

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ

Інженерно-енергетичний факультет

Кафедра вищої та прикладної математики



ВИЩА МАТЕМАТИКА
Аналітична геометрія на площині

завдання та методичні рекомендації
для самостійної роботи здобувачів
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
ОПП «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»
спеціальності G3 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»
для денної та заочної форм здобуття вищої освіти

Миколаїв
2026

УДК 514.123
B55

Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету (протокол № 7 від 21. 04. 2026 р.)

Укладачі:

Є. Ю. Борчик – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої та прикладної математики, МНАУ

Рецензенти:

Р. В. Дінжос – д.т.н., професор, проректор з наукової роботи ЧНУ ім. Петра Могили;

О. С. Садовий – к.т.н, доцент кафедри електроенергетики, електротехніки та електромеханіки, Миколаївський національний аграрний університет.

ВСТУП

Вища математика як навчальна дисципліна є фундаментальним нормативним курсом, найвагомішою базовою складовою якісної підготовки висококваліфікованих фахівців у вищих навчальних закладах освіти III-IV рівнів акредитації.

У методичних рекомендаціях запропоновано завдання для самостійної роботи студентів за програмою з вищої математики для здобувачів вищої освіти ступеня "Бакалавр" спеціальності 141 "Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка".

Матеріал даного посібника складається з основних теоретичних відомостей, завдань для виконання на практичних заняттях, завдань для самостійного розв'язання. Розрахункові завдання розподілено на групи за тематикою та методами розв'язання. Пропонуються приклади розв'язання задач з кожної теми з повним обґрунтуванням. Розглядаються наступні теми:

Тема 1. Системи координат.

Тема 2. Рівняння прямої на площині.

Тема 3. Коло.

Тема 4. Еліпс.

Тема 5. Гіпербола.

Тема 6. Парабола.

.

.

Тема 1. Системи координат.

1.1 Основні теоретичні відомості

Означення. Декартовою системою координат у просторі називається сукупність точки і базису (рис. 1).

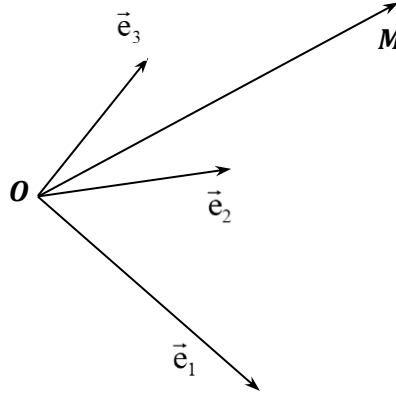


Рисунок 1

Точка O має назву - *початок координат*; прямі, що проходять через початок координат у напрямку базисних векторів, називаються *вісьями координат*. Перша – віссю *абсцис*, друга – віссю *ординат*, а третя – віссю *аплікату*. Площини, що проходять через вісі координат, називають *координатними площинами*.

Радіусом-вектором точки M відносно точки O називається вектор \overrightarrow{OM} .

Означення. Компоненти радіуса-вектора точки M стосовно початку координат називаються *координатами* точки M в розглянутій системі координат.

Перша координата називається *абсцисою*, друга – *ординатою*, а третя – *аплікатою*.

Аналогічно визначаються декартові координати на площині і на прямій лінії. Зрозуміло, точка на площині має тільки дві координати (абсцису й ординату), а точка на прямій лінії – одну.

Координати точки звичайно пишуть у дужках після літери, що позначає точку.

Означення. Базис називається *ортонормованим*, якщо його вектори попарно ортогональні і по довжині дорівнюють одиниці, тобто якщо

$$\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2, \vec{e}_1 \perp \vec{e}_3, \vec{e}_2 \perp \vec{e}_3 \quad \text{і} \quad |\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1.$$

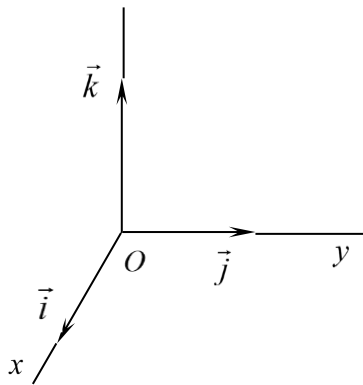


Рисунок 2

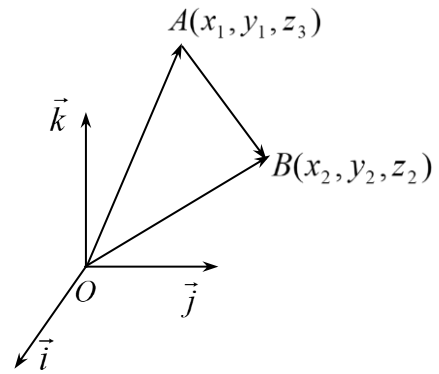


Рисунок 3

Декартова система координат, базис якої ортонормований, називається *декартовою прямокутною системою координат*.

Базисні вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ прямокутної системи координат називаються *ортами* і позначаються $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ відповідно (рис. 2). Абсцису, ординату й аплікату точки в прямокутній системі координат позначають літерами x, y і z відповідно; а осі абсцис, ординат і аплікат – відповідно Ox, Oy, Oz .

Координати точки відносно декартової прямокутної системи координат у просторі по абсолютній величині дорівнюють відстаням від цієї точки до відповідних координатних площин. Вони мають знак плюс чи мінус у залежності від того, лежить точка по ту ж сторону, чи по іншу сторону від координатної площини, що і кінець орта, перпендикулярного цієї площини.

Координати точки відносно декартової прямокутної системи координат на площині по абсолютній величині дорівнюють відстаням від цієї точки до відповідних координатних осей. Вісі координат розбивають площину на чотири частини, їх називають *чвертями*, квадрантами чи *координатними кутами* і нумерують римськими цифрами I, II, III, IV так, як показано на рис. 4. На рис. 4 зазначені знаки координат точок в залежності від їхнього розташування в тій чи іншій чверті.

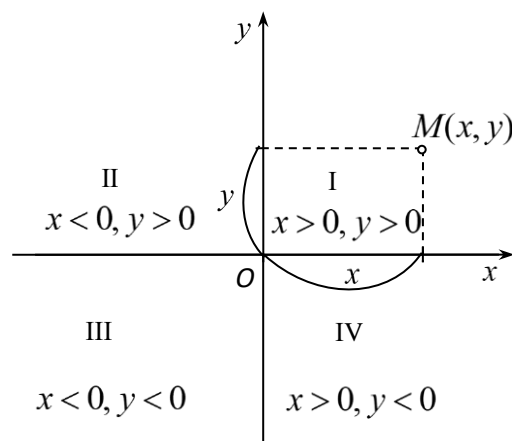


Рисунок 4

Нехай у прямокутній системі координат $O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ задані точки $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 3). Мають місце наступні твердження.

Твердження 1. Щоб знайти координати вектора, потрібно з координат його кінця відняти координати його початку, тобто вектор \overline{AB} має координати $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Твердження 2. Координати точки $M(x, y, z)$ на відрізку AB , що поділяє цей відрізок у відношенні λ , тобто задовольняє умові $\frac{|AM|}{|MB|} = \lambda, \lambda > 0$ знаходяться за формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \quad (1)$$

Ці формули відомі за назвою *формул розподілу відрізка в заданому відношенні*.

В окремому випадку, при $\lambda=1$ з формул (6) виходять *формули для координат середини відрізка*:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad (2)$$

Полярна система координат складається з деякої точки площини O , яка називається *полюсом*, променя OA , що виходить з цієї точки і називається *полярною віссю*. Крім того, задається одиниця масштабу для вимірювання довжин відрізків.

Полярними координатами точки M називаються числа ρ — відстань від полюса O до точки M і ϕ — кут, на який треба повернути полярну вісь OA до її збігу з OM , проти годинникової стрілки.

Полярний радіус ρ може змінюватись у межах $0 \leq \rho < \infty$, полярний кут, як правило, змінюється в межах $0 \leq \phi < 2\pi$.

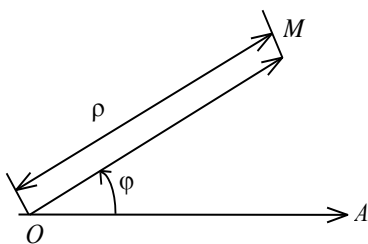


Рисунок 5

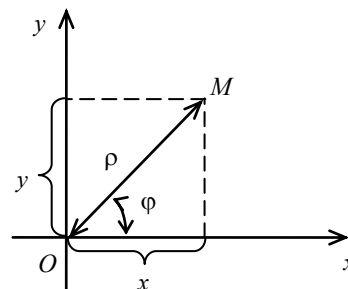


Рисунок 6

Зв'язок між полярними і декартовими координатами точки (рис. 6) встановлюють формули:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi, & y &= \rho \sin \phi, \\ \rho &= \sqrt{x^2 + y^2}, & \operatorname{tg} \phi &= \frac{y}{x}. \end{aligned} \quad (3)$$

2.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Перевірити, що чотири точки $A(3, -1, 2)$, $B(1, 2, -1)$, $C(-1, 1, -3)$, $D(3, -5, 3)$ є вершинами трапеції.

Розв'язання:

Розглянемо чотирикутник $ABCD$. Введемо вектори

$$\overrightarrow{AB} = (1 - 3, 2 - (-1), -1 - 2) = (-2, 3, -3);$$

$$\overrightarrow{BC} = (-1 - 1, 1 - 2, -3 - (-1)) = (-2, -1, -2);$$

$$\overrightarrow{CD} = (3 - (-1), -5 - 1, 3 - (-3)) = (4, -6, 6);$$

$$\overrightarrow{AC} = (-1 - 3, 1 - (-1), -3 - 2) = (-4, 2, -5).$$

Обчислимо відношення відповідних координат векторів \overrightarrow{AB} і \overrightarrow{CD} :

$$\frac{-2}{4} = \frac{3}{-6} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}.$$

Отже, для координат векторів \overrightarrow{AB} і \overrightarrow{CD} виконується умова колінеарності, тому вони колінеарні.

Умова колінеарності для векторів \overrightarrow{BC} і \overrightarrow{AC} не виконується, бо координати цих векторів не пропорційні: $\frac{-4}{-2} \neq \frac{2}{-1} \neq \frac{-5}{6}$, тобто ці вектори не колінеарні.

Таким чином, показано, що в чотирикутнику $ABCD$ дві протилежні сторони паралельні, а дві інші не паралельні. Це означає, що чотирикутник $ABCD$ є трапеція.

Приклад 2. Знайти вершини трикутника, знаючи середини його сторін $M(3; -2)$, $N(1; 6)$, $P(-4; 2)$.

Розв'язання:

Нехай координати вершин трикутника (рис.7) є $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$.

