МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ МЕНЕДЖМЕНТУ

КАФЕДРА ЕКОНОМІЧНОЇ КІБЕРНЕТИКИ, КОМП'ЮТЕКНИХ НАУК ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

конспект лекцій
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
ОПП «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»
за спеціальністю 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» денної та заочної форм здобуття вищої освіти

Миколаїв - 2026

УДК 519.6
П75

Друкується за рішенням науково-методичної комісії факультету менеджменту Миколаївського національного університету від 23.04.2026 року протокол № 8.

Укладачі:

О. В. Шебаніна – д-р екон. наук, професор, професор кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

С. І. Тищенко – канд. пед. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики, комп'ютерних наук та інформаційних технологій, Миколаївський національний аграрний університет;

О. Ю. Пархоменко – канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики, комп'ютерних наук та інформаційних технологій, Миколаївський національний аграрний університет;

В. О. Крайній – канд. екон. наук, старший викладач кафедри економічної кібернетики, комп'ютерних наук та інформаційних технологій, Миколаївський національний аграрний університет;

І. І. Хилько – старший викладач кафедри економічної кібернетики, комп'ютерних наук та інформаційних технологій, Миколаївський національний аграрний університет.

О.Є. Богатенкова - асистент кафедри економічної кібернетики, комп'ютерних наук та інформаційних технологій, Миколаївський національний аграрний університет.

Рецензенти:

Дармасюк В М. - к.ф.-м.н., доцент кафедри фізики та математики Чорноморського національного університету імені Петра Могили

Борчик Є. Ю. - канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет

© Миколаївський національний аграрний університет, 2026

ЗМІСТ

ВСТУП

Курс дисципліни «Прикладна математика» має важливе значення в теоретичній підготовці майбутніх спеціалістів сільського господарства. В сучасних умовах засоби обчислювальної техніки все більше проникають в галузі сільськогосподарського виробництва. Інтенсифікація агропромислового комплексу за допомогою ЕОМ в більшості випадків залежить від глибокого розуміння спеціалістами цієї галузі, можливостей і переваги використання електронної техніки при вирішенні прикладних задач і задач, пов'язаних з обробкою даних.

Основна мета викладання даного курсу студентам цієї спеціальності – ознайомити їх з основними розрахунковими методами, прищепити вміння використовувати ці методи для вирішення на ЕОМ практичних задач. Уміння за допомогою обчислювальних методів оброблювати результати дослідів і спостережень в сільськогосподарській практиці корисно організатору виробництва, керівникам відділень, господарств, наукових закладів.

Методи «Прикладної математики» використовуються для аналізу існуючих взаємозв'язків і закономірностей, які можна побачити при експерименті в різних галузях, а також при плануванні сільськогосподарського виробництва. Для успішного вивчення студентами курсу „Прикладна математика" достатньо знань розділів вищої математики, інформатики та комп'ютерної техніки засвоєних студентами на 1 курсі.

МОДУЛЬ № 1
ТЕОРІЯ ПОХИБОК І ОБЧИСЛЕННЯ НАБЛИЖЕНИХ ЗНАЧЕНЬ ОСНОВНИХ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ

Лекція № 1
“Основи теорії похибок. Похибка прямої задачі”

Наближеним числом a називають число, яке незначно відрізняється від точного числа A та замінює останнє в обчисленнях.

Різниця між точним значенням A та приблизним значенням a складає похибку. Якщо $a < A$, то наближення з недостачею. Якщо $a > A$, то наближення з надлишком.

Абсолютна величина різниці між точним числом A і його наближеним значенням a називається *абсолютною похибкою* наближеного числа a: $\Delta_a = |A - a|$.

Відносною похибкою δ_a називають відношення абсолютної похибки до модуля відповідного точного числа $\delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|A|}$.

Приклад 1. Відомі точне число $A = 48{,}8456$ та наближене число $a = 48{,}85$. Обчислити абсолютну похибку та відносну похибку.

Розв’язання. Знаходимо абсолютну похибку:

$$\Delta = |A - a| = |48{,}8456 - 48{,}85| = 0{,}0044.$$

Знаходимо відносну похибку:

$$\delta = \frac{\Delta}{A} \cdot 100\% = \frac{0,0044}{48,8456} \cdot 100\% = 0,009\%.$$

Відповідь: $\Delta = 0,0044$, $\delta = 0,009\%$.

Приклад 2. Визначити в процентах відносну похибку наближеного числа $a = 73,8726 \pm 0,0926$, якщо відома абсолютна похибка.

Розв'язання. Знаходимо відносну похибку:

$$\delta = \frac{\Delta}{a} \cdot 100\% = \frac{0,0926}{73,8726} \cdot 100\% = 0,125\%.$$

Відповідь: $\delta = 0,125\%$.

Приклад 3. Визначити абсолютну похибку наближеного числа $a = 64,512$, якщо $\delta = 5,41\%$.

Розв'язання. Знаходимо абсолютну похибку:

$$\Delta = \frac{\delta \cdot a}{100\%} = \frac{5,41\% \cdot 64,512}{100\%} = 4,49.$$

Відповідь: $\Delta = 4,49$.

Приклад 4. Визначити відносні похибки чисел, отриманих при деяких вимірюваннях. Який результат більш точний?

$\alpha =$3год 9хв 17сек, $\Delta_\alpha =$13сек;

$\beta =$2т 5ц 78кг, $\Delta_\beta =$10кг.

Розв'язання. Перед тим як перейти до знаходження відносної похибки чисел, необхідно перевести ці числа до однієї одиниці вимірювання – число α переводимо у секунди, а число β – у кілограми. Отже:

$\alpha =$3год 9хв 17сек$=3 \cdot 3600 + 9 \cdot 60 + 17 = 11357$ сек;

$\beta = 2$т 5ц 78кг$= 2 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 78 = 2578$кг.

Знаходимо відносні похибки чисел:

$$\delta_\alpha = \frac{\Delta_\alpha}{\alpha} \cdot 100\% = \frac{13}{11357} \cdot 100\% = 0{,}114\%;$$

$$\delta_\beta = \frac{\Delta_\beta}{\beta} \cdot 100\% = \frac{10}{2578} \cdot 100\% = 0{,}388\%.$$

Якість першого числа більш точна, ніж другого, тому що відносна похибка з меншим значенням вказує на те, що вимірювання більш точне.

Відповідь: так як $\delta_\alpha < \delta_\beta$, то відповідно перше вимірювання більш точне ніж друге.

Приклад 5. Визначити яка рівність більш точна.

а) $\frac{19}{7} = 2{,}71;$ б) $\sqrt{34{,}8} = 5{,}9.$

Розв'язання. Для того щоб визначити яка рівність більш точна, необхідно розглянути кожну рівність окремо. Рівність складається з лівої частини (A – точне значення) та правої частини (a – наближене значення).

Запишемо точне значення дробу у вигляді десяткового дробу із точністю 0,0001.

1) $\frac{19}{7} = 2{,}71,$ $\frac{19}{7} = 2{,}7143;$

2) $\sqrt{34{,}8} = 5{,}9,$ $\sqrt{34{,}8} = 5{,}8992.$

Знайдемо абсолютну похибку для кожної рівності:

$$\varDelta_1 = |A - a| = |2{,}7143 - 2{,}71| = 0{,}0043;$$

$$\varDelta_2 = |A - a| = |5{,}8992 - 5{,}9| = |-0{,}0008| = 0{,}0008.$$

Знайдемо відносні похибки та порівняємо їх:

$$\delta_1 = \frac{\varDelta}{a} \cdot 100\% = \frac{0{,}0043}{2{,}71} \cdot 100\% = 0{,}16\%;$$

$$\delta_2 = \frac{\varDelta}{a} \cdot 100\% = \frac{0{,}0008}{5{,}9} \cdot 100\% = 0{,}01\%.$$

Відповідь: рівність $\sqrt{34{,}8} = 5{,}9$ задана більш точно, тому що $\delta_2 < \delta_1$.

Лекція № 2

"Знаходження похибки арифметичних дій. Похибка оберненої задачі"

Теорема 1. Гранична абсолютна похибка алгебраїчної суми декількох приблизних чисел дорівнює сумі граничних абсолютних похибок цих чисел:

$$\varDelta(x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n) = \varDelta_{x_1} + \varDelta_{x_2} + \ldots + \varDelta_{x_n}.$$

Теорема 2. Гранична відносна похибка алгебраїчної суми двох приблизних чисел дорівнює

$$\delta(x_1 \pm x_2) = \frac{x_1 \delta_{x_1} + x_2 \delta_{x_2}}{x_1 \pm x_2}.$$

Зауваження 1. У теоремі 2 припускається що $x_1, x_2 > 0$ та $x_1 \pm x_2 > 0$.

Теорема 3. Гранична відносна похибка добутку декількох приблизних чисел, відмінних від нуля, дорівнює сумі відносних похибок цих чисел:

$$\delta(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n) = \delta_{x_1} + \delta_{x_2} + \ldots + \delta_{x_n}.$$

Теорема 4. Гранична абсолютна похибка добутку двох чисел дорівнює:

$$\Delta(x_1 \cdot x_2) = x_2 \Delta_{x_1} + x_1 \Delta_{x_2}.$$

Теорема 5. Гранична відносна похибка частки дорівнює сумі граничних відносних похибок чисельника та знаменника:

$$\delta\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \delta_{x_1} + \delta_{x_2}.$$

Теорема 6. Гранична абсолютна похибка частки дорівнює:

$$\Delta\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \frac{x_2 \Delta_{x_1} + x_1 \Delta_{x_2}}{x_2^2}.$$

Теорема 7. Гранична відносна похибка степені дорівнює:

$$\delta\left({x_1}^m\right) = m\delta_{x_1}, m = 1,2,\ldots.$$

Теорема 8. Гранична абсолютна похибка степені дорівнює:

$$\Delta\left({x_1}^m\right) = m{x_1}^{m-1}\Delta_{x_1}, m = 1,2,\ldots.$$

Зауваження 2. Останні дві формули мають місце і для кореня, у випадку

$$y = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}, \text{ де } m = \frac{1}{n}.$$

Таким чином, у загальному випадку m — не натуральне, а раціональне.

Зауваження 3. Якщо $y = kx$, де k — деяка стала, тоді з теорем (3), (4) випливає, що

$$\delta(kx) = \delta_k + \delta_x = \delta_x,$$

$$\Delta(kx) = k\Delta_x.$$

Методи розв'язування оберненої задачі

1. Принцип рівних впливів.

Згідно з формулою (3)

$$\Delta_y = \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|\Delta_{x_i}, \quad \text{де } \Delta_y \text{ – відома.}$$

Припустимо, що усі доданки рівні між собою, тоді

$$\left|\frac{\partial y}{\partial x_1}\right|\Delta_{x_1} = \left|\frac{\partial y}{\partial x_2}\right|\Delta_{x_2} = \ldots = \left|\frac{\partial y}{\partial x_n}\right|\Delta_{x_n} = \frac{\Delta_y}{n}.$$

Звідси, $\Delta_{x_i} = \dfrac{\Delta_y}{n\left|\dfrac{\partial y}{\partial x_i}\right|}$.

2. Метод урівнення похибок.

Припустимо, що $\Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \ldots = \Delta_{x_n} = \Delta$, тоді

$$\Delta_y = \Delta\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|,$$

$$\Delta = \frac{\Delta_y}{\sum_{i=1}^{n}\left|\dfrac{\partial y}{\partial x_i}\right|}.$$

3. Здійснюється вибір $n-1$ значення абсолютних похибок аргументів, а Δ_{x_n} визначається з (3). Цей метод використовується у випадках, коли значення різних змінних не вдається зміряти з достатньою точністю.

Приклад 1. Визначити абсолютну та відносну похибки $X=\frac{a+b}{\sqrt{c}}$, використовуючи теореми про похибки арифметичних дій та знайти їх числове значення, якщо a=4,8±0,02, b=23,45±0,01, c=2,863±0,004.

Розв'язання. Обчислимо значення X:

$$X=\frac{a+b}{\sqrt{c}}=\frac{4,8+23,45}{\sqrt{2,863}}=16,69582\,.$$

I спосіб. Знаходимо абсолютну похибку. Застосуємо теорему 6 та звільнимо вираз від ділення. Вираз, який знаходиться у чисельнику – це x_1, а вираз у знаменнику – це x_2.

$$\Delta(X)=\Delta\left(\frac{a+b}{\sqrt{c}}\right)=\frac{\sqrt{c}\cdot\Delta(a+b)+(a+b)\cdot\Delta\left(\sqrt{c}\right)}{\left(\sqrt{c}\right)^2}.$$

Наступним кроком застосуємо теорему 1 для перетворення виразу $\Delta(a+b)$, а також теорему 8 та зауваження 2 для перетворення виразу $\Delta\left(\sqrt{c}\right)$. Отримаємо:

$$\Delta(\mathrm{X})=\Delta\left(\frac{a+b}{\sqrt{c}}\right)=\frac{\sqrt{c}\cdot\Delta(a+b)+(a+b)\cdot\Delta\left(\sqrt{c}\right)}{\left(\sqrt{c}\right)^2}=\frac{\sqrt{c}\cdot(\Delta a+\Delta b)+(a+b)\cdot\frac{1}{2}c^{-\frac{1}{2}}\cdot\Delta c}{c}=$$

$$=\frac{\sqrt{c}\cdot(\Delta a+\Delta b)+(a+b)\cdot\frac{1}{2\sqrt{c}}\cdot\Delta c}{c}=\frac{\sqrt{2,863}\cdot(0,02+0,01)+(4,8+23,45)\cdot\frac{1}{2\sqrt{2,863}}\cdot 0,004}{2,863}=$$

$$=0,02939$$

Знаходимо відносну похибку:

$$\delta(X)=\frac{\Delta(X)}{X}\cdot 100\%=\frac{0,02939}{16,69582}\cdot 100\%=0,17605\%\,.$$

II спосіб. Перш за все обчислимо відносні похибки *a, b, c*. Отримаємо:

$$\delta a = \frac{\Delta a}{a} \cdot 100\% = \frac{0{,}02}{4{,}8} \cdot 100\% = 0{,}41667\%,$$

$$\delta b = \frac{\Delta b}{b} \cdot 100\% = \frac{0{,}01}{23{,}45} \cdot 100\% = 0{,}04264\%,$$

$$\delta c = \frac{\Delta c}{c} \cdot 100\% = \frac{0{,}004}{2{,}863} \cdot 100\% = 0{,}13971\%.$$

Знаходимо відносну похибку X. Застосуємо теорему 5 та звільнимо вираз від ділення. Вираз, який знаходиться у чисельнику – це x_1, а вираз у знаменнику – це x_2.

$$\delta(X) = \delta\left(\frac{a+b}{\sqrt{c}}\right) = \delta(a+b) + \delta\left(\sqrt{c}\right)$$

Наступним кроком застосуємо теорему 2 для перетворення виразу $\delta(a+b)$, а також теорему 7 та зауваження 2 для перетворення виразу $\delta\left(\sqrt{c}\right)$. Отримаємо:

$$\delta(X) = \delta\left(\frac{a+b}{\sqrt{c}}\right) = \delta(a+b) + \delta\left(\sqrt{c}\right) = \frac{a \cdot \delta a + b \cdot \delta b}{a+b} + \frac{1}{2}\delta c =$$

$$= \frac{4{,}8 \cdot 0{,}41667 + 23{,}45 \cdot 0{,}04264}{4{,}8 + 23{,}45} + \frac{1}{2} \cdot 0{,}13971 = 0{,}17605\%.$$

Знаходимо абсолютну похибку:

$$\Delta(X) = \frac{\delta(X) \cdot X}{100\%} = \frac{0{,}17605\% \cdot 16{,}69582}{100\%} = 0{,}02939.$$

Відповідь: $\Delta(X) = 0{,}02939$, $\delta(X) = 0{,}17605\%$.

Приклад 2. Знайти методом рівних впливів абсолютні похибки *x* та *y* при яких похибка значення функції $Z = x(\ln y + x^2)$ не буде перевищувати 0,1, якщо $x \approx 4$, $y \approx 6$.

Розв'язання. Знайдемо та обчислимо частині похідні першого порядку функції Z.

$$Z_x' = \frac{\partial Z}{\partial x} = \left(x\left(ln\,y + x^2\right)\right)_x' = \left(x \cdot ln\,y + x^3\right)_x' = ln\,y + 3x^2 = ln\,6 + 3 \cdot 4^2 = 49{,}7918,$$

$$Z_y' = \frac{\partial Z}{\partial y} = \left(x\left(ln\,y + x^2\right)\right)_y' = \left(x \cdot ln\,y + x^3\right)_y' = x \cdot \frac{1}{y} = 4 \cdot \frac{1}{6} = 0{,}6667\,.$$

Знаходимо абсолютні похибки для *x* та *y*:

$$\Delta x = \frac{\Delta_Z}{n\left|\dfrac{\partial Z}{\partial x}\right|} = \frac{0{,}1}{2 \cdot 49{,}7918} = 0{,}001,$$

$$\Delta y = \frac{\Delta_Z}{n\left|\dfrac{\partial Z}{\partial y}\right|} = \frac{0{,}1}{2 \cdot 0{,}6667} = 0{,}075\,.$$

Відповідь: $\Delta x = 0{,}001,\ \Delta y = 0{,}075\,.$

Лекція № 3

“ Обчислення значень багаточлена. Схема Горнера”

Нехай дано багаточлен n-го степеня $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ з дійсними коефіцієнтами $a_k\,(k = 0{,}1{,}\ldots{,}n)$.

Треба знайти значення цього багаточлена в точці $x = \xi$ так щоб використати найменший об'єм пам'яті комп'ютера.

Запишемо багаточлен у вигляді

$$P(\xi)=a_0\xi^n+a_1\xi^{n-1}+a_2\xi^{n-2}+\ldots+a_n=\left(\left(\left(\left(a_0\xi^n+a_1\right)\xi+a_2\right)\xi+\ldots+a_{n-1}\right)\xi+a_n\right)$$

Звідси, послідовно знаходимо числа:

$$\begin{aligned}
&b_0=a_0,\\
&b_1=a_1+b_0\xi,\\
&b_2=a_2+b_1\xi,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&b_n=a_n+b_{n-1}\xi=P(\xi).
\end{aligned}$$

На практиці обчислення багаточлена або обчислення коефіцієнтів частки здійснюється за схемою Горнера.

a_0	a_1	a_2	$\ldots$	a_n
	$b_0\xi$	$b_1\xi$	$\ldots$	$b_{n-1}\xi$
b_0	b_1	b_2	$\ldots$	$b_0=P(\xi)$

Обчислення значень раціональних дробів.

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)},\qquad R(\xi)=\frac{P(\xi)}{Q(\xi)},$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ багаточлени відповідного степеня n та m. За схемою Горнера окремо знаходять значення чисельника і знаменника та за результат приймають число, яке дорівнює частці цих чисел.

Теорема: нехай нескоротний дріб $\frac{p}{q}$ є коренем рівняння $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$ із цілими коефіцієнтами, тоді число q є дільником старшого коефіцієнта a_0, а число p є дільником вільного члена a_n.

Зауваження 1. Будь-який цілий корінь рівняння із цілими коефіцієнтами є дільником його вільного члена.

Зауваження 2. Якщо старший коефіцієнт рівняння із цілими коефіцієнтами дорівнює 1, то усі раціональні корені, якщо вони існують, цілі числа.

Зауваження 3. Якщо *x=c* корінь багаточлена $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$, то багаточлен записують у наступному вигляді: $f(x)=(x-c)q(x)$, де $q(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+...+b_{n-2}x+b_{n-1}$ – це частка від ділення багаточлена *f(x)* на одночлен *(x-c)*.

Коренем багаточлена $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ є $x=c$, таке що *f(c)=0*.

Розподіл многочлена на одночлен можна виконати за схемою Горнера:

якщо $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$, $a_0 \neq 0$, $g(x) = x - c$, то при діленні *f(x)* на *g(x)* частка *q(x)* матиме такий вид:

$$q(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+...+b_{n-2}x+b_{n-1},$$

де $b_0 = a_0$, $b_k = c \cdot b_{k-1} + a_k$, *k=1,2,…,n-1*. Залишок *r* знаходиться за формулою: $r = c \cdot b_{n-1} + a_n$.

	a_0	a_1	a_2	…	a_{n-1}	a_n

$x=c$	$b_0 = a_0$	$b_1 =$ $= b_0 \cdot c + a_1$	$b_2 =$ $= b_1 \cdot c + a_2$	$\dots$	$b_{n-1} =$ $= b_{n-2} \cdot c + a_{n-1}$	$r = f(c) =$ $= b_{n-1} \cdot c + a_n$

У першому рядку такої таблиці записують коефіцієнти багаточлену *f(x)*. Якщо будь-яка степінь змінної відсутня, то у відповідній клітинці таблиці записують 0. Старший коефіцієнт частки завжди дорівнює старшому коефіцієнту діленого $b_0 = a_0$. Якщо $x=c$ є коренем багаточлена, то в останній клітинці отримуємо 0, тобто залишок від ділення буде дорівнювати нулю.

Приклад 1. Знайти цілі корені рівняння $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$ використовуючи схему Горнера.

Розв'язання. Корені рівняння із цілими коефіцієнтами є дільниками його вільного члена. У даному прикладі коефіцієнт вільного члена дорівнює –6. Дільниками числа –6 є наступні числа: ±1, ±2, ±3, ±6.

Будуємо таблицю для обчислень за схемою Горнера. У першому рядку такої таблиці записують коефіцієнти багаточлену**.** Якщо будь-яка степінь змінної відсутня, то у відповідній клітинці таблиці записують 0. Якщо $x=c$ є коренем багаточлена, то в останній клітинці отримуємо 0, тобто залишок від ділення буде дорівнювати нулю.

	1	**2**	**-5**	**-6**	**Примітки**
x=1	1	$1 \cdot 1 + 2 =$ $= 4$	$1 \cdot 4 + (-5) =$ $= -1$	$1 \cdot (-1) + (-6) =$ $= -7$	Не є коренем
x=–1	1	$-1 \cdot 1 + 2 =$ $= 1$	$-1 \cdot 1 + (-5) =$ $= -6$	$-1 \cdot (-6) + (-6) =$ $= 0$	**x=-1 корінь**

x=2	1	$2\cdot 1+1=$ $=3$	$2\cdot 3+(-6)=$ $=0$		**x=2 корінь**
x=–3	1	$-3\cdot 1+3=$ $=0$			**x=-3 корінь**

Таким чином знайдено корені рівняння ***x=–1, x=2, x=–3.***

Взагалі, не прийнято розписувати обчислення у клітинках таблиці. У таблиці одразу записують кінцевий результат обчислень, тоді таблиця матиме наступний вид:

	1	**2**	**-5**	**-6**	**Примітки**
x=1	1	4	-1	-7	Не є коренем
x=–1	**1**	**1**	**-6**	**0**	***x=–1*** **корінь**
x=2	**1**	**3**	**0**		***x=2*** **корінь**
x=–3	**1**	**0**			***x=–3*** **корінь**

Відповідь: рівняння $x^3+2x^2-5x-6=0$ має три корені *x=–1, x=2, x=–3.*

Приклад 2. а) обчислити за схемою Горнера значення багаточлена $F(x)=2x^5-4x^3+9x^2+x-10$ у точці *x=3*;

б) поділити багаточлен на одночлен *x-1,5.*

Розв'язання. а) Складемо таблицю для обчислень за схемою Горнера. У першому рядку такої таблиці записують коефіцієнти багаточлену $F(x)=2x^5-4x^3+9x^2+x-10$. Зверніть увагу на те, що елемент x^4 відсутній, тобто його коефіцієнт дорівнює 0, його ми і заносимо у таблицю.

