beta}dx$ і другий тип $\int \frac{A}{(Bx\pm\beta)^n}dx$ розв'язують зведенням диференціала до вигляду $d(Bx\pm\beta)$ і застосуванням табличних інтегралів $\int \frac{d\square}{\square}=\ln|\square|+C$ і $\int \frac{d\square}{\square^n}=-\frac{1}{(n-1)\square^{n-1}}+C$ (наслідок $\int \square^n d\square=\frac{\square^{n+1}}{n+1}+C$).

Третій тип $\int \frac{Ax+B}{x^2\pm px+q}dx$ розв'язують виділенням у чисельнику похідної знаменника і застосовують табличний інтеграл $\int \frac{dt}{t}=\ln|t|+C$ і формули $\int \frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C$ або $\int \frac{dt}{t^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{t-a}{t+a}\right|+C$.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти інтеграл $\int \frac{2}{3x-34}dx$.

Розв'язання: $\int \frac{2}{3x-34}dx=2\int \frac{dx}{3x-34}=\frac{2}{3}\int \frac{d(x\cdot 3-34)}{3x-34}=\frac{2}{3}\ln|3x-34|+C$.

Відповідь: $\frac{2}{3}\ln|3x-34|+C$.

2. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{1-2x}$.

Розв'язання: $\int \frac{dx}{1-2x}=-\frac{1}{2}\int \frac{d(1-2x)}{1-2x}=-\frac{1}{2}\ln|1-2x|+C$. Відповідь: $-\frac{1}{2}\ln|1-2x|+C$.

3. Знайти інтеграл $\int \frac{7}{(2x-5)^3}dx$.

Розв'язання: $\int \frac{7}{(2x-5)^3}dx=7\int \frac{dx}{(2x-5)^3}=\frac{7}{2}\int \frac{d(2x-5)}{(2x-5)^3}=-\frac{7}{2}\frac{1}{2(2x-5)^2}+C=-\frac{7}{4(2x-5)^2}+C$,

$$\int \frac{7}{(2x-5)^3}dx=7\int (2x-5)^{-3}dx=\frac{7}{2}\int (2x-5)^{-3}d(2x-5)=\frac{7}{2}\frac{(2x-5)^{-2}}{-2}+C=-\frac{7}{4}\frac{1}{(2x-5)^2}+C.$$

Відповідь: $-\frac{7}{4(2x-5)^2}+C$.

4. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x^2-8x+25}$.

Розв'язання: $\int \frac{dx}{x^2-8x+25} = \int \frac{dx}{x^2-2x\cdot 4+4^2-4^2+25} = \int \frac{d(x-4)}{(x-4)^2+3^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-4}{3}+C$.

Відповідь: $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-4}{3}+C$.

5. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x^2+6x-7}$.

Розв'язання: $\int \frac{dx}{x^2+6x-7} = \int \frac{dx}{x^2+2x\cdot 3+3^2-3^2-7} = \int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2-4^2} = \frac{1}{2\cdot 4}\ln\left|\frac{x+3-4}{x+3+4}\right|+C$.

Відповідь: $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-1}{x+7}\right|+C$.

6. Знайти інтеграл $\int \frac{2x+35}{x^2+35x+1}dx$.

Розв'язання: $\int \frac{2x+35}{x^2+35x+1}dx = \int \frac{d(x^2+35x+1)}{x^2+35x+1} = \ln\left|x^2+35x+1\right|+C$.

Відповідь: $\ln\left|x^2+35x+1\right|+C$.

7. Знайти інтеграл $\int \frac{2x+3}{x^2-6x+13}\,dx$.

Розв'язання:

$$\int \frac{2x+3}{x^2-6x+13}\,dx = \int \frac{2x-6+6+3}{x^2-6x+13}dx = \int \frac{2x-6}{x^2-6x+13}dx + \int \frac{9}{x^2-6x+13}dx =$$

$$= \int \frac{d\left(x^2-6x+13\right)}{x^2-6x+13} + 9\int \frac{dx}{x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2-3^2+13} = \ln\left|x^2-6x+13\right| + 9\int \frac{dx}{(x-3)^2+4} =$$

$$= \ln\left|x^2-6x+13\right| + 9\int \frac{d(x-3)}{(x-3)^2+2^2} = \ln\left|x^2-6x+13\right| + \frac{9}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2}+C.$$

Відповідь: $\ln\left|x^2-6x+13\right|+\frac{9}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2}+C$.

8. Знайти інтеграл $\int \frac{3x-6}{x^2+8x+7}\,dx$.

Розв'язання:

$$3\int \frac{x-2}{x^2+8x+7}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{x^2+8x+7}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+8-8-4}{x^2+8x+7}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+8}{x^2+8x+7}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{12}{x^2+8x+7}\,dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{d\left(x^2+8x+7\right)}{x^2+8x+7} - 18\int \frac{dx}{x^2+2\cdot x\cdot 4+4^2-4^2+7} = \frac{3}{2}\ln\left|x^2+8x+7\right| - 18\int \frac{d(x+4)}{(x+4)^2-3^2} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left|x^2+8x+7\right| - 18\cdot\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{x+4-3}{x+4+3}\right|+C = \frac{3}{2}\ln\left|x^2+8x+7\right| - 3\ln\left|\frac{x+1}{x+7}\right|+C.$$

Відповідь: $\frac{3}{2}\ln\left|x^2+8x+7\right|-3\ln\left|\frac{x+1}{x+7}\right|+C$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайти інтеграли $\int \frac{5-2x}{x^2-5x}dx$; $\int \frac{2x-1}{x^2-x+7}dx$, $\int \frac{x-1}{x^2-2x+5}dx$; $\int \frac{4-3x}{x^2-x}dx$.

2. Знайти інтеграли $\int \frac{\gamma}{\alpha x+\beta}dx$, $\int \frac{\gamma}{(\alpha x+\beta)^2}dx$, $\int \frac{\gamma}{x^2+4x+5}dx$, $\int \frac{\alpha x+\beta}{x^2+8x-20}dx$.

ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ

Приклади виконання завдань

1. Знайти невизначений інтеграл від раціонального дробу $\int \frac{x^5+3x^2+1}{x^3+1}dx$.

Розв'язання:

Виділимо цілу частину неправильного підінтегрального раціонального дробу. Для цього поділимо на знаменник:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^5+3x^2+1 & x^3+1 \\ \underline{x^5+x^2\quad} & x^2 \\ 2x^2+1 & \end{array}$$

В результаті одержимо $\frac{x^5+3x^2+1}{x^3+1}=x^2+\frac{2x^2+1}{x^3+1}$.

Розкладемо правильний дріб на найпростіші дроби (за множниками знаменника).

$\frac{2x^2+1}{x^3+1}=\frac{2x^2+1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}=\frac{A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$. Дроби рівні, знаменники рівні, отже рівні чисельники $A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)=2x^2+1$.

Перший метод визначення коефіцієнтів: прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях невідомої $\underline{Ax^2}\underline{\underline{-Ax}}+A\underline{+Bx^2}\underline{\underline{+Bx+Cx}}+C=\underline{2x^2}+1$ дає

$$\begin{matrix} x^2: \\ x^1: \\ x^0: \end{matrix}\begin{cases} A+B=2, \\ -A+B+C=0, \\ A+C=1; \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} B=2-A, \\ -3A+3=0, \\ C=1-A; \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} B=1, \\ A=1, \\ C=0. \end{cases}$$

Тобто маємо $\frac{2x^2+1}{x^3+1}=\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x^2-x+1}$.

Другий метод: метод варіації невідомої, що полягає в присвоєнні певних значень змінній, дає систему

$$\begin{matrix} x=-1: \\ x=0: \\ x=1: \end{matrix}\begin{cases} 3A=3, \\ A+C=1, \\ A+2(B+C)=3; \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} A=1, \\ C=0, \\ B=1. \end{cases}$$

Звідки $\frac{2x^2+1}{x^3+1}=\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x^2-x+1}$.

Маємо $\int x^2dx+\int\frac{1}{x+1}dx+\int\frac{x}{x^2-x+1}dx$. Перший інтеграл – табличний $\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+C$, другий – дріб I типу $\int\frac{d(x+1)}{x+1}=\ln|x+1|+C$, третій – дріб III типу $\int\frac{x}{x^2-x+1}dx=$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\ln|x^2-x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C.$$

Відповідь: $\frac{x^3}{3}+\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x^2-x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$.

2. Знайти невизначений інтеграл від раціонального дробу $\int\frac{x}{x^3+1}dx$.

Розв'язання:

Розкладемо правильний дріб на найпростіші дроби (за множниками знаменника).

$$\frac{x}{x^3+1}=\frac{x}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}=\frac{A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}.$$

Дроби рівні, знаменники рівні, отже рівні чисельники $A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)=x$.

Для визначення невідомих коефіцієнтів A, B, C прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях невідомої $Ax^2-Ax+A+Bx^2+Bx+Cx+C=x$. Це дає систему рівнянь

$$\begin{matrix} x^2: \\ x^1: \\ x^0: \end{matrix}\begin{cases} A+B=0, \\ -A+B+C=1, \\ A+C=0; \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} B=-A, \\ -3A=1, \\ C=-A; \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} B=1/3, \\ A=-1/3, \\ C=1/3. \end{cases}$$

Тобто маємо $\frac{x}{x^3+1}=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{x+1}+\frac{x+1}{x^2-x+1}\right)$.

В результаті одержали $\frac{1}{3}\int\left(-\frac{1}{x+1}+\frac{x+1}{x^2-x+1}\right)dx$. Перший інтеграл – дріб I типу $\int\frac{d\left(x+1\right)}{x+1}=\ln\left|x+1\right|+C$, другий інтеграл – дріб III типу $\int\frac{x+1}{x^2-x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x-1+3}{x^2-x+1}dx=$

$=\frac{1}{2}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2-x+1\right)}{x^2-x+1}dx+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+1\right|+\frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C.$ Тоді

$$\frac{1}{3}\int\left(-\frac{1}{x+1}+\frac{x+1}{x^2-x+1}\right)dx=-\frac{1}{3}\ln\left|x+1\right|+\frac{1}{6}\ln\left|x^2-x+1\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Відповідь: $-\frac{1}{3}\ln\left|x+1\right|+\frac{1}{6}\ln\left|x^2-x+1\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$.

3. Знайти невизначений інтеграл $\int\frac{3x^2+14x+37}{(x-1)(x^2+4x+13)}dx$.

Розв’язання:

Розкладемо підінтегральний правильний дріб на найпростіші дроби за множниками знаменника: $\frac{3x^2+14x+37}{(x-1)(x^2+4x+13)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+4x+13}=\frac{A\left(x^2+4x+13\right)+\left(Bx+C\right)\left(x-1\right)}{\left(x-1\right)\left(x^2+4x+13\right)}$.

Прирівнюючи чисельники, одержимо $A\left(x^2+4x+13\right)+\left(Bx+C\right)\left(x-1\right)=3x^2+14x+37$.

Для визначення невідомих коефіцієнтів A, B, C прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях невідомої $\underline{Ax^2}+\underline{\underline{4Ax}}+13A+\underline{Bx^2}-\underline{\underline{Bx}}+\underline{\underline{Cx}}-C=\underline{3x^2}+\underline{\underline{14x}}+37$. Звідси маємо систему рівнянь

$$\begin{matrix}x^2:\\x^1:\\x^0:\end{matrix}\begin{cases}A+B=3,\\4A-B+C=14,\\13A-C=37;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=3-A,\\18A-40=14,\\C=13A-37;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=0,\\A=3,\\C=2.\end{cases}$$ Маємо $\frac{3x^2+14x+37}{(x-1)(x^2+4x+13)}=\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x^2+4x+13}$.

