

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Інженерно-енергетичний факультет

Кафедра вищої та прикладної математики

АЛГЕБРА ТА ГЕОМЕТРІЯ

завдання та методичні рекомендації
для самостійної роботи здобувачів першого (бакалаврського) рівня
вищої освіти ОПП «Агроінженерія» спеціальності Н7
«Агроінженерія», денної та заочної форм здобуття вищої освіти

МИКОЛАЇВ
2026

УДК 512.64+514.12
А45

Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету МНАУ (протокол № 8 від 18.05.2026р.)

Укладач:

О.В. Бойчук – к.ф.-м.н., доцентка кафедри вищої та прикладної математики
Миколаївського національного аграрного університету

Рецензенти:

Махровська Н.А. – к.ф.-м.н., доцент кафедри теорії й методики
природничо-математичної освіти та інформаційних
технологій Миколаївського обласного інституту
післядипломної педагогічної освіти.

Пархоменко О.Ю. – к.ф.-м.н., доцент кафедри економічної кібернетики,
комп'ютерних наук та технологій Миколаївського
національного аграрного університету.

© Миколаївський національний
аграрний університет, 2026

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
Модуль 1 «ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ».....	6
МАТРИЦІ. ДІЇ НАД МАТРИЦЯМИ	6
ВИЗНАЧНИКИ, АЛГЕБРАЇЧНІ ДОПОВНЕННЯ.....	11
ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ. РАНГ МАТРИЦІ.....	16
МЕТОД ОБЕРНЕНОЇ МАТРИЦІ. ФОРМУЛИ КРАМЕРА.....	21
МЕТОД ГАУССА РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ	27
ВЕКТОРИ. ДІЇ НАД ВЕКТОРАМИ	32
Модуль 2 «АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ»	39
ЗАСТОСУВАННЯ КООРДИНАТ.....	39
ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ.....	41
ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ НА ПЛОЩИНІ	48
ПЕРЕТВОРЕННЯ КООРДИНАТ НА ПЛОЩИНІ.....	53
ПЛОЩИНА ЯК ПОВЕРХНЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ	57
ПРЯМА У ПРОСТОРІ.....	63
ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ У ПРОСТОРІ..	68
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	75

ВСТУП

Методичні рекомендації присвячені першим двом модулям нормативного курсу дисципліни «Вища математика», а саме: «Лінійна та векторна алгебра» та «Аналітична геометрія». Математична освіта є фундаментом інженерної підготовки, тому засвоєння цих базових розділів є критично важливим для подальшого вивчення спеціальних загальнотехнічних та випускових дисциплін.

Головна мета цього видання – максимально допомогти здобувачам вищої освіти опанувати теоретичний матеріал, сформувати логічне мислення та набути сталих практичних навичок розв’язування типових задач. Особливу увагу приділено адаптації контенту до умов сучасного освітнього процесу, зокрема при дистанційній та змішаній формах навчання, що вимагають високого рівня самостійності від студентів.

Структура методичних рекомендацій побудована за модульно-блочним принципом. Кожна тема містить:

- Стислі теоретичні відомості: ключові поняття, визначення, теореми та формули, що необхідні для розуміння суті предмета.
- Детальний розбір прикладів: покрокове розв’язування типових завдань із розлогими методичними коментарями та поясненнями алгоритмів.
- Завдання для самостійного виконання: комплекси вправ різного рівня складності для самоперевірки та закріплення набутих навичок.

З метою підвищення ефективності самостійної роботи в умовах дистанційного та змішаного навчання, теоретичний і практичний матеріал методичних рекомендацій орієнтований на інтеграцію із сучасними інформаційними технологіями. Під час виконання індивідуальних завдань здобувачам освіти рекомендовано використовувати спеціалізоване математичне програмне забезпечення та комп’ютерні системи алгебри (зокрема GeoGebra, Wolfram|Alpha, MATLAB або Mathcad). Це дозволить студентам не лише здійснювати оперативну самоперевірку правильності обчислення матриць, визначників чи систем рівнянь, а й візуалізувати геометричні об’єкти (прямі, площини, вектори) у двовимірному та тривимірному просторах, що сприяє глибокому розумінню суті аналітичної геометрії та лінійної алгебри.