	2	0	-4	9	1	-10
		$2\cdot3$	$6\cdot3$	$14\cdot3$	$51\cdot3$	$154\cdot3$
x=3	2	6	14	51	154	452

Відповідь: значення багаточлену *F(x=3)=452*.

б) Поділити багаточлен на одночлен, це означає знайти нові значення коефіцієнтів багаточлена та залишок у точці *x=1,5*. Складемо таблицю для обчислень за схемою Горнера.

	2	**0**	**-4**	**9**	**1**	**-10**
		$2\cdot1{,}5$	$3\cdot1{,}5$	$0{,}5\cdot1{,}5$	$9{,}75\cdot1{,}5$	$15{,}625\cdot1{,}5$
x=1,5	2	3	0,5	9,75	15,625	13,4375

Відповідь:

$$F(x)=2x^5-4x^3+9x^2+x-10=$$
$$=(x-1{,}5)\left(2x^4+3x^3+0{,}5x^2+9{,}75x+15{,}625\right)+13{,}4375.$$

Приклад 3. Обчислити за схемою Горнера значення функції $F(x)=\dfrac{5x^3+3x^2+2x-12}{2+3x^2+x^4}$ у точці *x=2*.

Розв'язання. Складемо таблиці для обчислень за схемою Горнера окремо для чисельника та окремо для знаменника.

$$F(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{5x^3+3x^2+2x-12}{2+3x^2+x^4}.$$

Таблиця для обчислення значення чисельника $P(x)=5x^3+3x^2+2x-12$:

	5	3	2	-12

		$2\cdot 5$	$2\cdot 13$	$2\cdot 28$
x=2	5	13	28	44

$P(2)=44$.

Таблиця для обчислення значення знаменника $Q(x)=2+3x^2+x^4$:

	1	0	3	0	2
		$2\cdot 1$	$2\cdot 2$	$2\cdot 7$	$2\cdot 14$
x=2	1	2	7	14	30

$Q(2)=30$.

Отже, $F(2)=\dfrac{P(2)}{Q(2)}=\dfrac{44}{30}=1{,}467$.

Відповідь: $F(2)=1{,}467$.

Лекція №4

“Ланцюгові дроби”

Ланцюговим (або неперервним) дробом називається вираз виду:

$$a=a_0+\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3+\ldots+\cfrac{b_n}{a_n}}}}=\left[a_0;\frac{b_1}{a_1},\frac{b_2}{a_2},\frac{b_3}{a_3},\ldots,\frac{b_n}{a_n}\right], \qquad (4.1)$$

де a_0 – ціле число, $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n,b_1,b_2,b_3,\ldots,b_n$ – натуральні числа.

Дроби $\frac{a_0}{1}, \frac{b_1}{a_1}, \ldots, \frac{b_k}{a_k}$ $(k = 2,3,\ldots)$ називаються ланками ланцюгового дробу. Припустимо, що $a_0 \neq 0$, $k = 1,2,3,\ldots$. Зауважимо, що в скороченому запису ланцюгового дробу ланцюги $\frac{b_k}{a_k}$ скорочувати не можна.

Якщо ланцюговий дріб містить скінченну множину ланок – n , не враховуючи нульову ланку, то він називається скінченим, або n–ланковим і скорочено позначається:

$$\left[a_0; \frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \ldots, \frac{b_n}{a_n}\right] = \left[a_0; \frac{b_k}{a_k}\right]_1^n. \tag{4.2}$$

Якщо ланцюговий дріб містить нескінченну множину ланок, то він називається нескінченим та скорочено позначається:

$$\left[a_0; \frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \ldots, \frac{b_n}{a_n}\right] = \left[a_0; \frac{b_k}{a_k}\right]_1^\infty. \tag{4.3}$$

Ланцюговий дріб, у якого всі $b_k = 0$ $(k = 1,2,3,\ldots)$, тобто має вигляд:

$$a = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots + \cfrac{1}{a_n}}}} = \left[a_0; \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots, \frac{1}{a_n}\right], \tag{4.4}$$

називається звичайним або стандартним ланцюговим дробом.

Будь-який кінцевий ланцюговий дріб можна записати у вигляді звичайного дробу.

Та навпаки, будь-який звичайний дріб можна перетворити у ланцюговий дріб.

Підхідні дроби

Нехай дано скінчений або нескінчений ланцюговий дріб

$$\left[a_0; \frac{b_k}{a_k}\right]_1^n. \tag{4.5}$$

Звичайний дріб $\frac{P_k}{Q_k} \equiv \left[a_0; \frac{b_1}{a_1}, \ldots, \frac{b_k}{a_k}\right]$ $(k = 1,2,3,\ldots)$, де $k \le n$ називають k-м підходящим дробом ланцюгового дробу (4.5).

Слідуючи за Ейлером, припустимо:

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{a_0}{1}; \quad \frac{P_{-1}}{Q_{-1}} = \frac{1}{0}, \tag{4.6}$$

при чому для визначеності вважають, що $P_0 = a_0$, $P_{-1} = 1$, $Q_0 = 1$, $Q_{-1} = 0$.

Теорема 1. Закон додавання підхідних дробів:

Чисельник і знаменник k-го підходящого дробу ($k = -1,0,1,2,3,\ldots$) визначають за формулами:

$$P_k = a_k P_{k-1} + b_k P_{k-2}, \tag{4.7}$$

$$Q_k = a_k Q_{k-1} + b_k Q_{k-2}. \tag{4.8}$$

Доведення. Нехай R_k – підхідні дроби $(k = 1,2,3,\ldots)$ – послідовні підходящі дроби ланцюгового дробу (4.5). треба довести, що $R_k = \frac{P_k}{Q_k}$, де P_k, Q_k знаходять за формулами (4.7), (4.8). Доведемо це методом математичної індукції.

При $k = 1$, безпосередньо з означення, маємо: $R_1 = a_0 + \frac{b_1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + b_1}{a_1}$. З (4.7) та (4.8) дістанемо: $P_1 = a_0 a_1 + 1 b_1$,

$Q_1 = 1a_1 + 0b_1$. Таким чином, при $k=1$, $R_1 = \dfrac{P_1}{Q_1}$, тобто при $k=1$ теорема справедлива.

Нехай теорема правильна при будь-якому $k = 2,3,...$, тоді із співвідношень (4.7) та (4.8) отримаємо:

$$P_{k+1} = a_{k+1}P_k + b_{k+1}P_{k-1},$$

$$Q_{k+1} = a_{k+1}Q_k + b_{k+1}Q_{k-1}.$$

Згідно індукційного припущення маємо:

$$R_n = \frac{P_n}{Q_n} = \frac{a_n P_{n-1} + b_n P_{n-2}}{a_n Q_{n-1} + b_n Q_{n-2}}.$$

Покажемо, що теорема правильна і при $k = n+1$. З складання ланцюгового дробу слідує, що підходящий дріб R_{n+1} створюється з R_n заміною члена a_n на $a_n + \dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$.

Тоді

$$R_{n+1} = \frac{\left(a_n + \dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)P_{n-1} + b_n P_{n-2}}{\left(a_n + \dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)Q_{n-1} + b_n Q_{n-2}} = \frac{a_{n+1}a_n P_{n-1} + b_{n+1}P_{n-1} + a_{n+1}b_n P_{n-2}}{a_{n+1}a_n Q_{n-1} + b_{n+1}Q_{n-1} + a_{n+1}b_n Q_{n-2}} =$$

$$= \frac{a_{n+1}\left(a_n P_{n-1} + b_n P_{n-2}\right) + b_{n+1}P_{n-1}}{a_{n+1}\left(a_n Q_{n-1} + b_n Q_{n-2}\right) + b_{n+1}Q_{n-1}} = \frac{a_{n+1}P_n + b_{n+1}P_{n-1}}{a_{n+1}Q_n + b_{n+1}Q_{n-1}} = \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$$

Теорема доведена.

При обчисленні за формулами (4.7) та (4.8) використовують схему:

k	-1	0	1	2	3	…
b_k		1	b_1	b_2	b_3	…

a_k		a_0	a_1	a_2	a_3	$\dots$
P_k	1	$P_0 = a_0$	P_1	P_2	P_3	$\dots$
Q_k	0	1	Q_1	Q_2	Q_3	$\dots$

Теорема 2. Для двох сусідніх підхідних дробів $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$ та $\frac{P_k}{Q_k}$ ланцюгового дробу справедлива формула:

$$\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = (-1)^{k-1}\frac{b_1 b_2 .. b_k}{Q_{k-1}Q_k} \quad (k \ge 1). \tag{4.9}$$

Теорема 3. Для двох підходящих ланцюгових дробів однакової парності $\frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}}$ та $\frac{P_k}{Q_k}$ $(k \ge 2)$ ланцюгового дробу (4.5) справедлива формула:

$$\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}} = (-1)^{k-1}\frac{b_1 b_2 .. b_{k-1} a_k}{Q_{k-2}Q_k} \ . \tag{4.10}$$

Теорема 4. Якщо всі елементи скінченого ланцюгового дробу додатні, то його підходящі дроби парного порядку утворюють монотонно зростаючу послідовність, а підхідні дроби непарного порядку утворюють монотонно спадаючу послідовність. При цьому кожний підхідний дріб парного порядку менше будь-якого дробу непарного порядку. Саме ж число a, яке дорівнює значенню ланцюгового дробу, міститься між двома сусідніми підхідними дробами.

Ланцюгові дроби є зручним апаратом для представлення та обчислення функцій. Зауважимо, що якщо функція $f(x)$ за допомогою будь-якого прийому розкладається в нескінчений ланцюговий дріб, то в загальному випадку потрібно доказати збіжність даного дробу та впевнитися, що граничне значення ланцюгового дробу дорівнює функції $f(x)$.

Розклад функції $f(x) = e^x$ в ланцюговий дріб

Ейлер для функції $f(x) = e^x$ отримав розклад в ланцюговий дріб:

$$e^x = \left[0; \frac{1}{1}, \frac{-2x}{2+x}, \frac{x^2}{6}, \frac{x^2}{10}, \ldots, \frac{x^2}{4n+2}\right]. \tag{4.11}$$

Розклад функції $f(x) = tgx$ в ланцюговий дріб

Для $f(x) = tgx$ Ламбертом отримано розклад:

$$tgx = \left[0; \frac{x}{1}, -\frac{x^2}{3}, -\frac{x^2}{5}, \ldots, -\frac{x^2}{2n+1}\right]. \tag{4.12}$$

Приклад 1. Перетворити ланцюговий дріб $\left[2; \frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{1}{2}\right]$ в звичайний.

Розв'язок.

$$\left[2; \frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{1}{2}\right] = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{1}{2}}}.$$

1. $5 + \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$; 2) $\frac{4}{\frac{11}{2}} = \frac{8}{11}$; 3) $3 + \frac{8}{11} = \frac{42}{11}$;

4) $\frac{1}{\frac{42}{11}} = \frac{11}{42}$; 5) $2 + \frac{11}{42} = \frac{95}{42}$.

Відповідь: $\left[2;\frac{1}{3},\frac{4}{5},\frac{1}{2}\right]=\frac{95}{42}$.

Приклад 2. Перетворити звичайний дріб $\frac{16}{7}$ в ланцюговий.

Розв'язок.

$$\frac{16}{7}=2+\frac{2}{7}=2+\frac{1}{\frac{7}{2}}=2+\frac{1}{3+\frac{1}{2}}=\left[2;\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right].$$

Відповідь: $\frac{16}{7}=\left[2;\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$.

Приклад 3. Записати число $\frac{105}{38}$ у вигляді ланцюгового дробу і знайти всі раціональні вкорочення цього дробу

Розв'язок.

Запишемо число $\frac{105}{38}$ у вигляді ланцюгового дробу

$$\frac{105}{38}=2+\frac{29}{38}=2+\frac{1}{\frac{38}{29}}=2+\frac{1}{1+\frac{9}{29}}=2+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{29}{9}}}=2+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{2}{9}}}=$$

$$=2+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{\frac{9}{2}}}}=2+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{2}}}}=\left[2;\frac{1}{1},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right].$$

Знайдемо всі раціональні вкорочення цього дробу за формулами (4.7) і (4.8) та запишемо у таблицю:

$$a_0=2;$$

$$b_1=1,\qquad a_1=1;$$

$$b_2=1,\qquad a_2=3;$$

$$b_3 = 1, \qquad a_3 = 4;$$

$$b_4 = 1, \qquad a_4 = 2.$$

$P_0 = a_0 = 2;$

$P_1 = a_1 P_0 + b_1 P_{-1} = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 3,$

$Q_1 = a_1 Q_0 + b_1 Q_{-1} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1;$

$P_2 = a_2 P_1 + b_2 P_0 = 3 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 11,$

$Q_2 = a_2 Q_1 + b_2 Q_0 = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 4;$

$P_3 = a_3 P_2 + b_3 P_1 = 4 \cdot 11 + 1 \cdot 3 = 47,$

$Q_3 = a_3 Q_2 + b_3 Q_1 = 4 \cdot 4 + 1 \cdot 1 = 17;$

$P_4 = a_4 P_3 + b_4 P_2 = 2 \cdot 47 + 1 \cdot 11 = 105,$

$Q_4 = a_4 Q_3 + b_4 Q_2 = 2 \cdot 17 + 1 \cdot 4 = 38.$

k	-1	0	1	2	3	4
b_k		1	1	1	1	1
a_k		2	1	3	4	2
P_k	1	2	3	11	47	105
Q_k	0	1	1	4	17	38

Відповідь: $\frac{105}{38} = \left[2; \frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ та $\frac{P_4}{Q_4} = \frac{105}{38}$.

Ланцюгові дроби в літочисленні

Із астрономії відомо, що рік має 365,24220... “середніх” діб. Таке складне відношення довжини року до доби неможливо використовувати для літочислення. Його завжди заміняли більш простим, втрачаючи точність. При цьому з року в рік похибка накопичується. Щоб її компенсувати, до одного з року додають один день, і такий рік називається *високосним*.

Розкладемо число 365,24220 у ланцюговий дріб:

$$365{,}2422 = 365\frac{1211}{5000} = 365 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \ldots}}}}$$

Знайдемо перші чотири наближення – перші чотири наближені ланцюгові дроби:

$365;$ $\qquad 365 + \frac{1}{4} = 365\frac{1}{4};$

$$365 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7}} = 365\frac{7}{29}; \qquad 365 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1}}} = 365\frac{8}{33}.$$

Наближення $365\frac{1}{4}$ було відоме ще стародавнім народам – єгиптянам, вавілонянам, китайцям та ін. Проте вони не мали регулярних високосних років.

7 березня 238 року до Р. Х. вийшов Канопський декрет єгипетського царя Птоломея Евергета, яким зобов'язувалося, щоб кожний четвертий рік мав не 365, а 366 діб. Проте через 40 років цей декрет забули. Його відродив у 47 році до н.е. римський імператор Юлій Цезар, встановивши у кожному четвертому році зайвий день у лютому. Цей дань було названо bissectils, звідки й пішла назва "високосний рік". Так з'явився старий, або Юліанський стиль.

Новий, або Григоріанський стиль використовує наближення $365\frac{97}{400}$, що значно більше як за $365\frac{7}{29}$, так і за $365\frac{8}{33}$. Справді,

$$365\frac{97}{400} - 365\frac{8}{33} = \frac{1}{13200} = 0{,}0000757575....$$

Цей стиль відрізняється від Юліанського тим, що у ньому кожен сотий рік – не високосний, крім тих сотих років, число сотень яких ділиться без остачі на 4. Тож 1700-й, 1800-й, 1900-й роки – не високосні, а 1600-й, 2000-й – високосні. Тому 400 років у Григоріанському календарі мають 97 “зайвих” діб, а не 100, як у Юліанському.

Уже в XV столітті було помічено відставання Юліанського календаря (тоді на 10 діб) і було запропоновано реформувати календар. Але ця реформа була проведена лише у кінці XVI століття. У католицьких країнах вона була запроваджена буллою папи Георгія XIII від 1 березня 1582 року. Десять діб – з 5 по 14 жовтня були викреслені з календаря. Тож 5 жовтня 1582 року всі зобов’язані були вважати, як 14 жовтня. Цим календарем ми користуємося і сьогодні.

То, може, Григоріанський календар був найточнішим із тих. якими користувалися люди? Ні, це не так. Найточніший календар ввів у Персії у 1079 році (за часів Володимира Мономаха!) астроном, математик і поет Омар Хайам. Його поезії – знамениті *рубаї*, – знають усі освічені люди. Це він писав для нас:

Лучше впасть в нищету, голодать или красть,
Чем в число блюдолизов презренных попасть.
Лучше кости глодать, чем прельститься сластями
За столом у мерзавцев, имеющих власть.

Омар Хайам ввів цикл із 33 років, у якому 7 разів високосним вважався кожен четвертий рік, а восьмий раз високосним був не четвертий, а п’ятий рік. Таким чином, тут є 8 “зайвих” діб у 33 роках. Отже, в середньому, рік має $365\frac{8}{33}$ діб, що є не що інше, як четвертий наближений дріб ланцюгового розкладу числа 365,24220.

Наближення числа π звичайними дробами

Найдемо найпростіші наближення знаменитого числа π – відношення довжини кола до його діаметра.

Відомо, що $\pi = 3{,}141592653...$. Отже,

$$3{,}141 < \pi < 3{,}142.$$

Запишемо десяткові дроби у лівій та правій частинах цієї нерівності у вигляді ланцюгових дробів:

$$3{,}141 = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{1000}{141}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{\cfrac{141}{13}}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{\cfrac{13}{11}}}} =$$

$$= 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{11}{2}}}}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2}}}}}$$

та

$$3{,}142 = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{1000}{142}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{\cfrac{142}{13}}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{\cfrac{13}{12}}}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{12}}}}.$$

Спільна частина цих розкладів дає наближення: $\pi \equiv 3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$. Це наближення знайшов ще Архімед, який жив у III столітті до нашої ери. Оскільки $\pi - \frac{1}{7} = 0{,}00142857...$, а $\pi - 3{,}14 = 0{,}0015926...$, то наближення Архімеда є точніше, ніж зазвичай використовуване наближення $\pi \equiv 3{,}14$. Воно є точним до трьох знаків після десяткової коми і похибка від використання цього наближення менша, ніж $\frac{1}{500}$.

Взявши для числа π наближення

$$3{,}141591 < \pi < 3{,}14592$$

таким же способом отримаємо:

$$\pi \equiv 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15}} = \frac{333}{106}.$$

Оскільки $\frac{333}{106} - \pi = 0{,}00008329$, то це наближення дає чотири правильні цифри після десяткової коми і має похибку меншу, ніж $\frac{1}{10000}$.

Якщо взяти наближення

$$3{,}141592653 < \pi < 3{,}14592654,$$

то отримаємо таким же способом ланцюговий дріб

$$\pi \equiv 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}} = \frac{355}{113}.$$

Це наближення дає похибку $\frac{355}{113} - \pi = 0{,}000000266764$, яка не перевищує $\frac{1}{1000000}$. Його знайшов ще у давні часи римський філософ Адріан Мецій.

Сьогодні ж багато математиків і не підозрює, що комп’ютер обчислює значення деяких елементарних функцій саме за допомогою ланцюгових дробів. Їх використовують із-за високої точності наближення.

МОДУЛЬ №2.
МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ І СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Інженеру часто доводиться вирішувати алгебраїчні та трансцендентні рівняння, що може представляти собою самостійну задачу чи є складовою частиною більш складних задач. В обох випадках практична цінність чисельного методу в значній мірі визначається швидкістю та ефективністю отримання розв'язку. Вибір необхідного алгоритму для розв'язку рівнянь залежить від характеру задачі, яка розглядається.

При вирішенні практичних інженерних задач часто доводиться зустрічатися з розв'язанням рівнянь виду

$\varphi(x) = g(x)$, (5.1) або $f(x) = 0$ (5.2)

де $\varphi(x), g(x)$ та $f(x) = 0$ – нелінійні функції, визначенні на деякій числовій множині X, яка називається областю допустимих значень рівняння.

Рівняння виду (5.1) або (5.2) називаються нелінійними рівняннями. Всі нелінійні рівняння можна поділити на алгебраїчні та трансцендентні (рис. 5.1).

Функція називається *алгебраїчною*, якщо для отримання значення функції на заданій множині X потрібно здійснити арифметичні операції та піднесення до степеня з раціональним або ірраціональним показником. Рівняння, які містять алгебраїчні функції називаються *нелінійними алгебраїчними рівняннями*.