Використовуючи формули для координат середини відрізка, отримаємо наступні системи лінійних рівнянь для визначення координат вершин трикутника:

$$\begin{cases} \frac{x_1 + x_2}{2} = 3, & \frac{x_1 + x_3}{2} = 4, & \frac{x_2 + x_3}{2} = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{y_1 + y_2}{2} = -2, & \frac{y_1 + y_3}{2} = 2, & \frac{y_2 + y_3}{2} = 6. \end{cases}$$

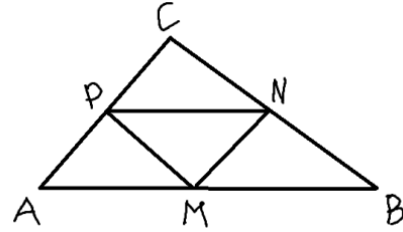


Рисунок 7

Розв'язуючи ці системи знаходимо $x_1 = -2$, $x_2 = 8$, $x_3 = -6$, $y_1 = -6$, $y_2 = 2$, $y_3 = 10$. Таким чином, вершинами трикутника є точки $A(-2; -6)$, $B(8; 2)$, $C(-6; 10)$.

Приклад 3. Нехай задано координати вершин деякого трикутника $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ (рис. 8). Знайти площу цього трикутника.

Розв'язання:

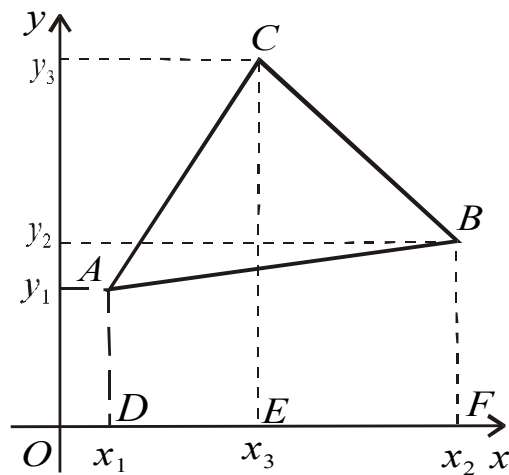


Рисунок 8

З рисунка бачимо, що площу трикутника ABC можна знайти як $S_{\triangle ABC} = S_{ADEC} + S_{BCEF} - S_{ABFD}$. У правій частині формули стоять площі відповідних трапецій, які подаються формулами:

$$S_{ADEC} = |DE| \frac{|AD| + |CE|}{2} = \frac{(x_3 - x_1)(y_3 + y_1)}{2};$$

$$S_{BCEF} = |EF| \frac{|EC| - |BF|}{2} = \frac{(x_2 - x_3)(y_2 - y_3)}{2};$$

$$S_{ABFD} = |DF| \frac{|AD| + |BF|}{2} = \frac{(x_2 - x_1)(y_1 + y_2)}{2}$$

Підставивши знайдені площі у вираз для площі трикутника, дістанемо:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \left| (x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + (x_3 - x_1)(y_3 + y_1) \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \left| (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_3 - y_1) \right|.$$

Записавши останній вираз у вигляді визначника, дістанемо остаточну формулу:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Приклад 4. Нехай задано дві точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$ (рис. 9). Знайти відстань між цими точками $M_1 M_2$.

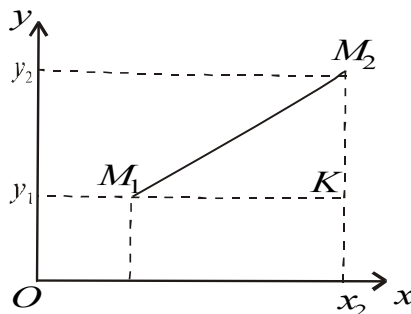


Рисунок 9

Розв'язання:

Із рис. 14 видно, що $M_1 K = |x_2 - x_1|$, $M_2 K = |y_2 - y_1|$.

Трикутник $M_1 M_2 K$ — прямокутний, тому за теоремою Піфагора маємо:

$$M_1 M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (5)$$

Приклад 5. Дано трикутник $A(4, 1)$, $B(7, 5)$, $C(-4, 7)$. Знайти площу трикутника, вершини якого містяться в точках перетину бісектрис трикутника зі сторонами (рис. 10).

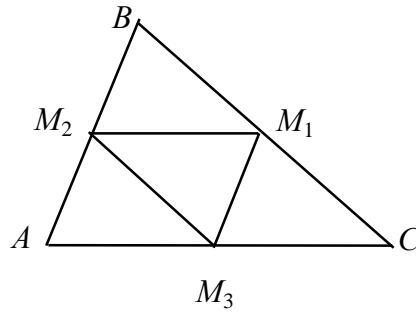


Рисунок 10

Розв'язання:

Бісектриса трикутника поділяє протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим сторонам. Знайдемо довжину відрізків AB , BC і AC за формулою (5).

$$AB = \sqrt{(4-7)^2 + (1-5)^2} = 5,$$

$$BC = \sqrt{(7+4)^2 + (5+7)^2} = 15,$$

$$AC = \sqrt{(4+4)^2 + (1-7)^2} = 10.$$

Знайдемо відношення, в яких основи бісектрис точки M_1 , M_2 , M_3 (рис. 10) поділяють відповідні відрізки:

$$\frac{|BM_1|}{|M_1C|} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}; \quad \frac{|AM_2|}{|M_2B|} = \frac{AC}{BC} = \frac{2}{3}; \quad \frac{|AM_3|}{|M_3C|} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{3}.$$

Скориставшись формулами (1), знайдемо відповідно координати точок $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$.

$$x_1 = \frac{7-4 \cdot \frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{10}{3}; \quad y_1 = \frac{5+7 \cdot \frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{17}{3}; \quad M_1\left(\frac{10}{3}; \frac{17}{3}\right);$$

$$x_2 = \frac{4+7 \cdot \frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{26}{5}; \quad y_2 = \frac{1+5 \cdot \frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{13}{5}; \quad M_2\left(\frac{26}{5}; \frac{13}{5}\right);$$

$$x_3 = \frac{4-4 \cdot \frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = 2; \quad y_3 = \frac{1+7 \cdot \frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{5}{2}; \quad M_3\left(2; \frac{5}{2}\right).$$

Площу трикутника $M_1 M_2 M_3$ обчислимо за формулою (4):

$$S = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{cc} \frac{26}{5} - \frac{10}{3} & 2 - \frac{10}{3} \\ \frac{13}{2} - \frac{17}{3} & \frac{5}{2} - \frac{17}{3} \end{array} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{cc} \frac{28}{15} - \frac{4}{3} \\ -\frac{46}{15} - \frac{19}{6} \end{array} \right\| = 50 \text{ кв. од.}$$

Приклад 6. Знайти полярні координати точки $M(2, 2)$.

Розв'язання:

З формули (3) маємо $\rho = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\varphi = 1$. Згідно з останньою рівністю $\varphi = \frac{\pi}{4}$, або $\varphi = \frac{5\pi}{4}$, але $y = 2 > 0$ і $x = 2 > 0$, маємо $\varphi = \frac{\pi}{4}$. У полярних координатах точка $M\left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$.

Приклад 7. У полярній системі координат дані точки $A\left(8, -\frac{2}{3}\pi\right)$, $B\left(6, \frac{\pi}{3}\right)$ (рис. 11). Обчислити полярні координати середини відрізка AB .

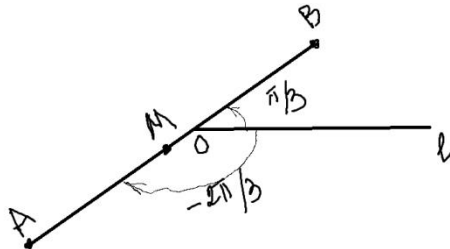


Рисунок 11

Розв'язання:

Із рис.11 видно, що $\angle BOl + \angle AOl = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \pi = \pi$ або 180° . Це означає, що точки A і B є кінцями відрізка, що проходить через полюс O . Позначемо через M середину відрізка AB . Тоді

$$AM = BM = \frac{AO + BO}{2} = \frac{8 + 6}{2} = 7.$$

Тоді полярний радіус точки M рівний

$$r_M = OM = BM - BO = 7 - 6 = 1.$$

Як видно із рис. 11 полярний кут $\varphi_M = -\frac{2\pi}{3}$. Отже точка M має такі полярні координати $M(1, -\frac{2}{3}\pi)$.

. **Приклад 8.** У полярній системі координат дані точки $M_1(r_1, \varphi_1)$, $M_2(r_2, \varphi_2)$ (рис. 12). Обчислити відстань d між ними.

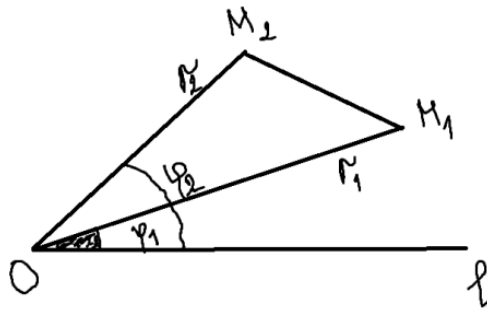


Рисунок 12

Розв'язання:

Розглянемо трикутник OM_1M_2 . Враховуючи, що кут $\angle M_1OM_2 = \varphi_2 - \varphi_1$, із теореми косинусів знаходимо:

$$M_1M_2^2 = OM_1^2 + OM_2^2 - 2 \cdot OM_1 \cdot OM_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \text{ тобто}$$

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

2.3 Завдання для самостійного розв'язання

Завдання 1. Дані точки $A(-1, 5, -10)$, $B(5, -7, 8)$, $C(2, 2, -7)$, $D(5, -4, 2)$.

Перевірити, що вектори \overrightarrow{AB} і \overrightarrow{CD} колінеарні, який з них довший і у скільки разів, як вони спрямовані – в одному напрямку чи в протилежних.

Завдання 2. Дано вершини трикутника $A(3, 2)$; $B(-1, -1)$; $C(11, -6)$. Знайти довжини його сторін і точку перетину медіан.

Завдання 3. Дано три вершини паралелограма $A(4; 2)$, $B(5; 7)$, $C(-3; 4)$. Знайти четверту вершину D , яка протилежна вершині B .

Завдання 4. Відрізок між точками $A(3; 2)$; $B(15; 6)$ поділити на п'ять рівних частин. Знайти координати точок ділення.

Завдання 5. Обчислити периметр і площу трикутника, якщо $A (-2; 1)$; $B (2, -2)$; $C (8, 6)$.

Завдання 6. Дано трикутник $A (4; 1)$, $B (7, 5)$, $C (-4, 7)$. Знайти точку перетину бісектриси кута A з протилежною стороною BC .

Завдання 7. У полярній системі координат дані дві вершини $A(3, -\frac{4}{9}\pi)$;

$B(5, \frac{3}{14}\pi)$ паралелограма $ABCD$. Точка перетину діагоналей цього паралелограма співпадає з полюсом. Знайти дві інші його вершини.

Завдання 8. У полярній системі координат дані точки $M_1(5, \frac{\pi}{4})$, $M_2(8, -\frac{\pi}{12})$.

Обчислити відстань d між ними.

Завдання 9. У полярній системі координат дані дві суміжні вершини квадрата $M_1(12, -\frac{\pi}{10})$, $M_2(3, \frac{\pi}{15})$. Обчислити його площу.

Тема 2. Рівняння прямої на площині

2.1 Основні теоретичні відомості

Означення. Рівняння $F(x, y) = 0$ називається *рівнянням деякої лінії в заданій системі координат*, якщо це рівняння задовольняють координати (x, y) будь-якої точки, що лежить на цій лінії, і не задовольняють координати жодної точки, що не лежить на цій лінії.

Нехай задано деяку пряму (рис. 2.14), знайдемо її рівняння.