Після опрацювання матеріалу методичних рекомендацій здобувач освіти повинен:

знати:

методи обчислення визначників та матричні операції;

способи розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь;

основи векторного числення та операції над векторами;

канонічні рівняння ліній та поверхонь у просторі;

вміти:

досліджувати та розв'язувати системи лінійних рівнянь;

знаходити координати векторів, їх скалярний, векторний та мішаний добутки;

складати рівняння прямих і площин за заданими умовами;

застосовувати методи геометрії та алгебри для моделювання елементів агроінженерних систем.

Методичні рекомендації розроблені відповідно до чинної робочої програми курсу «Вища математика» для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності «Агроінженерія». Проте поданий матеріал є універсальним, тому посібник може бути успішно використаний студентами інших інженерних, технологічних та економічних спеціальностей, які вивчають вищу математику, а також викладачами для організації аудиторної та позааудиторної роботи.

Модуль 1 «ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ»

МАТРИЦІ. ДІЇ НАД МАТРИЦЯМИ

1. Основні поняття та теореми

Прямокутна таблиця чисел, складена з m рядків і n стовпців, називається *матрицею* розмірності $m \times n$. Позначають матриці великими латинськими літерами $A, B, C, \dots$

Наприклад: $A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}; \quad B_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}; \quad C_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \\ 3 & 7 \end{pmatrix};$

$D_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}$ – матриці. Але $\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ не є матрицею.

Матриця в загальному випадку має вигляд $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Числа a_{ij} ($i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,n$) є елементами матриці, перший індекс вказує номер рядка, а другий індекс – номер стовпця, в яких знаходиться елемент матриці.

Наприклад: для матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ елементами є $a_{11} = 3, a_{12} = 2,$

$a_{21} = -2, a_{22} = 0, a_{31} = 1, a_{32} = 7$.

Якщо матриця має однакову кількість рядків та стовпців ($m = n$), то вона називається *квадратною* (порядку n).

Діагональ квадратної матриці $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ називається *головною*.

Якщо в квадратній матриці всі елементи, що стоять поза головною діагоналлю, дорівнюють нулю, то матриця називається *діагональною*.

Діагональна матриця називається *одиничною*, якщо всі елементи її головної діагоналі рівні одиниці. Одинична матриця позначається E .

Матриця, яка має один рядок, називається *матрицею-рядком*.

Матриця, яка має один стовець, називається *матрицею-стовпцем*.

Транспонування матриці. Якщо в матриці A , що має розмірність $m \times n$, поміняти місцями рядки із стовпцями, не змінюючи їх нумерації, то дістанемо транспоновану матрицю A^T розмірності $n \times m$.

Наприклад: для $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \\ 12 & 1 & -9 \\ -6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ маємо $A^T = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 12 & -6 \\ 2 & 0 & 1 & 7 \\ -2 & 4 & -9 & 8 \end{pmatrix}$.

Розглянемо дії над матрицями.

Множення матриці на число. Добутком матриці A на число λ називається матриця $B = \lambda A$, елементи якої визначаються як $b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$.

$$\text{Наприклад: } 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ -10 & 0 \\ 5 & 35 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ -6 & 0 \\ 3 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Властивості операції множення матриці на число: $\lambda A = A\lambda$; $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$.

Додавання матриць. Сумою двох матриць $A = (a_{ij})$ та $B = (b_{ij})$ однакових розмірностей називається матриця $S = (s_{ij})$ такої ж розмірності з елементами, що дорівнюють сумам відповідних елементів матриць A та B : $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

$$\text{Наприклад: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -7 & 6 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 8 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Властивості операції додавання матриць: $A + B = B + A$; $(A + B) + C = A + (B + C)$.