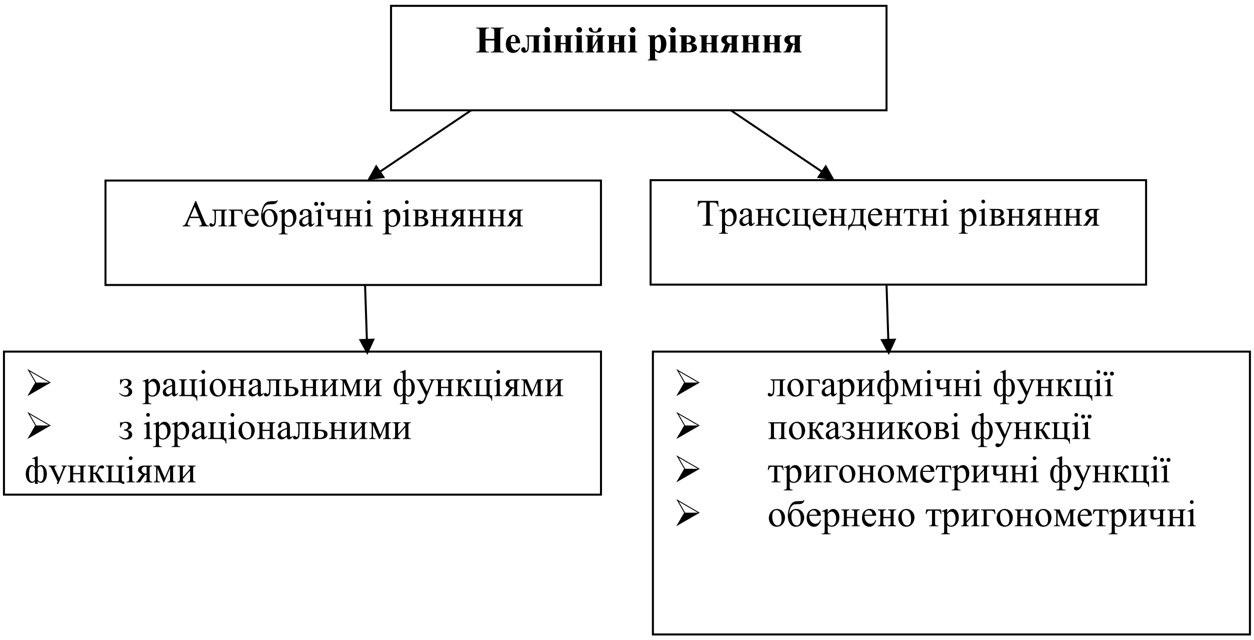

Рис. 5.1 – Класифікація нелінійних рівнянь

До *трансцендентних* функцій відносять всі неалгебраїчні функції:

- показникові a^x;
- логарифмічні $log_a x$, lnx;
- тригонометричні $sin\,x$, $cos\,x$, tgx, $ctgx$;
- обернені тригонометричні $arcsin\,x, arccos\,x, arctgx, arcctgx$

та інші.

Нелінійні рівняння, які містять трансцендентні функції називаються *нелінійними трансцендентними рівняннями*.

Розв'язком нелінійного рівняння на ЕОМ називається вектор $\overline{X}$, координати якого $(x_1, x_2, ..., x_n)$ при підстановці в початкове рівняння перетворює його в тотожність.

В нелінійному рівнянні виду $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$ (5.3) i-та координата вектора $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ називається i-тим коренем рівняння, а $a_1, a_2, ..., a_m$ – коефіцієнтами рівняння (5.3).

Процес розв'язання нелінійних рівнянь вигляду (5.1) або (5.2) на ЕОМ розбивається на два етапи:

1. відокремлення коренів;
2. уточнення коренів.

Лекція № 5

"Відокремлення коренів"

Корінь ξ рівняння $f(x) = 0$, вважається відокремленим на відрізку $[a, b]$, якщо на цьому відрізку дане рівняння не має інших коренів.

Відокремити корені – це означає розбити всю область допустимих значень X (ОДЗ) на відрізки, в кожному з яких міститься один корінь (рис.1). Відокремлення коренів можна здійснити двома способами – *графічним* та *аналітичним*.

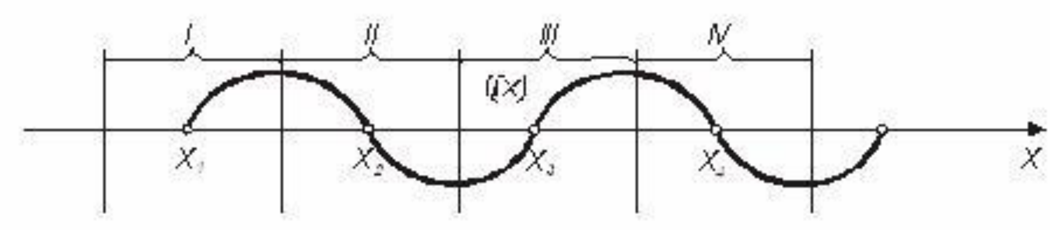

Рис. 5.2. – Приклад розбиття ОДЗ на відрізки з єдиним коренем

Графічний метод. Будують графік функції $y = f(x)$для рівняння виду $f(x) = 0$ або представляють рівняння у вигляді $\varphi(x) = g(x)$ та будують графіки функцій $y = \varphi(x)$ та $y = g(x)$. Значення дійсних коренів рівняння є абсцисами точок перетину графіка функції $y = f(x)$ з віссю Ox або абсцисами точок перетину графіків функцій $y = \varphi(x)$та $y = g(x)$. Відрізки, в яких знаходиться тільки по одному кореню, легко знаходяться наближено.

Аналітичний метод. Аналітично корені рівняння $f(x) = 0$ можна відокремити, використовуючи деякі властивості функцій та однією з розглянутих нижче теорем.

Теорема 1. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і приймає на кінцях цього відрізку значення різних знаків, то всередині відрізка $[a; b]$ існує хоча б один корінь рівняння $f(x) = 0$ (рис.5.3).

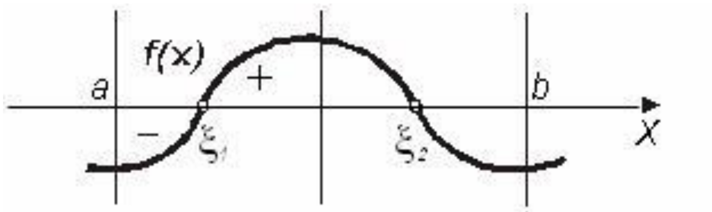

Рис. 5.3 – Графічна інтерпретація теореми 1

Теорема 2. Якщо функція $f(x)$ неперервна та монотонна на відрізку $[a; b]$ і приймає на кінцях відрізка значення різних знаків, то всередині відрізка $[a; b]$ існує корінь рівняння $f(x) = 0$, і цей корінь єдиний (рис.5.4).

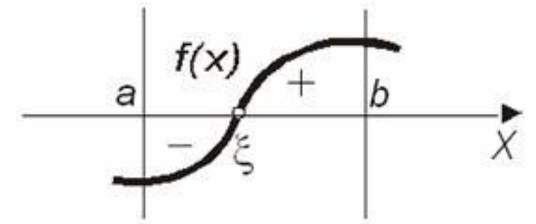

Рис. 5.4 – Графічна інтерпретація теореми 2

Теорема 3. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$

і приймає на кінцях цього відрізку значення різних знаків, а похідна $f'(x)$ зберігає постійний знак всередині відрізка, то всередині відрізка існує єдиний корінь рівняння $f(x)=0$ (рис.5.5).

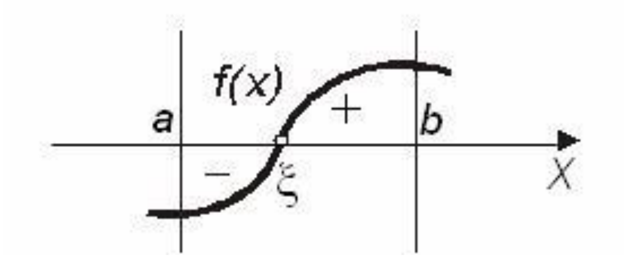

Рис. 5.5 – Графічна інтерпретація теореми 3

Для відокремлення коренів аналітичним методом скористаємося наступним алгоритмом:

1. Дослідити дане рівняння на монотонність і неперервність, визначити область допустимих та граничних значень.

2. Знайти $f'(x)$ – першу похідну, прирівняти її до нуля та знайти критичні точки.

3. Скласти таблицю знаків функції $f(x)$, використовуючи для x значення критичних точок, граничних значень з ОДЗ і точок, отриманих на першому кроці при аналізі даного рівняння.

4. Визначити інтервали, на кінцях яких функція приймає значення протилежних знаків. Всередині цих інтервалів існує по одному і тільки одному кореню.

Приклад 1. Знайти наближено графічним способом корені рівняння $lg\,x-3x+5=0$.

Розв'язання. Перепишемо рівняння наступним чином: $lg\,x=3x-5$. Функції в лівій і правій частині рівняння мають спільну область визначення: інтервал $0 < x < +\infty$. Тому будемо шукати корені саме на цьому інтервалі.

Будуємо графіки функцій $y = lg\, x$ і $y = 3x - 5$ (рис. 4.3).

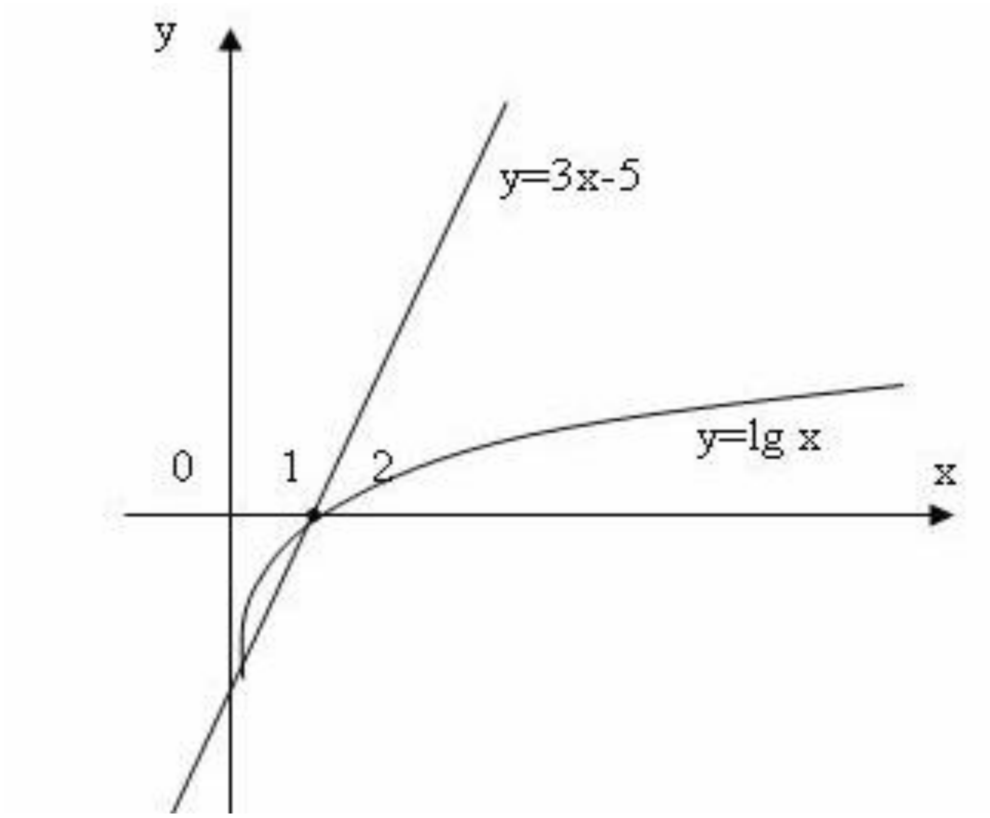

Рис. 5.6 – Графічна інтерпретація прикладу 1.

Пряма $y = 3x - 5$ перетинає логарифмічну криву в двох точках з абсцисами $x_1 \approx 0{,}00001$ і $x_2 \approx 1{,}75$. На рисунку 5.6 важко показати перетин графіків цих двох функцій в першій точці, але, враховуючи, що нижня вітка логарифмічної кривої необмежено прямує до осі *Oy*, можливо уявити, що перетин цих двох графіків пройде поблизу точки перетину графіка функції $y = 3x - 5$ і осі *Oy*. Абсциса точки перетину наближено дорівнює $0{,}00001$. Отже корені рівняння $x_1 \approx 0{,}00001$ і $x_2 \approx 1{,}75$.

Приклад 2. Відокремити корені рівняння $-2x^3 + 17x^2 - 4x - 0{,}01 = 0$.

Розв'язання. 1. Оскільки ліва частина рівняння є многочленом, то ОДЗ рівняння $(-\infty; +\infty)$.

2. Знайдемо першу похідну функції $f(x) = -2x^3 + 17x^2 - 4x - 0{,}01$: $\quad f'(x) = -6x^2 + 34x - 4$.

3. Знайдемо критичні точки функції, для цього розв'яжемо рівняння $f'(x) = 0$:

$$-6x^2 + 34x - 4 = 0,$$

$$3x^2 - 17x + 2 = 0,$$

$$x_1 = 0{,}1202; \; x_2 = 5{,}54647.$$

4. Складемо таблицю знаків виду

X	$-\infty$	0,1202	5,54647	$+\infty$
f(x)	+	-	+	-

В результаті аналізу таблиці отримаємо три відрізка на яких функція змінює знак: $(-\infty; 0{,}1202]$, $[0{,}1202; 5{,}54647]$, $[5{,}54647; \infty)$.

5. Розширимо таблицю, щоб отримати точні значення кінців відрізків

x	$-\infty$	*-4*	*-3*	*-2*	*-1*	*0*	*0,1202*	*1*	2	3	*4*	*5*	*5,54647*	*6*	*7*	*8*	*9*	$+\infty$
f(x)	+	+	+	+	+	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-

Аналіз таблиці дозволяє обрати три відрізка, на яких функція $f(x)$ змінює знак: $[-1; 0]$, $[0; 0{,}1202]$, $[8; 9]$. Тоді застосовуючи теорему 1 (Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і приймає на кінцях цього відрізку значення різних знаків, то всередині відрізка $[a; b]$ існує хоча б один корінь рівняння $f(x) = 0$) можемо сказати що всередині відрізків

$[-1;0], [0;0{,}1202], [8;9]$. існує хоча б один корінь рівняння.

Приклад 3. Відокремити корені рівняння $(2x-3)\sqrt{2+9x+4x^2}=0$.

Розв'язання. 1. При знаходженні ОДЗ даного рівняння маємо врахувати, що підкореневий вираз завжди є невід'ємним числом. Тобто $2+9x+4x^2 \geq 0$. Розв'язуючи цю нерівність методом інтервалів, отримуємо ОДЗ даного рівняння: $(-\infty;-2], [-0{,}25;\infty)$.

2. Знайдемо першу похідну функції $f(x)=(2x-3)\sqrt{2+9x+4x^2}$:

$$f'(x)=2\sqrt{2+9x+4x^2}+(2x-3)\cdot\frac{(9+8x)}{2\sqrt{2+9x+4x^2}}=\frac{32x^2-10x-19}{2\sqrt{2+9x+4x^2}}.$$

3. Знайдемо критичні точки функції, для цього розв'яжемо рівняння $f'(x)=0$:

$32x^2-10x-19=0$, а $2\sqrt{2+9x+4x^2}\neq 0$.

$x_1=0{,}943109;\ x_2=-0{,}63061;\ x_3\neq -0{,}25;\ x_4\neq -2$.

-0,63061 не належать ОДЗ.

4. Складемо таблицю знаків виду

X	$-\infty$	0,943109	$+\infty$
f(x)	-	-	+

В результаті аналізу таблиці отримаємо один відрізок на якому функція змінює знак: $[0{,}943109;+\infty)$.

5. Розширимо таблицю, щоб отримати точні значення кінців відрізків

x	$-\infty$	0	0,943109	1	2	3	$+\infty$
$f(x)$	-	-	-	-	+	+	+

Аналіз таблиці дозволяє обрати один відрізок, на якому функція $f(x)$ змінює знак: $[1;2]$. Тоді застосовуючи теорему 1 (Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;\, b]$і приймає на кінцях цього відрізку значення різних знаків, то всередині відрізка $[a;\, b]$ існує хоча б один корінь рівняння $f(x)=0$) можемо сказати, що всередині відрізка $[1;2]$. існує хоча б один корінь рівняння.

Лекція № 6

"Знаходження ізольованого розв'язку нелінійного рівняння на заданому інтервалі методом пропорційних частин"

Метод хорд є одним з найбільш поширених методів розв'язання алгебраїчних і трансцендентних рівнянь. В літературі його ще називають методом пропорційних частин, методом лінійного інтерполювання, або методом хибного положення.

Нехай задано рівняння $f(x)=0$, де $f(x)$ має на інтервалі $(a;\, b)$ неперервні похідні першого та другого порядків, які зберігають сталі знаки на $(a;\, b)$. Нехай також корінь рівняння $f(x)=0$ відокремлений і міститься на відрізку $[a;\, b]$, тобто $f(a)\cdot f(b)<0$.

Ідея методу хорд полягає в тому, що на достатньо малому відрізку $[a;\, b]$ дуга кривої $y=f(x)$замінюється прямою (лінійне інтерполювання) і абсциса точки перетину хорди з віссю Ox є наближеним коренем рівняння.

Нехай для визначеності $f(a)<0$, $f(b)>0$, $f'(x)>0$, $f''(x)>0$ (рис. 6.1, а).

На графіку позначені точки A з координатами $(a;\, f(a))$ та B з координатами $(b;\, f(b))$.

ξ – точний корінь, значення якого необхідно визначити. Візьмемо за початкове наближення шуканого кореня ξ значення $x_0=a$. Через точки A і B проведемо хорду і за перше наближення кореня ξ візьмемо абсцису x_1 точки перетину хорди з віссю Ox.

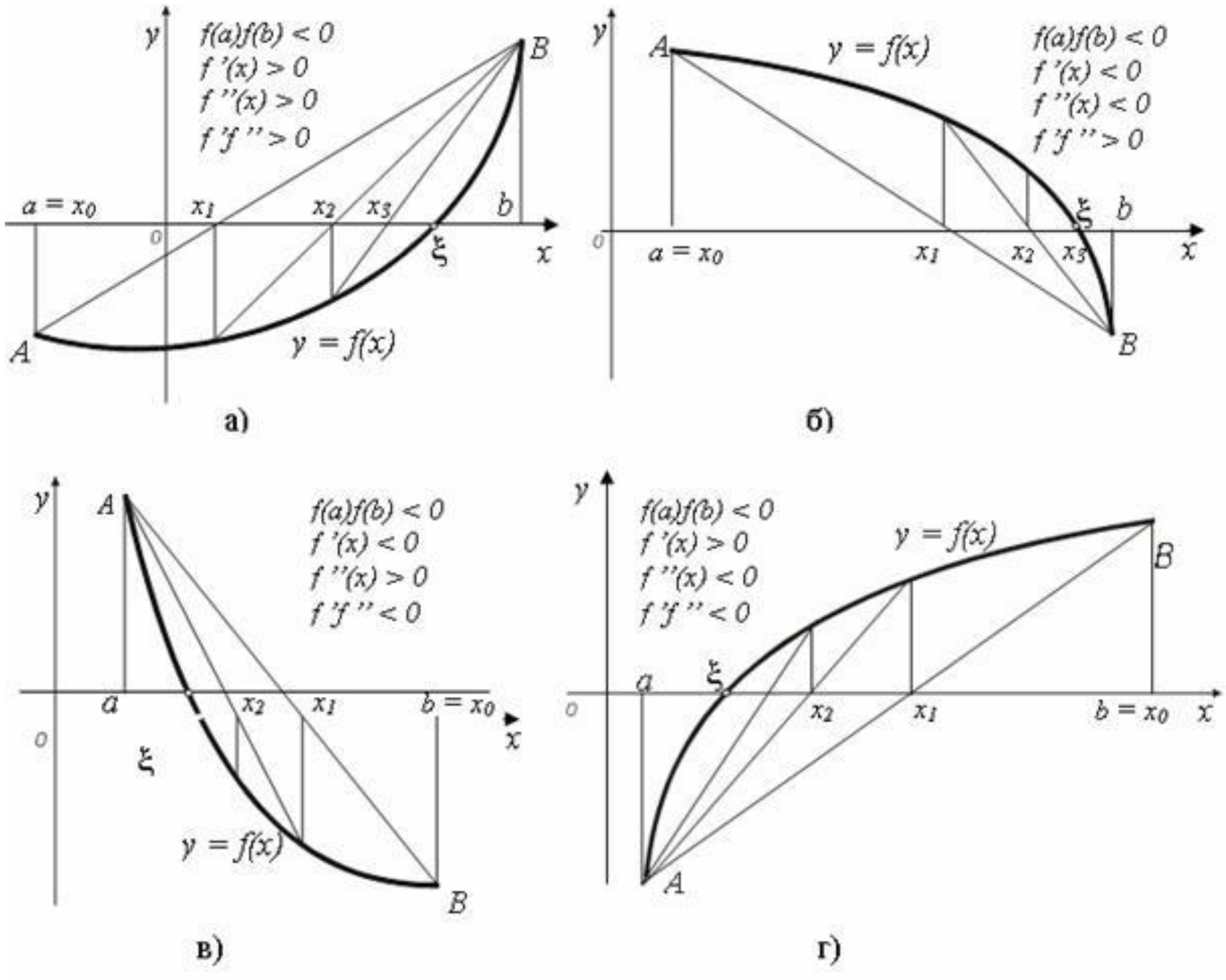

Рис. 6.1. Графічна інтерпретація методу хорд і процедури визначення рухомого кінця хорди

Рівняння хорди, яка проходить через точки $(a; f(a))$ і $(b; f(b))$ має вигляд $\dfrac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \dfrac{x - a}{b - a}$. Знайдемо значення $x = x_1$, для якого $y = 0$:

$$x_1 = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b) - f(a)}. \qquad (6.1)$$

Тепер корінь ξ знаходиться в середині відрізку $[x_1; b]$. Наближене значення кореня x_1 можна уточнити якщо застосуємо метод хорд до відрізка $[x_1; b]$, тоді нове наближене значення кореня x_2 знаходиться за формулою:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(b - x_1)}{f(b) - f(x_1)}.$$

Аналогічна для всякого $i+1$-го наближення до точного значення кореня ξ даного рівняння використовується формула:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(b - x_i)}{f(b) - f(x_i)}. \qquad (6.2)$$

Процес стягування хордою продовжується багаторазово доти, поки не одержано наближений корінь із заданим степенем точності

$$|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon, \qquad (6.3)$$

де x_{i+1}, x_i – наближені значення коренів рівняння $f(x) = 0$, відповідно на $i+1$ та i-му ітераційному кроці; ε – задана точність обчислень.

Слід відмітити, що розглянутий випадок (рис. 6.1, а) перетину функції $f(x)$ відрізку $[a; b]$ не є єдиним. Існує ще три варіанти перетину функції, кожний з яких відрізняється напрямком побудови хорд і відповідно рухомими кінцями відрізку. Наприклад, на рис.6.1.а,б рухомий кінець відрізку a, а на рис.6.1.в,г рухомий кінець – bі відповідно формула (6.1) для нього має вигляд:

$$x_1 = b - \frac{f(b)(b - a)}{f(b) - f(a)}. \qquad (6.4)$$

У загальному випадку нерухомим буде той кінець відрізка ізоляції кореня, в якому знак функції $f(x)$ збігається із знаком другої похідної, а за початкове наближення x_0 можна взяти точку відрізка $[a; b]$, в якій $f(x_0)\cdot f''(x_0) > 0$.

В результаті основну розрахункову формулу методу хорд можна записати так:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - c)}{f(x_n) - f(c)}, \ (n = 0,1,2,3,...), \tag{6.5}$$

де $c = \begin{cases} a, & \textit{якщо} \quad f(a)\cdot f''(a) > 0 \\ b, & \textit{якщо} \quad f(b)\cdot f''(b) > 0 \end{cases}$.