Точка $M(x, y)$ лежить на прямій тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$\frac{NM}{BN} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Позначимо $\operatorname{tg} \alpha = k$ і назвемо цю величину *кутовим коефіцієнтом* прямої лінії. Тоді, враховуючи, що $NM = y - b$, $BN = x$, маємо *рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом*

$$y = kx + b. \quad (6)$$

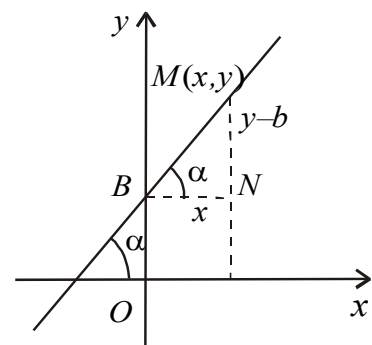


Рисунок 13

Нехай деяка точка $M_1(x_1, y_1)$ належить заданій прямій, тоді $y_1 = kx_1 + b$. Знайдемо з цього рівняння значення b і, підставивши його в рівняння прямої (6), дістанемо:

$$y - y_1 = k(x - x_1) \quad (7)$$

— рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_1(x_1, y_1)$.

Нехай ще одна точка $M_2(x_2, y_2)$ також належить заданій прямій, тоді з означення лінії маємо:

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

Знайдемо значення k з останнього співвідношення і, підставивши його в рівняння прямої (7), дістанемо:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \quad (8)$$

Останнє рівняння (8) називається *рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки*.

У прямокутній системі координат пряма лінія задається рівнянням першого степеня відносно x і y .

$$Ax + By + C = 0, \quad (9)$$

і навпаки, рівняння (9) при довільних A, B, C (A і B одночасно не дорівнюють нулю) визначає деяку пряму в прямокутній системі координат Oxy .

Рівняння (9) називається *загальним рівнянням прямої лінії*. Дослідимо це рівняння.

1. $C = 0, A \neq 0, B \neq 0$, тоді $Ax + By = 0$ і останнє визначає пряму, що проходить через початок системи координат, бо точка $O(0, 0)$ лежить на цій прямій.

2. $B = 0, A \neq 0, C \neq 0$, тоді $Ax + C = 0$, або $x = -\frac{C}{A} = a$, де a — довжина відрізка, що його пряма відтинає на осі Ox , а сама вона розміщена паралельно осі Oy , якщо $C = 0$, то $x = 0$ маємо рівняння самої осі Oy .

3. $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$, тоді $By + C = 0$, або $y = -\frac{C}{B} = b$, де b — довжина відрізка, що відтинає пряма на осі Ox , при $C = 0$ маємо $y = 0$ — рівняння осі Ox .

Розглянемо дві прямі $l_1: y = k_1x + b_1$ і $l_2: y = k_2x + b_2$.

Означення. Кутом між прямим l_1 і l_2 називається такий кут φ , поворот на який від першої прямої до другої відносно точки їх перетину до

суміщення цих прямих відбувається на найменший кут проти годинникової стрілки.

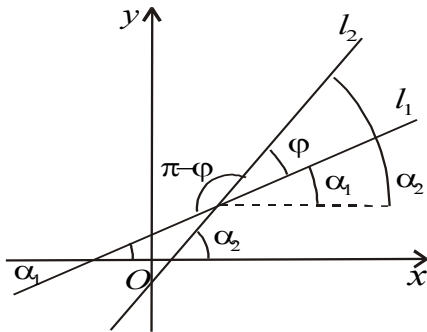


Рисунок 14

Зауважимо, що кут між l_1 і l_2 не дорівнює куту між l_2 і l_1 . Пригадуючи, що $\operatorname{tg} \alpha_1 = k_1$; $\operatorname{tg} \alpha_2 = k_2$, а також, що виконується очевидне співвідношення між кутами $\phi = \alpha_2 - \alpha_1$ (рис. 14), маємо: $\operatorname{tg} \phi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_2 \operatorname{tg} \alpha_1}$

Остаточно

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}. \quad (10)$$

Якщо кут ϕ — це кут між l_1 і l_2 , то кут між l_2 і l_1 дорівнюватиме $\pi - \phi$.

З формули (10) легко дістати умови *паралельності* і *перпендикулярності* двох прямих.

Так, коли $l_1 \parallel l_2$, кут ϕ між ними дорівнює нулю — маємо:

$$\operatorname{tg} \phi = 0 \Rightarrow k_1 = k_2.$$

$$\text{Якщо } l_1 \perp l_2, \phi = \frac{\pi}{2}; \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2} + \alpha_1; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1 \right) = -\operatorname{ctg} \alpha_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1}.$$

Підставляючи значення кутових коефіцієнтів, маємо:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Нехай задано деяку точку $M_0(x_0, y_0)$ і пряму $l: Ax + By + C = 0$. Пересвідчимось, що M_0 не лежить на прямій, $Ax_0 + By_0 + C \neq 0$, тоді *відстань від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$* можна знайти за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

2.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Пряму задано рівнянням $3x - 5y + 15 = 0$. Перевірити, які з точок $A(-2, 3)$, $B(0, 3)$, $C(5, 6)$, належать заданій прямій, знайти її рівняння з кутовим коефіцієнтом і у відрізках на осях.

Розв'язання: Для перевірки того, чи лежать точки A , B , C на прямій, підставимо їхні координати в рівняння прямої:

$$A: 3(-2) - 5 \cdot 3 + 15 \neq 0, \quad B: 3 \cdot 0 - 3 \cdot 5 + 15 = 0, \quad C: 3 \cdot 5 - 5 \cdot 5 + 15 = 0.$$

Таким чином, точка A не лежить на прямій, а точки B і C лежать на прямій.

Поділимо рівняння прямої почленно на коефіцієнт при y :
 $\frac{3}{5}x - y + 3 = 0$, а далі запишемо його у вигляді $y = \frac{3}{5}x + 3$ — рівняння з кутовим коефіцієнтом.

Поділивши рівняння почленно на вільний член:

$$\frac{3x}{15} - \frac{5y}{15} + 1 = 0, \quad \text{або} \quad \frac{x}{-5} + \frac{y}{3} = 1,$$

дістанемо шукане рівняння у відрізках на осях.

Приклад 2. Дано дві вершини трикутника $A(2, -3)$, $B(5, 1)$, рівняння сторони $BC: x + 2y - 7 = 0$ і медіани $AM: 5x - y - 13 = 0$. Скласти рівняння висоти, опущеної з вершини C , обчислити її довжину, знайти кут трикутника при вершині A .

Розв'язання: Нехай вершина трикутника $C(x_1, y_1)$. Тоді точка з координатами $x_2 = \frac{5+x_1}{2}$; $y_2 = \frac{1+y_1}{2}$ лежить на медіані, тобто виконується рівність $5\left(\frac{5+x_1}{2}\right) - \frac{1+y_1}{2} - 13 = 0$. Крім того, точка C лежить на прямій BC .

Отже, маємо систему рівнянь для знаходження координат (x_1, y_1) :

$$\begin{cases} 5x_1 - y_1 - 2 = 0 \\ x_1 + 2y_1 - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 3. \end{cases}$$

Знайдемо рівняння прямих AB і AC , використовуючи рівняння прямої (8), маємо:

$$AB: \frac{y+3}{1+3} = \frac{x-2}{5-2} \Rightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{17}{3}; \quad AC: \frac{y+3}{3+3} = \frac{x-2}{1-2} \Rightarrow y = -6x + 9.$$

Висота проходить через точку C перпендикулярно до прямої AB . Використаємо умову перпендикулярності двох прямих і знайдемо кутовий коефіцієнт висоти $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{3}{4}$. Використаємо рівняння (7) і знайдемо рівняння висоти:

$$y - 3 = -\frac{3}{4}(x - 1) \Rightarrow 3x + 4y - 15 = 0.$$

Довжину висоти знайдемо як відстань від точки $C(1, 3)$ до прямої AB .

$$h = \frac{|4 \cdot 1 - 3 \cdot 3 - 15|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{22}{5} = 4,4.$$

Щоб обчислити кут A , скористаємось формулою для знаходження кута між двома прямими (10):

$$\operatorname{tg} \hat{A} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{-6 - \frac{4}{3}}{1 - 6 \cdot \frac{4}{3}} = \frac{22}{21}; \quad \hat{A} = \operatorname{arctg} \frac{22}{21}.$$

Приклад 3. Паралельні прямі проходять відповідно через точки $O(0, 0)$ і $M(1, 3)$. Знайти їх рівняння, коли відомо, що відстань між ними дорівнює $\sqrt{5}$.

Розв'язання: Якщо прямі паралельні, то їх кутові коефіцієнти рівні між собою, тому згідно з (7) рівняння шуканих прямих можна записати у вигляді $y = kx$, $y - 3 = k(x - 1)$. Візьмемо довільну точку, що лежить на першій прямій, наприклад $(1, k)$. Тоді згідно з формулою для відстані точки до прямої запишемо:

$$\sqrt{5} = \frac{|k - k - k + 3|}{\sqrt{1 + k^2}}, \quad \text{звідки знайдемо } k_1 = -2, k_2 = \frac{1}{2}. \quad \text{Рівняння прямих:}$$

$$y = -2x; \quad 2x + y - 5 = 0 \quad \text{або} \quad y = \frac{1}{2}x; \quad x - 2y + 5 = 0.$$

Приклад 4. Записати рівняння бісектрис кутів, утворених прямими $x + 7y - 6 = 0$ і $5x - 5y + 1 = 0$.

Розв'язання: Використаємо відому властивість бісектриси кута про те, що на ній лежить множина точок, рівновіддалених від сторін кута. Нехай $M(x, y)$ — точка, яка належить цій множині. Тоді за формулою відстані від точки до прямої запишемо:

$$\frac{|x + 7y - 6|}{\sqrt{1 + 49}} = \frac{|5x - 5y + 1|}{\sqrt{25 + 25}}.$$

Звідси маємо два рівняння бісектрис: $x + 7y - 6 = 5x - 5y + 1$ і $x + 7y - 6 = -5x + 5y + 1$, або, після перетворень: $4x - 12y + 7 = 0$, $6x + 2y - 5 = 0$.

Приклад 4. Обчислити площу ромба, знаючи одну з його вершин $A(0, -1)$, точку перетину діагоналей $M(4, 4)$ і точку $N(2, 0)$ на стороні AB .

Розв'язання: Використовуючи (8), запишемо рівняння сторони AB :

$\frac{y+1}{1} = \frac{x}{2}$, або $x - 2y - 2 = 0$. Знайдемо координати точки $C(x, y)$, яка за властивістю точки перетину діагоналей ромба симетрична точці A відносно точки M . Отже, $4 = \frac{0+x}{2}$; $4 = \frac{-1+y}{2}$, звідки $C(8, 9)$. Висоту ромба знайдемо як відстань від точки C до прямої AB :

$$h = \frac{|8 - 18 - 2|}{\sqrt{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}}.$$

Знайдемо кутовий коефіцієнт діагоналі ромба AC : $k = \frac{9+1}{8-0} = \frac{5}{4}$.