В результаті одержали інтеграл $\int\left(\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x^2+4x+13}\right)dx$. Проінтегруємо отримані дроби I і III типу, маємо $3\int\frac{d\left(x-1\right)}{x-1}=3\ln\left|x-1\right|+C$ і $2\int\frac{dx}{x^2+4x+13}=2\int\frac{dx}{\left(x+2\right)^2+\left(3\right)^2}=\frac{2}{3}\mathrm{arctg}\frac{x+2}{3}+C$.

Відповідь: $3\ln\left|x-1\right|+\frac{2}{3}\mathrm{arctg}\frac{x+2}{3}+C$.

4. Знайти невизначений інтеграл $\int\frac{x^3+6x^2+13x+6}{\left(x-2\right)\left(x+2\right)^3}dx$.

Розв’язання:

Розкладемо дріб на найпростіші дроби за множниками знаменника:
$$\frac{x^3+6x^2+13x+6}{\left(x-2\right)\left(x+2\right)^3}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{\left(x+2\right)^2}+\frac{D}{\left(x+2\right)^3}=\frac{A(x+2)^3+B(x+2)^2(x-2)+C(x+2)(x-2)+D(x-2)}{(x-2)(x+2)^3}.$$

Звідки $A\left(x+2\right)^3+B\left(x+2\right)^2\left(x-2\right)+C\left(x+2\right)\left(x-2\right)+D\left(x-2\right)=x^3+6x^2+13x+6$.

Коефіцієнти A, B, C знайдемо способом варіації значень x, що дає систему

$$\begin{matrix}x=-2\\x=2\\x=0\\x=-1\end{matrix}\begin{cases}-4D=-8+24-26+6,\\64A=8+24+26+6,\\8A-8B-4C-2D=6,\\A-3B-3C-3D=-1+6-13+6;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}D=1,\\A=1,\\-8B-4C=0,\\-3B-3C=0;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}D=1,\\A=1,\\4C=0,\\B=-C;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}D=1,\\A=1,\\C=0,\\B=0.\end{cases}$$

Тобто маємо $\dfrac{x^3+6x^2+13x+6}{(x-2)(x+2)^3}=\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{(x+2)^3}$ і $\int\dfrac{dx}{x-2}+\int\dfrac{dx}{(x+2)^3}=\ln|x-2|-\dfrac{1}{2(x+2)^2}+C$.

Відповідь: $\ln|x-2|-\dfrac{1}{2(x+2)^2}+C$.

5. Знайти невизначений інтеграл $\int\dfrac{2x^3-40x-8}{x(x+4)(x-2)}dx$.

Розв'язання:

Виділимо цілу частину неправильного дрібу $\dfrac{2x^3-40x-8}{x(x+4)(x-2)}=\dfrac{2x^3-40x-8}{x^3+2x^2-8x}=2-\dfrac{4x^2+24x+8}{x^3+2x^2-8x}$.

Розкладемо правильний дріб на найпростіші дроби: $\dfrac{4x^2+24x+8}{x(x+4)(x-2)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+4}+\dfrac{C}{x-2}=$ $=\dfrac{A(x+4)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+4)}{x(x+4)(x-2)}$. Прирівнюючи чисельники, одержимо рівняння $A(x+4)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+4)=4x^2+24x+8$.

Коефіцієнти A, B, C знайдемо способом варіації значень x, що дає систему рівнянь

$$\begin{array}{r} x=-4: \\ x=2: \\ x=0: \end{array}\begin{cases} 24B=-24, \\ 12C=72, \\ -8A=8; \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} B=-1, \\ C=6, \\ A=-1. \end{cases}$$

Тобто маємо $\dfrac{4x^2+24x+8}{x(x+4)(x-2)}=\dfrac{-1}{x}+\dfrac{-1}{x+4}+\dfrac{6}{x-2}$.

В результаті маємо $\int 2dx+\int\dfrac{dx}{x}+\int\dfrac{dx}{x+4}-\int\dfrac{6dx}{x-2}$. Перший інтеграл – табличний, інші – дроби I типу, тоді отримаємо: $2\int dx+\int\dfrac{dx}{x}+\int\dfrac{d(x+4)}{x+4}-6\int\dfrac{d(x-2)}{x-2}=2x+\ln|x|+\ln|x+4|-6\ln|x-2|+C$.

Відповідь: $2x+\ln\dfrac{|x(x+4)|}{(x-2)^6}+C$.

Дроби третього типу із знаменником з додатнім дискримінантом, можна розв'язати інакше.

6. Знайти невизначений інтеграл $\int\dfrac{dx}{x^2+5x+4}$.

Розв'язання:

$$\int\frac{dx}{x^2+5x+4}=\int\frac{dx}{(x+4)(x+1)}=\int\left(\frac{-\frac{1}{3}}{x+4}+\frac{\frac{1}{3}}{x+1}\right)dx=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+4}=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{3}\ln|x+4|+C.$$

Відповідь: $\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x+1}{x+4}\right|+C$.

3. Завдання для самостійного виконання

Знайти невизначені інтеграли $\int\dfrac{x}{x^3+27}dx$; $\int\dfrac{dx}{x(x^2+1)}$; $\int\dfrac{4x}{(x-1)(x+1)^2}dx$; $\int\dfrac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$.

ІНТЕГРУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ВИРАЗІВ

1. Основні поняття та теореми

Для інтегралів від ірраціональних функцій застосовують підстановки, які приводить до обчислення інтегралів від раціональних функцій.

I. $\int R\left(x,x^{\frac{m}{n}},...,x^{\frac{r}{s}}\right)dx$: раціоналізуюча заміна $x=t^k$, де k – найменший спільне кратне $n,...,s$.

Інтеграл $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}\right)dx$: раціоналізуюча заміна $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)=t^n$.

ІІ. $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$: раціоналізуючі заміни – підстановки Ейлера: $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm\sqrt{a}x$ (якщо $a>0$); $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$ (якщо $c>0$); $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm(x_1-x_2)t$ (якщо тричлен ax^2+bx+c має дійсні корені x_1 і x_2 ($x_1\neq x_2$)).

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{31+\sqrt{x}}$.

Розв'язання:

$$\int\frac{dx}{31+\sqrt{x}}\left[\begin{array}{c}\sqrt{x}=t\\ dx=2tdt\end{array}\right]=\int\frac{2tdt}{31+t}=2\int\frac{t+31-31}{31+t}dt=2\int\left(1-\frac{31}{31+t}\right)dt=2t-62\ln|31+t|+C.$$

Відповідь: $2\sqrt{x}-62\ln\left|31+\sqrt{x}\right|+C$.

2. Знайти інтеграл $\int\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}dx$.

Розв'язання:

$$\int\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}dx\left[\begin{array}{c}\sqrt{x}=t\\ dx=2tdt\end{array}\right]=\int\frac{1-t}{t(t^2+1)}2tdt=\int\frac{2-2t}{t^2+1}dt=2\int\frac{dt}{t^2+1}-\int\frac{2t}{t^2+1}dt=$$

$$=2\mathrm{arctg}t-\int\frac{d(t^2+1)}{t^2+1}=2\mathrm{arctg}t-\ln\left|t^2+1\right|+C.$$

Відповідь: $2\mathrm{arctg}\sqrt{x}-\ln|x+1|+C$.

3. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(10+\sqrt[4]{x}\right)^3}$.

Розв'язання:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(10+\sqrt[4]{x}\right)^3}\left[\begin{array}{c}x=t^4\\ dx=4t^3dt\end{array}\right]=\int\frac{4t^3dt}{t^2(10+t)^3}=4\int\frac{tdt}{(10+t)^3}.$$

Це правильний раціональний дріб. Розкладемо на простіші дроби: $\frac{t}{(10+t)^3}=\frac{A}{10+t}+\frac{B}{(10+t)^2}+\frac{C}{(10+t)^3}=\frac{A(10+t)^2+B(10+t)+C}{(10+t)^3}$,

прирівнюючи чисельники, маємо $t=A(10+t)^2+B(10+t)+C$ або $t=100A+20At+At^2+10B+Bt+C$,

звідки $\begin{cases}A=0,\\ 20A+B=1,\\ 100A+10B+C=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=0,\\ B=1,\\ C=-10.\end{cases}$ Отримуємо $4\int\frac{dt}{(10+t)^2}-40\int\frac{dt}{(10+t)^3}=-\frac{4}{10+t}+\frac{40}{2(10+t)^2}+C$.

Відповідь: $-\frac{4}{10+\sqrt[4]{x}}+\frac{20}{\left(10+\sqrt[4]{x}\right)^2}+C$.

4. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{50+\sqrt{x+50}}$.

Розв'язання:

$$\int\frac{dx}{50+\sqrt{x+50}}\left[\begin{array}{c}\sqrt{x+50}=t\\ dx=2tdt\end{array}\right]=\int\frac{2tdt}{50+t}=2\int\frac{50+t-50}{50+t}dt=2\int\left(1-\frac{50}{50+t}\right)dt=2t-50\ln|50+t|+C.$$

Відповідь: $2\sqrt{x+50}-100\ln\left|50+\sqrt{x+50}\right|+C$.

5. Знайти інтеграл $\int\frac{x+33}{x\sqrt{x-66}}dx$.

Розв’язання:

$$\int\frac{x+33}{x\sqrt{x-66}}dx\left[\begin{array}{c}\sqrt{x-66}=t\\ dx=2tdt\end{array}\right]=\int\frac{t^2+99}{\left(t^2+66\right)t}2tdt=2\int\frac{t^2+66+33}{t^2+66}dt=2\int\left(1-\frac{33}{t^2+66}\right)dt=$$

$$=2t-\frac{66}{\sqrt{66}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{66}}+C=2t-\sqrt{66}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{66}}+C.$$

Відповідь: $2\sqrt{x-66}-\sqrt{66}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{x-66}}{\sqrt{66}}+C$.

6. Знайти інтеграл $\int x\sqrt[3]{2x+3}dx$.

Розв’язання: $\int x\sqrt[3]{2x+3}dx\left[\begin{array}{c}\sqrt[3]{2x+3}=t\\ dx=\dfrac{3}{2}t^2dt\end{array}\right]=\dfrac{3}{2}\int\dfrac{t^3-3}{2}t^3dt=\dfrac{3}{4}\int\left(t^6-3t^3\right)dt=\dfrac{3}{28}t^7-\dfrac{9}{16}t^4+C$.

Відповідь: $\dfrac{3}{28}\left(\sqrt[3]{2x+3}\right)^7-\dfrac{9}{16}\left(\sqrt[3]{2x+3}\right)^4+C$.

7. Знайти інтеграл $\int\dfrac{dx}{1+\sqrt[3]{2x+1}}$.

Розв’язання:

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{2x+1}}\left[\begin{array}{c}2x+1=t^3\\ dx=\dfrac{3}{2}t^2dt\end{array}\right]=\frac{3}{2}\int\frac{t^2}{1+t}dt=\frac{3}{2}\int\frac{t^2-1+1}{1+t}dt=\frac{3}{2}\int\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)dt=\frac{3}{2}\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|1+t|\right)+C.$$

Відповідь: $\dfrac{3\left(\sqrt[3]{2x+1}\right)^2}{4}-\dfrac{3\sqrt[3]{2x+1}}{2}+\dfrac{3}{2}\ln\left|1+\sqrt[3]{2x+1}\right|+C$.