Віднімання матриць. Різницею матриць $A = (a_{ij})$ та $B = (b_{ij})$ однакових розмірностей називається матриця $D = (d_{ij})$ такої ж розмірності з елементами, що дорівнюють різницям відповідних елементів матриць A та B : $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

$$\text{Наприклад: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -7 & 6 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -9 & 9 & -1 \end{pmatrix}.$$

Властивості операцій матриць: $\lambda(A \pm B) = \lambda A \pm \lambda B$; $(\lambda \pm \mu)A = \lambda A \pm \mu A$.

Множення матриць. Матрицю A можна помножити на матрицю B , якщо кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B ; добутком матриць $A_{m \times n}$ та $B_{n \times k}$ є матриця M розмірності $m \times k$ (кількість рядків першої матриці на кількість стовпчиків другої матриці), тобто $(\quad)_{m \times n} \cdot (\quad)_{n \times k} = (\quad)_{m \times k}$.

Елемент матриці-добутку, що розташований в i -ому рядку та j -ому стовпці, є сумою добутків відповідних елементів i -ого рядка першої матриці та j -ого стовпця другої матриці, тобто $m_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ik} \cdot b_{kj}$.

$$\text{Наприклад: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -7 & 6 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 25 \\ -33 & -28 \end{pmatrix}_{2 \times 2}, \text{ оскільки маємо}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 7 \\ -7 \cdot 3 + 6 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 & -7 \cdot 4 + 6 \cdot 0 + 0 \cdot 7 \end{pmatrix}.$$

Властивості операції множення матриць: 1) $A \cdot E = E \cdot A = A$; 2) $\lambda(A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B)$; 3) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$; 4) $A \cdot (B \pm C) = A \cdot B \pm A \cdot C$; 5) в загальному випадку операція множення матриць некомутативна, тобто $A \cdot B \neq B \cdot A$ (обидва добутки мають зміст, якщо матриці A, B є квадратними).

Справедлива формула $B^T \cdot A^T = (A \cdot B)^T$.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайдіть матрицю $C = 3 \cdot A + B$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

$$3 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 6 & -9 & -3 \\ 9 & 3 & 6 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 6 & -9 & -3 \\ 9 & 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 8 & -12 & -4 \\ 12 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $C = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 8 & -12 & -4 \\ 12 & 5 & 8 \end{pmatrix}$.

2. Знайдіть матрицю $D = A - 2 \cdot B$, де $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

$$2 \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 5 \\ -1 & -8 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $D = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 5 \\ -1 & -8 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Знайдіть матрицю $C = A \cdot B$, де $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

$$A_{2 \times 4} \cdot B_{4 \times 3} = C_{2 \times 3}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix},$$

$$c_{11} = 4 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) = 11,$$

$$c_{12} = 4 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 8,$$

$$c_{13} = 4 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 3 = -8 + 4 + 0 + 6 = 2,$$

$$c_{21} = -2 \cdot 3 + 0 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) = -6 + 0 + 6 - 2 = -2,$$

$$c_{22} = -2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = -4 + 0 + 3 + 0 = -1,$$

$$c_{23} = -2 \cdot (-2) + 0 \cdot 4 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 3 = 4 + 0 + 0 + 3 = 7.$$

Відповідь: $C = \begin{pmatrix} 11 & 8 & 2 \\ -2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$.

4. Знайдіть матрицю $C = A \cdot B$, де $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

$$A_{3 \times 3} \cdot B_{3 \times 1} = C_{3 \times 1}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 + 0 \cdot (-2) + 5 \cdot (-3) \\ 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-3) \\ 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) + 0 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $C = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$.

5. Знайдіть матриці $C = A \cdot B$ та $D = B \cdot A$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 6 & 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-8) \\ -3 \cdot 4 + 7 \cdot 6 & -3 \cdot 5 + 7 \cdot (-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -11 \\ 30 & -71 \end{pmatrix}.$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 + 5 \cdot (-3) & 4 \cdot 2 + 5 \cdot 7 \\ 6 \cdot 1 + (-8) \cdot (-3) & 6 \cdot 2 + (-8) \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 43 \\ 30 & -44 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $C = \begin{pmatrix} 16 & -11 \\ 30 & -71 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -11 & 43 \\ 30 & -44 \end{pmatrix}$. В загальному випадку

матриця-добуток залежить від порядку матриць-множників.