Кутовий коефіцієнт другої діагоналі дорівнює $-\frac{4}{5}$, а її рівняння $4x + 5y - 36 = 0$. Розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} x - 2y = 2 \\ 4x + 5y = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{82}{13} \\ y = \frac{28}{13} \end{cases},$$

знаходимо координати точки $B\left(\frac{82}{13}; \frac{28}{13}\right)$. Довжина сторони ромба

$$|AB| = \sqrt{\left(\frac{82}{13}\right)^2 + \left(\frac{28}{13}\right)^2} = \frac{41}{13}\sqrt{5}.$$

Отже, площа ромба $s = |AB| \cdot h = \frac{41}{13}\sqrt{5} \cdot \frac{12}{\sqrt{5}} = 37\frac{11}{13}$.

2.3 Завдання для самостійного розв'язання

Завдання 1. Скласти рівняння катетів прямокутного рівнобедреного трикутника, якщо $y = 3x + 5$ — рівняння гіпотенузи, $A(4, -1)$ — вершина прямого кута.

Завдання 2. Дано вершини трикутника $A(4; 6)$, $B(-4; 0)$, $C(-1; -4)$. Скласти рівняння: а) трьох його сторін; б) медіани, проведеної з вершини C ; в) бісектриси кута B ; г) висоти, опущеної з вершини A .

Завдання 3. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $(2; -1)$ і утворює з віссю Ox удвічі більший кут, ніж кут, що його утворює з тією самою віссю пряма $x - 3y + 4 = 0$.

Завдання 4. Скласти рівняння сторін квадрата, якщо $A(2; -4)$ — його вершина, $M(5; 2)$ — точка перетину діагоналей.

Завдання 5. Через точку $A(5; 2)$ провести пряму, що відтинає рівні відрізки на осях системи координат.

Тема 3. Коло

3.1 Основні теоретичні відомості

Розглянемо лінії другого порядку, які на площині в загальному випадку можна записати так:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \quad (11)$$

Рівняння (11) описує всі криві другого порядку в загальному випадку. Спинимось на простіших, так званих канонічних рівняннях ліній другого порядку.

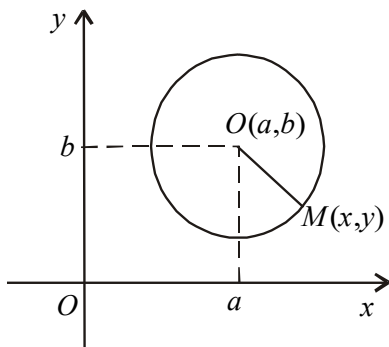


Рисунок 15

До кривих другого порядку належить і добре відома лінія, яка називається *колом* (рис. 15).

Означення. Множина точок, що містяться на однаковій відстані від заданої точки — центра, називається *колом*. За означенням $OM = R$ або

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R.$$

Піднісши обидві частини рівняння до квадрата, дістанемо:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \quad (12)$$

— канонічне рівняння кола. Тут (a, b) — координати центра кола, R — його радіус. Розкривши дужки в лівій частині (12), дістанемо, очевидно, рівняння другого степеня, тобто коло — крива другого порядку.

3.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Скласти рівняння кола в кожному з таких випадків: 1) центр кола співпадає з точкою $C(2, -3)$, а його радіус дорівнює 7; 2) коло проходить через точку $A(2, 6)$, а його центр співпадає з точкою $C(-1, 2)$; 3) точки $A(3, 2)$

і $B(-1, 6)$ є кінці одного з діаметрів кола; 4) центр кола співпадає з точкою $C(1, -1)$, а пряма, рівняння якої $5x - 12y + 9 = 0$, є дотичною до кола; 5) коло проходить через точки $A(3, 1)$ і $B(-1, 3)$, а його центр лежить на прямій $3x - y - 2 = 0$; 6) коло проходить через три точки $A(1, 1)$, $B(1, -1)$ і $C(2, 0)$.

Розв'язання: 1) Користуємося формулою кола:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

Підставляємо: $a = 2$, $b = -3$, $R = 7$.

Одержуємо:

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 49.$$

2) Радіус — це відстань між точками A і C :

$$R = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

$$R = \sqrt{(2+1)^2 + (6-2)^2}, \quad R = \sqrt{9+16} = 5.$$

Рівняння кола:

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25.$$

3) Центр кола — середина діаметра:

$$C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right), \quad C\left(\frac{3 + (-1)}{2}; \frac{2 + 6}{2}\right), \quad C(1; 4).$$

Радіус — половина довжини діаметра:

$$AB = \sqrt{(3+1)^2 + (2-6)^2}, \quad AB = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}. \quad \text{Тоді}$$

$$R = 2\sqrt{2}, \quad R^2 = 8.$$

Рівняння кола:

$$(x-1)^2 + (y-4)^2 = 8.$$

4) Радіус дорівнює відстані від центра до дотичної:

$$R = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Підставляємо значення параметрів A, B, C та отримуємо:

$$R = \frac{|5 \cdot 1 - 12 \cdot (-1) + 9|}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}}, \quad R = \frac{26}{13} = 2, \quad R^2 = 4.$$

Рівняння кола:

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4.$$

5) Центр кола лежить на серединному перпендикулярі до відрізка АВАВАВ.

Середина відрізка:

$$M\left(\frac{3+(-1)}{2}; \frac{1+3}{2}\right), M(1;2).$$

Кутовий коефіцієнт прямої АВ: $k_{AB} = \frac{3-1}{-1-3} = -\frac{1}{2}$.

Тоді кутовий коефіцієнт перпендикуляра: $k=2$.

Рівняння серединного перпендикуляра:

$$y-2=2(x-1), \quad y = 2x.$$

Знаходимо точку перетину:

$$\begin{cases} y = 2x \\ 3x - y - 2 = 0 \end{cases}.$$

Із другого рівняння системи при $y = 2x$, знаходимо: $3x - 2x - 2 = 0$.

Звідси $x = 2, \quad y = 4$.

Отже, центр кола має координати: $C(2;4)$.

Радіус: $R = \sqrt{(3-2)^2 + (1-4)^2}, \quad R = \sqrt{10}, \quad R^2 = 10$.

Тоді рівняння кола: $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 10$.

6) Загальне рівняння кола має вид: $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$.

Підставляємо координати точок.

Для точки А(1;1): $1+1+A+B+C=0; \quad A+B+C=-2$.

Для точки В(1;-1): $1+1+A-B+C=0; \quad A-B+C=-2$.

Для точки С(2;0): $4+2A+C=0; \quad 2A+C=-4$.

Розв'язуємо систему.

Відніmemo перші два рівняння та отримаємо: $2B=0, \quad B=0$

Тоді: $\begin{cases} A+C=-2 \\ 2A+C=-4 \end{cases}$.

Відніmemo рівняння та отримаємо: $A=-2, \quad C=0$.

Отже: $A=-2, \quad B=0, \quad C=0$.

Отже, рівняння кола має вид:

$$x^2 + y^2 - 2x = 0.$$

Приклад 2. Записати рівняння лінії центрів двох кіл $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ і $x^2 + y^2 + 2x - 12y + 1 = 0$.

Розв'язання: Знайдемо спочатку координати центрів цих двох кіл, виділивши повні квадрати:

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 = 25, \text{ або } (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25,$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 12y + 36 = 36, \text{ або } (x + 1)^2 + (y - 6)^2 = 36.$$

Отже, координати центра першого кола $C_1 (3; -4)$, а другого - $C_2 (-1; 6)$. Скориставшись рівнянням (8), знайдемо

$$\frac{y + 4}{6 + 4} = \frac{x - 3}{-1 - 3}.$$

$$5x + 2y - 7 = 0 - \text{шукане рівняння центрів кіл.}$$

Приклад 3. Показати, що в прямокутній декартовій системі координат рівняння $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ визначає коло. Знайти координати центра і радіус кола.

Розв'язання: Перетворимо рівняння, доповнивши квадрати:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$$

Групуємо доданки:

$$(x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) = 20$$

Доповнюємо до квадратів:

$$x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1, \quad y^2 + 4y = (y + 2)^2 - 4.$$

$$\text{Підставляємо: } (x - 1)^2 - 1 + (y + 2)^2 - 4 = 20.$$

$$\text{Спрощуємо: } (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25.$$

Ми отримали канонічне рівняння кола:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2,$$

$$\text{де: } a = 1, \quad b = -2, \quad R = 5.$$

Таким чином, $C(1; -2)$ - центр кола, $R = 5$ - радіус кола.

3.3 Завдання для самостійного розв'язання

Завдання 1. Точка $C(3, -1)$ є центр кола, яке відтинає на прямій, рівняння якої $2x - 5y + 18 = 0$, хорду довжини 6. Скласти рівняння цього кола.

Завдання 2. В прямокутній декартовій системі координат дані рівняння множин точок:

$$\text{а) } x^2 + y^2 + 8x - 4y + 40 = 0,$$

$$\text{б) } x^2 + xy - 2x = 0,$$

в) $x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x + y + 5 = 0$.

Вияснити, які з наведених рівнянь визначають коло. Знайти координати центра і радіус кожного з них.

Завдання 3. Скласти рівняння діаметра кола $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 17 = 0$, який перпендикулярний до прямої $5x + 2y - 13 = 0$.

Завдання 4. Обчислити найкоротшу відстань від точки до кола в кожному з таких випадків:

а) $A(6, -8)$, $x^2 + y^2 = 9$;

б) $B(3, 9)$, $x^2 + y^2 - 26x + 30y + 313 = 0$;

в) $C(-7, 2)$, $x^2 + y^2 - 10x - 14y - 151 = 0$.

Завдання 5. Визначити координати точок перетину прямої $7x - y + 12 = 0$ і кола $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$.

Тема 4. Еліпс

4.1 Основні теоретичні відомості

Означення. Множина точок площини, для яких сума відстаней від двох заданих точок, що називаються *фокусами*, є величина стала й така, що дорівнює $2a$ і більша, ніж відстань між фокусами, називається *еліпсом*.

На рис. 16 зображено $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ — фокуси еліпса, $M(x, y)$ — точка множини, яка задовольняє означення, тобто $|MF_1| + |MF_2| = 2a$, причому $2c < 2a \Rightarrow a > c$.

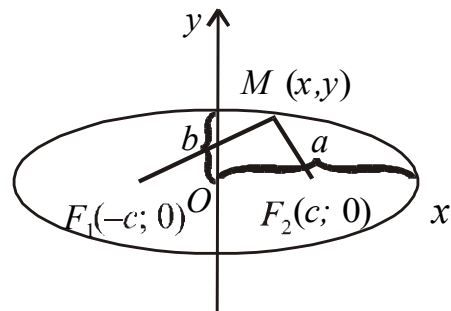


Рисунок 16

Тоді

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (13)$$

канонічне рівняння еліпса, де $b^2 = a^2 - c^2$.

Розглянемо геометричний зміст параметрів, що входять в рівняння (13). Якщо $x = 0$, $y = \pm b$, тобто точки $(0, b)$ і $(0, -b)$ є точками перетину еліпса з віссю Oy . Відрізок завдовжки b називають малою піввіссю еліпса. При $y = 0$, $x = \pm a$ і відповідно $(a, 0)$; $(-a, 0)$ є точками перетину еліпса з віссю Ox . Відрізок завдовжки a — велика піввісь еліпса. З парності виразу (13) за x і за y випливає симетрія еліпса відносно осей Ox і Oy . На рис. 16 зображено еліпс.