8. Знайти інтеграл $\int\dfrac{x^4dx}{2+\sqrt[4]{x^5+5}}$.

Розв’язання:

$$\int\frac{x^4dx}{2+\sqrt[4]{x^5+5}}\left[\begin{array}{c}x^5+5=t^4\\ x^4dx=\dfrac{4}{5}t^3dt\end{array}\right]=\frac{4}{5}\int\frac{t^3dt}{2+t}=\frac{4}{5}\int\frac{t^3+8-8}{2+t}dt=\frac{4}{5}\int\left(\frac{t^3+8}{2+t}-\frac{8}{2+t}\right)dt=$$

$$=\frac{4}{5}\int\left(t^2-2t+4-\frac{8}{2+t}\right)dt=\frac{4}{15}t^3-\frac{4}{5}t^2+\frac{16}{5}t-\frac{32}{5}\ln|2+t|+C.$$

Відповідь: $\dfrac{4}{15}\left(\sqrt[4]{x^5+5}\right)^3-\dfrac{4}{5}\left(\sqrt[4]{x^5+5}\right)^2+\dfrac{16}{5}\sqrt[4]{x^5+5}-\dfrac{32}{5}\ln\left|2+\sqrt[4]{x^5+5}\right|+C$.

9. Знайти інтеграл $\int\dfrac{x^2+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}dx$.

Розв’язання:

$$\int\frac{x^2+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}dx\left[\begin{array}{c}x+1=t^6\\ dx=6t^5dt\end{array}\right]=\int\frac{\left(t^6-1\right)^2+t^3}{t^2}6t^5dt=6\int\left(t^{15}-2t^9+t^6+t^3\right)dt=\frac{6t^{16}}{16}-\frac{12t^{10}}{10}+\frac{6t^7}{7}+\frac{6t^4}{4}+C.$$

Відповідь: $\dfrac{3\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^8}{8}-\dfrac{6\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^5}{5}+\dfrac{6\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^7}{7}+\dfrac{3\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2}{2}+C$.

10. Знайти інтеграл $\int\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\dfrac{dx}{x-1}$.

Розв’язання:

$$\int\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{x-1}\left[\begin{array}{cc}\dfrac{x+1}{x-1}=t^2 & x=\dfrac{t^2+1}{t^2-1}\\ x-1=\dfrac{2}{t^2-1} & dx=\dfrac{-4tdt}{\left(t^2-1\right)^2}\end{array}\right]=-\int\frac{2t^2dt}{t^2-1}=-2\int\frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt=-2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=-2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C.$$

Відповідь: $-2\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-\ln\dfrac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)^2}{2}+C$.

11. Знайти інтеграл $\int\dfrac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\dfrac{2-x}{2+x}}dx$.

Розв'язання:

$$\int\frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx\left[\begin{array}{ll}\dfrac{2-x}{2+x}=t^3 & x=\dfrac{2-2t^3}{t^3+1}\\ 2-x=\dfrac{4t^3}{t^3+1} & dx=\dfrac{-12t^2dt}{\left(t^3+1\right)^2}\end{array}\right]=-\int\frac{2\left(t^3+1\right)^2}{16t^6}t\frac{12t^2dt}{\left(t^3+1\right)^2}=-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^3}=\frac{3}{4}t^{-2}+C.$$

Відповідь: $\dfrac{3}{4}\left(\sqrt[3]{\dfrac{2+x}{2-x}}\right)^2+C$.

12. Знайти інтеграл $\int\dfrac{dx}{x+1-\sqrt{x^2+2x-1}}$.

Розв'язання:

Підінтегральна функція має вигляд $R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)$, $a>0$, застосуємо підстановку Ейлера $\sqrt{ax^2+bx+c}=t+x$, тоді

$$\int\frac{dx}{x+1-\sqrt{x^2+2x-1}}\left[\begin{array}{ll}x^2+2x-1=(t+x)^2 & x=\dfrac{t^2+1}{2-2t}\\ dx=\dfrac{2t\cdot2(1-t)+2\left(t^2+1\right)}{4(1-t)^2} & dx=\dfrac{2t-t^2+1}{2(1-t)^2}dt\end{array}\right]=$$

$$=\int\frac{2t-t^2+1}{2(1-t)^3}dt=\int\frac{2t-t^2-1+2}{2(1-t)^3}dt=\int\frac{2dt}{2(1-t)^3}-\int\frac{dt}{2(1-t)}=\frac{1}{2(1-t)^2}+\frac{1}{2}\ln|1-t|+C.$$

Відповідь: $\dfrac{1}{2\left(x+1-\sqrt{x^2+2x-1}\right)^2}+\dfrac{1}{2}\ln\left|x+1-\sqrt{x^2+2x-1}\right|+C$.

13. Знайти інтеграл $\int\dfrac{(2x+1)dx}{\sqrt{3x^2+9x+1}}$.

Розв'язання:

$$\frac{1}{3}\int\frac{(6x+9)dx}{\sqrt{3x^2+9x+1}}-2\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2+9x+1}}=\frac{1}{3}\int\frac{d(3x^2+9x+1)}{\sqrt{3x^2+9x+1}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{1}{3}-\dfrac{9}{4}}}=$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{3x^2+9x+1}-\frac{2}{\sqrt{3}}\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{23}{12}}\right|+C=\frac{2}{3}\sqrt{3x^2+9x+1}-\frac{2}{\sqrt{3}}\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+\frac{1}{3}}\right|+C.$$

Відповідь: $\dfrac{2}{3}\sqrt{3x^2+9x+1}-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\ln\left|x+\dfrac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+\dfrac{1}{3}}\right|+C$.

14. Знайти інтеграл $\int\dfrac{5x+7}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx$.

Розв'язання:

Виділимо в чисельнику похідну квадратного тричлена $5-4x-x^2$:

$$\int\frac{5x+7}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx=-\frac{5}{2}\int\frac{(-2x-4)dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}-3\int\frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}=-\frac{5}{2}\int\frac{d\left(5-4x-x^2\right)}{\sqrt{5-4x-x^2}}-3\int\frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}}=$$

$$=-5\sqrt{5-4x-x^2}-3\arcsin\frac{x+2}{3}+C.$$

Відповідь: $-5\sqrt{5-4x-x^2}-3\arcsin\dfrac{x+2}{3}+C$.

3. Завдання для самостійного виконання

Знайти невизначені інтеграли від ірраціональних функцій (по одному з комірки)

$\int\frac{xdx}{1+\sqrt{x}}$; $\int\frac{xdx}{1+2\sqrt{x}}$; $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$; $\int\frac{x^3dx}{1+\sqrt{x}}$; $\int\frac{dx}{2-\sqrt[3]{x}}$
$\int\frac{\sqrt{x}+2}{x+1}dx$; $\int\frac{\sqrt{x}+1}{x+1}dx$; $\int\frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$; $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x}}$; $\int\frac{xdx}{\sqrt{x}-3x}$
$\int x^3\sqrt{2-5x}dx$; $\int(x-2)\sqrt{x+1}dx$; $\int x^3\sqrt{1-2x}dx$
$\int\frac{\sqrt{x-1}+x}{\sqrt{x-1}}dx$; $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x-2}}$; $\int\frac{x+\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{x-2}}dx$; $\int\frac{x+\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt{x-2}}dx$; $\int\frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$; $\int\frac{(x+1)dx}{x\sqrt{x-2}}$; $\int\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$
$\int\frac{2x-5}{1+\sqrt{2x+1}}dx$; $\int\frac{(x+9)dx}{\sqrt{x+9}+3}$; $\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}$; $\int\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+x}dx$
$\int\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[5]{x^2-1}}dx$; $\int\frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2-1}-\sqrt[5]{x^2-1}}dx$; $\int\frac{\sqrt[3]{x^2-1}+x}{\sqrt[5]{x^2-1}+1}dx$; $\int\frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[5]{x^2-1}+x}dx$; $\int\frac{\sqrt[3]{x^2-1}+1}{x-\sqrt[5]{x^2-1}}dx$
$\int\frac{dx}{(x-7)\sqrt{x^2+2x+2}}$; $\int\frac{dx}{(x-3)\sqrt{x^2+x+2}}$; $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}$

ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ВИРАЗІВ

1. Основні поняття та теореми

Для інтегралів з непарним степенем синуса чи косинуса застосовують метод внесення під знак диференціала $\cos xdx=d(\sin x)$, $\sin xdx=-d(\cos x)$ і за необхідністю тригонометричні формули, як $\sin^2x+\cos^2x=1$. Для інтегралів з парним степенем застосовують тригонометричні формули пониження степеня: $\sin^2x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin x\cos x=\dfrac{\sin 2x}{2}$.

Інтеграли у вигляді добутку синусів чи косинусів з різними аргументами обчислюються із застосуванням наступних тригонометричних формул: $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$, $\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$, $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$.

Метод універсальної тригонометричної підстановки $\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}=t$, $x=2\mathrm{arctg}t$, $dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. Універсальна підстановка може бути застосована при знаходженні інтеграла від будь-яких співвідношень тригонометричних функцій $\sin x$ і $\cos x$. Однак, найбільш ефективною вона є в тих випадках, коли функції $\sin x$ і $\cos x$ мають перші степені і подані у вигляді суми чи різниці. Застосування цієї підстановки до випадків, коли $\sin x$ і $\cos x$ мають парні степені, приводить до раціональних дробів з високими степенями.

Якщо $\sin x$ і $\cos x$ мають парні степені, то краще застосовувати підстановку $\mathrm{tg}x=t$ або якусь іншу. Підстановка $\mathrm{tg}x=t$ дає можливість звести до раціонального алгебраїчного вигляду інтеграл $\int\sin^m x\cdot\cos^n xdx$ у тому випадку, коли хоча б один (або обидва) показники m та n від'ємні.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти інтеграл $\int(1-\mathrm{tg}x)^2dx$.

Розв'язання: $\int(1-\mathrm{tg}x)^2dx=\int(1-2\mathrm{tg}x+\mathrm{tg}^2x)dx=\int\left(\dfrac{1}{\cos^2x}-2\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)dx=\mathrm{tg}x+2\ln|\cos x|+C$.

Відповідь: $\mathrm{tg}x + 2\ln\left|\cos x\right| + C$.

2. Знайти інтеграл $\int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x}dx$.

Розв'язання: $\int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x}dx = 2\int \frac{\cos 2x}{\sin 2x}dx = \int \frac{d(\sin 2x)}{\sin 2x} = \ln\left|\sin 2x\right| + C$. Відповідь: $\ln\left|\sin 2x\right| + C$.

3. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \cos 2x}$.

Розв'язання: $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \cos 2x} = \int \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C$.

Відповідь: $\mathrm{tg}x + C$.

4. Знайти інтеграл $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx$.

Розв'язання:

$$\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx = \int \frac{(1-\cos x)^2}{(1+\cos x)(1-\cos x)}dx = \int \frac{\left(1-2\cos x+\cos^2 x\right)}{\sin^2 x}dx = \int \frac{\left(2-2\cos x-\sin^2 x\right)}{\sin^2 x}dx =$$

$$= -2\mathrm{ctg}x - \frac{2}{\sin x} - x + C.$$

Відповідь: $-2\mathrm{ctg}x - \frac{2}{\sin x} - x + C$.

5. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{1-\sin x}$.

Розв'язання: $\int \frac{dx}{1-\sin x} = \int \frac{(1+\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}dx = \int \frac{(1+\sin x)}{\left(1-\sin^2 x\right)}dx = \int \frac{(1+\sin x)}{\cos^2 x}dx = \mathrm{tg}x + \frac{1}{\cos x} + C$.

Відповідь: $\mathrm{tg}x + \frac{1}{\cos x} + C$.

6. Знайти інтеграл $\int \cos^3 x dx$.

Розв'язання: $\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cos x dx = \int \left(1-\sin^2 x\right)d(\sin x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$.

Відповідь: $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$.

7. Знайти інтеграл $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x}dx$.

Розв'язання:

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x}dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\sin x dx = -\int \frac{\left(1-\cos^2 x\right)}{\cos x}d(\cos x) = \int\left(\cos x - \frac{1}{\cos x}\right)d(\cos x) = \frac{\cos^2 x}{2} - \ln\left|\cos x\right| + C.$$

Відповідь: $\frac{\cos^2 x}{2} - \ln\left|\cos x\right| + C$.

8. Знайти інтеграл $\int \cos^3 x \cdot \sqrt{\sin x}dx$.

Розв'язання:

$$\int \cos^3 x \cdot \sqrt{\sin x}dx = \int \cos^2 x\sqrt{\sin x}\cos x dx = \int \left(1-\sin^2 x\right)\sqrt{\sin x}d(\sin x) = \int\left(\sin^{\frac{1}{2}} x - \sin^{\frac{5}{2}} x\right)d(\sin x) =$$

$$= \frac{\sin^{\frac{3}{2}} x}{3/2} - \frac{\sin^{\frac{7}{2}} x}{7/2} + C.$$

Відповідь: $\frac{2\sin^{\frac{3}{2}} x}{3} - \frac{2\sin^{\frac{7}{2}} x}{7} + C$.

9. Знайти інтеграл $\int \sin^5 x \cos^4 x dx$.

Розв'язання:

$$\int \sin^5 x \cos^4 x dx = -\int \left(1-\cos^2 x\right)^2 \cos^4 x d(\cos x) = -\int \left(\cos^4 x - 2\cos^6 x + \cos^8 x\right) d(\cos x) =$$

$$= -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{2\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^9 x}{9} + C .$$

Відповідь: $-\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{2\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^9 x}{9} + C$.

10. Знайти інтеграл $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$.

Розв'язання:

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \int (\sin x \cdot \cos x)^2 \cos^2 x dx = \int \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x(1+\cos 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(\frac{1-\cos 4x}{2} + \sin^2 2x \cos 2x\right) dx = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C .$$

Відповідь: $\frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C$.

11. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

Розв'язання:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{4dx}{(2\sin x \cos x)^2} = \int \frac{4dx}{\sin^2 2x} = \int \frac{8dx}{1-\cos 4x} = 8\int \frac{1+\cos 4x}{1-\cos^2 4x} dx = 2\int \frac{1+\cos 4x}{\sin^2 4x} d(4x) =$$

$$= -2\mathrm{ctg} 4x - \frac{2}{\sin 4x} + C .$$

Відповідь: $-2\mathrm{ctg} 4x - \frac{2}{\sin 4x} + C$.

12. Знайти інтеграл $\int \cos^6 x dx$.

Розв'язання:

$$\int \cos^6 x dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3 dx = \frac{1}{8}\int \left(1 + 3\cos 2x + 3\cos^2 2x + \cos^3 2x\right) dx = \frac{x}{8} + \frac{3}{16}\sin 2x +$$

$$+ \frac{3}{8}\int \frac{1+\cos 4x}{2} dx + \frac{1}{16}\int \left(1-\sin^2 2x\right) d(\sin 2x) = \frac{x}{8} + \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{3x}{16} + \frac{3}{64}\sin 4x + \frac{1}{16}\sin 2x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C .$$

Відповідь: $\frac{5x}{16} + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C$.

13. Знайти інтеграл $\int \sin 5x \cos 9x dx$.

Розв'язання:

$$\int \sin 5x \cos 9x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 14x + \sin(-4x)) dx = \frac{1}{2}\int (\sin 14x - \sin 4x) dx = \frac{\cos 4x}{8} - \frac{\cos 14x}{28} + C .$$

Відповідь: $\frac{\cos 4x}{8} - \frac{\cos 14x}{28} + C$.

14. Знайти інтеграл $\int \sin 5x \sin 9x dx$.

Розв'язання:

$$\int \sin 5x \sin 9x dx = \frac{1}{2}\int (\cos(-4x) - \cos 14x) dx = \frac{1}{2}\int (\cos 4x - \cos 14x) dx = \frac{\sin 4x}{8} - \frac{\sin 14x}{28} + C .$$

Відповідь: $\frac{\sin 4x}{8} - \frac{\sin 14x}{28} + C$.

15. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{1-\sin x}$.

Розв'язання:

$$\int \frac{dx}{1-\sin x}\left[\begin{array}{l} dx=\dfrac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}\end{array}\right]=\int \frac{2}{\left(1-\dfrac{2t}{1+t^2}\right)\left(1+t^2\right)}dt=\int \frac{2}{(1-t)^2}dt=-2\int \frac{d(1-t)}{(1-t)^2}=\frac{2}{1-t}+C=\frac{2}{1-\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}+C.$$

Відповідь: $\dfrac{2}{1-\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}+C$.

Цей інтеграл вже розв'язували іншим методом, покажемо, що отримані відповіді тотожні

$$\operatorname{tg}x+\frac{1}{\cos x}=\frac{\sin x+1}{\cos x}=\frac{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}+\sin^2\dfrac{x}{2}+\cos^2\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}}=\frac{\left(\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right)^2}{\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}}=\frac{\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1}{1-\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}.$$

Різниця становить сталу величину $\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1}{1-\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}-\dfrac{2}{1-\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}=-1$.

16. Знайти інтеграл $\displaystyle\int \frac{1}{2\sin x+3\cos x}dx$.

Розв'язання:

$$\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x}=\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=u \\ dx=\dfrac{2du}{1+u^2}\end{array}\right]=\int \frac{\dfrac{2du}{1+u^2}}{2\cdot\dfrac{2u}{1+u^2}+3\cdot\dfrac{1-u^2}{1+u^2}}=\int \frac{2du}{4u+3-3u^2}=-\frac{2}{3}\int \frac{du}{u^2-2u\cdot\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{9}-\dfrac{13}{9}}=$$

$$=-\frac{2}{3}\int \frac{du}{\left(u-\dfrac{2}{3}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{13}}{3}\right)^2}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2\sqrt{13}}\ln\left|\frac{u-\dfrac{2}{3}-\dfrac{\sqrt{13}}{3}}{u-\dfrac{2}{3}+\dfrac{\sqrt{13}}{3}}\right|+C=-\frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{3u-2-\sqrt{13}}{3u-2+\sqrt{13}}\right|+C.$$

Відповідь: $\dfrac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\dfrac{3\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-2+\sqrt{13}}{3\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-2-\sqrt{13}}\right|+C$.

17. Знайти інтеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

Розв'язання:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}\left[\begin{array}{ll} x=\operatorname{arctg}t & dx=\dfrac{dt}{1+t^2} \\ \sin x=\dfrac{t^2}{t^2+1} & \cos x=\dfrac{1}{t^2+1}\end{array}\right]=\int \frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{\dfrac{t^2}{t^2+1}\cdot\dfrac{1}{t^2+1}}=\int \frac{t^2+1}{t^2}dt=t-\frac{1}{t}+C=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C.$$

Відповідь: $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C$.

Іноді для інтегрування ірраціональних виразів застосовується тригонометрія

18. Знайти інтеграл $\int \sqrt{9-x^2}\,dx$.

Розв'язання:

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx=\left[\begin{array}{l} x=3\sin t \\ dx=3\cos tdt\end{array}\right]=\int \sqrt{9-9\sin^2 t}\,3\cos tdt=9\int \cos^2 tdt=\frac{9}{2}\int (1+\cos 2t)dt=\frac{9}{2}t+\frac{9}{4}\sin 2t+C=$$

$$=\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}+\frac{9}{4}\sin 2\arcsin\frac{x}{3}+C=\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}+\frac{9}{4}2\frac{x}{3}\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}+C=\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}+\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+C.$$

Відповідь: $\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}+\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+C$.

19. Знайти інтеграл $\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx$.

Розв'язання:

Застосуємо до інтеграла підстановку: $x=\frac{1}{\cos t}$.

Тоді $dx=\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt$; $t=\arccos\frac{1}{x}$; $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}-1}=\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}=\sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}=\frac{\sin t}{\cos t}$.

Отже, $\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx=\int\frac{\sin t\cdot\cos^4 t\cdot\sin t}{\cos t\cdot\cos^2 t}dt=\int\sin^2 t\cdot\cos t dt=\int\sin^2 t d(\sin t)=\frac{\sin^3 t}{3}+C$.

Повернемось до попередньої змінної: $\frac{1}{3}\sin^3\left(\arccos\frac{1}{x}\right)+C=\frac{1}{3}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)^3+C$.

Відповідь: $\frac{1}{3}\sin^3\left(\arccos\frac{1}{x}\right)+C=\frac{1}{3}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)^3+C$.

20. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x-16}}$.

Розв'язання:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x-16}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2-25}}=\begin{bmatrix}x-3=u\\ dx=du\end{bmatrix}=\int\frac{du}{\sqrt{u^2+5^2}}=\begin{bmatrix}u=\frac{5}{\sin t}\\ du=-\frac{5\cos t}{\sin^2 t}dt\end{bmatrix}=\int\frac{-\frac{5\cos t}{\sin^2 t}dt}{\sqrt{\frac{25}{\sin^2 t}-25}}=$$

$$=\int\frac{-\frac{5\cos t}{\sin^2 t}dt}{\frac{5}{\sin t}\cdot\cos t}=-\int\frac{dt}{\sin t}=-\int\frac{\sin t dt}{1-\cos^2 t}=\begin{bmatrix}\cos t=v\\ -\sin t dt=dv\end{bmatrix}=\int\frac{dv}{1-v^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{v+1}{v-1}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos t+1}{\cos t-1}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-\frac{25}{u^2}}+1}{\sqrt{1-\frac{25}{u^2}}-1}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{u^2-25}+u}{\sqrt{u^2-25}-u}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-6x-16}+x-3}{\sqrt{x^2-6x-16}-(x-3)}\right|+C.$$

Відповідь: $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-6x-16}+x-3}{\sqrt{x^2-6x-16}-x+3}\right|+C$.