Послідовні наближення x_n до кореня ξ містяться з того боку кореня ξ, де функція $f(x)$ має знак, протилежний до знаку її другої похідної $f''(x)$. Крім того, кожне наступне наближення ближче до кореня ξ ніж попереднє наближення.

Нехай $\bar{\xi} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ $(a < \bar{\xi} < b)$. Границя $\bar{\xi}$ існує, тому що послідовність $\{x_n\}$ обмежена та монотонна.

Знайдемо границю обох частин формули (6.5):

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(x_n - \frac{f(x_n)(x_n - c)}{f(x_n) - f(c)}\right), \qquad \bar{\xi} = \bar{\xi} - \frac{f(\bar{\xi})(\bar{\xi} - c)}{f(\bar{\xi}) - f(c)}.$$

Звідси $f(\bar{\xi}) = 0$. Але, корінь ξ – відокремлен, тобто на інтервалі $(a; b)$ ξ – єдиний корінь рівняння $y = f(x)$. Таким чином, $\bar{\xi} = \xi$. Це означає, що послідовність наближень $\{x_n\}$ збігається до точного кореня ξ рівняння $y = f(x)$.

Для оцінки похибки наближення можна використати формулу:

$$\left|\xi - x_{n+1}\right| < \left|x_{n+1} - x_n\right|,$$

де ξ – точне значення кореня, а x_n, x_{n+1} – наближення до нього, отриманні на n-му та $n+1$-му кроці. Однак, ця формула справедлива лише на достатньо малих відрізках. Її застосовують при виконані умови:

$$L \le 2l,$$

де $\quad L = \max\limits_{[a,b]}\left|f'(x)\right|, \qquad l = \min\limits_{[a,b]}\left|f'(x)\right|.$

Приклад. Методом пропорційних частин уточнити корінь рівняння $x - \sin x = 0{,}25$ на відрізку [0,982; 1,178] з точністю $\varepsilon = 0{,}001$.

Розв'язання:

Запишемо рівняння у вигляді $f(x) = x - \sin x - 0{,}25$. Одразу обчислимо:

$$f(0{,}982) = 0{,}982 - \sin(0{,}982) - 0{,}25 = -0{,}09961 < 0,$$

$$f(1{,}178) = 1{,}178 - \sin(1{,}178) - 0{,}25 = 0{,}00416 > 0.$$

Для останього $f'(x) = 1 - \cos x > 0$ на відрізку [0,982; 1,178].

$$L = \max_{x \in [0{,}982;1{,}178]} f'(x) = 0{,}6172; \qquad l = \max_{x \in [0{,}982;1{,}178]} f'(x) = 0{,}4446.$$

Умова $L \le 2l$ на відрізку [0,982; 1,178] виконується.

Визначаємо знак другої похідної в середині даного відрізку:

$$f''(x) = \sin x > 0.$$

Далі використовуємо розрахункову формулу:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(c) - f(x_n)}(c - x_n),$$

де $c = 1{,}178$, тому що $f(1{,}178) \cdot f''(1{,}178) = 0{,}00416 \cdot 0{,}92384 = 0{,}00384 > 0$.

$x_0 = 0{,}982$;

$$x_1 = 0{,}982 - \frac{-0{,}09961}{0{,}00416 - (-0{,}09961)}(1{,}178 - 0{,}982) = 1{,}1701;$$

$$x_2 = 1{,}1701 - \frac{-0{,}00069}{0{,}00416 - (-0{,}00069)}(1{,}178 - 1{,}1701) = 1{,}1712;$$

$$x_3 = 1{,}1712 - \frac{-0{,}00002}{0{,}00416 - (-0{,}00002)}(1{,}178 - 1{,}1712) = 1{,}17123.$$

Оскільки $|x_3 - x_2| < \varepsilon$, то за корінь рівняння слід прийняти значення $x_3 = 1{,}17123$

Відповідь: $\xi = x_3 = 1{,}17123$.

Лекція № 7.

“*Знаходження розв’язку нелінійного рівняння методом Ньютона з параметром*”

Нехай корінь ξ рівняння $f(x)=0$ відокремлений на відрізку $[a;\, b]$, причому $f'(x)$ і $f''(x)$ неперервні та зберігають постійні знаки на відрізку $[a;\, b]$.

Для знаходження значення наступного наближення використовують наступну формулу:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n=0,1,2,\ldots \tag{7.1}$$

– формула методу Ньютона.

При виборі початкового наближення слід керуватись правилом: за початкове наближення у методі Ньютона необхідно брати таку точку $x_0 \in [a;\, b]$, в якій $f(x_0)\cdot f''(x_0) > 0$.

Якщо дана умова не виконується, тобто $f(x_0)\cdot f''(x_0) < 0$, то в цьому випадку можна застосувати метод Ньютона з параметром. Його ідея полягає в тому, що здійснюється вибір нового початкового наближення за допомогою формули:

$$x_{n+1} = x_n - t \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{7.2}$$

Параметр t змінюють таким чином, щоб виконувалась нерівність:

$$|f(x_{n+1})| < |f(x_n)| \tag{7.3}$$

Покладемо спочатку t=1. Якщо умова $|f(x_{n+1})| < |f(x_n)|$ не виконується, то вважають $t = \frac{t}{2}$ і продовжують обчислення згідно з формулою $x_{n+1} = x_n - t \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, поки $|f(x_{n+1})| < |f(x_n)|$. В цьому разі знайдене значення x_{n+1} приймають за початкове наближення і далі обчислення проводяться за формулою Ньютона $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Зауваження 1. Якщо похідна $f'(x)$ мало змінюється на відрізку $[a;b]$, то кількість обчислень у методі Ньютона можна зменшити, коли значення $f'(x_n)$ у точках x_n, n=0,1,2,… замінити значенням $f'(x_0)$. Тоді формула Ньютона матиме вигляд:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, \qquad n=0,1,2,\ldots$$

Зауваження 2. З формули $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ неважко помітити, що чим більше чисельне значення $f'(x)$ в околі даного кореня, тим менша правка, яку додаватиме до n-го наближення, щоб отримати *n+1*-ше наближення. Тому метод Ньютона використовують тоді, коли в околі даного кореня графік функції має значну крутість. Якщо чисельне значення похідної $f'(x)$ біля кореня маленьке, то поправки великі і виконувати обчислення кореня методом Ньютона не варто.

Для оцінки похибки можна використати загальну формулу

$$|\xi - x_n| \le \frac{|f(x_n)|}{l}, \tag{7.4}$$

де $l = \min\limits_{[a;b]} |f'(x)|$. Ця формула справедлива і для метода пропорційних частин.

Для метода Ньютона справедлива також оцінка

$$|x_{n+1} - x_n| \le \sqrt{\frac{2l_1}{L_2} \cdot \varepsilon}\,. \qquad (7.5)$$

Якщо на відрізку $[a; b]$ справедлива нерівність $L_2 \le 2l_1$, то ітераційний процес можна закінчити, коли виконується умова $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$

Приклад. Знайти дійсний корінь рівняння $x^6 - 3x^4 + 2x^2 - 100 = 0$ з початковим наближенням до кореня x_0=1,9 і точністю $\varepsilon = 0{,}01$.

Розв'язання:

$f(x) = x^6 - 3x^4 + 2x^2 - 100 = 0$

Перевіримо умову $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$. Якщо ця умова не виконується, то застосуємо метод Ньютона з параметром для знаходження нового початкового наближення.

Для перевірки умови необхідно обчислити значення функції у точці x_0 та значення другої похідної в точці x_0:

$f'(x) = 6x^5 - 12x^3 + 4x$,

$f''(x) = 30x^4 - 36x^2 + 4$.

Обчислимо значення функції та значення другої похідної в точці x_0=1,9:

$f(x_0) = 1{,}9^6 - 3 \cdot 1{,}9^4 + 2 \cdot 1{,}9^2 - 100 = -84{,}83042$,

$$f''(x_0)=30\cdot 1{,}9^4-36\cdot 1{,}9^2+4=265{,}003.$$

Перевіряємо умову $f(x_0)\cdot f''(x_0)>0$:

$$f(x_0)\cdot f''(x_0)=-84{,}83042\cdot 265{,}003=-22480{,}32<0.$$

Умова не виконується. Отже застосуємо метод Ньютона з параметром для знаходження нового початкового наближення:

$$x_{n+1}=x_n-t\cdot\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\qquad \text{де } t=1;\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8};\ldots$$

Зверніть увагу на те, що такі елементи як x_n, $f(x_n)$ та $f'(x_n)$ залишаються незмінними, змінюється параметр ***t*** доки не почне виконуватись умова $\left|f(x_{n+1})\right|<\left|f(x_n)\right|$.

Розрахуємо нове значення початкового наближення та перевіримо умову $\left|f(x_{n+1})\right|<\left|f(x_n)\right|$.

$x_0=1{,}9$,

$$f(x_0)=1{,}9^6-3\cdot 1{,}9^4+2\cdot 1{,}9^2-100=-84{,}83042,$$

$$f'(x_0)=6\cdot 1{,}9^5-12\cdot 1{,}9^3+4\cdot 1{,}9=73{,}85794,$$

$t=1$,

$$x_1=x_0-t\cdot\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=1{,}9-1\cdot\frac{-84{,}83042}{73{,}85794}=3{,}04856.$$

$$f(x_1)=3{,}04856^6-3\cdot 3{,}04856^4+2\cdot 3{,}04856^2-100=462{,}19841.$$

$\left|f(x_1)\right|=462{,}19841>\left|-84{,}83042\right|=\left|f(x_0)\right|$, отже умова не виконується.

Покладемо $t=\frac{1}{2}$,

$$x_1' = x_0 - t \cdot \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1{,}9 - \frac{1}{2} \cdot \frac{-84{,}83042}{73{,}85794} = 2{,}47428,$$

$$f(x_1') = 2{,}47428^6 - 3 \cdot 2{,}47428^4 + 2 \cdot 2{,}47428^2 - 100 = 29{,}25823.$$

$\left| f(x_1') \right| = 29{,}25823 < \left| -84{,}83042 \right| = \left| f(x_0) \right|$, отже умова виконується.

Далі працює метод Ньютона без параметру:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Знаходимо значення ***x*** доки $\left| x_{n+1} - x_n \right| < \varepsilon$

$x_1 = 2{,}47428$, $f(x_1) = 29{,}25823$, $f'(x_1) = 384{,}53637$;

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2{,}47428 - \frac{29{,}25823}{384{,}53637} = 2{,}39819;$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 2{,}39819 - \frac{2{,}51087}{320{,}04152} = 2{,}39035.$$

Перевіримо критерій зупинення процесу ітерацій $\left| x_{n+1} - x_n \right| < \varepsilon$:

$\left| x_3 - x_2 \right| = \left| 2{,}39035 - 2{,}39819 \right| = \left| -0{,}00784 \right| < \varepsilon$ критерій виконується.

Відповідь: $x = x_3 = 2{,}39035$.

Лекція № 8

"Знаходження розв'язку системи нелінійних рівнянь методом Ньютона"

Розглянемо розв'язок системи двох нелінійних рівнянь з двома невідомими методом Ньютона. Нехай дана система

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}$$

де f і φ –неперервні диференційовані функції. Припустимо, що відомі n-є приближення невідомих, тоді за більш точні їх значення можна прийняти $x = x_n + h_n$ та $y = y_n + k_n$.

Тоді система запишеться у вигляді $\begin{cases} f(x_n + h_n, y_n + k_n) = 0 \\ \varphi(x_n + h_n, y_n + k_n) = 0 \end{cases}$.

Розкладемо функції f і φ в ряд Тейлора за степенями h_n і k_n :

$$f(x_n + h_n, y_n + k_n) = f(x_n, y_n) + h_n \cdot f'_x(x_n, y_n) + k_n \cdot f'_y(x_n, y_n) + O_1(h_n, k_n),$$

$$\varphi(x_n + h_n, y_n + k_n) = \varphi(x_n, y_n) + h_n \cdot \varphi'_x(x_n, y_n) + k_n \cdot \varphi'_y(x_n, y_n) + O_2(h_n, k_n).$$

Тут $O_1(h_n, k_n)$ і $O_2(h_n, k_n)$ містять члени більш високого порядку меншості, ніж h_n і k_n .

Задовольнившись першими трьома членами відносно h_n і k_n отримаємо систему

$$\begin{cases} f(x_n, y_n) + h_n \cdot f'_x(x_n, y_n) + k_n \cdot f'_y(x_n, y_n) = 0 \\ \varphi(x_n, y_n) + h_n \cdot \varphi'_x(x_n, y_n) + k_n \cdot \varphi'_y(x_n, y_n) = 0 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} h_n \cdot f'_x(x_n, y_n) + k_n \cdot f'_y(x_n, y_n) = -f(x_n, y_n) \\ h_n \cdot \varphi'_x(x_n, y_n) + k_n \cdot \varphi'_y(x_n, y_n) = -\varphi(x_n, y_n) \end{cases}$$

Звідки

$$h_n = \frac{\begin{vmatrix} -f(x_n, y_n) & f'_y(x_n, y_n) \\ -\varphi(x_n, y_n) & \varphi'_y(x_n, y_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f'_x(x_n, y_n) & f'_y(x_n, y_n) \\ \varphi'_x(x_n, y_n) & \varphi'_y(x_n, y_n) \end{vmatrix}} = \frac{\Delta h_n}{\Delta_n},$$

$$k_n = \frac{\begin{vmatrix} f'_x(x_n, y_n) & -f(x_n, y_n) \\ \varphi'_x(x_n, y_n) & -\varphi(x_n, y_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f'_x(x_n, y_n) & f'_y(x_n, y_n) \\ \varphi'_x(x_n, y_n) & \varphi'_y(x_n, y_n) \end{vmatrix}} = \frac{\Delta k_n}{\Delta_n}.$$

Таким чином, знаходимо $x_{n+1} = x_n + h_n,\ y_{n+1} = y_n + k_n$.

Початкові значення x_0, y_0 визначаються наближено, звичайно із графічного методу.

Приклад. Знайти розв’язок системи нелінійних рівнянь $\begin{cases} F(x,y) = x^2y + 4xy - 2x + 3 = 0 \\ G(x,y) = y^3 - 2x^2 + y - 1 = 0 \end{cases}$ методом Ньютона з початковим наближенням $x_0 = 1$ та $y_0 = 0{,}5$ з точністю $\varepsilon = 0{,}01$.

Розв’язання.

Знайдемо частинні похідні за *x* та за *y* для системи нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} F(x,y) = x^2y + 4xy - 2x + 3 = 0 \\ G(x,y) = y^3 - 2x^2 + y - 1 = 0 \end{cases}$$

Частинні похідні за ***x*** та за ***y***:

$$f_x' = 2xy + 4y - 2, \qquad f_y' = x^2 + 4x,$$
$$g_x' = -4x, \qquad g_y' = 3y^2 + 1.$$

За методом Ньютона нові значення знаходяться

$$x_{n+1} = x_n + h_n \quad \text{та} \quad y_{n+1} = y_n + k_n,$$

$$\text{де} \qquad h_n = \frac{\begin{vmatrix} -f(x_n, y_n) & f_y'(x_n, y_n) \\ -g(x_n, y_n) & g_y'(x_n, y_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_x'(x_n, y_n) & f_y'(x_n, y_n) \\ g_x'(x_n, y_n) & g_y'(x_n, y_n) \end{vmatrix}} = \frac{\Delta h_n}{\Delta_n}$$

$$\text{та} \qquad k_n = \frac{\begin{vmatrix} f_x'(x_n, y_n) & -f(x_n, y_n) \\ g_x'(x_n, y_n) & -g(x_n, y_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_x'(x_n, y_n) & f_y'(x_n, y_n) \\ g_x'(x_n, y_n) & g_y'(x_n, y_n) \end{vmatrix}} = \frac{\Delta k_n}{\Delta_n}$$

Перевіримо критерій зупинення процесу ітерацій $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ та $|y_{n+1} - y_n| < \varepsilon$:

$|x_3 - x_2| = |0{,}584959 - 0{,}584172| = 0{,}000817 < \varepsilon$,

$|y_3 - y_2| = |0{,}916033 - 0{,}92592| = 0{,}00989 < \varepsilon$.

Умова виконується одночасно для x та для y.

Обчислення зручно проводити у таблиці:

N	0	1	2	3
x	1	0,536232	0,584172	0,584989
y	0,5	0,797101	0,92592	0,916033
$f(x,y)$	-0,5	0,447014	-0,01595	
$g(x,y)$	-2,375	-0,27153	0,037223	
$f'_x(x,y)$	-3	-4,33354	-4,62189	
$g'_x(x,y)$	-4	-2,14493	-2,33669	
$f'_y(x,y)$	-3	-1,85738	-1,99543	
$g'_y(x,y)$	1,75	2,906112	3,571982	
Δ	-17,25	-16,578	-21,172	
Δh	8	-0,79473	-0,0173	
Δk	-5,125	-2,13551	0,209312	
h	-0,46377	0,04794	0,000817	
k	0,297101	0,128818	-0,00989	

Відповідь: $x = x_3 = 0{,}584989$ та $y = y_3 = 0{,}916033$.

МОДУЛЬ №3
ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Часто при розв'язуванні будь-яких практичних та теоретичних задач виникає необхідність визначення власних значень, власних векторів матриці, визначника матриці, а також використання наближених методів розв'язання систем лінійних рівнянь, які дозволяють одержувати значення коренів системи з заданою точністю у вигляді границі послідовності деяких векторів. процес такої послідовності називається ітераційним (повторювальним).

Лекція № 9
“ Обчислення визначників методом Краута”

Матриці і операції над ними

Прямокутна таблиця, складена із $m \times n$ елементів a_{ij}, ($i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$) утворюють m рядків та n стовпців, називається матрицею і записується у вигляді

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Елементи матриці нумеруються 2 індексами a_{ij}. Перший індекс i елемента a_{ij} означає номер рядка, а другий j − номер стовпця, на перетині яких знаходиться цей елемент в матриці.

Елементи з однаковими індексами a_{11}, a_{22}, a_{33}, … a_{nn} утворюють головну діагональ матриці.

Матриці позначають прописними літерами латинського алфавіту: A, B, C, … Якщо у матриці m рядків і n стовпців, то за означенням вона має розмірність $m \times n$. Матриця називається числовою, якщо її елементи a_{ij} − числа; функціональною, якщо a_{ij} − функції; векторною, якщо a_{ij} − вектори, і т. д. Матриці A і B називаються рівними, якщо всі їх відповідні елементи a_{ij} і b_{ij} рівні, тобто $a_{ij} = b_{ij}$. Отже, рівними можуть бути тільки матриці одної розмірності. Матриця, в якої число рядків дорівнює числу стовпців, називається квадратною. Матриця, у якої всього один рядок, називається матрицею-рядком, а матриця, у якої всього один стовпець – матрицею-стовпцем.

Діагональною називається матриця, у якої всі елементи, що не належать головній діагоналі, рівні нулю. Наприклад,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ − діагональна матриця третього порядку.

Одинична матриця – це діагональна матриця, у якої всі елементи головної діагоналі рівні 1. Позначається одинична матриця літерою E або I.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ − одинична матриця третього порядку.

Якщо всі елементи матриці, що знаходяться нижче або вище головної діагоналі, дорівнюють нулю, то матриця називається трикутною.

Матрицю $B = A^T$ називають транспонованою до A, якщо $b_{ik} = a_{ki}$. Якщо матриця А розміром $m \times n$, то матриця A^T має розміри $n \times m$. Наприклад,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Якщо в A має місце рівність $a_{ik} = a_{ki}$, то матриця A називається симетричною.

Якщо $a_{ik} = -a_{ki}$, то A називається антисиметричною. В антисиметричної матриці головна діагональ складається з нулів. Наприклад,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} - \text{симетрична матриця третього порядку.}$$

Основні дії над матрицями.

1. Додавання і віднімання матриць. Ця дія визначена тільки для матриць одної розмірності. Сумою (різницею) матриць A і B, що позначається $A + B$ $(A - B)$, називається матриця С такого ж розміру, елементи якої $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$, де a_{ij}, b_{ij} − відповідно елементи матриць А і В. Наприклад, нехай

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 7 \\ 8 & -11 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$A+B=\begin{pmatrix}-1 & 10\\ 5 & 3\\ 5 & -2\end{pmatrix}, \quad A-B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & -11\\ -11 & 20\end{pmatrix}.$$

2. Множення матриці на число. Добутком матриці A на число λ (позначається λA) називається матриця B тієї ж розмірності, елементи якої $b_{ij}=\lambda a_{ij}$, де a_{ij} − елементи матриці A, тобто при множенні матриці на число (числа на матрицю) потрібно всі елементи матриці помножити на це число. Наприклад, нехай

$$\lambda=-2, \qquad A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 7 & -1\end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\lambda A=-2\begin{pmatrix}3 & 0\\ 7 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 0\\ -14 & 2\end{pmatrix}.$$

3. Множення матриць. Дія множення двох матриць вводиться тільки для узгоджених матриць. Матриця A називається узгодженою з матрицею B, якщо кількість стовпців першої матриці A дорівнює кількості рядків другої матриці B. З узгодженості матриці A з B, взагалі кажучи, не випливає узгодженість B з A. Квадратні матриці одного порядку взаємно узгоджені.

Добутком $C=AB$ матриці $A_{m\times n}=(a_{ij})$ на матрицю $B_{n\times k}=(b_{ij})$ називається така матриця, у якої елемент c_{ij} дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}; \qquad C = C_{m\times k} = (c_{ij}),$$

$i = 1,2,...,m;\ \ j = 1,2,...,k$. Із існування добутку AB не випливає існування добутку BA. У випадку його існування, як правило $AB \neq BA$. Якщо $AB = BA$, то матриці A і B називаються перестановочними (або комутуючими). Відомо, що завжди $(AB)C = A(BC)$.

Визначник матриці.

Із квадратною матрицею $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ зв'язаний визначник (детермінант), який позначається $det\,A$ чи $|A|$:

$$det\,A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Визначник матриці є число, що обчислюється за деякими правилами. У визначнику розрізняють дві діагоналі: головну та побічну.

Головна діагональ складається із елементів a_{ii}, де i=1,2,3, …, n.

Побічна діагональ проходить перпендикулярно головній, з верхнього правого кута визначника в нижній лівий. Порядок визначника відповідає порядку матриці, визначником якої він є.

Визначник другого порядку дорівнює добутку елементів головної діагоналі мінус добуток елементів побічної діагоналі:

$$det\,A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Визначником третього порядку називається число

$$det\,A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} -$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11}$$

Властивості визначника.

1. Визначник не змінюється при транспонуванні:

$$det\,A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2. Якщо один з рядків чи один зі стовпців визначника складається із нулів, то визначник дорівнює нулю.

3. Від перестановки двох рядків чи двох стовпців визначник змінює тільки знак.