Ексцентриситет еліпса — це відношення $\varepsilon = \frac{c}{a}$; за означенням $c < a$ і $\varepsilon \in [0, 1)$. Оскільки $\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2$, то $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$. З останньої рівності впливає геометричний зміст ексцентриситету, який полягає в тому, що він характеризує *ступінь витягнутості* еліпса. Так, при $\varepsilon = 0 \Rightarrow a = b$ маємо коло, якщо ε наближається до одиниці, то відношення довжини півосей еліпса стає малим, тобто еліпс витягується вздовж осі Ox .

4.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Знайти фокуси еліпса:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Розв'язання: Маємо: $a^2 = 25$, $b^2 = 9$.

Тоді:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad c = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4.$$

Фокуси: $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$.

Приклад 2. Знайти ексцентриситет еліпса:

$$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1$$

Розв'язання: $a^2 = 49$, $b^2 = 25$.

$$c = \sqrt{49 - 25} = \sqrt{24}.$$

Тоді ексцентриситет: $e = \frac{c}{a}$, $e = \frac{\sqrt{24}}{7}$.

Приклад 3. Ексцентриситет еліпса $\varepsilon = \frac{2}{3}$, фокальний радіус точки M еліпса дорівнює 10. Обчислити відстань від точки M до однієї з цим фокусом директриси.

Розв'язання: Для еліпса виконується означення через директрису:

$$\varepsilon = \frac{\text{відстань до фокуса}}{\text{відстань до відповідної директриси}}.$$

Позначимо $\varepsilon = \frac{2}{3}$, $r = 10$,

d - відстань від точки M до директриси.

Тоді:

$$\varepsilon = r / d \Rightarrow d = r / \varepsilon = 10 / (2/3) = 15.$$

Відповідь: Відстань від точки М до директриси дорівнює 15.

Приклад 4. Дано еліпс $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, через точку А (1; 1) провести хорду еліпса, яка поділяється в цій точці навпіл.

Розв'язання: Запишемо рівняння хорди, використовуючи рівняння (7) $(y - 1) = k(x - 1)$. Це буде рівняння всіх хорд еліпса, що проходять через точку А. Знайдемо точки перетину цієї прямої з еліпсом, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ y - 1 = k(x - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (4 + 9k^2)x^2 + 18k(1 - k)x + 9(1 - k)^2 - 36 = 0 \\ y = kx + 1 - k. \end{cases}$$

За умовою задачі координати точок перетину хорди з еліпсом (x_1, y_1) , (x_2, y_2) мають задовольняти рівності: $\frac{x_1 + x_2}{2} = 1$ і $\frac{y_1 + y_2}{2} = 1$. З теореми Вієта

і останньої умови маємо: $\frac{18(k-1)k}{4+9k^2} = 2$, звідки $k = -\frac{4}{9}$. Шукане рівняння

хорди набирає вигляду $y - 1 = -\frac{4}{9}(x - 1)$, або $4x + 9y - 13 = 0$.

4.3 Завдання для самостійного розв'язання

Завдання 1. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо дані:

- 1) точка $M_1(-2\sqrt{5}, 2)$ еліпса і його мала піввісь $b = 3$;
- 2) точка $M_1(2, -2)$ еліпса і його велика піввісь $a = 4$;
- 3) точки $M_1(4, -\sqrt{3})$ і $M_1(2\sqrt{2}, 3)$ еліпса;
- 4) точка $M_1(2, -5/3)$ еліпса і його ексцентриситет $\varepsilon = 2/3$;
- 5) точка $M_1(\sqrt{15}, -1)$ еліпса і відстань між його фокусами $2c = 8$;
- 6) точка $M_1(8, 12)$ еліпса і відстань $r_1 = 20$ від її лівого фокуса;
- 7) точка $M_1(-\sqrt{5}, 2)$ еліпса і відстань між його директрисами рівна 10.

Завдання 2. Скласти рівняння еліпса, знаючи, що:

- 1) його велика вісь рівна 26 і фокуси є $F_1(-10, 0)$, $F_2(14, 0)$;
- 2) його мала вісь рівна 2 і фокуси є $F_1(-1, -1)$, $F_2(1, 1)$;
- 3) його фокуси є $F_1(-2, 32)$, $F_2(2, -32)$ і ексцентриситет $\varepsilon = \sqrt{2} \cdot 2$;

4) його фокуси $F_1(1, 3)$, $F_2(3, 1)$ і відстань між директрисами рівна $12 \cdot \sqrt{2}$.

Завдання 3. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, знаючи, крім того, що:

- 1) його піввісі рівні 5 і 2;
- 2) його велика вісь рівна 10, а відстань між фокусами $2c = 8$;
- 3) його мала вісь рівна 24, а відстань між фокусами $2c = 10$;
- 4) відстань між його фокусами $2c = 6$ і ексцентриситет $\varepsilon = 3/5$;
- 5) його велика вісь рівна 20, а ексцентриситет $\varepsilon = 3/5$;
- 6) його мала вісь рівна 10, а ексцентриситет $\varepsilon = 12/13$;
- 7) відстань між його директрисами рівна 5, а відстань між фокусами $2c = 4$;
- 8) його велика вісь рівна 8, а відстань між директрисами рівна 16;
- 9) його мала вісь рівна 6, а відстань між директрисами рівна 13;
- 10) відстань між його директрисами рівна 32 і $\varepsilon = 1$

Завдання 4. Скласти рівняння дотичних до еліпса $\frac{x^2}{10} + \frac{2y^2}{5} = 1$, паралельних прямій $3x + 2y + 7 = 0$.

Тема 5. Гіпербола

5.1 Основні теоретичні відомості

Означення. Множина точок площини, для яких модуль різниці відстаней від двох заданих точок, що називаються фокусами, є величиною сталою, яка дорівнює $2a$ і менша за відстань між фокусами, називається *гіперболою*.

Скористаємось рис. 17, з якого бачимо, що точки $F_1(-c, 0)$ і $F_2(c, 0)$ — фокуси гіперболи, точка $M(x, y)$ — точка визначеної множини. Тоді

$$\left| |MF_1| - |MF_2| \right| = 2a, \quad a < c.$$

Канонічне рівняння гіперболи має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

де $b^2 = c^2 - a^2$.

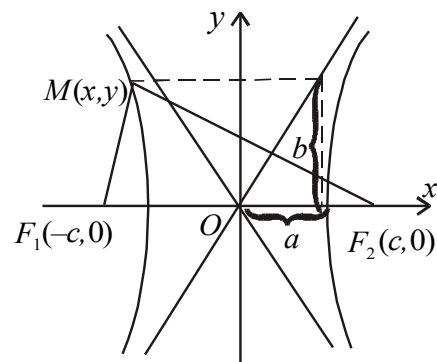


Рисунок 17

Дослідимо здобуте рівняння. Гіпербола не перетинає вісь Oy . При $y = 0$; $x = \pm a$ і точки $(-a, 0)$; $(a, 0)$ — точки перетину з віссю Ox . Розглянемо ще

рівняння прямих $y = \pm \frac{b}{a}x$, які далі називатимемо *асимптотами гіперболи*.

Враховуючи симетрію відносно осей Ox і Oy , будемо графік гіперболи, який зображено на рис. 17.

Відрізки завдовжки b і a називають відповідно *уявною* і *дійсною осями гіперболи*.

Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = \frac{c}{a}$, але $c > a$ і $\varepsilon > 1$. Беручи до уваги, що

$$c^2 = a^2 + b^2, \text{ дістаємо: } \varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2, \text{ або } \frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}.$$

З останньої рівності випливає, що для гіперболи ексцентриситет характеризує ступінь нахилу віток гіперболи до осі Ox .

Дві прями, рівняння яких $x = -\frac{a}{\varepsilon}$; $x = \frac{a}{\varepsilon}$, називаються *директрисами*

еліпса і гіперболи. Для еліпса $0 \leq \varepsilon < 1$ і відношення $\frac{a}{\varepsilon} > a$, директриси еліпса — це дві прями, що розміщені симетрично відносно осі Oy і проходять зовні еліпса. Для гіперболи $\varepsilon > 1$ і відношення $\frac{a}{\varepsilon} < a$. Тобто директриси гіперболи розміщені симетрично відносно осі Oy і лежать між вітками гіперболи.

Для еліпса і гіперболи можна сформулювати важливе **твердження**: якщо r — відстань від деякої точки еліпса або гіперболи до будь-якого фокуса, а d — відстань від цієї самої точки до директриси, яка відповідає цьому фокусу, то відношення $\frac{r}{d}$ *стале й дорівнює ексцентриситету, тобто $\varepsilon = \frac{r}{d}$.*

Розглянуте твердження можна покласти в основу означення цих ліній.

Означення. Множина точок, для яких відношення відстаней від фокуса і до відповідної директриси — величина стала, що дорівнює ексцентриситету ε , є еліпс, якщо $\varepsilon < 1$, і гіпербола, якщо $\varepsilon > 1$.

5.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Скласти рівняння асимптот гіперболи $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$.

Розв'язання: Для гіперболи $y = \pm \frac{b}{a}x$.

Маємо $a = 5$, $b = 2$. Тому:

$$y = \pm \frac{2}{5}x.$$

Приклад 2. Знайти ексцентриситет гіперболи:

:

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{20} = 1.$$

Розв'язання:

$$a^2 = 36, \quad b^2 = 20,$$

$$c = \sqrt{36 + 20} = \sqrt{56}.$$

Ексцентриситет:

$$e = \frac{c}{a},$$

$$e = \frac{\sqrt{56}}{6}.$$

Приклад 3. Знайти фокуси гіперболи:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Розв'язання:

$$a^2 = 16, \quad b^2 = 9,$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad c = \sqrt{16 + 9} = 5.$$

Фокуси:

$$F_1(-5; 0), \quad F_2(5; 0).$$

Приклад 4. Записати рівняння гіперболи, яка проходить через точку $A(6; 9)$, якщо:

- 1) відстань між фокусами дорівнює 8, а відстань між директрисами — 6;
- 2) директриси задано рівняннями $x = -3\sqrt{2}$, $x = 3\sqrt{2}$, а кут між асимптотами — прямий;
- 3) ексцентриситет дорівнює $\varepsilon = 2$, а уявна піввісь $b = 3$;
- 4) асимптоти задано рівнянням $y = \pm \frac{5}{3}x$.

Розв'язання:

1) Координати фокусів $F_1(-c; 0)$; $F_2(c; 0)$, тому з умови $2c = 8$; $c = 4$, відстань між директрисами $6 = 2a / \varepsilon$. Звідки, враховуючи, що $\varepsilon = c / a$,

маємо: $a=12$, $b=c-a=4$. Остаточно $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$.

2) З рівнянь директрис маємо: $\frac{a}{\varepsilon} = 3\sqrt{2}$, якщо кут між асимптотами

прямий, то $a = b$. Отже, з урахуванням формули $\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$ маємо $\varepsilon = \sqrt{2}$ і a

$= 6$; $b = 6$. Остаточно записуємо рівняння шуканої гіперболи: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{36} = 1$.

3) З формули, застосованої вище, дістаємо $\frac{3}{a} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$, звідки

$a = \sqrt{3}$. Отже, $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = 1$.

4) Точка A належить гіперболі, тому маємо: $\frac{36}{a^2} - \frac{81}{b^2} = 1$. З рівняння

асимптот гіперболи випливає співвідношення $\frac{b}{a} = \frac{5}{3}$, або $b = \frac{5}{3}a$.