3. Завдання для самостійного виконання

Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних функцій (по одному з комірки)

$\int\sin^6 x dx$; $\int\sin^4 x\cos^2 x dx$
$\int\mathrm{ctg}^2 x dx$; $\int\mathrm{tg}^2 x dx$; $\int\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}dx$; $\int\frac{\cos^2 x}{1+\sin x}dx$
$\int\sin\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3}dx$; $\int\sin\frac{x}{3}\sin\frac{2x}{3}dx$; $\int\cos\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3}dx$
$\int\sin^2 x\cos^3 x dx$; $\int\sin^3 x\cos^4 x dx$; $\int\sin^5 x dx$; $\int\cos^5 x dx$; $\int\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$
$\int\frac{dx}{1-\sin 2x}$; $\int\frac{dx}{1-\cos 2x}$; $\int\frac{\cos^2 x dx}{1+2\sin x}$

Модуль 07 „Інтегральне числення функції однієї змінної. Визначений інтеграл”

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ. ФОРМУЛА НЬЮТОНА – ЛЕЙБНІЦА

1. Основні поняття та теореми

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ та $F(x)$ – будь-яка первісна для $f(x)$ на $[a;b]$. Тоді визначений інтеграл від функції $f(x)$ на $[a;b]$ дорівнює приросту первісної $F(x)$ на цьому відрізку, тобто $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Знаходження визначених інтегралів з використанням формули Ньютона – Лейбніца здійснюється за два кроки:

1) спочатку, використовуючи техніку знаходження невизначеного інтеграла, знаходять деяку первісну $F(x)$ для підінтегрального виразу $f(x)$. Можна використовувати будь-яку первісну $F(x)$ для підінтегральної функції $f(x)$, наприклад ту, що має найпростіший вигляд при $C = 0$.

2) Потім використовують власне формулу Ньютона – Лейбніца, тобто знаходять приріст первісної, що дорівнює шуканому інтегралу. Тому введемо позначення приросту первісної, яке зручно використовувати: $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Формула інтегрування частинами визначеного інтеграла має вигляд $\int_a^b u(x)\cdot dv(x) = (u(x)\cdot v(x))\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\cdot du(x)$

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти визначений інтеграл $\int\limits_1^2 x^{-5}dx$.

Розв’язання: $\int\limits_1^2 x^{-5}dx = \dfrac{x^{-4}}{-4}\Bigg|_1^2 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{64} = \dfrac{15}{64}$. Відповідь: $\dfrac{15}{64}$.

2. Знайти визначений інтеграл $\int\limits_1^2 \dfrac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

Розв’язання: $\int\limits_1^2 \dfrac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{2}\Bigg|_1^2 = \arcsin 1 - \arcsin\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$. Відповідь: $\dfrac{\pi}{3}$.

3. Знайти визначений інтеграл $\int\limits_0^\pi \sin\dfrac{x}{4}dx$.

Розв’язання: $\int\limits_0^\pi \sin\dfrac{x}{4}dx = 4\int\limits_0^\pi \sin\dfrac{x}{4}d\left(\dfrac{x}{4}\right) = -4\cos\dfrac{x}{4}\Bigg|_0^\pi = 4\left(\cos\dfrac{0}{4} - \cos\dfrac{\pi}{4}\right) = 4\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4 - 2\sqrt{2}$.

Відповідь: $4 - 2\sqrt{2}$.

4. Знайти визначений інтеграл $\int\limits_1^9 \dfrac{dx}{\sqrt{2x+7}}$.

Розв’язання: $\int\limits_1^9 \dfrac{dx}{\sqrt{2x+7}} = \dfrac{1}{2}\int\limits_1^9 \dfrac{d(2x+7)}{\sqrt{2x+7}} = \dfrac{1}{2}\int\limits_1^9 (2x+7)^{-\frac{1}{2}}d(2x+7) = \dfrac{1}{2}\dfrac{(2x+7)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_1^9 = \sqrt{25} - \sqrt{9} = 2$.

Відповідь: 2.

5. Знайти визначений інтеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}dx$.

Розв’язання:

Застосуємо внесення під знак диференціала $\sin x dx = -d(\cos x)$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = -\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{\cos 0} = 2 - 1 = 1.$$

Відповідь: 1.

6. Знайти визначений інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 xdx$.

Розв'язання: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\cos xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)d(\sin x) = \left(\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Відповідь: $\frac{2}{3}$.

7. Знайти визначений інтеграл $\int_0^1 2x \cdot 7^{x^2} dx$.

Розв'язання: $\int_0^1 2x \cdot 7^{x^2} dx = \int_0^1 7^{x^2} d(x^2) = \frac{7^{x^2}}{\ln 7}\Bigg|_0^1 = \frac{7^1 - 7^0}{\ln 7} = \frac{6}{\ln 7}$.

Відповідь: $\frac{6}{\ln 7}$.

8. Знайти визначений інтеграл $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$.

Розв'язання: $\int_1^e \ln^2 xd(\ln x) = \frac{\ln^3 x}{3}\Bigg|_1^e = \frac{\ln^3 e}{3} - \frac{\ln^3 1}{3} = \frac{1}{3}$.

Відповідь: $\frac{1}{3}$.

9. Знайти визначений інтеграл $\int_0^{\pi} x\sin xdx$.

Розв'язання:

$$\int_0^{\pi} x\sin xdx \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin xdx & v = -\cos x \end{bmatrix} = -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos xdx = -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \sin x\Big|_0^{\pi} = -\pi\cos\pi = \pi.$$

Відповідь: π.

10. Знайти визначений інтеграл $\int_{-2}^{0} (x+2)e^{\frac{x}{2}}dx$.

Розв'язання:

$$\int_{-2}^{0} (x+2)e^{\frac{x}{2}}dx \begin{bmatrix} u = x+2 & du = dx \\ dv = e^{\frac{x}{2}}dx & v = 2e^{\frac{x}{2}} \end{bmatrix} = (2x+4)e^{\frac{x}{2}}\Bigg|_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0} 2e^{\frac{x}{2}}dx = 4 - 0 - 4e^{\frac{x}{2}}\Bigg|_{-2}^{0} = 4 - 4 + \frac{4}{e}.$$

Відповідь: $4/e$.

11. Знайти визначений інтеграл $\int_0^{\pi} x^2 \sin xdx$.

Розв'язання:

$$\int_0^{\pi} x\sin xdx \begin{bmatrix} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = \sin xdx & v = -\cos x \end{bmatrix} = -x^2\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2x\cos xdx \begin{bmatrix} u = 2x & du = 2dx \\ dv = \cos xdx & v = \sin x \end{bmatrix} = -x^2\cos x\Big|_0^{\pi} +$$

$$-x^2\cos x\Big|_0^{\pi} + 2x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2\sin xdx = \pi^2 + 2\cos x\Big|_0^{\pi} = \pi^2 - 4.$$

Відповідь: $\pi^2 - 4$.

12. Знайти визначений інтеграл $\int_0^{\pi} e^x \cos xdx$.

Розв'язання:

$$\int_0^{\pi} e^x \cos x dx \begin{bmatrix} u=\cos x & du=-\sin x dx \\ dv=e^x dx & v=e^x \end{bmatrix} = e^x \cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x \sin x dx \begin{bmatrix} u=\sin x & du=\cos x dx \\ dv=e^x dx & v=e^x \end{bmatrix} = e^x \cos x\Big|_0^{\pi} +$$

$+ e^x \sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \cos x dx$. Тоді $2\int_0^{\pi} e^x \cos x dx = e^x \cos x\Big|_0^{\pi} + e^x \sin x\Big|_0^{\pi} = -e^{\pi} - 1$; $\int_0^{\pi} e^x \cos x dx = \dfrac{-e^{\pi}-1}{2}$.

Відповідь: $-\left(e^{\pi}+1\right)/2$.

13. Знайти визначений інтеграл $\int_0^1 \arcsin x dx$.

Розв’язання:

$$\int_0^1 \arcsin x dx \begin{bmatrix} u=\arcsin x & du=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv=dx & v=x \end{bmatrix} = x\arcsin x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{d\left(1-x^2\right)}{2\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x\arcsin x\Big|_0^1 + \sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 = 1\cdot\arcsin 1 - \sqrt{1-0^2} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Відповідь: $\dfrac{\pi}{2} - 1$.

14. Знайти визначений інтеграл $\int_1^{120} \ln(2x) dx$.

Розв’язання:

$$\int_1^{e} \ln(2x) dx \begin{bmatrix} u=\ln(2x) & du=\dfrac{2dx}{2x} \\ dv=dx & v=x \end{bmatrix} = x\ln(2x)\Big|_1^e - \int_1^e dx = e\ln(2e) - \ln 2 - e + 1 = e\ln 2 + e - \ln 2 - e + 1 =$$

$= (e-1)\ln 2 + 1$.

Відповідь: $(e-1)\ln 2 + 1$.

15. Знайти визначений інтеграл $\int_0^1 \ln\left(4x^2+6\right) dx$.

Розв’язання:

$$\int_0^1 \ln\left(4x^2+6\right) dx \begin{bmatrix} u=\ln\left(4x^2+6\right) & du=\dfrac{8xdx}{4x^2+6} \\ dv=dx & v=x \end{bmatrix} = x\ln\left(4x^2+6\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{8x^2dx}{4x^2+6} = 1\cdot\ln 10 - \int_0^1 \frac{\left(4x^2+6-6\right)dx}{2x^2+3} =$$

$$= \ln 10 - \int_0^1 \left(2 - \frac{6}{2x^2+3}\right) dx = \ln 10 - 2x\Big|_0^1 + 3\int_0^1 \frac{dx}{x^2+\frac{3}{2}} = \ln 10 - 2 + \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^1 = \ln 10 - 2 + \sqrt{6}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Відповідь: $\ln 10 - 2 + \sqrt{6}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

3. Завдання для самостійного виконання

Обчислити визначені інтеграли (по одному-два з кожної комірки)

безпосереднє інтегрування	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; $\int_0^1 x^3 dx$; $\int_0^3 \frac{dx}{9+x^2}$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$
зміна змінної під знаком диференціала	$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$; $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{4x+5}}$; $\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+7x}}$; $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{7x-6}}$; $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2 2x}$; $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\sin^2 2x}$; $\int_1^2 2^{3x-4} dx$
внесення під знак диференціала	$\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$; $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx$; $\int_0^1 x^2\sqrt{1+8x^3} dx$; $\int_0^2 x\sqrt{1+2x^2} dx$; $\int_0^e \frac{\ln x dx}{x}$

інтегрування частинами	$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin x dx$; $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$; $\int\limits_0^1 xe^{2x}dx$; $\int\limits_0^{\pi} e^x \sin x dx$; $\int\limits_1^e x\ln x dx$; $\int\limits_0^1 \ln\left(x^2+2\right)dx$; $\int\limits_0^2 \ln\left(x^2+1\right)dx$; $\int\limits_0^2 \ln\left(x^2+2\right)dx$; $\int\limits_0^2 (x+2)\ln(x+1)dx$; $\int\limits_0^1 \mathrm{arctg} x dx$

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ВІД ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНИХ, ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ТА ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Приклади виконання завдань

1. Знайти визначений інтеграл $\int\limits_2^5 \frac{dx}{(x-1)(x+2)}$.

Розв'язання:

$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$, звідки $1 = A(x+2) + B(x-1)$.

При $x := -2$ знаходимо $B = -\frac{1}{3}$, при $x := 1$ знаходимо $A = \frac{1}{3}$.

Отже маємо $\frac{1}{3}\int\limits_2^5 \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int\limits_2^5 \frac{dx}{x+2} = \left(\frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x+2|\right)\Bigg|_2^5 = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\Bigg|_2^5 = \frac{1}{3}\left(\ln\frac{4}{7} - \ln\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}\ln\frac{16}{7}$.

Відповідь: $\frac{1}{3}\ln\frac{16}{7}$.