4. Визначник, який містить два однакових рядки чи два однакових стовпці, дорівнює нулю.

5. Якщо всі елементи деякого рядка чи стовпця визначника помножити на число $k \neq 0$, то сам визначник збільшиться на це число.

6. Визначник, що містить два пропорційних рядки, дорівнює нулю.

7. Якщо всі елементи *i*-го рядка визначника *n*-го порядку

представлені у вигляді суми двох доданків: $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$ (j=1,2,3, …, n), то даний визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких рядки, крім i-го, такі ж, як і в заданому визначнику, а i-й рядок в одному із доданків складається з елементів b_{ij}, а в іншому – із елементів c_{ij}, тобто:

$$det\,A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} = b_{21} + c_{21} & a_{22} = b_{22} + c_{22} & \dots & a_{2n} = b_{2n} + c_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

8. Якщо один із рядків визначника представляє суму інших рядків чи суму добутку інших рядків визначника на число k, то визначник дорівнює нулю.

9. Визначник не зміниться, якщо до елементів одного із його рядків (стовпців) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те саме число.

Трикутні матриці. Розкладання матриці на добуток двох трикутних матриць.

Квадратна матриця називається трикутною, якщо елементи, що знаходяться вище чи нижче головної діагоналі, дорівнюють нулю. Якщо дорівнюють нулю елементи, що знаходяться вище головної діагоналі, то матриця називається нижньою трикутною:

$$T_1 = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ t_{21} & t_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

Якщо ж дорівнюють нулю елементи, що знаходяться нижче головної діагоналі, то матриця називається верхньою трикутною:

$$T_2 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

Визначник трикутної матриці дорівнює добутку її діагональних елементів. Якщо $T = \lfloor t_{ij} \rfloor$ – трикутна матриця, то

$$detT = t_{11} \cdot t_{22} \cdot \ldots \cdot t_{nn}.$$

Нехай $A = T_1 \cdot T_2$,

де $$T_1 = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ t_{21} & t_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}, \qquad T_2 = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Шукані елементи трикутних матриць T_1 і T_2 знаходяться таким чином: перемножити матриці T_1 і T_2 (на прикладі матриці третього порядку):

$$T_1 \cdot T_2 = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ 0 & 1 & r_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{11}r_{12} & t_{11}r_{13} \\ t_{21} & t_{21}r_{12} + t_{22} & t_{21}r_{13} + t_{22}r_{23} \\ t_{31} & t_{31}r_{12} + t_{32} & t_{31}r_{13} + t_{32}r_{23} + t_{33} \end{bmatrix}$$

Приклад. Обчислити методом Краута визначник квадратної матриці $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ з точністю $\varepsilon = 0{,}01$.

Розв'язання.

Для того щоб обчислити визначник такої матриці методом Краута, необхідно:

$$|A| = |C| \cdot |B| = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_{21} & 1 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & 1 \end{vmatrix} = c_{11} \cdot c_{22} \cdot c_{33} \cdot 1,$$

де $c_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} \cdot c_{kj}$ та $b_{ij} = \dfrac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik} \cdot c_{kj}}{c_{jj}}$.

Знайдемо значення елементів першого рядка матриці *C* та першого стовпчика матриці *B:*

$$c_{11} = a_{11} = 4, \qquad c_{12} = a_{12} = -2, \qquad c_{13} = a_{13} = 0;$$

$$b_{21} = \frac{a_{21}}{c_{11}} = \frac{2}{4} = 0{,}5, \qquad b_{31} = \frac{a_{31}}{c_{11}} = \frac{-2}{4} = -0{,}5.$$

Знайдемо значення елементів другого рядка матриці *C* та другого стовпчика матриці *B:*

$$c_{22} = a_{22} - \sum_{k=1}^{2-1} b_{2k} \cdot c_{k2} = a_{22} - b_{21} \cdot c_{12} = 3 - 0{,}5 * (-2) = 4,$$

$$c_{23} = a_{23} - \sum_{k=1}^{2-1} b_{2k} \cdot c_{k3} = a_{23} - b_{21} \cdot c_{13} = 3 - 0{,}5 * 0 = 3;$$

$$b_{32} = \frac{a_{32} - \sum_{k=1}^{2-1} b_{3k} \cdot c_{k2}}{c_{22}} = \frac{a_{32} - b_{31} \cdot c_{12}}{c_{22}} = \frac{3-(-0{,}5)\cdot(-2)}{4} = 0{,}5;$$

$$c_{33} = a_{33} - \sum_{k=1}^{3-1} b_{3k} \cdot c_{k3} = a_{33} - (b_{31} \cdot c_{13} + b_{32} \cdot c_{23}) = 5 - (-0{,}5*0 + 0{,}5*3) = 3{,}5.$$

Отже, $|A| = |C| \cdot |B| = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3{,}5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 0 \\ -0{,}5 & 0{,}5 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 4 \cdot 3{,}5 \cdot 1 = 56.$

Відповідь: $|A| = 56$.

Лекція № 10

“Обчислення визначників методом Гауса”

Обчислення визначника матриці методом Гауса полягає в тому, що елементарними перетвореннями рядків початкова матриця зводиться до найпростішого східчастого вигляду, тобто усі елементи, які розташовані під головною діагоналлю дорівнюють 0. Після цього визначник знаходиться як добуток елементів головної діагоналі вже перетвореної матриці.

Приклад. Знайти визначник квадратної матриці *A* з точністю ε=0,001, де:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ -7 & 4 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 11 & 8 \\ 6 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Розв’язання.

Обчислення визначника матриці методом Гауса полягає в тому, що елементарними перетвореннями рядків початкова матриця зводиться до найпростішого східчастого вигляду, тобто усі елементи, які розташовані під головною діагоналлю дорівнюють 0. Після цього визначник знаходиться як добуток елементів головної діагоналі вже перетвореної матриці.

Перетворимо у 0 елементи, які розташовані під елементом a_{11}. Для цього розрахуємо допоміжні коефіцієнти для кожного рядка (2-го, 3-го, 4-го).

Коефіцієнт для другого рядка $k_1 = -\dfrac{a_{21}}{a_{11}} = -\dfrac{-7}{2} = 3{,}5$.

Коефіцієнт для третього рядка $k_2 = -\dfrac{a_{31}}{a_{11}} = -\dfrac{3}{2} = -1{,}5$.

Коефіцієнт для четвертого рядка $k_3 = -\dfrac{a_{41}}{a_{11}} = -\dfrac{6}{2} = -3$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{11} \cdot k_1 + a_{21} & a_{12} \cdot k_1 + a_{22} & a_{13} \cdot k_1 + a_{23} & a_{14} \cdot k_1 + a_{24} \\ a_{11} \cdot k_2 + a_{31} & a_{12} \cdot k_2 + a_{32} & a_{13} \cdot k_2 + a_{33} & a_{14} \cdot k_2 + a_{34} \\ a_{11} \cdot k_3 + a_{41} & a_{12} \cdot k_3 + a_{42} & a_{13} \cdot k_3 + a_{43} & a_{14} \cdot k_3 + a_{44} \end{bmatrix} =$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 2\cdot 3{,}5+(-7) & 1\cdot 3{,}5+4 & 4\cdot 3{,}5+2 & 5\cdot 3{,}5+(-1) \\ 2\cdot(-1{,}5)+3 & 1\cdot(-1{,}5)+-2 & 4\cdot(-1{,}5)+11 & 5\cdot(-1{,}5)+8 \\ 2\cdot(-3)+6 & 1\cdot(-3)+3 & 4\cdot(-3)+1 & 5\cdot(-3)+2 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 7{,}5 & 16 & -16{,}5 \\ 0 & -3{,}5 & 5 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & -11 & -13 \end{bmatrix}.$$

Перетворимо у 0 елементи, які розташовані під елементом a_{22}. Для цього розрахуємо допоміжний коефіцієнт для другого рядка. Для четвертого рядка коефіцієнт не розраховується, так як елемент a_{42} вже дорівнює 0. Тобто елементи четвертого рядка переписуються без будь-яких перетворень.

Коефіцієнт для третього рядка $k_4=-\dfrac{a_{32}}{a_{22}}=-\dfrac{-3{,}5}{7{,}5}=0{,}467$.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 7{,}5 & 16 & -16{,}5 \\ 0 & -3{,}5 & 5 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & -11 & -13 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 7{,}5 & 16 & -16{,}5 \\ 0 & 7{,}5\cdot 0{,}467+(-3{,}5) & 16\cdot 0{,}467+5 & -16{,}5\cdot 0{,}467+0{,}5 \\ 0 & 0 & -11 & -13 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 1 & 4 & 5\\ 0 & 7{,}5 & 16 & -16{,}5\\ 0 & 0 & 12{,}467 & 8{,}2\\ 0 & 0 & -11 & -13\end{bmatrix}.$$

Перетворимо у 0 елементи, які розташовані під елементом a_{33}.

Коефіцієнт для четвертого рядка $k_5=-\dfrac{a_{43}}{a_{33}}=-\dfrac{-11}{12{,}467}=0{,}882$.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 4 & 5\\ 0 & 7{,}5 & 16 & -16{,}5\\ 0 & 0 & 12{,}467 & 8{,}2\\ 0 & 0 & -11 & -13\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 1 & 4 & 5\\ 0 & 7{,}5 & 16 & -16{,}5\\ 0 & 0 & 12{,}467 & 8{,}2\\ 0 & 0 & 12{,}467\cdot 0{,}882+(-11) & 8{,}2\cdot 0{,}882+(-13)\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 1 & 4 & 5\\ 0 & 7{,}5 & 16 & -16{,}5\\ 0 & 0 & 12{,}467 & 8{,}2\\ 0 & 0 & 0 & 5{,}765\end{bmatrix}.$$

Після перетворень обчислимо значення визначника матриці А:

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 1 & 4 & 5\\ 0 & 7{,}5 & 16 & -16{,}5\\ 0 & 0 & 12{,}467 & 8{,}2\\ 0 & 0 & 0 & 5{,}765\end{vmatrix}=2\cdot 7{,}5\cdot 12{,}467\cdot 5{,}765=1078.$$

Відповідь: $|A|=1078$.

Лекція № 11

“Розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса з вибором головного елемента”

Основною ідеєю методу Гауса, є послідовне виключення невідомих, що приводить до побудови еквівалентної системи з трикутною матрицею.

Метод Гауса при вирішенні системи рівнянь можна розділити на два етапи: прямий і зворотний хід. Обчислення невідомих ведеться у зворотній послідовності, тобто від останньої до першої. Необхідною і достатньою умовою виконання методу Гауса має бути наступним: всі провідні елементи A_{ii} не повинні дорівнювати нулю. У якості головного елемента обирається найбільший коефіцієнт, який розташовують на головній діагоналі, для цього необхідно міняти місцями відповідні рядки чи стовпчики.

Приклад. Знайти розв’язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь Ax=F методом Гауса з вибором головного елемента з точністю ε=0,001, де:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 & 1 \\ -3 & 5 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}; \qquad F=\begin{bmatrix} 24 \\ -7 \\ 16 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Розв’язання.

Основною ідеєю методу Гауса, є послідовне виключення невідомих, що приводить до побудови еквівалентної системи з трикутною матрицею.

Метод Гауса при вирішенні системи рівнянь можна розділити на два етапи: прямий і зворотний хід. Обчислення невідомих ведеться у зворотній послідовності, тобто від останньої до першої. Необхідною і достатньою умовою виконання методу Гауса має бути наступним: всі провідні елементи A_{ii} не повинні дорівнювати нулю. У якості головного елемента обирається найбільший коефіцієнт, який розташовують на головній діагоналі, для цього необхідно міняти місцями відповідні рядки чи стовпчики.

При розв'язуванні систем лінійних рівнянь методом Гауса зручніше виконувати елементарні перетворення не над самою системою, а над її розширеною матрицею, тобто матрицею, утвореною приєднанням до основної матриці системи стовпця вільних членів.

Запишемо розширену матрицю, з якою виконуватимемо перетворення. Найбільший коефіцієнт дорівнює 8 та розташований у першому рядку та третьому стовпчику. Його треба розташувати на головній діагоналі.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 3 & 1 & 1 & 24 \\ 2 & 5 & -3 & -2 & -7 \\ 4 & -1 & 0 & 3 & 16 \\ -2 & 3 & 5 & 4 & 5 \end{array}\right].$$

Перетворимо у 0 елементи, які розташовані під елементом a_{11}. Для цього розрахуємо допоміжні коефіцієнти для кожного рядка (2-го, 3-го, 4-го).

Коефіцієнт для другого рядка $k_1 = -\frac{a_{21}}{a_{11}} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$.

Коефіцієнт для третього рядка $k_2 = -\frac{a_{31}}{a_{11}} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$.

Коефіцієнт для четвертого рядка $k_3 = -\frac{a_{41}}{a_{11}} = -\frac{-2}{8} = \frac{1}{4}$.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 3 & 1 & 1 & 24 \\ 2 & 5 & -3 & -2 & -7 \\ 4 & -1 & 0 & 3 & 16 \\ -2 & 3 & 5 & 4 & 5 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 3 & 1 & 1 & 24 \\ 8\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+2 & 3\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+5 & 1\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)-3 & 1\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)-2 & 24\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)-7 \\ 8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+4 & 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-1 & 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+0 & 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3 & 24\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+16 \\ 8\cdot\left(\frac{1}{4}\right)-2 & 3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)+3 & 1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)+5 & 1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)+4 & 24\cdot\left(\frac{1}{4}\right)+5 \end{array}\right] \approx$$

$$\approx \left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 3 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & \frac{17}{4} & -\frac{13}{4} & -\frac{9}{4} & -13 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 4 \\ 0 & \frac{15}{4} & \frac{21}{4} & \frac{17}{4} & 11 \end{array}\right]$$

Розглянемо коефіцієнти $\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$ матриці A, найбільший дорівнює $\frac{21}{4}$. Його треба розташувати на головній діагональ – a_{22}. Для цього міняємо місцями другий та третій стовпчики, а потім міняємо місцями другий та четвертий рядки.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 3 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & \frac{17}{4} & -\frac{13}{4} & -\frac{9}{4} & -13 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 4 \\ 0 & \frac{15}{4} & \frac{21}{4} & \frac{17}{4} & 11 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 3 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & -\frac{13}{4} & \frac{17}{4} & -\frac{9}{4} & -13 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 4 \\ 0 & \frac{21}{4} & \frac{15}{4} & \frac{17}{4} & 11 \end{array}\right] \approx$$

$$\approx \left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 3 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & \frac{21}{4} & \frac{15}{4} & \frac{17}{4} & 11 \\ 0 & -\frac{13}{4} & \frac{17}{4} & -\frac{9}{4} & -13 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 4 \end{array}\right].$$

Перетворимо у 0 елементи, які розташовані під елементом a_{22}. Для цього розрахуємо допоміжний коефіцієнт для другого рядка.

Коефіцієнт для третього рядка $k_4 = -\frac{a_{32}}{a_{22}} = -\frac{-\frac{13}{4}}{\frac{21}{4}} = \frac{13}{21}$.

Коефіцієнт для четвертого рядка $k_5 = -\frac{a_{42}}{a_{22}} = -\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{21}{4}} = \frac{2}{21}$.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 3 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & \frac{21}{4} & \frac{15}{4} & \frac{17}{4} & 11 \\ 0 & -\frac{13}{4} & \frac{17}{4} & -\frac{9}{4} & -13 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 4 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 3 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & \frac{21}{4} & \frac{15}{4} & \frac{17}{4} & 11 \\ 0 & 0 & \frac{46}{7} & \frac{8}{21} & -\frac{130}{21} \\ 0 & 0 & -\frac{15}{7} & \frac{61}{21} & \frac{106}{21} \end{array}\right].$$

Розглянемо коефіцієнти $\begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$ матриці А, найбільший дорівнює $\frac{46}{7}$. Цей елемент вже розташований на головній діагональ – a_{33}. Перетворимо у 0 елементи, які розташовані під елементом a_{33}.

Коефіцієнт для четвертого рядка $k_6 = -\dfrac{a_{43}}{a_{33}} = -\dfrac{-\frac{15}{7}}{\frac{46}{7}} = \dfrac{15}{46}$.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 3 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & \frac{21}{4} & \frac{15}{4} & \frac{17}{4} & 11 \\ 0 & 0 & \frac{46}{7} & \frac{8}{21} & -\frac{130}{21} \\ 0 & 0 & -\frac{15}{7} & \frac{61}{21} & \frac{106}{21} \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 3 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & \frac{21}{4} & \frac{15}{4} & \frac{17}{4} & 11 \\ 0 & 0 & \frac{46}{7} & \frac{8}{21} & -\frac{130}{21} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{209}{69} & \frac{209}{69} \end{array}\right].$$

Запишемо цей прямий хід у вигляді таблиці:

x_1	x_2	x_3	x_4	f
1	3	8	1	24
-3	5	2	-2	-7
0	-1	4	3	16
5	3	-2	4	5

≈

x_3	x_2	x_1	x_4	f
8	3	1	1	24
2	5	-3	-2	-7
4	-1	0	3	16
-2	3	5	4	5

≈

x_3	x_2	x_1	x_4	f
8	3	1	1	24
0	$\frac{17}{4}$	$-\frac{13}{4}$	$-\frac{9}{4}$	-13
0	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	4
0	$\frac{15}{4}$	$\frac{21}{4}$	$\frac{17}{4}$	11

≈

x_3	x_1	x_2	x_4	f
8	1	3	1	24
0	$-\frac{13}{4}$	$\frac{17}{4}$	$-\frac{9}{4}$	-13
0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	4
0	$\frac{21}{4}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{17}{4}$	11

$\approx$

x_3	x_1	x_2	x_4	f
8	1	3	1	24
0	$\frac{21}{4}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{17}{4}$	11
0	$-\frac{13}{4}$	$\frac{17}{4}$	$-\frac{9}{4}$	-13
0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	4

$\approx$

x_3	x_1	x_2	x_4	f
8	1	3	1	24
0	$\frac{21}{4}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{17}{4}$	11
0	0	$\frac{46}{7}$	$\frac{8}{21}$	$-\frac{130}{21}$
0	0	$-\frac{15}{7}$	$\frac{61}{21}$	$\frac{106}{21}$

$\approx$

x_3	x_1	x_2	x_4	f
8	1	3	1	24
0	$\frac{21}{4}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{17}{4}$	11
0	0	$\frac{46}{7}$	$\frac{8}{21}$	$-\frac{130}{21}$
0	0	0	$\frac{209}{69}$	$\frac{209}{69}$

В результаті перетворень отримуємо наступну систему, яку потрібно розв’язати:

$$\begin{cases} 8x_3 + x_1 + 3x_2 + x_4 = 24 \\ \frac{21}{4}x_1 + \frac{15}{4}x_2 + \frac{17}{4}x_4 = 11 \\ \frac{46}{7}x_2 + \frac{8}{21}x_4 = -\frac{130}{21} \\ \frac{209}{69}x_4 = \frac{209}{69} \end{cases}.$$

Обернений хід. Знаходимо значення невідомих, починаючи з останньої:

$$x_4 = \frac{\frac{209}{69}}{\frac{209}{69}} = 1;$$

$$x_2 = \frac{-\frac{130}{21} - \frac{8}{21}\cdot 1}{\frac{46}{7}} = -1;$$

$$x_1 = \frac{11 - \frac{17}{4}\cdot 1 - \frac{15}{4}\cdot(-1)}{\frac{21}{4}} = 2;$$

$$x_3 = \frac{24 - 1\cdot 1 - 3\cdot(-1) - 1\cdot 2}{8} = 3.$$

Відповідь: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$, $x_4 = 1$.

Лекція № 12

“Розв’язок лінійних алгебраїчних систем методом простої ітерації”

Нехай дана система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

Запишемо цю систему у матричному вигляді:

$$A\cdot X = B,$$

де $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$.

припускаючи, що діагональні елементи $a_{ii} \neq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$, виразимо x_1 через перше рівняння системи, x_2 – через друге рівняння тощо. В результаті одержимо систему, еквівалентну початковій:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}} - \dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \ldots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} x_n \\ x_2 = \dfrac{b_2}{a_{22}} - \dfrac{a_{21}}{a_{22}} x_1 - \ldots - \dfrac{a_{2n}}{a_{22}} x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}} - \dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1 - \ldots - \dfrac{a_{nn-1}}{a_{nn}} x_{n-1} \end{cases}.$$

Позначимо $\dfrac{b_i}{a_{ii}} = \beta_i$; $-\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} = \alpha_{ij}$, де $i = 1,2,\ldots,n$; $j = 1,2,\ldots,n$.

Тепер система запишеться наступним чином:

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 - \alpha_{12} x_2 - \ldots - \alpha_{1n} x_n \\ x_2 = \beta_2 - \alpha_{21} x_1 - \ldots - \alpha_{2n} x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \beta_n - \alpha_{n1} x_1 - \ldots - \alpha_{nn-1} x_{n-1} \end{cases}.$$

Остання система називається приведеною до нормального вигляду. Ввівши позначення

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}, \ \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}.$$

запишемо систему у матричній формі: $X = \beta + \alpha \cdot X$ чи

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Розв'яжемо цю систему методом послідовного наближення. За нульове наближення приймемо стовпець вільних членів:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \text{ – нульове наближення.}$$

Далі побудуємо матриці-стовпці

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix} \text{ – перше наближення;}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ \vdots \\ x_n^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{bmatrix} \text{ – друге наближення т.д.}$$

Кожне $(k+1)$-е наближення обчислюють по формулі:

$$X^{(k+1)} = \beta + \alpha \cdot X^{(k)}, \text{ де } k = 0,1,\dots,n.$$

Приклад: Методом простої ітерації з точністю $\varepsilon = 0{,}01$ розв'язати систему $\begin{cases} 4x_1 + 0{,}24x_2 - 0{,}08x_3 = 8 \\ 0{,}09x_1 + 3x_2 - 0{,}15x_3 = 9 \\ 0{,}04x_1 - 0{,}08x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases}$.

Розв'язання.

Розглянемо матриці

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0{,}24 & -0{,}08 \\ 0{,}09 & 3 & -0{,}15 \\ 0{,}04 & -0{,}08 & 4 \end{bmatrix}; \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

Тоді початкову систему можна записати у вигляді матричного рівняння $AX = B$.