Підставивши b в останнє співвідношення, дістанемо рівняння для знаходження a^2 :

$$\frac{36}{a^2} - \frac{81 \cdot 9}{25a^2} = 1; \quad a^2 = \frac{171}{25}, \quad b^2 = 19.$$

Отже, $\frac{25x^2}{171} - \frac{y^2}{19} = 1$.

5.3 Завдання для самостійного розв'язання

Завдання 1. Гіпербола дотикається до прямої $x - y = 2$ у точці $(4; 2)$. Скласти рівняння гіперболи.

Завдання 2. Знайти кут між асимптотами гіперболи, в якій:

а) ексцентриситет $\varepsilon = 2$.

б) відстань між фокусами вдвічі більша за відстань між директрисами.

Завдання 3. Записати рівняння прямої, що дотикається до гіперболи

$$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1 \text{ у точці } (5, -4).$$

Завдання 4. Дана гіпербола $16x^2 - 9y^2 = 144$. $16x^2 - 9y^2 = 144$. Знайти: 1) піввісі a і b ; 2) фокуси; 3) ексцентриситет; 4) рівняння асимптот; 5) рівняння директрис.

Завдання 5. Дана гіпербола $16x^2 - 9y^2 = -144$. Знайти: 1) піввісі a і b ; 2) фокуси; 3) ексцентриситет; 4) рівняння асимптот; 5) рівняння директрис.

Завдання 6. Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = 2$, фокальний радіус її точки M , проведений з деякого фокуса, дорівнює 16. Обчислити відстань від точки M до побічної з цим фокусом директриси.

Завдання 7. Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = 2$, центр її лежить в початку координат, один з фокусів $F(12, 0)$. Обчислити відстань від точки M_1 гіперболи з абсцисою, рівною 13, до директриси, що відповідає заданому фокусові.

Тема 6. Парабола

6.1 Основні теоретичні відомості

Означення. Множина точок площини, що містяться на однаковій відстані від даної точки фокуса і даної прямої, яка не проходить через фокус і називається директрисою, є параболою.

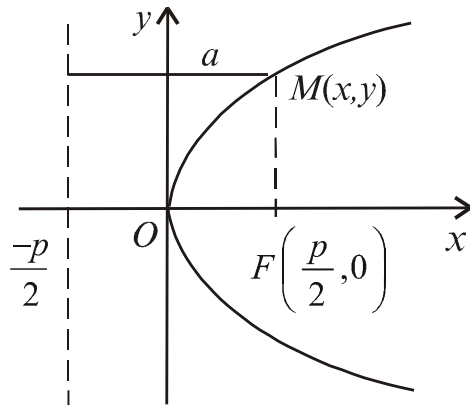


Рисунок 18

За означенням $r = d$, отже (див. рис. 18):

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}, \text{ або } y^2 = 2px$$

— канонічне рівняння параболою, коли $\varepsilon = 1$. Парабола симетрична осі Ox , проходить через початок системи координат. Її графік подано на рис. 18.

6.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Знайти фокус і директрису параболи $y^2 = 8x$.

Розв'язання: Порівнюємо з рівнянням:

$$y^2 = 2px.$$

Тоді:

$$2p=8, \quad p=4.$$

Фокус: $F(2;0)$.

Директриса: $x=-2$.

Приклад 2. Визначити параметр параболи: $y^2 = 14x$.

Розв'язання: Порівнюємо з рівнянням:

$$y^2 = 2px.$$

Тоді:

$$2p=14, \\ p=7.$$

Приклад 3. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат, якщо її директрисою є пряма $x = -4$.

Розв'язання: Відстань від директриси до початку координат дорівнює $\frac{p}{2}$. Отже, $\frac{p}{2}=4$, тобто $p=8$. Рівняння цієї параболи має вигляд $y^2 = 2px$, так як абсциса директриси від'ємна. Підставивши в це рівняння значення параметра p , отримаємо $y^2 = 16x$.

Приклад 4. Скласти рівняння параболи з вершиною в точці $O'(-4,2)$; і фокусом в точці $O'(-4,6)$.

Розв'язання: Оскільки абсциси вершини і фокуса однакові, то ці точки даної параболи лежать на прямій, паралельній вісі Oy , яка є віссю параболи. Так як ордината фокуса більше за ординату вершини, то гілки параболи напрямлені вгору. Вершина параболи зміщена, тобто, рівняння такої параболи знаходимо за формулою:

$$(x-a)^2 = 2p(y-b).$$

Відстань фокуса від вершини дорівнює $\frac{p}{2} = 6 - 2 = 4$, тобто $p = 8$. Замінивши в останньому рівнянні a і b координатами точки O' і p – його значенням, отримаємо:

$$(x+4)^2 = 2 \cdot 8(y-2) \Rightarrow (x+4)^2 = 16(y-2).$$

Приклад 5. Знайти умову, за якої пряма $y = kx + b$ дотикається до параболи $y^2 = 2px$.

Розв'язання: Оскільки Парабола і пряма будуть дотикатися одна до одної, якщо система рівнянь матиме єдиний розв'язок:

$$\begin{cases} y = kx + b \\ y^2 = 2px. \end{cases}$$

Виключаючи x із рівнянь системи, дістаємо квадратне рівняння:

$$y^2 - \frac{2p}{k}y + \frac{2pb}{k} = 0.$$

Воно має єдиний розв'язок, якщо $D = 0$. Звідси випливає:

$$\frac{p^2}{k^2} - \frac{2pb}{k} = 0 \Rightarrow p(p - 2bk) = 0,$$

але $p \neq 0$. Отже, $p = 2bk$ — умова дотику прямої і параболи.

6.3 Завдання для самостійного розв'язання

Завдання 1. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат, якщо:

- 1) парабола розташована справа від осі Oy і $p = 5$;
- 2) парабола розташована справа від осі Oy і проходить через точку $M(3; -6)$;
- 3) парабола розташована нижче осі Ox і $p = 3$;
- 4) парабола розташована вище осі Ox і проходить через точку $M(-5; 2)$;
- 5) фокус параболи має координати $F(-2; 0)$;
- 6) директриса параболи задана рівнянням $2y + 5 = 0$.

Завдання 2. До параболи $y^2 = 12x$ провести дотичну паралельно прямій $2x + y - 7 = 0$.

Завдання 3. На параболі $y^2 = 16x$ знайти точки, фокальний радіус яких дорівнює 13.

Завдання 4. Провести дотичну до параболи $y^2 = 16x$ паралельно прямій $3x - 2y + 30 = 0$ і обчислити відстань d між цією дотичною і даною прямою.

Завдання 5. Скласти рівняння параболи, якщо дані її фокус $F(4, 3)$ і директриса $y + 1 = 0$.

Завдання 6. Скласти рівняння прямої, яка дотикається параболи $y^2 = 8x$ і паралельна прямій $2x + 2y - 3 = 0$.

Завдання для виконання контрольної роботи

В завданнях **1 –31** задані координати вершин трикутника ***ABC***.

Знайти:

- 1) довжини сторін ***AB***, ***BC*** та ***AC***;
- 2) рівняння сторін ***AB***, ***AC***, ***BC*** та їх кутові коефіцієнти;
- 3) величину кута ***B*** в радіанах з точністю до двох знаків;
- 4) довжину бісектриси ***BF*** внутрішнього кута ***B***;
- 5) рівняння висоти ***CD*** та її довжину;
- 6) рівняння медіани ***AE*** та координати точки ***P*** перетину цієї медіани з висотою ***CD***;
- 7) рівняння прямої ***PL***, яка проходить через точку ***P*** паралельно до сторони ***AB***;
- 8) рівняння та довжину перпендикуляра (висоти) ***BN***, який проведено з вершини ***B*** на медіану ***AE***;
- 9) координати точки ***M***, розташованої симетрично до точки ***A*** відносно прямої ***CD***;
- 10) Побудувати на міліметровому папері (формат А4) трикутник ***ABC*** та знайдені його елементи в системі координат ***xOy***, взявши за одиницю масштабу 1 см.

№ задачі	Координати точок		
1	$A(-6;3)$	$B(6+k;-6-k)$	$C(4;8)$
2	$A(-7;-2)$	$B(5+k;-11-k)$	$C(9;11)$
3	$A(-2;1)$	$B(10+k;-8-k)$	$C(14;14)$
4	$A(-6;8)$	$B(6+k;-1-k)$	$C(10;21)$
5	$A(-1;-2)$	$B(11+k;-11-k)$	$C(15;11)$
6	$A(-10;5)$	$B(2+k;-4-k)$	$C(6;18)$
7	$A(-1;1)$	$B(11+k;-8-k)$	$C(15;14)$
8	$A(-10;4)$	$B(2+k;-5-k)$	$C(6;17)$
9	$A(-8;4)$	$B(4+k;-5-k)$	$C(8;17)$
10	$A(-6;1)$	$B(6+k;-10-k)$	$C(10;12)$
11	$A(-7;7)$	$B(5+k;-2-k)$	$C(3;12)$
12	$A(-2;1)$	$B(10+k;-8-k)$	$C(8;6)$
13	$A(-6;5)$	$B(6+k;-4-k)$	$C(4;10)$
14	$A(2;-1)$	$B(14+k;-10-k)$	$C(12;4)$
15	$A(-5;8)$	$B(7+k;-1-k)$	$C(5;13)$
16	$A(-9;7)$	$B(3+k;-2-k)$	$C(1;12)$
17	$A(-9;6)$	$B(3+k;-3-k)$	$C(1;11)$
18	$A(-1;2)$	$B(11+k;-7-k)$	$C(9;7)$
19	$A(-9;5)$	$B(3+k;-4-k)$	$C(1;10)$
20	$A(-5;4)$	$B(7+k;-5-k)$	$C(5;9)$
21	$A(-4;1)$	$B(8+k;-8-k)$	$C(12;14)$
22	$A(-3;0)$	$B(9+k;-9-k)$	$C(13;13)$
23	$A(-4;5)$	$B(8+k;-4-k)$	$C(12;18)$
24	$A(-4;0)$	$B(8+k;-9-k)$	$C(12;13)$
25	$A(-9;3)$	$B(3+k;-6-k)$	$C(7;16)$
26	$A(-3;2)$	$B(9+k;-7-k)$	$C(13;15)$
27	$A(-9;10)$	$B(3+k;1+k)$	$C(7;23)$
28	$A(-11;0)$	$B(1+k;-9-k)$	$C(5;13)$
29	$A(-4;8)$	$B(8+k;-1-k)$	$C(12;21)$
30	$A(-3;10)$	$B(9+k;1+k)$	$C(7;15)$
31	$A(-7;7)$	$B(5+k;-4-k)$	$C(9;18)$

Зразок розв'язування варіанта контрольної роботи

Розв'язання завдання 31

Нехай $k = 3$, тоді

координати вершин трикутника ABC будуть

такі:

$$A(-7;7), \quad B(8;-7), \quad C(9;18).$$

1. Знайти довжини сторін AB , BC , та AC .