2. Знайти визначений інтеграл $\int\limits_2^3 \frac{dx}{2x^2+3x-2}$.

Розв'язання:

$\int\limits_2^3 \frac{dx}{2x^2+3x-2} = \int\limits_2^3 \frac{dx}{(x+2)(2x-1)}$.

$\frac{1}{(x+2)(2x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{2x-1} = \frac{A(2x-1)+B(x+2)}{(x+2)(2x-1)}$, звідки $1 = A(2x-1) + B(x+2)$.

При $x := \frac{1}{2}$ знаходимо $B = \frac{2}{5}$, при $x := -2$ знаходимо $A = -\frac{1}{5}$.

Отже $\frac{2}{5}\int\limits_2^5 \frac{dx}{2x-1} - \frac{1}{5}\int\limits_2^3 \frac{dx}{x+2} = \left(\frac{1}{5}\ln|2x-1| - \frac{1}{5}\ln|x+2|\right)\Bigg|_2^3 = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{2x-1}{x+2}\right|\Bigg|_2^3 = \frac{1}{5}\left(\ln\frac{5}{5} - \ln\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{5}\ln\frac{4}{3}$.

Відповідь: $\frac{1}{5}\ln\frac{4}{3}$.

3. Знайти визначений інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

Розв'язання:

$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+4+1} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \mathrm{arctg}(x+2)\Big|_0^1 = \mathrm{arctg}3 - \mathrm{arctg}2$,

$\mathrm{arctg}\alpha - \mathrm{arctg}\beta = \mathrm{arctg}\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}$, $\mathrm{arctg}3 - \mathrm{arctg}2 = \mathrm{arctg}\frac{3-2}{1+3\cdot 2} = \mathrm{arctg}\frac{1}{7}$.

Відповідь: $\mathrm{arctg}\frac{1}{7}$.

4. Знайти визначений інтеграл $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$.

Розв'язання:

$$\frac{1}{x+x^3}=\frac{1}{x\left(1+x^2\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{A\left(1+x^2\right)+x(Bx+C)}{x\left(1+x^2\right)},\ 1=A+Ax^2+Bx^2+Cx\text{, тоді } \begin{matrix} x^2: \\ x^1: \\ x^0: \end{matrix}\begin{cases} A+B=0, \\ C=0, \\ A=1. \end{cases}$$

Отже $\int_1^2\frac{dx}{x}-\int_1^2\frac{xdx}{x^2+1}=\int_1^2\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int_1^2\frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1}=\ln x\Big|_1^2-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_1^2=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{x^2+1}\Big|_1^2=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{4}{5}-\ln\frac{1}{2}\right).$

Відповідь: $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$.

5. Знайти визначений інтеграл $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^3dx}{x^2-3x+2}$.

Розв'язання:

$$\frac{x^3}{x^2-3x+2}=\frac{x^3-3x^2+2x+3x^2-2x}{x^2-3x+2}=x+\frac{3x^2-9x+6-2x+9x-6}{x^2-3x+2}=x+3+\frac{7x-6}{(x-2)(x-1)},$$

$\frac{7x-6}{(x-2)(x-1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+B(x-2)}{(x-2)(x-1)}$, $7x-6=A(x-1)+B(x-2)$, при $x:=1$ знаходимо $B=-1$, при $x:=2$ знаходимо $A=8$.

$$\int_0^{\frac{1}{2}}(x+3)dx+\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{8dx}{x-2}-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x-1}=\left(\frac{x^2}{2}+3x+8\ln|x-2|-\ln|x-1|\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{8}+\frac{3}{2}+8\ln\frac{3}{2}-8\ln 2-\ln\frac{1}{2}+\ln 1=$$

$$=\frac{13}{8}+8\ln 3-15\ln 2.$$

Відповідь: $\frac{13}{8}+8\ln 3-15\ln 2$.

6. Знайти визначений інтеграл $\int_9^{36}\frac{dx}{100+\sqrt{x}}$.

Розв'язання:

$$\int_9^{36}\frac{dx}{100+\sqrt{x}}\begin{bmatrix} \sqrt{x}=t & dx=2tdt \\ x=9 & t=3 \\ x=36 & t=6 \end{bmatrix}=\int_3^6\frac{2tdt}{100+t}=2\int_3^6\frac{(t+100-100)dt}{100+t}=2\int_3^6\left(1-\frac{100}{100+t}\right)dt=$$

$$=2\left(t-100\ln|100+t|\right)\Big|_3^6=2(6-3-100\ln 106+100\ln 103)=2\left(3-100\ln\frac{106}{103}\right).$$

Відповідь: $2\left(3-100\ln\frac{106}{103}\right)$.

7. Знайти визначений інтеграл $\int_0^4\frac{dx}{2+\sqrt{2x+1}}$.

Розв'язання:

$$\int_0^4\frac{dx}{2+\sqrt{2x+1}}\begin{bmatrix} \sqrt{2x+1}=t & dx=tdt \\ x=4 & t=3 \\ x=0 & t=1 \end{bmatrix}=\int_1^3\frac{tdt}{2+t}=\int_1^3\left(1-\frac{2}{2+t}\right)dt=\left(t-2\ln|2+t|\right)\Big|_1^3=2-\ln\frac{5}{3}.$$

Відповідь: $2-\ln\frac{5}{3}$.

8. Знайти визначений інтеграл $\int_2^9\frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}}$.

Розв'язання:

$$\int\limits_2^9 \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}}\left[\begin{matrix} x-1=t^3 & dx=3t^2dt \\ x=9 & t=2 \\ x=2 & t=1 \end{matrix}\right]=\int\limits_1^2 \frac{(t^3+1)3t^2dt}{t}=3\int\limits_1^2 (t^4+t)dt=3\left(\frac{t^5}{5}+\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_1^2=3\left(\frac{32}{5}+\frac{4}{2}-\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\right)=\frac{231}{10}.$$

Відповідь: $23{,}1$.

9. Знайти визначений інтеграл $\int\limits_1^4 \frac{dx}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$.

Розв’язання:

$$\int\limits_1^4 \frac{dx}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}\left[\begin{matrix} \sqrt{x}=t & dx=2tdt \\ x=4 & t=2 \\ x=1 & t=1 \end{matrix}\right]=\int\limits_1^2 \frac{2tdt}{(1+t)^2}.$$

$$\frac{2t}{(1+t)^2}=\frac{A}{(1+t)^2}+\frac{B}{1+t}=\frac{A+B(1+t)}{(1+t)^2},\ 2t=A+B+Bt,\ \frac{2t}{(1+t)^2}=\frac{-2}{(1+t)^2}+\frac{2}{1+t}.$$

$$\int\limits_1^2 \frac{2dt}{1+t}-\int\limits_1^2 \frac{2dt}{(1+t)^2}=\left[2\ln|1+t|+\frac{2}{1+t}\right]\Bigg|_1^2=2\ln 3-2\ln 2+\frac{2}{3}-1=2\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{3}.$$

Відповідь: $2\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{3}$.

10. Знайти визначений інтеграл $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$.

Розв’язання:

$$\int\limits_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}\left[\begin{matrix} \sqrt{e^x-1}=t & dx=\dfrac{2tdt}{t^2+1} \\ x=\ln 4 & t=\sqrt{3} \\ x=\ln 2 & t=1 \end{matrix}\right]=\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{2tdt}{(t^2+1)t}=2\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2+1}=2\mathrm{arctg}t\Big|_1^{\sqrt{3}}=2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{6}.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{6}$.

11. Знайти визначений інтеграл $\int\limits_0^{\pi} \sin^4 xdx$.

Розв’язання:

$$\int\limits_0^{\pi} \sin^4 xdx=\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx=\int\limits_0^{\pi}\frac{1}{4}dx-\int\limits_0^{\pi}\frac{\cos 2x}{4}d(2x)+\int\limits_0^{\pi}\frac{\cos^2 2x}{4}dx=\left(\frac{x}{4}-\frac{\sin 2x}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi}+\int\limits_0^{\pi}\frac{1+\cos 4x}{8}dx=$$

$$=\frac{\pi}{4}+\int\limits_0^{\pi}\frac{1}{8}dx+\int\limits_0^{\pi}\frac{\cos 4x}{32}d(4x)=\frac{\pi}{4}+\frac{x}{8}\Bigg|_0^{\pi}+\frac{\sin(4x)}{32}\Bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}=\frac{3\pi}{8}.$$

Відповідь: $\frac{3\pi}{8}$.

12. Знайти визначений інтеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^2 xdx$.

Розв’язання: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^2 xdx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=(\mathrm{tg}x-x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}$.

Відповідь: $1-\frac{\pi}{4}$.

13. Знайти визначений інтеграл $\int\limits_0^{2\pi}\sin^4 3x\cos^4 3x dx$.

Розв'язання:

$$\int\limits_0^{2\pi}\sin^4 3x\cos^4 3x dx=\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin^4 6x}{16}dx=\int\limits_0^{2\pi}\frac{(1-\cos 12x)^2}{16\cdot 4}dx=\int\limits_0^{2\pi}\frac{1-2\cos 12x+\cos^2 12x}{64}dx=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\frac{1-2\cos 12x}{64}dx+\int\limits_0^{2\pi}\frac{1-\cos 24x}{128}dx=\frac{3}{128}x\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{32}\frac{\sin 12x}{12}\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{128}\cdot\frac{\sin 24x}{24}\Big|_0^{2\pi}=\frac{3\pi}{64}.$$

Відповідь: $\frac{3\pi}{64}$.

14. Знайти визначений інтеграл $\int\limits_0^5\frac{dx}{\sqrt{\left(25+x^2\right)^3}}$.

Розв'язання:

$$\int\limits_0^5\frac{dx}{\sqrt{\left(25+x^2\right)^3}}\left[\begin{array}{ll} x=5\operatorname{tg}t & dx=\dfrac{5dt}{\cos^2 t}\\ x=0 & t=0\\ x=5 & t=\dfrac{\pi}{4}\end{array}\right]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{5dt}{\cos^2 t\sqrt{\left(25+25\operatorname{tg}^2 x\right)^3}}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{5\cos^3 tdt}{5^3\cos^2 t}=\frac{1}{25}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos tdt=\frac{\sin t}{25}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{50}.$$

Відповідь: $\frac{\sqrt{2}}{50}$.

15. Знайти визначений інтеграл $\int\limits_0^{\frac{3}{2}}\frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

Розв'язання:

$$\int\limits_0^{\frac{3}{2}}\frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}\left[\begin{array}{ll} x=3\sin t & dx=3\cos tdt\\ x=0 & t=0\\ x=\dfrac{3}{2} & t=\dfrac{\pi}{6}\end{array}\right]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{(3\sin t)^2 3\cos tdt}{\sqrt{9-(3\sin t)^2}}=9\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2 tdt=9\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\frac{9t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}-\frac{9\sin 2t}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=$$

$$=\frac{9\pi}{12}-\frac{9\sqrt{3}}{8}.$$

Відповідь: $\frac{3\pi}{4}-\frac{9\sqrt{3}}{8}$.

16. Знайти визначений інтеграл $\int\limits_4^9\operatorname{arctg}\sqrt{\sqrt{x}-2}\,dx$.