Діагональні коефіцієнти $a_{ii} \neq 0$ (i = 1, 2, 3)

Розв'яжимо перше рівняння початкової системи відносно x_1, друге відносно x_2 і т.д. Тоді одержимо еквівалентну систему:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}} - \dfrac{a_{12}}{a_{11}} - \dfrac{a_{13}}{a_{11}} \\ x_2 = \dfrac{b_2}{a_{22}} - \dfrac{a_{21}}{a_{22}} - \dfrac{a_{23}}{a_{22}} \\ x_3 = \dfrac{b_3}{a_{33}} - \dfrac{a_{31}}{a_{33}} - \dfrac{a_{32}}{a_{33}} \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{12} x_2 + \alpha_{13} x_3 \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21} x_1 + \alpha_{23} x_3 \\ x_3 = \beta_3 + \alpha_{31} x_1 + \alpha_{32} x_2 \end{cases},$$

де $\beta_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}};$ $\quad \alpha_{ij} = -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}$, при $i \neq j$; $\alpha_{ij} = 0$, при $i = j$.

Зведемо систему до нормального вигляду

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 0{,}06 x_2 + 0{,}02 x_3 \\ x_2 = 3 - 0{,}03 x_1 + 0{,}05 x_3 \\ x_3 = 5 - 0{,}01 x_1 + 0{,}12 x_2 \end{cases}.$$

Введемо матриці α та β

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}; \qquad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix};$$

$$\alpha=\begin{bmatrix}0 & -0{,}06 & 0{,}02\\ -0{,}03 & 0 & 0{,}05\\ -0{,}01 & 0{,}02 & 0\end{bmatrix};\qquad \beta=\begin{bmatrix}2\\3\\5\end{bmatrix}.$$

Систему, зведену до нормального вигляду, запишемо наступним чином:

$$x^{(n+1)}=\beta+\alpha x^{(n)}$$

або в матричній формі

$$\begin{bmatrix}x_1^{(n+1)}\\ x_2^{(n+1)}\\ x_3^{(n+1)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\\5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -0{,}06 & 0{,}02\\ -0{,}03 & 0 & 0{,}05\\ -0{,}01 & 0{,}02 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^{(n)}\\ x_2^{(n)}\\ x_3^{(n)}\end{bmatrix}.$$

Дану систему будемо розв'язувати методом послідовних наближень. За нульове наближення позначимо стовпчик вільних членів $x^{(0)}=\beta$. Далі послідовно будуємо матриці-стовпці:

$x^{(1)}=\beta+\alpha x^{(0)}$ – перше наближення;

$x^{(2)}=\beta+\alpha x^{(1)}$ – друге наближення;

$x^{(3)}=\beta+\alpha x^{(2)}$ – третє наближення тощо.

На практиці ітераційний процес припиняють, коли $\left|x_i^{(k)}-x_i^{(k-1)}\right|<\varepsilon$.

Тоді $\begin{bmatrix}x_1^{(0)}\\ x_2^{(0)}\\ x_3^{(0)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\\5\end{bmatrix}$. Знаходимо перше наближення:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0{,}06 & 0{,}02 \\ -0{,}03 & 0 & 0{,}05 \\ -0{,}01 & 0{,}02 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0{,}06 & 0{,}02 \\ -0{,}03 & 0 & 0{,}05 \\ -0{,}01 & 0{,}02 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}92 \\ 3{,}19 \\ 5{,}04 \end{bmatrix}.$$

Знаходимо друге наближення:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0{,}06 & 0{,}02 \\ -0{,}03 & 0 & 0{,}05 \\ -0{,}01 & 0{,}02 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0{,}06 & 0{,}02 \\ -0{,}03 & 0 & 0{,}05 \\ -0{,}01 & 0{,}02 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}92 \\ 3{,}19 \\ 5{,}04 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}9094 \\ 3{,}1944 \\ 5{,}0446 \end{bmatrix}.$$

Перевіряємо умову припинення ітераційного процесу:

$\left| x_1^{(2)} - x_1^{(1)} \right| = |1{,}9094 - 1{,}92| = 0{,}0106 > \varepsilon$ умова не виконується.

$\left| x_2^{(2)} - x_2^{(1)} \right| = |3{,}1944 - 3{,}19| = 0{,}0044 < \varepsilon$ умова виконується.

$\left| x_3^{(2)} - x_3^{(1)} \right| = |5{,}0446 - 5{,}04| = 0{,}0046 < \varepsilon$ умова виконується.

Знаходимо третє наближення:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0{,}06 & 0{,}02 \\ -0{,}03 & 0 & 0{,}05 \\ -0{,}01 & 0{,}02 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0{,}06 & 0{,}02 \\ -0{,}03 & 0 & 0{,}05 \\ -0{,}01 & 0{,}02 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}9094 \\ 3{,}1944 \\ 5{,}0446 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}909228 \\ 3{,}194948 \\ 5{,}044794 \end{bmatrix}.$$

Перевіряємо умову припинення ітераційного процесу:

$\left|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}\right| = |1{,}909228 - 1{,}9094| = 0{,}00017 < \varepsilon$ умова виконується.

$\left|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}\right| = |3{,}194948 - 3{,}1944| = 0{,}000548 < \varepsilon$ умова виконується.

$\left|x_3^{(3)} - x_3^{(2)}\right| = |5{,}044794 - 5{,}0446| = 0{,}000194 < \varepsilon$ умова виконується.

Відповідь: $x_1 = 1{,}909228$, $x_2 = 3{,}194948$, $x_3 = 5{,}044794$.

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА № 1

“Метод безпосереднього розвертання для знаходження власних значень та власних векторів матриці”

Характеристичний багаточлен. Визначення власних векторів

Нехай $A = [a_{ij}]$ – квадратна матриця *n*-го порядку з дійсними елементами і λ – деяке невідоме. Тоді матриця $A - \lambda E$, де E – одинична матриця *n*-го порядку, називається характеристичною матрицею матриці *A*. Тому що в матриці λE на головній діагоналі знаходяться λ, а всі інші елементи дорівнюють нулю, то характеристична матриця має вигляд:

$$A-\lambda E=\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}.$$

Визначник цієї матриці називається характеристичним визначником і дорівнює

$$det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}.$$

У розгорнутому вигляді $det(A-\lambda E)$ – багаточлен *n*-го степеня від λ, так як при обчисленні цього визначника добуток елементів головної діагоналі дає багаточлен зі старшим членом $(-1)^n\lambda^n$, тобто

$$det(A-\lambda E)=(-1)^n[\lambda^n-p_1\lambda^{n-1}+p_2\lambda^{n-2}-\dots+(-1)^n p_n].$$

Такий багаточлен називається характеристичним багаточленом матриці *A*, а його корені λ_1, λ_2, …, λ_n , які можуть бути як дійсними, так і комплексними, – характеристичними числами, або власними значеннями, матриці *A*. Числа p_1, p_2, …, p_n називаються коефіцієнтами характеристичного багаточлена.

Нульовий вектор $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ називається власним вектором матриці *A*, якщо ця матриця переводить вектор *X* у вектор

$$AX = \lambda X ,$$

Тобто добуток матриці A на вектор X і добуток характеристичного числа λ на вектор X є один і той же вектор. Кожному власному значенню λ_i матриці відповідає свій власний вектор X_i $(i = 1,2,...,n)$.

Для визначення координат власного вектора складемо рівняння $(A - \lambda E)\cdot X = 0$, яке називається характеристичним. Переписавши його у вигляді

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

і виконавши множення, одержимо систему лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases}.$$

Розв'язавши цю систему знайдемо всі координати власного вектора X і одержимо n власних векторів.

При обчисленні власних значень і власних векторів матриць розв'язується одна з двох задач:

1) визначення усіх власних значень і належних їм власних векторів чи
2) визначення одного чи декількох власних значень і належних

їм власних векторів.

Перша задача полягає в розгортанні характеристичного визначника в багаточлен n-го степеня (тобто у визначенні коефіцієнтів p_1, p_2, …, p_n) з наступним обчисленням власних значень λ_1, λ_2, …, λ_n і, нарешті, у визначенні координат власного вектора $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Друга задача полягає у визначенні власних значень λ (одного чи декількох) ітераційними методами без попереднього розгортання характеристичного визначника.

Методи першої задачі є точними, тобто якщо їх застосувати для матриць, елементи яких задані точно (раціональними числами), і точно проводити обчислення (за правилами дій з простими дробами), то в результат і буде отримане точне значення коефіцієнтів характеристичного багаточлена, і координати власних векторів виявляться вираженими точними формулами через власні значення.

Звичайно власні вектори матриці вдається визначити, використовуючи проміж уточні результати обчислень, проведених для визначення коефіцієнтів характеристичного багаточлена. Для визначання власного вектора, що належить тому чи іншому значенню, це власне значення повинне бути вже обчислене.

Методи розв’язання другої задачі – ітераційні, тут власні значення отримуються як межі деяких числових послідовностей, так само як координати приналежних їм власних векторів. Так як ці методи не потребують обчислення коефіцієнтів характеристичного багаточлена, то вони менш трудомісткі.

Метод безпосереднього розвертання

Розглянемо знаходження коефіцієнтів характеристичного багаточлена безпосереднім розгортанням характеристичного визначника для матриці третього порядку. Нехай

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

$$det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}.$$

Обчислимо визначник за правилом трикутників:

$$det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda)+$$

$$+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}(a_{22}-\lambda)a_{31}-a_{12}a_{21}(a_{33}-\lambda)-$$

$$-a_{23}a_{32}(a_{11}-\lambda)=-\lambda^3+\lambda^2(a_{11}+a_{22}+a_{33})-\lambda[\left(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\right)+$$

$$+\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right)+(a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31})]+(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+$$

$$+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{23}a_{32}\cdot a_{11})=(-1)^3[\lambda^3-$$

$$-\lambda^2(a_{11}+a_{22}+a_{33})+\lambda(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix})-$$

$$-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}]$$

чи

$$det\left(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{E}\right)=\left(-1\right)^3\left(\lambda^3-p_1\lambda^2+p_2\lambda-p_3\right)=0$$

де p_1 – сума діагональних елементів матриці A:

$$p_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33};$$

p_2 – сума всіх діагональних мінорів другого порядку матриці A:

$$p_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$p_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Приклад 1. Методом безпосереднього розвертання знайти характеристичний багаточлен матриці

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язання.

Складаємо характеристичний багаточлен:

$$det(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{E}) = (-1)^2\left(\lambda^2 - p_1\lambda + p_2\right),$$

де $p_1 = a_{11} + a_{22} = 2 + 1 = 3,$

$$p_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 5 \cdot 7 = -32.$$

$$det(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{E}) = (-1)^2\left(\lambda^2 - 3\lambda - 32\right) = \lambda^2 - 3\lambda - 32.$$

Відповідь: характеристичний багаточлен $D(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 32$.

Приклад 2. Методом безпосереднього розвертання знайти характеристичний багаточлен матриці

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Розв'язання.

Складаємо характеристичний багаточлен:

$$det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{E}) = (-1)^3 \left(\lambda^3 - p_1 \lambda^2 + p_2 \lambda - p_3\right),$$

де $p_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 3 + 4 + 6 = 13,$

$$p_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 37,$$

$$p_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 2.$$

$$det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{E}) = (-1)^3 \left(\lambda^3 - 13\lambda^2 + 37\lambda - 2\right).$$

Відповідь: характеристичний багаточлен $D(\lambda) = (-1)^3 \left(\lambda^3 - 13\lambda^2 + 37\lambda - 2\right).$

Приклад 3. Знайти нормований власний вектор характеристичного рівняння $\lambda^3 - 9\lambda^2 - 41\lambda + 275 = 0$, який відповідає власному значенню $\lambda_{\mathrm{B}3} = 4{,}489804$. Початкова матриця $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -6 & 5 & -4 \\ 8 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$

Розв'язання.

Для знаходження нормованого власного вектору складемо систему лінійних рівнянь $(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{E}) \cdot \mathrm{V} = 0$, де замість λ буде

$\lambda_{В3} = 4{,}489804$.

$$\begin{bmatrix} 1-4{,}489804 & -2 & 7 \\ -6 & 5-4{,}489804 & -4 \\ 8 & 1 & 3-4{,}489804 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = 0$$

або

$$\begin{bmatrix} -3{,}489804 & -2 & 7 \\ -6 & 0{,}510196 & -4 \\ 8 & 1 & -1{,}489804 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = 0 \cdot$$

Запишемо у вигляді системи рівнянь:

$$\begin{cases} -3{,}489804\, V_1 - 2V_2 + 7V_3 = 0 \\ -6V_1 + 0{,}510196V_2 - 4V_3 = 0 \\ 8V_1 + V_2 - 1{,}489804V_3 = 0 \end{cases}.$$

Обчислимо визначник цієї системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3{,}489804 & -2 & 7 \\ -6 & 0{,}510196 & -4 \\ 8 & 1 & -1{,}489804 \end{vmatrix} = 0.$$

Так як визначник системи дорівнює нулю, то одне з рівнянь є лінійною комбінацією двох інших. Розглянемо перше та друге рівняння. Маємо систему:

$$\begin{cases} -3{,}489804\, V_1 - 2V_2 + 7V_3 = 0 \\ -6V_1 + 0{,}510196V_2 - 4V_3 = 0 \end{cases}.$$

Нехай $V_1 = C = const$, тоді

$$\begin{cases} -2V_2 + 7V_3 = 3{,}489804\, C \\ 0{,}510196V_2 - 4V_3 = 6C \end{cases}.$$

Отримали лінійну систему з двох рівнянь відносно V_2 та V_3.

З другого рівняння знаходимо V_2:

$$V_2 = \frac{6}{0{,}510196}C + \frac{4}{0{,}510196}V_3 = 11{,}76018C + 7{,}840117\ V_3.$$

Підставляємо у перше рівняння:

$$-2(11{,}76018C + 7{,}840117\ V_3) + 7V_3 = 3{,}489804\,C.$$

Знайдемо V_3 та V_2:

$$-8{,}68023\,V_3 = 3{,}489804\ C + 23{,}5204\ C,$$

$$V_3 = -3{,}11169\ C,$$

$$V_2 = 11{,}76018C + 7{,}840117 \cdot (-3{,}11169\ C) = -12{,}6358\ C.$$

Таким чином власний вектор, який відповідає власному значенню $\lambda_{\text{В3}} = 4{,}489804$ має вигляд:

$$V = C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -12{,}6358 \\ -3{,}11169 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо для $\lambda_{\text{В3}} = 4{,}489804$ нормований власний вектор, тобто вектор для якого повинна виконуватись умова:

$$V_{1\text{н}}^2 + V_{2\text{н}}^2 + V_{3\text{н}}^2 = 1.$$

В нашому випадку:

$$C^2 + C^2 \cdot (-12{,}6358)^2 + C^2 \cdot (-3{,}11169)^2 = 1.$$

Звідси знайдемо, що $C = 0{,}076619$

Отже, нормований власний вектор для $\lambda_{\text{В3}} = 4{,}489804$ такий:

$$V_{\text{н}} = \begin{pmatrix} 0{,}076619 \\ -0{,}96814 \\ -0{,}23841 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: нормований власний вектор для $\lambda_{\text{В3}} = 4{,}489804$

$$V_{\text{н}} = \begin{pmatrix} 0{,}076619 \\ -0{,}96814 \\ -0{,}23841 \end{pmatrix}.$$

Приклад 4. Знайти усі власні значення та нормовані власні вектори матриці A методом безпосереднього розвертання з точністю $\varepsilon = 0{,}001$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -3 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язання.

Складаємо характеристичне рівняння методом безпосереднього розвертання

$$det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{E}) = (-1)^3 \left(\lambda^3 - p_1\lambda^2 + p_2\lambda - p_3\right) = 0,$$

де $p_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 2 + 5 + 1 = 8$,

$$p_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$p_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -3 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -57.$$

Отже, характеристичне рівняння має вигляд

$$det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{E}) = (-1)^3 \left(\lambda^3 - 8\lambda^2 + 2\lambda + 57\right) = 0$$

$$f(\lambda)=\lambda^3-8\lambda^2+2\lambda+57=0$$

Необхідно дослідити рівняння $f(\lambda)=0$.

Знайдемо $f'(\lambda)$:

$$f'(\lambda)=3\lambda^2-16\lambda+2.$$

Визначимо точки, в яких похідна дорівнює нулю (проміжки монотонності функції $f(\lambda)$):

$$3\lambda^2-16\lambda+2=0.$$

Скориставшись дискримінантом знайдемо точки λ_1 та λ_2:

$$D=b^2-4\cdot a\cdot c=(-16)^2-4\cdot 3\cdot 2=256-24=232$$

$$\lambda_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-16)-\sqrt{232}}{4}=0{,}128075,$$

$$\lambda_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-16)+\sqrt{232}}{4}=5{,}205258.$$

Визначимо знак функції $f(\lambda)$ на кінцях проміжків монотонності:

$$f(\lambda_1=0{,}128075)=0{,}128075^3-8\cdot 0{,}128075^2+2\cdot 0{,}128075+57=57{,}127025$$

$$f(\lambda_2=5{,}205258)=5{,}205258^3-8\cdot 5{,}205258^2+2\cdot 5{,}205258+57=-8{,}31221$$

λ	$-\infty$	0,128075	5,205258	$+\infty$
$f(\lambda)$	–	+	–	+

З таблиці видно, що функція $f(\lambda)$ три рази змінює знак, тобто на кожному з проміжків $(-\infty;0{,}128075)$, $(0{,}128075;\ 5{,}205258)$ і $(5{,}205258;+\infty)$ є по єдиному кореню рівняння $f(\lambda)=0$.

Розглянемо спочатку проміжок $(0{,}128075;\ 5{,}205258)$. Знайдемо перше власне значення або корінь рівняння $f(\lambda)=0$ на цьому інтервалі. Для зручності можна зменшити цей проміжок довільним значенням λ, таким чином, щоб на кінцях інтервалу який знаходиться всередині даного проміжку функція $f(\lambda)$ приймала значення різних знаків.

Таким чином перше власне значення міститься на інтервалі $(3;5)$, тому що $f(3)=3^3-8\cdot 3^2+2\cdot 3+57=18>0$ та $f(5)=5^3-8\cdot 5^2+2\cdot 5+57=-8<0$.

Після відокремлення першого власного значення необхідно знайти його конкретне значення з точністю $\varepsilon=0{,}001$. Для цього застосуємо метод Ньютона. Слід пам'ятати, що у цьому чисельному методі друга похідна повинна зберігати постійний знак.

Знаходимо другу похідну:

$$f''(\lambda)=6\lambda-16,$$

$$f''(3)=6\cdot 3-16=2>0 \text{ та } f''(5)=6\cdot 5-16=14>0.$$

У нашому випадку $f''(\lambda)$ зберігає знак і крім того $f''(\lambda)>0$.

Застосовуємо метод Ньютона для уточнення кореня рівняння. Для збіжності методу Ньютона повинна виконуватись умова $f(\lambda_0)\cdot f''(\lambda_0)>0$.

Беремо будь-яку точку з інтервалу $(3;5)$ для якої виконується умова $f(\lambda_0)\cdot f''(\lambda_0)>0$.

$$f(3)\cdot f''(3)=18\cdot 2=36>0 \quad \text{та}$$

$$f(5)\cdot f''(5) = -8\cdot 14 = -112 < 0.$$

Таким чином за $\lambda_0 = 3$. Далі розрахунки ведемо за ітераційною формулою:

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n - \frac{f(\lambda_n)}{f'(\lambda_n)},$$

$$f(3) = 3^3 - 8\cdot 3^2 + 2\cdot 3 + 57 = 18, \qquad f'(3) = 3\cdot 3^2 - 16\cdot 3 + 2 = -19,$$

$$\lambda_1 = \lambda_0 - \frac{f(\lambda_0)}{f'(\lambda_0)} = 3 - \frac{18}{-19} = 3{,}947368.$$

Розрахунки ведуться до тих пір, поки не почне виконуватись умова $|\lambda_{n+1} - \lambda_n| < \varepsilon$.

Перевіряємо критерій припинення ітераційного процесу:

$|\lambda_1 - \lambda_0| = |3{,}947368 - 3| = 0{,}947368 > \varepsilon = 0{,}001$ умова не виконується, тому розраховуємо наступне значення λ:

$$f(3{,}947368) = 3{,}947368^3 - 8\cdot 3{,}947368^2 + 2\cdot 3{,}947368 + 57 = 1{,}74778,$$

$$f'(3{,}947368) = 3\cdot 3{,}947368^2 - 16\cdot 3{,}947368 + 2 = -14{,}41274,$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 - \frac{f(\lambda_1)}{f'(\lambda_1)} = 3{,}947368 - \frac{1{,}74778}{-14{,}41274} = 4{,}068635.$$

Перевіряємо критерій припинення ітераційного процесу:

$|\lambda_2 - \lambda_1| = |4{,}068635 - 3{,}947368| = 0{,}121267 > \varepsilon = 0{,}001$ умова не виконується, тому розраховуємо наступне значення λ.

$$f(4{,}068635) = 4{,}068635^3 - 8\cdot 4{,}068635^2 + 2\cdot 4{,}068635 + 57 = 0{,}058283,$$

$$f'(4{,}068635) = 3\cdot 4{,}068635^2 - 16\cdot 4{,}068635 + 2 = -13{,}43679,$$

$$\lambda_3 = \lambda_2 - \frac{f(\lambda_2)}{f'(\lambda_2)} = 4{,}068635 - \frac{0{,}058283}{-13{,}43679} = 4{,}0729721\,.$$

Перевіряємо критерій припинення ітераційного процесу:

$$|\lambda_3 - \lambda_2| = |4{,}0729721 - 4{,}068635\,| = 0{,}0043371 > \varepsilon = 0{,}001$$

умова не виконується, тому розраховуємо наступне значення λ.

$$f(4{,}0729721) = 4{,}0729721^{\,3} - 8 \cdot 4{,}0729721^{\,2} + 2 \cdot 4{,}0729721 + 57 = 0{,}000079,$$

$$f'(4{,}0729721) = 3 \cdot 4{,}0729721^{\,2} - 16 \cdot 4{,}0729721 + 2 = -13{,}400249\,,$$

$$\lambda_4 = \lambda_3 - \frac{f(\lambda_3)}{f'(\lambda_3)} = 4{,}0729721 - \frac{0{,}000079}{-13{,}400249} = 4{,}072978\,.$$

Перевіряємо критерій припинення ітераційного процесу:

$$|\lambda_4 - \lambda_3| = |4{,}072978 - 4{,}0729721| = 0{,}0000059 < \varepsilon = 0{,}001\,.$$

$$f(4{,}072978) = 4{,}072978^{\,3} - 8 \cdot 4{,}072978^{\,2} + 2 \cdot 4{,}072978 + 57 =$$
$$= 0{,}00000000\,0147 < 0{,}001$$

умова виконується, тому слід закінчити ітераційний процес.