Розв'язання

Відстань між точками $A(x_1; y_1)$ та $A(x_2; y_2)$ визначається за

формулою:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1)$$

Використовуючи (1), знаходимо довжину сторони AB :

$$\begin{aligned} d_{AB} = |AB| &= \sqrt{(8 - (-7))^2 + ((-7) - 7)^2} = \sqrt{15^2 + (-14)^2} = \\ &= \sqrt{225 + 196} = \sqrt{421} \approx 20,52 \text{ (см)}. \end{aligned}$$

Таким чином $|AB| \approx 20,5 \text{ см}$.

Аналогічно знаходимо довжини сторін BC та AC :

$$d_{BC} = |BC| = \sqrt{(9 - 8)^2 + (18 + 7)^2} = \sqrt{1 + 625} = \sqrt{626} \approx 25,02 \text{ (см)}.$$

$$d_{AC} = |AC| = \sqrt{(9 + 7)^2 + (18 - 7)^2} = \sqrt{256 + 121} = \sqrt{377} \approx 19,46 \text{ (см)}.$$

Наближено $|BC| \approx 25,0 \text{ см}$, $|AC| \approx 19,5 \text{ см}$.

Відповідь: довжини сторін трикутника відповідно дорівнюють: $|AB| \approx 20,5 \text{ см}$, $|BC| \approx 25,0 \text{ см}$, $|AC| \approx 19,5 \text{ см}$.

2. Записати рівняння сторін AB , AC , BC та знайти їх кутові коефіцієнти.

Розв'язання

Рівняння прямої (сторони), яка проходить через точки $A(x_1; y_1)$ та $B(x_2; y_2)$ має вигляд:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (2)$$

Підставляючи в (2) координати точок A та B , одержимо рівняння сторони AB :

$$\begin{aligned} \frac{x - (-7)}{8 - (-7)} &= \frac{y - 7}{-7 - 7} & \frac{x + 7}{15} &= \frac{y - 7}{-14} \\ -14(x + 7) &= 15(y - 7); & -14x - 98 &= 15y - 105; \\ & & \underline{14x + 15y - 7 = 0} & \quad (AB). \end{aligned}$$

Перевірка:

$$\begin{aligned} \text{Г. А:} & \quad 14 \cdot (-7) + 15 \cdot 7 - 7 = 0; & -98 + 105 - 7 &= 0; \\ & -98 + 98 = 0; & 0 &= 0. \\ \text{Г. В:} & \quad 14 \cdot 8 + 15 \cdot (-7) - 7 = 0; & 112 - 105 - 7 &= 0; \\ & 7 - 7 = 0; & 0 &= 0. \end{aligned}$$

Підставляючи в (2) координати точок A та C , дістанемо рівняння сторони AC :

$$\begin{aligned} \frac{x + 7}{9 + 7} &= \frac{y - 7}{18 - 7}; & \frac{x + 7}{16} &= \frac{y - 7}{11}; \\ 11(x + 7) &= 16(y - 7); & 11x + 77 &= 16y - 112; \\ & & \underline{11x - 16y + 189 = 0} & \quad (AC). \end{aligned}$$

Перевірка:

$$\begin{aligned} \underline{\Gamma. A:} \quad & 11 \cdot (-7) - 16 \cdot 7 + 189 = 0; & -77 - 112 + 189 = 0; \\ & -189 + 189 = 0; & 0 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\Gamma. C:} \quad & 11 \cdot 9 - 16 \cdot 18 + 189 = 0; & 99 - 288 + 189 = 0; \\ & 99 - 99 = 0; & 0 = 0. \end{aligned}$$

Аналогічно знаходимо рівняння сторони BC :

$$\begin{aligned} \frac{x-8}{9-8} &= \frac{y+7}{18+7}; & \frac{x-8}{1} &= \frac{y+7}{25}; \\ 25(x-8) &= (y+7) \cdot 1; & 25x - 200 &= y + 7; \\ & \underline{25x - y - 207 = 0} & & (BC). \end{aligned}$$

⊕ Перевірка:

$$\begin{aligned} \underline{\Gamma. B:} \quad & 25 \cdot 8 - (-7) - 207 = 0; & 200 + 7 - 207 = 0; \\ & 200 - 200 = 0; & 0 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\Gamma. C:} \quad & 25 \cdot 9 - 18 - 207 = 0; & 225 - 18 - 207 = 0; \\ & 207 - 207 = 0; & 0 = 0. \end{aligned}$$

□

Розв'язавши кожне з рівнянь сторін (AB) (AC) та (BC) відносно y , знаходимо їх рівняння у вигляді рівнянь прямих з кутовим коефіцієнтом:

$$(AB) \quad 15y = -14x + 7; \quad y = -\frac{14}{15}x + \frac{7}{15}, \text{ звідки } k_{AB} = -\frac{14}{15};$$

$$(AC) \quad 16y = 11x + 189; \quad y = \frac{11}{16}x + \frac{189}{16}, \text{ звідки } k_{AC} = \frac{11}{16}.$$

$$(BC) \quad 25x - y - 207 = 0; \quad y = 25x - 207, \text{ звідки } k_{BC} = 25.$$

Відповідь: рівняння сторони AB має вигляд:

$$14x + 15y - 7 = 0;$$

4. Знайти довжину бісектриси BF внутрішнього кута B .

Розв'язання

Довжину бісектриси BF знаходимо як відстань між двома точками B та F . Невідомі координати x , y точки F визначимо за формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad (4)$$

де відношення $\lambda = \frac{AF}{FC}$ і координати точок A та C – відомі.

Використовуючи властивість бісектриси внутрішнього кута трикутника, дістанемо:

$$\lambda = \frac{AF}{FC} = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{\sqrt{421}}{\sqrt{626}} \approx \sqrt{0,6725} \approx 0,82.$$

Оскільки точка F ділить відрізок AC у відношенні $\lambda = 0,82$, то згідно з (4) знаходимо:

$$x_F = \frac{-7 + 0,82 \cdot 9}{1 + 0,82} = \frac{-7 + 7,38}{1,82} = \frac{0,38}{1,82} \approx 0,209 \approx 0,21;$$

$$y_F = \frac{7 + 0,82 \cdot 18}{1 + 0,82} = \frac{7 + 14,76}{1,82} = \frac{21,76}{1,82} \approx 11,956 \approx 11,96.$$

Отже, точка F має координати $F(0,21;11,96)$. Для побудови її на площині в системі координат xOy візьмемо $x_F \approx 0,2$, $y_F \approx 11,96$.

Для знаходження довжини бісектриси BF використаємо формулу (1):

$$\begin{aligned}
 d_{BF} &= |\underline{BF}| = \sqrt{(0,21-8)^2 + (11,96+7)^2} = \\
 &= \sqrt{(-7,79)^2 + (18,96)^2} = \sqrt{60,6841 + 359,4816} = \sqrt{420,1657} \approx \\
 &\approx 20,498 \approx 20,5 \text{ (см)}.
 \end{aligned}$$

Відповідь: довжина бісектриси BF внутрішнього кута B наближено дорівнює $20,5$ см.

5. Записати рівняння висоти CD та знайти її довжину.

Розв'язання

Рівняння прямої, яка проходить через дану точку $M_0(x_0; y_0)$ в заданому напрямку k , має вигляд:

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad (5)$$

Висота CD перпендикулярна до сторони AB . Для того, щоб знайти кутовий коефіцієнт висоти CD використаємо умову перпендикулярності прямих:

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \quad \text{або} \quad k_2 = -\frac{1}{k_1} \quad (6)$$

Оскільки $k_{AB} = -\frac{14}{15}$, то $k_{CD} = -\frac{1}{k_{AB}} = \frac{15}{14}$. Підставляючи в (5) замість x_0 і y_0 координати точки C : $x_C = 9$ і $y_C = 18$ та знайдений кутовий коефіцієнт висоти $k = k_{CD} = \frac{15}{14}$, отримаємо:

$$y - 18 = \frac{15}{14}(x - 9);$$

$$14(y - 18) = 15(x - 9); \quad 14y - 252 = 15x - 135;$$

$$15x - 14y + 117 = 0 \quad (CD)$$

Для того, щоб знайти довжину висоти CD , визначимо спочатку координати точки D – точки перетину прямих AB та CD , розв'язавши сумісно систему рівнянь:

$$\begin{array}{l} (AB) \\ (CD) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 14x + 15y - 7 = 0 \\ -14y + 117 = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \times 14 \\ \times 15 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 196x + 210y - 98 = 0 \\ 225x - 210y + 1755 = 0 \end{cases} + \Rightarrow$$

$$421x + 1657 = 0; \quad 421x = -1657; \quad x = \frac{-1657}{421} \approx -3,936;$$

$$x_D \approx -3,94; \quad 14 \cdot (-3,94) + 15y - 7 = 0;$$

$$15y = 7 + 55,16; \quad 15y = 62,16; \quad y = \frac{62,16}{15} \approx 4,144;$$

$y_D \approx 4,14$ (необхідно зробити перевірку правильності знайденого розв'язку $x_D \approx -3,94$ та $y_D \approx 4,14$, підставляючи його замість x та y в обидва рівняння записаної системи).

Таким чином $D(-3,94; 4,14)$, але для побудови на рисунку візьмемо $x_D \approx -3,9$; $y_D \approx 4,1$. За формулою (1) знаходимо довжину висоти CD :

$$\begin{aligned} d_{CD} &= |CD| = \sqrt{(-3,94 - 9)^2 + (4,14 - 18)^2} = \\ &= \sqrt{(-12,94)^2 + (-13,86)^2} = \sqrt{167,4436 + 192,0996} = \\ &= \sqrt{359,5432} \approx 18,96 \text{ (см)}. \end{aligned}$$

Відповідь: рівняння висоти CD має вигляд:

$$15x - 14y + 117 = 0,$$

довжина висоти CD наближено дорівнює 19 см.

6. Записати рівняння медіани AE та координати точки P перетину цієї медіани з висотою CD .

Розв'язання

Для того, щоб знайти рівняння медіани AE , визначимо спочатку координати точки E , середини сторони BC . Для цього використаємо формули ділення відрізка на дві рівні частини (дивись (4), де $n = 1$):

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad (7)$$

$$x_E = \frac{8 + 9}{2} = \frac{17}{2} = 8,5; \quad y_E = \frac{-7 + 18}{2} = \frac{11}{2} = 5,5;$$

$$E(8,5; 5,5).$$

Підставляючи в (2) координати точок A та E , знаходимо рівняння медіани:

$$\frac{x + 7}{8,5 + 7} = \frac{y - 7}{5,5 - 7}; \quad \frac{x + 7}{15,5} = \frac{y - 7}{-1,5};$$

$$-1,5 \cdot (x + 7) = 15,5 \cdot (y - 7) \mid (-2);$$

$$3(x + 7) = -31(y - 7); \quad 3x + 21 = -31y + 217;$$

$$3x + 31y - 196 = 0 \quad (AE)$$

Виконаємо перевірку, підставляючи в рівняння AE замість x та y координати точок A та E .

Для того, щоб знайти координати точки P – точки перетину висоти CD та медіани AE , розв'яжемо сумісно систему рівнянь:

$$\begin{array}{l} (AE) \\ (\\ CD \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 3x + 31y - 196 = 0 \\ -14y + 117 = 0 \end{array} \right. \times (-5) \quad \left\{ \begin{array}{l} -15x - 155y + 980 = 0 \\ 15x - 14y + 117 = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow -169y + 1097 = 0; \quad 169y = 1097; \quad y = \frac{1097}{169} \approx 6,49;$$

$$3x + 31 \cdot 6,49 - 196 = 0; \quad 3x = 196 - 201,19;$$

$$3x = -5,19; \quad x = \frac{-5,19}{3} \approx -1,73.$$

Відповідь: рівняння медіани AE має вигляд:
 $3x + 31y - 196 = 0$; координати точки перетину цієї медіани з
висотою CD : т. $P(-1,7; 6,5)$.