Розв'язання:

$$\int\limits_4^9\operatorname{arctg}\sqrt{\sqrt{x}-2}\,dx\left[\begin{array}{ll} \sqrt{x}-2=t^2 & dx=4t\left(t^2+2\right)dt\\ x=9 & t=1\\ x=4 & t=0\end{array}\right]=4\int\limits_0^1\left(t^3+2t\right)\operatorname{arctg}t\,dt\left[\begin{array}{ll} u=\operatorname{arctg}t & du=\dfrac{dt}{1+t^2}\\ dv=\left(t^3+2t\right)dt & v=\dfrac{t^4}{4}+t^2\end{array}\right]=$$

$$=\left(t^4+4t^2\right)\operatorname{arctg}t\Big|_0^1-\int\limits_0^1\left(\frac{t^4+4t^2}{t^2+1}\right)dt=5\cdot\frac{\pi}{4}-\int\limits_0^1\left(t^2+3-\frac{3}{t^2+1}\right)dt=\frac{5\pi}{4}-\left(\frac{t^3}{3}+3t-3\operatorname{arctg}t\right)\Bigg|_0^1=\frac{5\pi}{4}-\frac{1}{3}-3+\frac{3\pi}{4}=$$

$$=2\pi-\frac{10}{3}.$$

Відповідь: $2\pi-\frac{10}{3}$.

Завдання для самостійного виконання

Обчислити визначені інтеграли (по одному-два з кожної комірки)

$\int_0^3 \frac{\alpha dx}{(x+\alpha)(x+2\alpha)}$; $\int_1^{1+\alpha} \frac{dx}{x+x^2}$; $\int_1^{1+\alpha} \frac{x^3 dx}{1-x^2}$
$\int_4^9 \frac{\sqrt{x}dx}{1+x}$; $\int_4^9 \frac{xdx}{\sqrt{x}-1}$; $\int_9^{16} \frac{dx}{\alpha+\sqrt{x}}$; $\int_4^9 \frac{3\sqrt{x}dx}{1+3x}$; $\int_{-3}^0 \frac{xdx}{\sqrt{1-x}}$; $\int_1^5 \frac{xdx}{\sqrt{4x+5}}$; $\int_1^9 \frac{xdx}{\sqrt{2x+7}}$; $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt[3]{7x-6}}$; $\int_0^4 \frac{dx}{3+\sqrt{2x+1}}$; $\int_0^2 \frac{xdx}{1+\sqrt{4x+1}}$; $\int_4^{11} \frac{dx}{\sqrt{x+5}-1}$; $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$; $\int_0^1 \sqrt{\left(1-x^2\right)^3}dx$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin 2x dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx$; $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{ctg}^2 x dx$; $\int_0^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{\left(\alpha^2+x^2\right)^3}}$; $\int_1^{\alpha} \mathrm{arctg}\sqrt{\sqrt{x}-1}dx$

НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ ТА ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ

1. Основні поняття та теореми

Інтеграли $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ та $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ називають невласними інтегралами першого роду.

Якщо існує скінчена границя інтеграла $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$, то границю позначають $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ і називають невласним інтегралом з нескінченою верхньою межею, в цьому випадку говорять, що невласний інтеграл існує або збігається. Якщо ця скінчена границя не існує, то говорять, що невласний інтеграл не існує або розбігається.

Якщо існує скінчена границя інтеграла $\int_{-\infty}^b f(x)dx$, то цю границю позначають $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ і називають невласним інтегралом з нескінченою нижньою межею, в цьому випадку говорять, що невласний інтеграл існує або збігається. Якщо ця скінчена границя не існує, то говорять, що невласний інтеграл не існує або розбігається.

Справедлива рівність $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$, де c – довільне дійсне число.

Невласними інтегралами другого роду є інтеграли, підінтегральна функція яких є необмеженою, тобто в деяких точках прямує до нуля. Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на півінтервалі $[a;c)$, то $\int_a^c f(x)dx$ визначається як $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx$. Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на півінтервалі $(c;b]$, то $\int_c^b f(x)dx$ визначається як $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx$.

Якщо функція має розрив у точці c, що належить відрізку $[a;b]$, то визначений інтеграл знаходиться як сума двох невласних інтегралів другого роду $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти невласний інтеграл або встановити розбіжність $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$.

Розв'язання: $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty}\ln|x|\Big|_1^b = \lim\limits_{b\to+\infty}\ln b - \ln 1 = \ln\lim\limits_{b\to+\infty} b = +\infty$.

Відповідь: інтеграл розбігається.

2. Знайти невласний інтеграл або встановити розбіжність $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

Розв’язання:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_a^0+\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_0^b=$$

$$=\operatorname{arctg}0-\lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}a+\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}b-\operatorname{arctg}0=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

Відповідь: π.

3. Знайти невласний інтеграл або встановити розбіжність $\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-13x}dx$.

Розв’язання:

$$\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-13x}dx=-\frac{1}{13}\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b}e^{-13x}d(-13x)=-\frac{1}{13}\lim_{b\to+\infty}e^{-13x}\Big|_b^0=-\frac{1}{13}\left(\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^{13b}}-\frac{1}{e^0}\right)=-\frac{1}{13}\left(0-\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{13}.$$

Відповідь: 13^{-1}.

4. Знайти невласний інтеграл або встановити розбіжність $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{102}}$.

Розв’язання: $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{102}}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{1}^{b}x^{-102}dx=-\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{x^{-101}}{101}\Bigg|_1^b=-\frac{1}{101}\left(\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{b^{101}}-1\right)=\frac{1}{101}$.

Відповідь: 101^{-1}.

5. Знайти невласний інтеграл або встановити розбіжність $\int\limits_{1}^{+\infty}103^{-x}\,dx$.

Розв’язання:

$$\int\limits_{1}^{+\infty}103^{-x}\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{1}^{b}103^{-x}dx=-\lim_{b\to+\infty}\frac{103^{-x}}{\ln 103}\Bigg|_1^b=-\frac{1}{\ln 103}\left(\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{103^b}-\frac{1}{103}\right)=\frac{1}{103\cdot\ln 103}.$$

Відповідь: $\frac{1}{103\cdot\ln 103}$.

6. Знайти невласний інтеграл або встановити розбіжність $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2(x+1)}$.

Розв’язання: $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2(x+1)}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{1}^{b}\frac{dx}{x^2(x+1)}$.

$\frac{1}{x^2(x+1)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x+1}=\frac{A(x+1)+Bx(x+1)+Cx^2}{x^2(x+1)}$, звідки $1=A(x+1)+Bx(x+1)+Cx^2$. При $x:=0$ маємо $A=1$, при $x:=-1$ маємо $C=1$, при $x:=1$ маємо $B=-1$, тоді маємо $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{1}^{b}\frac{dx}{x^2(x+1)}=$

$$\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{1}^{b}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right)dx=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}-\ln|x|+\ln|x+1|\right)\Bigg|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln\left|\frac{b+1}{b}\right|-\frac{1}{b}\right)-\ln 2+1=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\ln\left|\frac{b+1}{b}\right|-\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{b}-\ln 2+1=\ln\lim_{b\to+\infty}\left|\frac{b+1}{b}\right|-\ln 2+1=1-\ln 2.$$

Відповідь: $1-\ln 2$.

7. Знайти невласний інтеграл або встановити розбіжність $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x}$.

Розв'язання: $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\ln|x|\Big|_{0+\varepsilon}^1 = \ln 1 - \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\ln|\varepsilon| = -\ln\lim\limits_{\varepsilon\to 0}|\varepsilon| = -\ln 0 = +\infty$.

Відповідь: інтеграл розбігається.

8. Знайти невласний інтеграл або встановити розбіжність $\int\limits_0^{13} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

Розв'язання: $\int\limits_0^{13} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0+\varepsilon}^{13} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \frac{3}{2}\lim\limits_{\varepsilon\to 0} x^{\frac{2}{3}}\Big|_{0+\varepsilon}^{13} = \frac{3}{2}\left(13^{\frac{2}{3}} - \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{3}{2}\cdot 13^{\frac{2}{3}}$.

Відповідь: $\frac{3}{2}\cdot 13^{\frac{2}{3}}$.

9. Знайти невласний інтеграл або встановити розбіжність $\int\limits_2^{\sqrt{5}} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-4}}$.

Розв'язання:

$$\int\limits_2^{\sqrt{5}} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-4}} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{2+\varepsilon}^{\sqrt{5}} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{1}{2}\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{2+\varepsilon}^{\sqrt{5}} \left(x^2-4\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(x^2-4\right) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\sqrt{x^2-4}\Big|_{2+\varepsilon}^{\sqrt{5}} = 1 - \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\sqrt{(2+\varepsilon)^2-4} = 1.$$

Відповідь: 1.

10. Знайти невласний інтеграл або встановити розбіжність $\int\limits_{-8}^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

Розв'язання:

Всередині відрізка інтегрування при $x \to 0$ підінтегральна функція необмежено зростає ($x = 0$ – особлива точка). Згідно означення запишемо:

$$\int\limits_{-8}^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int\limits_{-8}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \int\limits_{0}^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{-8}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \int\limits_{0+\varepsilon}^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}\right) = \frac{3}{2}\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(x^{\frac{2}{3}}\Big|_{-8}^{0-\varepsilon} + x^{\frac{2}{3}}\Big|_{0+\varepsilon}^{27}\right) = \frac{3}{2}\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left((-\varepsilon)^{\frac{2}{3}} - 4 + 9 - \varepsilon^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{15}{2}.$$

Відповідь: $\frac{15}{2}$.

11. Знайти невласний інтеграл або встановити розбіжність $\int\limits_0^1 \ln(31x)dx$.

Розв'язання:

$$\int\limits_0^1 \ln(31x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0+\varepsilon}^1 \ln(31x)dx \begin{bmatrix} u = \ln(31x) & du = \frac{31dx}{31x} \\ dv = dx & v = x \end{bmatrix} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(x\cdot\ln(31x)\Big|_{\varepsilon}^1 - \int\limits_{\varepsilon}^1 dx\right) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(x\cdot\ln(31x) - x\right)\Big|_{\varepsilon}^1 =$$

$$= \ln 31 - 1 - \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\varepsilon\cdot\ln(31\varepsilon) - \varepsilon\right) = \ln 31 - 1 - \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln(31\varepsilon)}{\frac{1}{\varepsilon}} = \ln 31 - 1 + \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{31\varepsilon^2}{31\varepsilon} = \ln 31 - 1.$$

Відповідь: $\ln 31 - 1$.

12. Знайти невласний інтеграл або встановити розбіжність $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}}dx$.

Розв'язання:

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}}dx + \int\limits_{0}^{1} \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}}dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{-1}^{0-\varepsilon}\left(x^{\frac{2}{5}} + x^{-\frac{3}{5}}\right)dx + \int\limits_{0+\varepsilon}^{1}\left(x^{\frac{2}{5}} + x^{-\frac{3}{5}}\right)dx\right) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\left(\frac{5x^{\frac{7}{5}}}{7} + \frac{5x^{\frac{2}{5}}}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{-\varepsilon} + \left(\frac{5x^{\frac{7}{5}}}{7} + \frac{5x^{\frac{2}{5}}}{2}\right)\Bigg|_{\varepsilon}^{1}\right) =$$

$$= \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{5\varepsilon^{\frac{7}{5}}}{7} + \frac{5\varepsilon^{\frac{2}{5}}}{2}\right) + \frac{5}{7} - \frac{5}{2} + \frac{5}{7} + \frac{5}{2} - \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{5\varepsilon^{\frac{7}{5}}}{7} + \frac{5\varepsilon^{\frac{2}{5}}}{2}\right) = \frac{10}{7}.$$

Відповідь: $10/7$.