Отже, ми отримали перше власне значення

$$\lambda_{1ВЗ} = \lambda_4 = 4{,}072978$$

Поділимо багаточлен $f(\lambda)$ на $(\lambda - \lambda_{1ВЗ})$. Для цього застосуємо схему Горнера:

	1	-8	2	57
		$1 \cdot 4{,}072978$	$-3{,}92702 \cdot 4{,}072978$	$-13{,}9947 \cdot 4{,}072978$
$\lambda_{1ВЗ} = 4{,}072978$	1	$-3{,}92702$	$-13{,}9947$	0,000000000147

Отримуємо:

$$f(\lambda) = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 2\lambda + 57 = \left(\lambda^2 - 3{,}92702\lambda - 13{,}9947\right)\cdot\left(\lambda - 4{,}072978\right)$$

Далі знаходимо 2 та 3 власне значення, розв'язуючи квадратичний багаточлен:

$$\lambda^2 - 3{,}92702\lambda - 13{,}9947 = 0$$

Скориставшись дискримінантом знайдемо точки $\lambda_{2\text{В}3}$ та $\lambda_{3\text{В}3}$:

$$D = b^2 - 4ac = \left(-3{,}92702\right)^2 - 4\cdot 1\cdot\left(-13{,}9947\right) = 71{,}4002$$

$$\lambda_{2B3} = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3{,}92702) - \sqrt{71{,}4002}}{2} = -2{,}26142$$

$$\lambda_{3B3} = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3{,}92702) + \sqrt{71{,}4002}}{2} = 6{,}188443$$

Отже, ми дістали три власних значення характеристичного рівняння.

Знайдемо власні вектори матриці A.

Знаходимо нормований власний вектор, який відповідає власному значенню $\lambda_{2B3} = -2{,}26142$.

Складемо систему лінійних рівнянь $\left(\text{A} - \lambda\text{E}\right)\cdot\text{V} = 0$, де замість λ буде $\lambda_{2B3} = -2{,}26142$.

$$\begin{vmatrix} 2-\left(-2{,}26142\right) & -1 & 2 \\ -3 & 5-\left(-2{,}26142\right) & 2 \\ 2 & 4 & 1-\left(-2{,}26142\right) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{vmatrix} = 0$$

або

$$\begin{vmatrix} 2+2{,}26142 & -1 & 2 \\ -3 & 5+2{,}26142 & 2 \\ 2 & 4 & 1+2{,}26142 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Запишемо у вигляді системи рівнянь:

$$\begin{cases} 4{,}261421\,V_1 - V_2 + 2V_3 = 0 \\ -3V_1 + 7{,}26142V_2 + 2V_3 = 0 . \\ 2V_1 + 4V_2 + 3{,}26142V_3 = 0 \end{cases}$$

Обчислимо визначник цієї системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4{,}261421 & -1 & 2 \\ -3 & 7{,}261421 & 2 \\ 2 & 4 & 3{,}261421 \end{vmatrix} = 0 .$$

Так як визначник системи дорівнює нулю, то одне з рівнянь є лінійною комбінацією двох інших. Розглянемо перше та друге рівняння. Маємо систему:

$$\begin{cases} 4{,}261421\,V_1 - V_2 + 2V_3 = 0 \\ -3V_1 + 7{,}26142V_2 + 2V_3 = 0 \end{cases} .$$

Нехай $V_1 = C = const$, тоді

$$\begin{cases} -V_2 + 2V_3 = -4{,}261421\,C \\ 7{,}26142V_2 + 2V_3 = 3C \end{cases} .$$

Отримали лінійну систему з двох рівнянь відносно V_2 та V_3.

З другого рівняння знаходимо V_2:

$$V_2 = \frac{3}{7{,}261421}C - \frac{2}{7{,}261421}V_3 = 0{,}413142\,C - 0{,}27543\;V_3 .$$

Підставляємо у перше рівняння:

$$-\left(0{,}413142\,C - 0{,}27543\,V_3\right) + 2V_3 = -4{,}261421\,C .$$

Знайдемо V_3 та V_2:

$$2{,}275428\,V_3 = -4{,}261421\ C + 0{,}413142\ C,$$

$$V_3 = -1{,}69123\ C,$$

$$V_2 = 0{,}413142\ C - 0{,}27543 \cdot (-1{,}69123C) = 0{,}878955\ C.$$

Таким чином власний вектор, який відповідає власному значенню $\lambda_{2B3} = -2{,}26142$ має вигляд:

$$V = C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}878955 \\ -1{,}69123 \end{pmatrix}$$

Знайдемо для λ_{2B3} нормований власний вектор, тобто вектор для якого повинна виконуватись умова:

$$V_{1\text{н}}^2 + V_{2\text{н}}^2 + V_{3\text{н}}^2 = 1.$$

В нашому випадку:

$$C^2 + C^2 \cdot (0{,}878955)^2 + C^2 \cdot (-1{,}69123)^2 = 1.$$

Звідси знайдемо, що $C = 0{,}464597$

Отже, нормований власний вектор для λ_{2B3} такий:

$$V_\text{н} = \begin{pmatrix} 0{,}464597 \\ 0{,}40836 \\ -0{,}78574 \end{pmatrix}.$$

Знаходження нормованого власного вектора для λ_{1B3} і λ_{3B3} так само як і для λ_{2B3}

Відповідь. Нормований власний вектор для λ_{2B3}:

$$V_{\text{н}} = \begin{pmatrix} 0{,}464597 \\ 0{,}40836 \\ -0{,}78574 \end{pmatrix}$$

МОДУЛЬ № 4
ІНТЕРПОЛЮВАННЯ ТА ЕКСТРАПОЛЮВАННЯ ФУНКЦІЙ

В економіці та техніці постійно виникають задачі, коли функцію задано графічно, і треба знайти її аналітичний вираз, або коли функцію задано таблично, а треба обчислити її значення при деяких значеннях аргумента, яких у таблиці немає. Крім того, іноді функцію задано аналітично, але її вираз досить складний і незручний для виконання різних математичних операцій (диференціювання, інтегрування).

Подібні задачі можна формалізувати як задачі математичного інтерполювання.

Лекція № 13
“Інтерполяційний багаточлен Лагранжа”

Нехай на відрізку $[a;b]$ задано деяку табличну функцію *f*, яка в точках $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$, набуває значень $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$, причому $y_i = f(x_i)$ (*i*=0,1,…,*n*). Наближену заміну функції f на відрізку $[a;b]$ однією з функцій $P(x)$ певного класу $\{P(x)\}$ так, що функція $P(x)$ в точках $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ набувала таких самих значень, що й функція *f*, тобто щоб $P(x_i) = y_i$ (*i*=0,1,…,*n*) називають інтерполюванням або інтерполяцією. Точки $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ називають вузлами інтерполювання, функцію $P(x)$ називають інтерполюючою функцією, а формулу $f(x) \approx P(x)$ -

інтерполяційною формулою.

Вузли інтерполювання називаються рівновіддаленими, якщо $x_{i+1} - x_i = h = const$, де i=0,1,…,n-1. В протилежному випадку вузли називаються нерівновіддаленими.

Якщо функція $P(x)$ належить класу алгебраїчних багаточленів, то інтерполювання називається параболічним.

Постановка загальної задачі параболічного інтерполювання може мати нескінченну множину розв'язків або зовсім не мати розв'язків. Але ця задача буде однозначною, якщо функцію $f(x)$ змінювати багаточленом ступеня n .

Розглянемо задачу параболічного інтерполювання, яку сформулюємо так: в n+1 різних точках $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ задано значення функції f:

$$y_0 = f(x_0), \qquad y_1 = f(x_1), \qquad \ldots, \quad y_n = f(x_n),$$

і треба побудувати багаточлен ступеня n

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

який би задовольняв умови

$$P_n(x_i) = y_i \qquad (i=0,1,\ldots,n)$$

Інтерполяційний багаточлен Лагранжа

Нехай задано n+1 значення аргументу: $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($x_i \neq x_j$, якщо $i \neq j$) і задано відповідні значення функції f : $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Інтерполяційним багаточленом Лагранжа називають багаточлен вигляду:

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}y_i\ .$$

Вирази $\dfrac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$, що є коефіцієнтами при y_i (i=0,1,…,n) у багаточлені Лагранжа називають коефіцієнтами Лагранжа.

Інтерполяційний багаточлен Лагранжа можна записати компактніше. Для цього введемо позначення:

$$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n),$$

$$\omega_{n+1}'(x)=(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n).$$

Дістанемо:

$$L_n(x)=\omega_{n+1}(x)\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{(x-x_i)\omega_{n+1}'(x_i)}.$$

Якщо кількість елементів у таблиці x_i>2 і треба обчислити значення інтерполяційного багаточлена Лагранжа лише в одній точці $x\neq x_i$ (i=0,1,…,n), де x_i – нерівновіддалені вузли інтерполювання, використаємо наступну схему 1:

i	x_i-x_0	x_i-x_1	x_i-x_2	**…**	x_i-x_{n-1}	x_i-x_n	D_i	y_i/D_i
0	$\underline{x-x_0}$	x_0-x_1	x_0-x_2	…	x_0-x_{n-1}	x_0-x_n	D_0	y_0/D_0
1	x_1-x_0	$\underline{x-x_1}$	x_1-x_2	…	x_1-x_{n-1}	x_1-x_n	D_1	y_1/D_1
2	x_2-x_0	x_2-x_1	$\underline{x-x_2}$	…	x_2-x_{n-1}	x_2-x_n	D_2	y_2/D_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…
n	x_n-x_0	x_n-x_1	x_n-x_2	…	x_n-x_{n-1}	$\underline{x-x_n}$	D_n	y_n/D_n

де D_0 – добуток елементів нульового рядка, тобто

$$D_0 = (x - x_0)(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_{n-1})(x_0 - x_n).$$

Аналогічно розраховуються елементи стовпчика D_i.

Наступним обчислюємо добуток діагональних елементів (підкреслених у таблиці), який дорівнює значенню $\omega_{n+1}(x)$ у точці x, тобто

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})(x - x_n).$$

Знаходимо суму:

$$S = \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{D_i}.$$

Значення інтерполяційного багаточлена Лагранжа в точці x дорівнює:

$$L_n(x) = \omega_{n+1}(x) \cdot S.$$

Якщо ж вузли інтерполювання рівновіддалені, то використовуємо схему 2. Обчислення значення функції для аргументу, якого немає в таблиці, можна спростити.

$t = \dfrac{x - x_0}{h}$, де h – відстань між двома сусідніми вузлами інтерполювання.

Схема 2 приймає наступний вигляд:

i	0	1	2	…	n	D_i	y_i / D_i
0	$\underline{t}$	-1	-2	…	$-n$	D_0	y_0 / D_0
1	1	$\underline{t-1}$	-1	…	$-n+1$	D_1	y_1 / D_1
2	2	1	$\underline{t-2}$	…	$-n+2$	D_2	y_2 / D_2
…	…	…	…	…	…	…	…
n	n	$n-1$	$n-2$	…	$\underline{t-n}$	D_n	y_n / D_n

де D_0 – добуток елементів нульового рядка, тобто

$$D_0 = t \cdot (-1) \cdot (-2) \ldots (-n)$$

Аналогічно розраховуються елементи стовпчика D_i.

Наступним обчислюємо добуток діагональних елементів (підкреслених у таблиці), який дорівнює значенню $\omega_{n+1}(x)$ у точці x, тобто

$$\omega_{n+1}(t) = t \cdot (t-1) \cdot (t-2) \ldots (t-n).$$

Знаходимо суму:

$$S = \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{D_i}.$$

Значення інтерполяційного багаточлена Лагранжа в точці x дорівнює:

$$L_n(x) = \omega_{n+1}(t) \cdot S.$$

Приклад. Знайти наближене значення функції при даному значенні аргументу за допомогою інтерполяційного багаточлена Лагранжа, якщо функція задана:

a) в нерівновіддалених вузлах таблиці;

b) в рівновіддалених вузлах таблиці;

a) x =2,7

X_i	Y_i
1,1	3,5
1,5	4,0
2,1	4,2
2,9	5,3

b) x =3,75

X_i	Y_i
1,5	3,3
1,95	3,8
2,4	4,5
2,85	5,4

Розв’язання.

а) якщо кількість елементів у таблиці x_i>2 і треба обчислити значення інтерполяційного багаточлена Лагранжа лише в одній точці $x \neq x_i$ (i=0,1,…,n), де x_i – нерівновіддалені вузли інтерполювання, використаємо схему 1:

i	$x_i - x_0$	$x_i - x_1$	$x_i - x_2$	**…**	$x_i - x_{n-1}$	$x_i - x_n$	D_i	y_i / D_i
0	$\underline{x - x_0}$	$x_0 - x_1$	$x_0 - x_2$	…	$x_0 - x_{n-1}$	$x_0 - x_n$	D_0	y_0 / D_0
1	$x_1 - x_0$	$\underline{x - x_1}$	$x_1 - x_2$	…	$x_1 - x_{n-1}$	$x_1 - x_n$	D_1	y_1 / D_1
2	$x_2 - x_0$	$x_2 - x_1$	$\underline{x - x_2}$	…	$x_2 - x_{n-1}$	$x_2 - x_n$	D_2	y_2 / D_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…
n	$x_n - x_0$	$x_n - x_1$	$x_n - x_2$	…	$x_n - x_{n-1}$	$\underline{x - x_n}$	D_n	y_n / D_n

де D_0 – добуток елементів нульового рядка, тобто

$$D_0 = (x - x_0)(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)...(x_0 - x_{n-1})(x_0 - x_n)$$

Аналогічно розраховуються елементи стовпчика D_i.

Наступним обчислюємо добуток діагональних елементів (підкреслених у таблиці), який дорівнює значенню $\omega_{n+1}(x)$ у точці x, тобто $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_{n-1})(x - x_n)$.

Знаходимо суму: $S = \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{D_i}$.

Значення інтерполяційного багаточлена Лагранжа в точці x дорівнює $L_n(x) = \omega_{n+1}(x) \cdot S$.

Застосуємо дані формули та схему для розв’язання задачі.

x =2,7

i	x_i	y_i	$x_i - x_0$	$x_i - x_1$	$x_i - x_2$	$x_i - x_3$	D_i	y_i / D_i
0	1,1	3,5	$\underline{1{,}6}$	–0,4	–1,0	–1,8	–1,152	–3,038
1	1,5	4,0	0,4	$\underline{1{,}2}$	–0,6	–1,4	0,403	9,921
2	2,1	4,2	1,0	0,6	$\underline{0{,}6}$	–0,8	–0,288	–14,583
3	2,9	5,3	1,8	1,4	0,8	$\underline{-0{,}2}$	–0,403	–13,145

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 1{,}6 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot (-0{,}2) = -0{,}23.$$

$$S = \sum_{i=0}^{3} \frac{y_i}{D_i} = -3{,}038 + 9{,}921 + (-14{,}583) + (-13{,}145) = -20{,}846.$$

$$L_3(2{,}7) = \omega_4(2{,}7) \cdot S = -0{,}23 \cdot (-20{,}846) = 4{,}803.$$

Отже, інтерполяційній багаточлен Лагранжа в точці $x = 2{,}7$ для нерівновіддалених вузлів $L_3(2{,}7) = 4{,}803$

б) якщо вузли інтерполювання рівновіддалені, то схему обчислення значення функції для аргументу, якого немає в таблиці, можна спростити.

$t = \dfrac{x - x_0}{h}$, де h – відстань між двома сусідніми вузлами інтерполювання.

Схема приймає наступний вигляд:

i	0	1	2	…	n	D_i	y_i / D_i
0	$\underline{t}$	-1	-2	…	$-n$	D_0	y_0 / D_0
1	1	$\underline{t-1}$	-1	…	$-n+1$	D_1	y_1 / D_1
2	2	1	$\underline{t-2}$	…	$-n+2$	D_2	y_2 / D_2
…	…	…	…	…	…	…	…
n	n	$n-1$	$n-2$	…	$\underline{t-n}$	D_n	y_n / D_n

де D_0 – добуток елементів нульового рядка, тобто

$$D_0 = t \cdot (-1) \cdot (-2) \ldots (-n).$$

Аналогічно розраховуються елементи стовпчика D_i.

Наступним обчислюємо добуток діагональних елементів (підкреслених у таблиці), який дорівнює значенню $\omega_{n+1}(x)$ у точці x, тобто $\omega_{n+1}(t) = t \cdot (t-1) \cdot (t-2) \ldots (t-n)$.

Знаходимо суму: $$S = \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{D_i}.$$

Значення інтерполяційного багаточлена Лагранжа в точці x дорівнює: $L_n(x) = \omega_{n+1}(t) \cdot S$.

Застосуємо дані формули та схему для розв’язання задачі.

x =3,75.

$$t = \frac{x - x_0}{h} = \frac{3{,}75 - 1{,}5}{1{,}95 - 1{,}5} = 5.$$

Отримуємо наступну таблицю:

i	x_i	y_i	0	1	2	3	D_i	y_i / D_i
0	1,5	3,3	$\underline{5}$	–1	–2	–3	–30	–0,11
1	1,95	3,8	1	$\underline{4}$	–1	–2	8	0,475
2	2,4	4,5	2	1	$\underline{3}$	–1	–6	–0,75
3	2,85	5,4	3	2	1	$\underline{2}$	12	0,45

$$\omega_4(t) = t \cdot (t-1) \cdot (t-2)(t-3) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120.$$

$$S=\sum_{i=0}^{3}\frac{y_i}{D_i}=-0{,}11+0{,}475+(-0{,}75)+0{,}45=0{,}065.$$

$$L_3(3{,}75)=\omega_4(5)\cdot S=120\cdot 0.065=7{,}8.$$

Отже, інтерполяційній багаточлен Лагранжа в точці $x=3{,}75$ для рівновіддалених вузлів $L_3(3{,}75)=7{,}8$.

Відповідь:

а) інтерполяційній багаточлен Лагранжа в точці $x=2{,}7$ для нерівновіддалених вузлів $L_3(2{,}7)=4{,}803$;

б) інтерполяційній багаточлен Лагранжа в точці $x=3{,}75$ для рівновіддалених вузлів $L_3(3{,}75)=7{,}8$.

Лекція № 14

“Інтерполювання за схемою Ейткіна”

Нехай функція f у вузлах інтерполювання $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ набуває відповідні значення $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$. Необхідно знайти її значення у точці $x\in[x_0;x_n]$ і $x\neq x_i$ (i=0,1,…,n). Це зручно робити за допомогою схеми Ейткіна.

Позначимо:

$$P_{i,i+1}(x)=\frac{1}{x_{i+1}-x_i}\begin{vmatrix} y_i & x_i-x \\ y_{i+1} & x_{i+1}-x\end{vmatrix}, \qquad \text{де } i=0,1,\ldots,n-1;$$

$$P_{i,i+1,i+2}(x)=\frac{1}{x_{i+2}-x_i}\begin{vmatrix} P_{i,i+1}(x) & x_i-x \\ P_{i+1,i+2}(x) & x_{i+2}-x\end{vmatrix}, \qquad \text{де } i=0,1,\ldots,n-2;$$

$$P_{i,i+1,\dots,i+j}(x)=\frac{1}{x_{i+j}-x_i}\begin{vmatrix} P_{i,i+1,\dots,i+j-1}(x) & x_i-x \\ P_{i+1,i+2,\dots,i+j}(x) & x_{i+j}-x \end{vmatrix},$$ де

$i=0,1,\dots,n-1;\ j=1,2,n-i$

Якщо функцію f задано в (n+1)-му вузлах інтерполювання $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, то значення інтерполяційного багаточлена степеня n в точці $x\in(x_0;x_n)$, що не збігається з вузлами інтерполювання, можно обчислити за формулою:

$$P_{0,1,\dots,n}(x)=\frac{1}{x_n-x_0}\begin{vmatrix} P_{0,1,\dots,n-1}(x) & x_0-x \\ P_{1,2,\dots,n}(x) & x_n-x \end{vmatrix}$$

Отже, для знаходження значення функції f в точці x за схемою Ейткіна треба обчислити $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ визначників другого порядку. Для зручності використовують таблицю $(n=5)$:

Таблиця 14.1. Схема Ейткіна

i	X_i	Y_i	$X_i - x$	$P_{i,i+1,\ldots,i+j}(x)$					
				$P_{i,i+1}(x)$	$P_{i,i+1,i+2}(x)$	$P_{i,i+1,i+2,i+3}(x)$	$\ldots$	$P_{i,i+1,i+2,\ldots,n-1}(x)$	$P_{i,i+1,i+2,\ldots,n-1,n}(x)$
0	x_0	y_0	$x_0 - x$	$P_{0,1}(x)$	$P_{0,1,2}(x)$	$P_{0,1,2,3}(x)$	$\ldots$	$P_{0,1,\ldots,n-2}(x)$	$P_{0,1,2,\ldots,n-1,n}(x)$
1	x_1	y_1	$x_1 - x$	$P_{1,2}(x)$	$P_{1,2,3}(x)$	$P_{1,2,3,4}(x)$	$\ldots$	$P_{1,2,\ldots,n-1}(x)$	
2	x_2	y_2	$x_2 - x$	$P_{2,3}(x)$	$P_{2,3,4}(x)$	$P_{2,3,4,5}(x)$	$\ldots$		
3	x_3	y_3	$x_3 - x$	$P_{3,4}(x)$	$P_{3,4,5}(x)$	$P_{3,4,5,6}(x)$	$\ldots$		
	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$		
$n-3$	x_{n-3}	y_{n-3}	$x_{n-3} - x$	$P_{n-3,n-2}(x)$	$P_{n-3,n-2,n-1}(x)$	$P_{n-3,n-2,n-1,n}(x)$			
$n-2$	x_{n-2}	y_{n-2}	$x_{n-2} - x$	$P_{n-2,n-1}(x)$	$P_{n-2,n-1,n}(x)$				
$n-1$	x_{n-1}	y_{n-1}	$x_{n-1} - x$	$P_{n-1,n}(x)$					
n	x_n	y_n	$x_n - x$						

Приклад. За схемою Ейткіна обчислити наближене значення функції заданої таблично, для даного значення аргументу: $x = 6{,}7$

X_i	Y_i
6,2	597,26431
7,5	513,59764
8,3	486,25791
9,4	428,93564

Розв'язання. Для знаходження значення функції f в точці $x = 6{,}7$ за схемою Ейткіна треба обчислити $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ визначників другого порядку. Для зручності використовують таблицю (таблиця наведена для випадку, коли $n = 3$):

i	X_i	Y_i	$X_i - x$	$P_{i,i+1}(x)$	$P_{i,i+1,i+2}(x)$	$P_{i,i+1,i+2,i+3}(x)$
0	x_0	y_0	$x_0 - x$	$P_{0,1}(x)$	$P_{0,1,2}(x)$	$P_{0,1,2,3}(x)$
1	x_1	y_1	$x_1 - x$	$P_{1,2}(x)$	$P_{1,2,3}(x)$	
2	x_2	y_2	$x_2 - x$	$P_{2,3}(x)$		
3	x_3	y_3	$x_3 - x$			