7. Записати рівняння прямої PL , яка проходить через точку P паралельно до сторони AB .

Розв'язання

Оскільки шукана пряма PL паралельна до сторони AB , то її кутовий коефіцієнт k_{PL} буде дорівнювати кутовому коефіцієнту k_{AB} прямої AB . Підставляючи в (5) замість x_0 і y_0 координати знайденої точки P та кутовий коефіцієнт $k = k_{PL}$ дістанемо:

$$y - 6,5 = -\frac{14}{15}(x + 1,7) \quad | \times 10;$$

$$10y - 65 = -\frac{14}{15}(10x + 17) \quad | \times 15;$$

$$15 \cdot (10y - 65) = -14 \cdot (10x + 17);$$

$$150y - 975 = -140x - 238;$$

$$140x + 150y - 637 = 0 \quad (PL), \quad \text{де } PL \parallel AB.$$

Перевірка:

$$140 \cdot (-1,7) + 150 \cdot 6,5 - 637 = 0;$$

$$-238 + 975 - 637 = 0; \quad -238 + 238 = 0; \quad 0 = 0.$$

Відповідь: рівняння прямої PL , яка проходить через точку P паралельно до сторони AB має вигляд:

$$140x + 150y - 637 = 0$$

8. Записати рівняння та знайти довжину перпендикуляра (висоти) BN , який проведено з вершини B на медіану AE .

Розв'язання

Пряма (висота) BN перпендикулярна до медіани (прямої) AE . Враховуючи умову перпендикулярності (6), знаходимо кутовий коефіцієнт BN :

$$(AE) \quad 3x + 31y - 196 = 0; \quad 31y = -3x + 196;$$

$$y = -\frac{3}{31}x + \frac{196}{31}; \quad k_{AE} = -\frac{3}{31};$$

$$k_{BN} = -\frac{1}{k_{AE}} = -\frac{1}{\left(-\frac{3}{31}\right)} = \frac{31}{3}.$$

Підставляючи в (5) замість x_0 і y_0 координати $B(8; -7)$ та знайдений кутовий коефіцієнт $k = k_{BN} = \frac{31}{3}$, отримуємо:

$$y + 7 = \frac{31}{3}(x - 8) \quad | \times 3;$$

$$3 \cdot (y + 7) = 31 \cdot (x - 8);$$

$$3y + 21 = 31x - 248;$$

$$31x - 3y - 269 = 0 \quad (BN).$$

Довжину перпендикуляра (висоти) можна знаходити як відстань від точки $M^*(x^*; y^*)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ за формулою:

$$d_{BN} = |BN| = \frac{|Ax^* + By^* + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (8)$$

Отже, необхідно обчислити довжину перпендикуляра BN , який дорівнює відстані від точки B до прямої AE : $3x + 31y - 196 = 0$, де $A=3$; $B=31$.

Підставивши в (8) замість x^* і y^* координати $x_B = 8$, $y_B = -7$ та коефіцієнти $A=3$; $B=31$, отримаємо:

$$\begin{aligned} d_{BN} = |BN| &= \frac{|3 \cdot 8 + 31 \cdot (-7) - 196|}{\sqrt{3^2 + 31^2}} = \frac{|24 - 217 - 196|}{\sqrt{9 + 961}} = \\ &= \frac{|-389|}{\sqrt{970}} = \frac{389}{31,145} \approx 12,49 \text{ (см)}. \end{aligned}$$

Відповідь: рівняння перпендикуляра (висоти) BN , який проведено з вершини B на медіану AE має вигляд: $31x - 3y - 269 = 0$, довжина BN наближено становить $12,5$ см.

9. Знайти координати точки M , розташованої симетрично до точки A відносно прямої CD .

Розв'язання

Так як пряма AB перпендикулярна до прямої CD , то шукана M , яка розташована симетрично до точки A , відносно прямої CD , знаходиться на прямій AB .

Крім того, точка D є середина відрізка AM . Застосовуючи формули (7), знаходимо координати шуканої точки M :

$$x_D = \frac{x_A + x_M}{2}; \quad -3,94 = \frac{-7 + x_M}{2};$$

$$x_M = 2 \cdot (-3,94) + 7; \quad x_M = -7,88 + 7 = -0,88; \quad x_M \approx -0,9.$$

$$y_D = \frac{y_A + y_M}{2}. \quad 4,14 = \frac{7 + y_M}{2}.$$

$$y_M = 2 \cdot 4,14 - 7 = 1,28; \quad y_M \approx 1,3.$$

Відповідь: точка M , яка розташована симетрично до точки A , відносно прямої CD має наступні координати: $M(-0,9;1,3)$.

10. Трикутник ABC , бісектриса BF , медіана AE , пряма PL , перпендикуляр BN та точка M побудовані в системі координат xOy на рис.1.

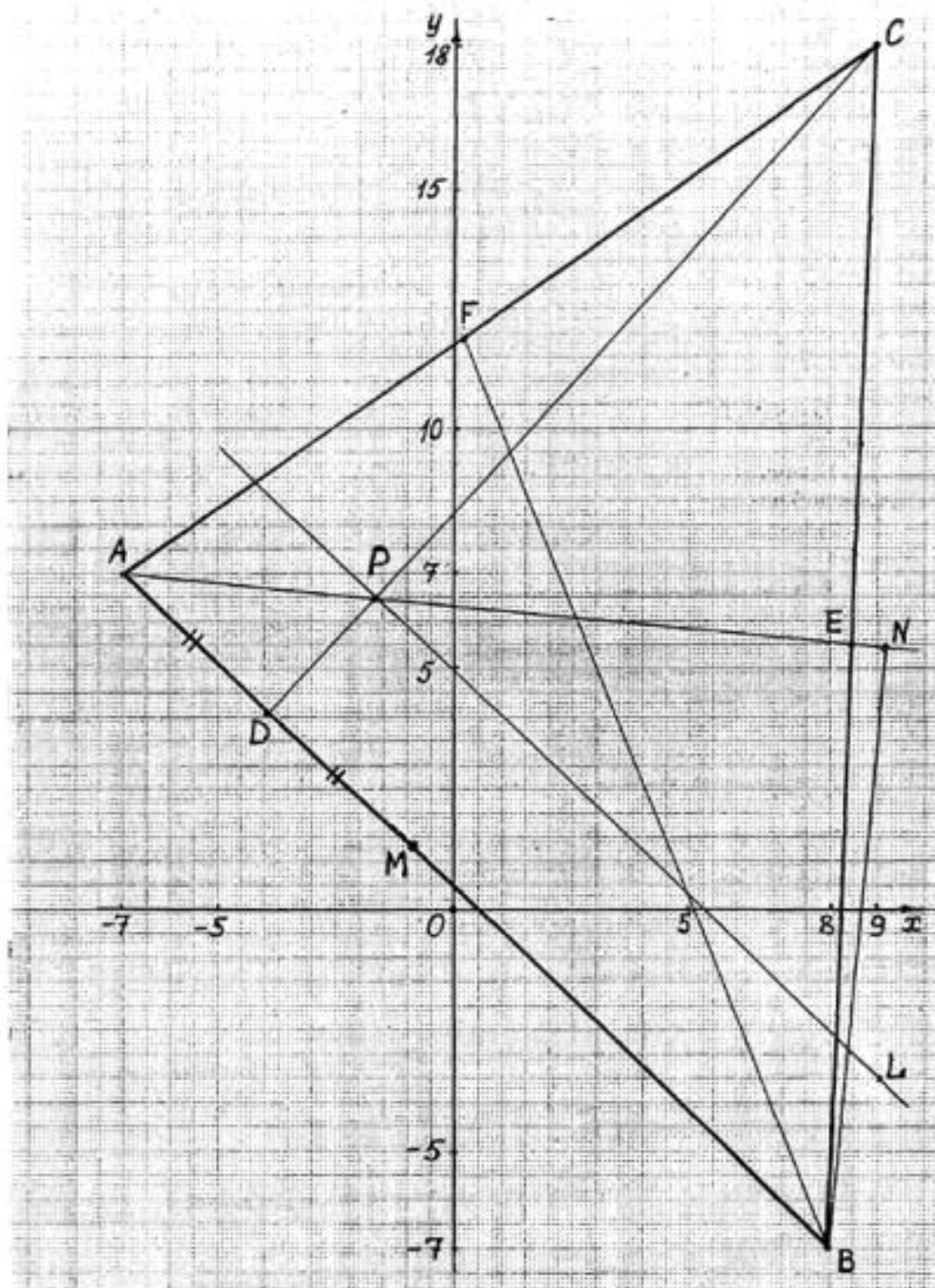


Рис.1.

Список рекомендованої літератури

Основна:

1. Веретельник В. В. Аналітична геометрія : навч. посіб. Харків : НТУ ХП, 2024. 251 с.
2. Дьоміна Н., Назарова О. Вища математика. Частина 1. Елементи лінійної алгебри, векторної алгебри та аналітичної геометрії : навчально-методичний посібник для самостійної роботи. Мелітополь : ФОП Силаєва О.В., 2021. 124 с.
3. Іщенко О. А., Халанчук Л. В., Назарова О.П. Вища математика : конспект лекцій (частина 1). Мелітополь : ФОП Кузьмін В.А., 2021. 124 с.
4. Осадча Л. К. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : навч. посібник. Рівне : НУВГП, 2020, 205 с.
5. Тимченко Г. М. Аналітична геометрія та елементи лінійної алгебри : навч. посіб. Харків : НТУ ХП, 2022. 188 с.

Додаткова:

1. Барковський В. М. Вища математика : практикум. Київ : Центр учбової літератури, 2023. 536 с.
2. Бусарова Т. М., Гришечкіна Т. С., Звонарьова О. В., Семенець Г. І. Аналітична геометрія : навч. посіб. Дніпро : УДУНіТ, 2022. 118 с.
3. Іщенко О. А., Халанчук Л. В. Вища математка : методичні вказівки до практичних робіт. Мелітополь : ТОВ "Колор Принт", 2020. 160 с.
4. Корніль Т. Л. Вища математика у прикладах і задачах. Ч. 1. Елементи лінійної алгебри. Аналітична геометрія на площині : навч.-метод. посібник. Харків : Мадрид, 2020, 80 с

Зміст

ВСТУП	3
Тема 1. Системи координат	4
Тема 2. Рівняння прямої на площині.....	13
Тема 3. Коло.....	19
Тема 4. Еліпс.....	23
Тема 5. Гіпербола.....	26
Тема 6. Парабола.....	30
Завдання для виконання контрольної роботи.....	33
Зразок розв'язування варіанта контрольної роботи.....	35
Список рекомендованої літератури	47

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА
Аналітична геометрія на площині

Методичні рекомендації

Укладач: Борчик Євген Юрійович

Формат 60x84/16 Ум. друк. арк. 3
Тираж 10 прим. Зам. №

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Г. Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.