6. Знайдіть матриці $C = A \cdot E$, $D = E \cdot A$, де а) $A = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

а) $\begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

б) $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

Відповідь: а) $C = D = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$; б) $C = D = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

7. Дано матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Знайдіть $C = A \cdot B$ та

$D = B^T \cdot A^T$. Порівняйте отримані матриці.

Розв'язання:

$$A_{3 \times 3} \cdot B_{3 \times 3} = C_{3 \times 3}, C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}.$$

$$c_{11} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + (-4) \cdot (-2) = 2 + 1 + 8 = 11,$$

$$c_{12} = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 4 + (-4) \cdot 0 = 6 - 4 + 0 = 2,$$

$$c_{13} = 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 + (-4) \cdot 1 = 0 - 2 - 4 = -6,$$

$$c_{21} = 1 \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) + 0 \cdot (-2) = 1 + 3 + 0 = 4,$$

$$c_{22} = 1 \cdot 3 + (-3) \cdot 4 + 0 \cdot 0 = 3 - 12 + 0 = -9,$$

$$c_{23} = 1 \cdot 0 + (-3) \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 0 - 6 + 0 = -6,$$

$$c_{31} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-2) = 1 - 2 + 4 = 3,$$

$$c_{32} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + (-2) \cdot 0 = 3 + 8 + 0 = 11,$$

$$c_{33} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 = 0 + 4 - 2 = 2.$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$B^T_{3 \times 3} \cdot A^T_{3 \times 3} = D_{3 \times 3}, B^T \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$d_{11} = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + (-2) \cdot (-4) = 2 + 1 + 8 = 11,$$

$$d_{12} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-3) + (-2) \cdot 0 = 1 + 3 + 0 = 4,$$

$$d_{13} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + (-2) \cdot (-2) = 1 - 2 + 4 = 3,$$

$$d_{21} = 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + 0 \cdot (-4) = 6 - 4 + 0 = 2,$$

$$d_{22} = 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-3) + 0 \cdot 0 = 3 - 12 + 0 = -9,$$

$$d_{23} = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 0 \cdot (-2) = 3 + 8 + 0 = 11,$$

$$d_{31} = 0 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-4) = 0 - 2 - 4 = -6,$$

$$d_{32} = 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 0 = 0 - 6 + 0 = -6,$$

$$d_{33} = 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) = 0 + 4 - 2 = 2.$$

$$\text{Відповідь: } C = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -6 \\ 4 & -9 & -6 \\ 3 & 11 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 11 & 4 & 3 \\ 2 & -9 & 11 \\ -6 & -6 & 2 \end{pmatrix}, C^T = D.$$

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайдіть матрицю $D = 3A + B - 2C$, де $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ та

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ \alpha & 4 + \alpha \end{pmatrix}.$$

2. Знайдіть матрицю $C = A \cdot B$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ \alpha & 2 & -1 \\ -2 & 7 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 + \alpha \\ -2 \end{pmatrix}$.

3. Знайдіть матриці $C = A \cdot B$ та $D = B \cdot A$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -\alpha & -7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -6 & \alpha \end{pmatrix}$.

4. Знайдіть матриці $C = A \cdot B$, $D = B^T \cdot A^T$, де $A = \begin{pmatrix} 3 + \alpha & \alpha \\ 8 + \alpha & -4 + \alpha \\ 9 + \alpha & -1 + \alpha \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} -2 + \alpha & 2 + \alpha & 5 + \alpha \\ \alpha & 1 + \alpha & 3 + \alpha \end{pmatrix}$. Знайдіть матриці $C = B \cdot A$, $D = A^T \cdot B^T$.

ВИЗНАЧНИКИ, АЛГЕБРАЇЧНІ ДОПОВНЕННЯ

1. Основні поняття та теореми

Визначник матриці другого порядку позначається $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ і дорівнює

$a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$. Схема знаходження $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Визначник матриці третього порядку позначається $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ і рівний

$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}.$

Схеми знаходження $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$

Для кожної квадратної матриці існує визначник.