13. Знайти невласний інтеграл або встановити розбіжність $\int_0^1 x\ln(31x)dx$.

Розв'язання:

$$\int_0^1 x\ln(31x)dx=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{0+\varepsilon}^1 x\ln(31x)dx\begin{bmatrix} u=\ln(31x) & du=\dfrac{31dx}{31x} \\ dv=xdx & v=\dfrac{x^2}{2}\end{bmatrix}=\lim_{\varepsilon\to0}\left(\frac{x^2}{2}\ln(31x)\Big|_\varepsilon^1-\int_\varepsilon^1\frac{x}{2}dx\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\left(\frac{x^2}{2}\cdot\ln(31x)-\frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_\varepsilon^1=\frac{1}{2}\ln31-\frac{1}{4}-\lim_{\varepsilon\to0}\left(\frac{\varepsilon^2}{2}\cdot\ln(31\varepsilon)-\frac{\varepsilon^2}{4}\right)=\frac{1}{2}\ln31-\frac{1}{4}-\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\ln(31\varepsilon)}{2\varepsilon^{-2}}=\frac{1}{2}\ln31-\frac{1}{4}-$$

$$-\lim_{\varepsilon\to0}\frac{31}{31\varepsilon\cdot2\cdot(-2)\varepsilon^{-3}}=\frac{1}{2}\ln31-\frac{1}{4}.$$

Відповідь: $\dfrac{1}{2}\ln31-\dfrac{1}{4}$.

3. Завдання для самостійного виконання

Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність (по два з кожної комірки)

$\int_0^\infty\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+5}}$; $\int_2^{+\infty}\frac{\ln xdx}{x}$; $\int_0^{+\infty}e^{\frac{-x}{\alpha}}dx$; $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha+1}}$; $\int_1^{+\infty}(\alpha+1)^{-x}dx$; $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2(x+\alpha)}$
$\int_{-3}^0\frac{dx}{(x+3)^2}$; $\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{x+2}$; $\int_{-3}^{-2}\frac{dx}{\sqrt[3]{x+2}}$; $\int_0^4\frac{x}{(x-2)^4}dx$; $\int_0^\alpha\frac{dx}{\sqrt{x}}dx$; $\int_0^1\ln(\alpha x)dx$; $\int_2^{\alpha+3}\frac{xdx}{\sqrt{x^2-4}}$; $\int_0^a x\ln xdx$; $\int_{-1}^1\frac{3x^2+\alpha}{\sqrt[3]{x^2}}$

ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

1. Основні поняття та теореми

Площу криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y=f(x)$, віссю Ox і прямими $x=a$ та $x=b$ обчислюють за формулою $S=\int_a^b|f(x)|dx$. Площа фігури, обмеженої двома неперервними лініями $y_1=f_1(x)$ і $y_2=f_2(x)$, де $y_2\ge y_1\ge0$, та прямими $x=a$ і $x=b$, рівна $S=\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]\,dx$.

Площу криволінійної трапеції, обмеженої лінією, що задана у параметричній формі $\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t),\end{cases}$ де $\alpha\le t\le\beta$, $x(\alpha)=a$, $x(\beta)=b$, знаходиться як $S=\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt$.

Об'єм V тіла за відомим законом зміни площі його поперечного перерізу S рівний $V=\int_a^b S(x)\,dx$. Об'єм тіла обертання визначають формулами $V_x=\int_a^b S(x)\,dx=\pi\int_a^b y^2dx$, $V_y=\pi\int_c^d x^2dy$.

Площа поверхні обертання утвореної обертанням кривої заданої параметрично $x=x(t)$, $y=y(t)$ визначається за формулою $P=2\pi\int_{t_0}^t y\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}dt$. Зокрема, якщо крива задана явним рівнянням $y=f(x)$ $(a\le x\le b)$, то $P=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y_x')^2}dx$.

2. Приклади виконання завдань

1. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $y=x^2-6x+5$, прямими $x=0$ і $x=6$.

Розв'язання:

$$S=\int_0^1\left(x^2-6x+5\right)dx-\int_1^5\left(x^2-6x+5\right)dx+\int_5^6\left(x^2-6x+5\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+3x^2+5x\right)\Bigg|_0^1-\left(\frac{x^3}{3}+3x^2+5x\right)\Bigg|_1^5-\left(\frac{x^3}{3}+3x^2+5x\right)\Bigg|_5^6=$$

$$=\left(\frac{1}{3}-3+5\right)-0-\left[\left(\frac{125}{3}-75+25\right)-\left(\frac{1}{3}-3+5\right)\right]+\left(\frac{216}{3}-108+30\right)-\left(\frac{125}{3}-75+25\right)=\frac{46}{3}\ =15,(3)\text{ кв.од.}$$

Відповідь: $46/3$

2. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими $y=\sqrt{x}$, $y=\dfrac{1}{x}$ та прямими $x=2$, $x=4$.

Розв'язання: $S=\displaystyle\int_2^4\left(x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{x}\right)dx=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_2^4-\ln|x|\Big\|_2^4=\frac{4}{3}\left(4-\sqrt{2}\right)-\ln 2$ кв.од.

Відповідь: $\dfrac{16}{3}-\dfrac{4\sqrt{2}}{3}-\ln 2$.

3. Знайти площу S криволінійної фігури, обмеженої кривою $y=x^2+2$ та прямою $2x+y=5$.

Розв'язання:

Межі інтегрування знайдемо із рівняння $x^2+2=5-2x$. Тоді $x^2+2x-3=0$ і $x_1=-3$, $x_2=1$. Тому

$$S=\int_{-3}^{1}\left[\left(5-2x\right)-\left(x^2+2\right)\right]dx=\int_{-3}^{1}\left(-x^2-2x+3\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right)\Bigg|_{-3}^{1}=$$

$$=-\frac{1}{3}-1+3-\left(9-9-9\right)=\frac{5}{3}+9=\frac{32}{3}=10,(6)\text{ кв.од.}$$

Відповідь: $32/3$.

3. Обчислити площу фігури, обмежену еліпсом $\begin{cases}x=2\cos t,\\ y=3\sin t.\end{cases}$

Розв'язання:

Площу обчислюємо за формулою $S=\displaystyle\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt$, маємо

$$S=6\int_0^{2\pi}\sin^2 t dt=3\int_0^{2\pi}(1-\cos 2t)dt=3\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=6\pi\text{ кв.од.}$$

Відповідь: 6π.

4. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням кривої $y=\left(x-1\right)^2$ навколо осі Oy та обмеженої лініями $x=0$, $x=2$, $y=0$.

Розв'язання:

Так як $|x-1|=\sqrt{y}$, то $x=1+\sqrt{y}$, $x=1-\sqrt{y}$. Користуючись формулою $V=\pi\displaystyle\int_c^d\varphi^2\left(y\right)dy$, маємо

$$V_y=\pi\int_0^1 2^2dy-\pi\int_0^1\left(1+\sqrt{y}\right)^2dy+\pi\int_0^1\left(1-\sqrt{y}\right)^2dy=4\pi-4\pi\int_0^1\sqrt{y}dy=4\pi-4\pi\cdot\frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^1=4\pi-\frac{1}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi\text{ куб.од.}$$

Відповідь: $4\pi/3$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = 4 - x^2$ і прямою $x - y + 4 = 0$.

2. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = 3 - 2x - x^2$ і віссю абсцис.

3. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, яка обмежена гіперболою $xy = 4$, прямими $x = 3$, $x = 12$ та віссю абсцис.

4. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, яка обмежена гіперболою $xy = 6$, прямими $y = 1$, $y = 4$ та віссю ординат.

5. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, яка обмежена параболою $x = 6y^2$, прямою $y = 3$ та віссю ординат.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, яка обмежена параболою $y = x^2/4$, прямою $x = 4$ та віссю абсцис.

7. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = -1 + 4x - x^2$ і прямою $y = -x - 1$.

8. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2 - 6x + 7$ і прямою $y = x + 1$.

9. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = -x^2 + 6x - 5$ і прямою $y = x - 5$.

10. Обчислити площу фігури, обмеженої гіперболою $xy = 7$, віссю Ox і прямими $x = 2$, $x = 6$.

11. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими $y = -x^2 + 5$ і $y = x^2 + 1$.

12. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, яка обмежена лініями $xy = 8$, $x = 0$, $y = 1$ і $y = 6$.

13. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, яка обмежена параболою $y = 2x^2 + 1$, віссю Oy і прямою $y = 7$.

14. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = (x-2)^2/3$ і прямою $y = x + 4$.

15. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = -x^2 + 5$ і $y = x - 1$.

16. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими $y = -x^2 + 5$ і $y = 2x^2$.

17. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $xy = 2$ і $x + y = 3$.

18. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими $y = -x^2 + 7$ і $y = x^2 - 1$.

19. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, яка обмежена лініями $y = \sqrt{2x - 3}$, $y = 0$ і $x = 6$.

20. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, яка обмежена кривою $y = x^3/4 + 1$, віссю Oy і прямою $y = 5$.

21. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, яка обмежена кривою $xy = 10$, віссю Ox, і прямими $x = 2$, $x = 6$.

22. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = -x^2 + 4$ і $y = x^2 - 2$.

23. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = -x^2 + 8$ і $y = x - 4$.

24. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = -x^2 + 4$ і $y = x - 2$.

25. Обчислити довжину дуги кривої $y = \ln \sin x$ від $x = \pi/3$ до $\pi/2$.

26. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = 16 - x^2$ і прямою $x - y + 8 = 0$.

27. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = -x^2 + 5$ і $y = x^2 - 3$.

28. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, яка обмежена лініями $y = \sqrt{x - 1}$, $y = 0$, $x = 4$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Вища математика : типові завдання до модулів 04 «Диференціальне числення функцій однієї змінної», 05 «Диференціальне числення функцій багатьох змінних», 06 «Інтегральне числення функції однієї змінної», 07 «Диференціальні рівняння», 08 «Числові та функціональні ряди» для виконання контрольних та самостійних робіт студентами напрямів підготовки: 6.030509 «Облік та аудит», 6.030601 «Менеджмент організацій», 6.030601 «Менеджмент ЗЕД» / В.С. Шебанін, О.В. Шебаніна, В.Г. Богза та ін. Миколаїв : МНАУ, 2011. 140 с.

2. Козира В. М. Елементарна та вища математика : посібник-довідник. Тернопіль : Астон, 2021. 168 с.

3. Коляда Р. В., Мельник І. О., Мельник О. М. Вища математика : навчальний посібник. Львів : Магнолія 2006, 2021. 342 с.

4. Практикум з вищої математики : комп’ютерна система для дистанційного навчання / В.С. Шебанін, О.В. Шебаніна, І.П. Атаманюк та ін. Миколаїв : МНАУ, 2018. Ч. ІІ. 380 с.

5. Скуратовський, Р. В. Вища математика з прикладами та задачами : підручник. Київ : Національна академія управління, 2021. 232 с.

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА:
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ
ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Методичні рекомендації

Укладачі: **Бойчук** Олена Володимирівна
Борчик Євген Юрійович
Богданов Сергій Іванович
Поживатенко Віталій Володимирович

Формат 60х84/16 Ум. друк. арк.
Тираж __ прим. Зам. №

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Г. Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.