Для розрахунку елементів $P(x)$ використовуємо наступні формули:

$$P_{i,i+1}(x) = \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \begin{vmatrix} y_i & x_i - x \\ y_{i+1} & x_{i+1} - x \end{vmatrix}, \qquad \text{де } i = 0,1,\dots,n-1;$$

$$P_{i,i+1,i+2}(x) = \frac{1}{x_{i+2} - x_i} \begin{vmatrix} P_{i,i+1}(x) & x_i - x \\ P_{i+1,i+2}(x) & x_{i+2} - x \end{vmatrix}, \text{ де } i = 0,1,\dots,n-2;$$

$$P_{i,i+1,\dots,i+j}(x)=\frac{1}{x_{i+j}-x_i}\begin{vmatrix}P_{i,i+1,\dots,i+j-1}(x) & x_i-x\\ P_{i+1,i+2,\dots,i+j}(x) & x_{i+j}-x\end{vmatrix},\qquad \text{де}$$

$i=0,1,\dots,n-1;\ j=1,2,n-i$

Застосуємо дані формули та складемо відповідну таблицю для розв'язання задачі:

i	X_i	Y_i	X_i-x	$P_{i,i+1}(x)$	$P_{i,i+1,i+2}(x)$	$P_{i,i+1,i+2,i+3}(x)$
0	6,2	597,26431	-0,5	565,08482	559,335428	554,5726799
1	7,5	513,59764	0,8	540,93737	528,853839	
2	8,3	486,25791	1,6	569,63576		
3	9,4	428,93564	2,7			

$$P_{0,1}(x)=\frac{1}{x_1-x_0}\begin{vmatrix}y_0 & x_0-x\\ y_1 & x_1-x\end{vmatrix}=\frac{1}{7,5-6,2}\begin{vmatrix}597,26431 & -0,5\\ 513,59764 & 0,8\end{vmatrix}=565,08482,$$

$$P_{1,2}(x)=\frac{1}{x_2-x_1}\begin{vmatrix}y_1 & x_1-x\\ y_2 & x_2-x\end{vmatrix}=\frac{1}{8,3-7,5}\begin{vmatrix}513,59764 & 0,8\\ 486,25791 & 1,6\end{vmatrix}=540,93737,$$

$$P_{2,3}(x)=\frac{1}{x_3-x_2}\begin{vmatrix}y_2 & x_2-x\\ y_3 & x_3-x\end{vmatrix}=\frac{1}{9,4-8,3}\begin{vmatrix}486,25791 & 1,6\\ 428,93564 & 2,7\end{vmatrix}=569,63576.$$

$$P_{0,1,2}(x)=\frac{1}{x_2-x_0}\begin{vmatrix}P_{0,1}(x) & x_0-x\\ P_{1,2}(x) & x_2-x\end{vmatrix}=\frac{1}{8,3-6,2}\begin{vmatrix}565,08482 & -0,5\\ 540,93737 & 1,6\end{vmatrix}=559,335428,$$

$$P_{1,2,3}(x)=\frac{1}{x_3-x_1}\begin{vmatrix}P_{1,2}(x) & x_1-x\\ P_{2,3}(x) & x_3-x\end{vmatrix}=\frac{1}{9,4-7,5}\begin{vmatrix}540,93737 & 0,8\\ 569,63576 & 2,7\end{vmatrix}=528,853839,$$

$$P_{0,1,2,3}(x)=\frac{1}{x_3-x_0}\begin{vmatrix}P_{0,1,2}(x) & x_0-x\\ P_{1,2,3}(x) & x_3-x\end{vmatrix}=\frac{1}{9,4-6,2}\begin{vmatrix}559,335428 & -0,5\\ 528,853839 & 2,7\end{vmatrix}=554,5726799.$$

Відповідь. Інтерполяційній багаточлен Лагранжа $L_3(6,7)=554,5726799$.

Лекція № 15

“Скінченні різниці. Перший та другий інтерполяційні багаточлени Ньютона”

Нехай задано табличну функцію $y = f(x)$ значеннями

$$y_0 = f(x_0), \qquad y_1 = f(x_1), \qquad \ldots, \quad y_n = f(x_n)$$

в рівновіддалених вузлах інтерполяції x_i $(i = 0,1,\ldots,n)$

Нехай h – крок таблиці, тобто $h = x_{i+1} - x_i = const$ $(i = 0,1,\ldots,n-1)$.

Скінченою або табличною різницею першого порядку називається різниця між значеннями функції в сусідніх вузлах інтерполяції. Таким чином,

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = f(x_0 + h) - f(x_0) = \Delta f(x_0);$$

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = f(x_0 + 2h) - f(x_0 + h) = \Delta f(x_1);$$

………………………………………………….

$$\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1} = f(x_0 + nh) - f(x_0 + (n-1)h) = \Delta f(x_0 + (n-1)h) = \Delta f(x_{n-1}).$$

Прирости скінчених різниць першого порядку називають скінченими різницями другого порядку:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0; \qquad \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1;\ \ldots;\ \ \Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2}.$$

Скінченні різниці k-го порядку утворюються з різниць $(k–1)$-го порядку за допомогою рекурентних формул:

$$\Delta^k y_0 = \Delta^{k-1} y_1 - \Delta^{k-1} y_0;$$

$$\Delta^k y_1 = \Delta^{k-1} y_2 - \Delta^{k-1} y_1;$$

……………………;

$$\Delta^k y_m = \Delta^{k-1} y_{m+1} - \Delta^{k-1} y_m$$

Вважають, що за означенням $\Delta^0 y_i = y_i$.

Властивості скінчених різниць

1. Скінченні різниці сталої С дорівнюють нулю, тобто $\Delta^k C = 0$.
2. Сталий множник можна виносити за знак скінченної різниці $\Delta^k\left(Cf\left(x\right)\right) = C \cdot \Delta^k f\left(x\right)$.
3. Скінченні різниці алгебраїчної суми функцій дорівнюють алгебраїчній сумі скінченних різниць цих функцій: $\Delta^k\left(f\left(x\right) \pm g\left(x\right)\right) = \Delta^k f\left(x\right) \pm \Delta^k g\left(x\right)$.
4. Скінченні різниці *m*-го порядку від скінченних різниць *k*-го порядку функції f, тобто $\Delta^m\left(\Delta^k f\left(x\right)\right) = \Delta^{m+k} f\left(x\right)$ (*m*, *k* - невід'ємні числа).

Зв'язок між похідними функції і скінченними різницями.

Якщо функція f має на відрізку $\left[x_0; x_n\right]$ неперервні похідні до порядку n включно, то для досить малих h і для будь-якого натурального n можна дістати наближену формулу

$$f^{(n)}\left(x\right) \approx \frac{\Delta^n f\left(x\right)}{h^n}.$$

Таблиця скінченних різниць

X_i	Y_i	ΔY_i	$\Delta^2 Y_i$	$\Delta^3 Y_i$	$\Delta^4 Y_i$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$		
x_3	y_3	Δy_3			
x_4	y_4				
$\sum$		$\sum_{i=0}^{3} \Delta y_i$	$\sum_{i=0}^{2} \Delta^2 y_i$	$\sum_{i=0}^{1} \Delta^3 y_i$	
S	$y_4 - y_0$	$\Delta y_3 - \Delta y_0$	$\Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_1 - \Delta^3 y_0$	

Два останні рядки додаткові. Вони необхідні для контролю правильності обчислень.

Однак, не завжди треба обчислювати скінченні різниці усіх порядків. Існує умова зупинення процесу обчислення різниць. Для того щоб його сформулювати наведемо таке означення: якщо всі скінченні різниці 1-го порядку відрізняються одна від одної не більш як на 2^1 одиниць нижчого розряду табличних значень функції, то ці різниці називаються практично сталими.

Тоді, якщо різниці 1-го порядку практично сталі, то скінченні різниці наступного порядку вважають рівними нулю і не беруть їх до уваги, а інтерполяційний багаточлен у цьому випадку поводить себе як багаточлен 1-го степеня.

Перший інтерполяційний багаточлен Ньютона

Обчислення значень функції для значень аргументу, які знаходяться з початку таблиці, зручно проводити користуючись першим інтерполяційним багаточленом Ньютона:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!\,h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots +$$

$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x - x_0)(x - x_1)\cdot\ldots\cdot(x - x_{n-1}).$$

Для практичного використання дану формулу записують в іншому вигляді.

Позначимо: $t = \dfrac{x - x_0}{h}$,

тоді $t - 1 = \dfrac{x - x_1}{h}$, $t - 2 = \dfrac{x - x_2}{h}$, …, $t - n + 1 = \dfrac{x - x_{n-1}}{h}$

початкова формула матиме вигляд:

$$P_n(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots +$$

$$+ \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0.$$

Формулу $f(x) \approx P_n(x)$ називається першою інтерполяційною формулою Ньютона.

Різницю $f(x) - P_n(x) = R_n(x; f)$ називають залишковим членом першої інтерполяційної формули Ньютона.

Другий інтерполяційний багаточлен Ньютона

Перший інтерполяційний багаточлен Ньютона практично невигідний для інтерполювання функції в кінці таблиці. В цьому випадку застосовують другий інтерполяційний багаточлен Ньютона:

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!\,h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!\,h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \ldots +$$

$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_1).$$

Рівність $f(x) \approx P_n(x)$ називають другою інтерполяційною формулою Ньютона.

Існує інший запис формули другого інтерполяційного багаточлена Ньютона.

Нехай $t = \dfrac{x - x_n}{h}$,

тоді $t + 1 = \dfrac{x - x_{n-1}}{h}$, $t + 2 = \dfrac{x - x_{n-2}}{h}$, $t + 3 = \dfrac{x - x_{n-3}}{h}$ тощо.

Отримуємо:

$$P_n(x) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} +$$

$$+ \frac{t(t+1)(t+2)(t+3)}{4!}\Delta^4 y_{n-4} + \ldots\, .$$

Якщо треба обчислити значення функції в точці x, то за x_n треба взяти найближче, але більше за x значення аргументу з таблиці так, щоб $x \in (x_{n-1}; x_n)$.

Приклад. Знайти наближені значення функції при значенні аргументу x=1,3 за допомогою інтерполяційних багаточленів Ньютона з скінченними різницями, якщо функція задана таблично:

X_i	Y_i
0,8	10,5
1,02	12,7
1,24	13,6
1,46	15,2
1,68	17,3

Розв'язання.

Запишемо скінченні різниці у вигляді таблиці:

i	X_i	Y_i	ΔY_i	$\Delta^2 Y_i$	$\Delta^3 Y_i$	$\Delta^4 Y_i$
0	0,8	10,5	2,2	-1,3	2	-2,2
1	1,02	12,7	0,9	0,7	-0,2	
2	1,24	13,6	1,6	0,5		
3	1,46	15,2	2,1			
4	1,68	17,3				

Скінченні різниці k-го порядку знаходяться за формулою:

$$\Delta^k y_m = \Delta^{k-1} y_{m+1} - \Delta^{k-1} y_m$$

Перший інтерполяційний багаточлен Ньютона знаходиться за формулою:

$$P_n(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + +$$

$$\ldots + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 .$$

У нашому випадку $n=4$, отже формула приймає наступний вигляд:

$$P_4(x)=y_0+t\Delta y_0+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0+\frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}\Delta^4 y_0,$$

де $\quad t=\frac{x-x_0}{h}, \qquad t-1=\frac{x-x_1}{h},$

$$t-2=\frac{x-x_2}{h}, \qquad t-3=\frac{x-x_3}{h}$$

Підставимо наші данні:

$$t=\frac{x-x_0}{h}=\frac{1{,}3-0{,}8}{1{,}02-0{,}8}=2{,}27273,$$

$$t-1=\frac{x-x_1}{h}=\frac{1{,}3-1{,}02}{0{,}22}=1{,}27273,$$

$$t-2=\frac{x-x_2}{h}=\frac{1{,}3-1{,}24}{0{,}22}=0{,}27273,$$

$$t-3=\frac{x-x_3}{h}=\frac{1{,}3-1{,}46}{0{,}22}=-0{,}72727.$$

$$P_4(x)=y_0+t\Delta y_0+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0+\frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}\Delta^4 y_0=$$
$$=10{,}5+2{,}27273\cdot 2{,}2+\frac{2{,}27273\cdot 1{,}27273}{2!}\cdot(-1{,}3)+\frac{2{,}27273\cdot 1{,}27273\cdot 0{,}27273}{3!}\cdot 2+$$
$$+\frac{2{,}27273\cdot 1{,}27273\cdot 0{,}27273\cdot(-0{,}72727)}{4!}\cdot(-2{,}2)=13{,}93539.$$

Другий інтерполяційний багаточлен Ньютона знаходиться за формулою:

$$P_n(x)=y_n+t\Delta y_{n-1}+\frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2}+\frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3}+$$
$$+\frac{t(t+1)(t+2)(t+3)}{4!}\Delta^4 y_{n-4}+\dots.$$

$x = 1{,}3$, відповідно $x_n = x_3 = 1{,}46$ (найближче більше значення до $x = 1{,}3$).

Отже,

$$t = \frac{x - x_3}{h} = \frac{1{,}3 - 1{,}46}{0{,}22} = -0{,}72727,$$

$$t + 1 = \frac{x - x_2}{h} = \frac{1{,}3 - 1{,}24}{0{,}22} = 0{,}272727,$$

$$t + 2 = \frac{x - x_1}{h} = \frac{1{,}3 - 1{,}02}{0{,}22} = 1{,}272727.$$

$$P_3(x) = y_3 + t\Delta y_2 + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_1 + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y_0 = 15{,}2 + (-0{,}72727)\cdot 1{,}6 +$$
$$+ \frac{(-0{,}72727)\cdot 0{,}272727}{2!}\cdot 0{,}7 + \frac{(-0{,}72727)\cdot 0{,}272727\cdot 1{,}272727}{3!}\cdot 2 = 13{,}88279.$$

Відповідь.

Перший інтерполяційний багаточлен Ньютона: $P_4(x) = 13{,}93539.$

Другий інтерполяційний багаточлен Ньютона: $P_3(x) = 13{,}88279.$

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА №2

“Інтерполяційний багаточлен Ньютона з поділеними різницями”

На практиці дуже часто зустрічаються таблиці для нерівновіддалених значень аргументу, тобто таблиці зі змінним кроком. Для цих таблиць поняття скінченних різниць узагальнюється, а саме запроваджуються так звані поділені різниці.

Нехай функція $y = f(x)$ задана значеннями $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$

, … , $y_n = f(x_n)$ в нерівновіддалених вузлах інтерполяції $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Відношення $[x_0; x_1] = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, $[x_1; x_2] = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, …, $[x_i; x_{i+1}] = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$ називаються поділеними різницями першого порядку.

Аналогічно визначаються поділені різниці другого порядку:

$$[x_0; x_1; x_2] = \frac{[x_1; x_2] - [x_0; x_1]}{x_2 - x_0};$$

$$[x_1; x_2; x_3] = \frac{[x_2; x_3] - [x_1; x_2]}{x_3 - x_1};$$

$$[x_i; x_{i+1}; x_{i+2}] = \frac{[x_{i+1}; x_{i+2}] - [x_i; x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}.$$

Поділені різниці *k*-го порядку отримують з поділених різниць (*k-1)*-го порядку за допомогою рекурентного співвідношення:

$$[x_i; x_{i+1}; x_{i+2}; \ldots; x_{i+k-1}; x_{i+k}] = \frac{[x_{i+1}; x_{i+2}; \ldots; x_{i+k}] - [x_i; x_{i+1}; \ldots; x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

$(k = 1,2,\ldots; \quad i = 0,1,2,\ldots)$.

Таблиця поділених різниць

X	Y	$[x_i; x_{i+1}]$	$[x_i; x_{i+1}; x_{i+2}]$	$[x_i; x_{i+1}; x_{i+2}; x_{i+3}]$	$[x_i; x_{i+1}; x_{i+2}; x_{i+3}; x_{i+4}]$
X_0	Y_0	$[x_0; x_1]$	$[x_0; x_1; x_2]$	$[x_0; x_1; x_2; x_3]$	$[x_0; x_1; x_2; x_3; x_4]$
X_1	Y_1	$[x_1; x_2]$	$[x_1; x_2; x_3]$	$[x_1; x_2; x_3; x_4]$	
X_2	Y_2	$[x_2; x_3]$	$[x_2; x_3; x_4]$		
X_3	Y_3	$[x_3; x_4]$			
X_4	Y_4				

Інтерполяційний багаточлен Ньютона для нерівновіддалених значень аргументу:

$$P_n(x) = y_0 + [x_0; x_1](x - x_0) + [x_0; x_1; x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots +$$
$$+ [x_0; x_1; x_2; \ldots; x_n](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}).$$

Приклад. Знайти наближене значення функції при даному значенні аргументу $x = 2{,}1$ за допомогою інтерполяційного багаточлена Ньютона з поділеними різницями, якщо функція задана таблично:

X_i	Y_i
1,7	10
2,2	8,5
2,6	7,2
3,5	5,8

Порівняйте значення цієї функції в точці $x = 2{,}1$ отримане за допомогою багаточлена Ньютона зі значенням, отриманим за допомогою багаточлена Лагранжа.

Розв'язання.

Знаходимо наближене значення функції за допомогою інтерполяційного багаточлена Ньютона з поділеними різницями.

Складемо таблицю поділених різниць:

i	$\mathbf{X_i}$	$\mathbf{Y_i}$	$\mathbf{[X_{i;}X_{,i+1}]}$	$\mathbf{[X_{i;}X_{i+1;}X_{i+2}]}$	$\mathbf{[X_{i;}X_{i+1};X_{i+2};X_{i+3}]}$	$\mathbf{x\text{-}X_i}$
0	1,7	10	-3	-0,278	0,878	1,35
1	2,2	8,5	-3,25	1,303		1,05
2	2,6	7,2	-1,556			0,55
3	3,5	5,8				0,15

$$P(2{,}1) = 10 - 3 \cdot 0{,}4 - 0{,}278 \cdot 0{,}4 \cdot (-0{,}1) + 0{,}878 \cdot 0{,}4 \cdot (-0{,}1) \cdot (-0{,}5) = 8{,}829$$

Знаходимо наближене значення функції за допомогою інтерполяційного багаточлена Лагранжа. Вузли нерівновіддалені, використовуємо наступну схему:

i	$x_i - x_0$	$x_i - x_1$	$x_i - x_2$	**…**	$x_i - x_{n-1}$	$x_i - x_n$	D_i	y_i / D_i
0	$\underline{x - x_0}$	$x_0 - x_1$	$x_0 - x_2$	…	$x_0 - x_{n-1}$	$x_0 - x_n$	D_0	y_0 / D_0
1	$x_1 - x_0$	$\underline{x - x_1}$	$x_1 - x_2$	…	$x_1 - x_{n-1}$	$x_1 - x_n$	D_1	y_1 / D_1
…	…	…	…	…	…	…	…	…
n	$x_n - x_0$	$x_n - x_1$	$x_n - x_2$	…	$x_n - x_{n-1}$	$\underline{x - x_n}$	D_n	y_n / D_n

де D_0 – добуток елементів нульового рядка, тобто

$$D_0 = (x - x_0)(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_{n-1})(x_0 - x_n),$$

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})(x - x_n).$$

Знаходимо суму:

$$S = \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{D_i}.$$

Значення інтерполяційного багаточлена Лагранжа в точці x дорівнює:

$$L_n(x) = \omega_{n+1}(x) \cdot S.$$

$x_i - x_0$	$x_i - x_1$	$x_i - x_2$	$x_i - x_3$	D_i	y_i / D_i
0,4	–0,5	–0,9	–1,8	–0,324	–30,864
0,5	–0,1	–0,4	–1,3	–0,026	–326,923
0,9	0,4	–0,5	–0,9	0,162	44,444
1,8	1,3	0,9	–1,4	–2,948	–1,967

$$\omega_4(2{,}1) = 0{,}4 \cdot (-0{,}1) \cdot (-0{,}5) \cdot (-1{,}4) = -0{,}028,$$

$$S = \sum_{i=0}^{3} \frac{y_i}{D_i} = -315{,}31,$$

$$L_3(2,1) = \omega_4(2,1) \cdot S = (-0,028) \cdot (-315,31) = 8,829.$$

Відповідь: Інтерполяційний багаточлен Ньютона з поділеними різницями $P(2,1) = 8,829$.

Інтерполяційний багаточлен Лагранжа $L_3(2,1) = 8,829$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Романюк В. М. Основи прикладної математики : підручник. Харків: Фоліо, 2025. 320 с. Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б. Математика в технічному університеті : підручник. У 3-х т. Т. 1. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. 496 с. URL: https://ela.kpi.ua/bitstreams/ea7ab1d2-7b7e-4f56-95dd-0eaac94907fc
2. Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б. Математика в технічному університеті : підручник. У 3-х т. Т. 2 . Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 с. URL: https://ela.kpi.ua/bitstreams/6a6d3b28-1902-4016-83b8-f2d9a8f78d08
3. Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б. Математика в технічному університеті : підручник. У 3-х т. Т. 3. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 454 с. URL: https://ela.kpi.ua/bitstreams/3faf7b13-c7ff-4eec-9db7-2443adff904d
4. Білоусова Т. П., Вигоднер І. В., Ляхович Т. П. Прикладна математика : навчальний посібник. Одеса : ОЛДІ+, 2025. 160 с.
5. Вигоднер І. В., Моісеєнко С. В. Вища та прикладна математика. Лекції: навчальний посібник для студентів денної і заочної форми навчання. Херсон : ФОП Вишемирський В. С., 2024. 154 с.
6. Малярець, Л. М. Прикладна математика : навч. посіб. / Л. М. Малярець, О. К. Шевченко, О. В. Мартинова ; Харківський національний економічний університет ім. С. Кузнеця. Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2021. 200 с.
7. Методи обробки даних в інформатиці. Чисельні методи : навч. посіб. / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: Н. О. Бондаренко, В. М. Бондаренко, В. П. Корнєв. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. 68 с.
8. Прикладна математика : підручник / Б. О. Язлюк, А. І. Гулей, О. О. Красноруцький та ін. Тернопіль : ЗУНУ, 2021. 376 с.
9. Руська Р. В., Аліluйко А. М., Мартинюк О. М., Новосад І. Прикладна математика : навчальний посібник. Ч. І. Тернопіль. 2020. 98 с. URL: https://dspace.wunu.edu.ua/bitstream/316497/41189/1/посібник.pdf.
10. Фортуна В. В., Бескровний О. І. Вища та прикладна математика : навч. посіб. Львів : «Магнолія 2006», 2025. 648 с.

Навчальне видання

ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Конспект лекцій

Укладачі:

Тищенко Світлана Іванівна
Пархоменко Олександр Юрійович та ін.

Формат 60х84 1/16. Ум. друк. арк. 11,81.
Тираж 50 прим. Зам. № __

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.