Визначник ще називається детермінантом і позначається або Δ , або $\det$.

Якщо визначник матриці дорівнює нулю, то матриця є *особливою* (виродженою).

Найважливіші властивості визначників:

1) Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) матриці рівні нулю, то визначник цієї матриці дорівнює нулю.

2) Якщо елементи двох рядків (стовпців) матриці однакові, то визначник цієї матриці рівний нулю.

3) Якщо елементи двох рядків (стовпців) матриці пропорційні, то визначник цієї матриці дорівнює нулю.

4) Величина визначника не змінюється при транспонуванні матриці.

5) Якщо у визначнику поміняти місцями будь-які два рядки (стовпці), то визначник змінить знак на протилежний (властивість антисиметрії).

6) Якщо помножити всі елементи деякого рядка (стовпця) матриці на будь-яке число λ , то значення визначника цієї матриці також помножиться на число λ (властивість однорідності).

Наслідок: якщо елементи деякого рядка (стовпця) визначника мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника.

7) Величина визначника не зміниться, якщо до елементів одного рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на деяке число (властивість лінійності).

8) Якщо елементи деякого рядка (стовпця) визначника є лінійними комбінаціями відповідних елементів інших рядів (стовпців), то цей визначник рівний нулю.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} матриці порядку n є визначник порядку $(n-1)$ матриці без i -ого рядка та j -ого стовпця.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} матриці є мінор цього елемента, помножений на $(-1)^{i+j}$, тобто $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Якщо сума індексів елемента є числом парним, то $A_{ij} = M_{ij}$; якщо сума індексів елемента є числом непарним, то $A_{ij} = -M_{ij}$.

Визначник квадратної матриці дорівнює сумі добутків усіх елементів будь-якого рядка (стовпця) на їхні відповідні алгебраїчні доповнення, тобто $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$, $\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$.

Доцільно розкласти визначник за елементами такого рядка (стовпця), що має більше нульових елементів. Нульові елементи у визначнику можна отримати штучно, застосувавши властивості визначників. Якщо у деякому рядку (стовпці) визначника всі елементи, крім одного, рівні нулю, то, визначник рівний добутку ненульового елемента на його алгебраїчне доповнення.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайдіть визначник другого порядку $\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$.

Розв'язання: $\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -1 \cdot 6 - 5 \cdot 3 = -6 - 15 = -21$.

Відповідь: $\Delta = -21$.

2. Знайдіть визначник третього порядку $\begin{vmatrix} 5 & 7 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$.

Розв'язання: $\begin{vmatrix} 5 & 7 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot (-2) + 7 \cdot (-1) \cdot 3 + (-4) \cdot 2 \cdot 4 - (-4) \cdot 1 \cdot 3 - 5 \cdot (-1) \cdot 4 - 7 \cdot 2 \cdot (-2) = -10 - 21 - 32 + 12 + 20 + 28 = -3$.

Відповідь: $\Delta = -3$.

3. Знайдіть визначник третього порядку $\begin{vmatrix} 5 & 7 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$, спочатку перетворивши

на 0 елементи, що розташовані нижче головної діагоналі.

Розв'язання:

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{I+III} \begin{vmatrix} 5 & 7 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{II-I} \begin{vmatrix} 5 & 7 & -4 \\ 0 & -6 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{III-I} \begin{vmatrix} 5 & 7 & -4 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{III-2II} \begin{vmatrix} 5 & 7 & -4 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

Відповідь: $\Delta = -3$.

4. Знайдіть мінори та алгебраїчні доповнення елементів матриці $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

$$M_{11} = 4, A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = M_{11} = 4; \quad M_{12} = -3, A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -M_{12} = 3;$$

$$M_{21} = 2, A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -M_{21} = -2; \quad M_{22} = -1, A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = M_{22} = -1.$$

5. Знайдіть мінори, алгебраїчні доповнення всіх елементів матриці $\begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} M_{11} &= \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 3 = 37, & A_{11} &= (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = M_{11} = 37; \\ M_{12} &= \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 56 - 18 = 38, & A_{12} &= (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -M_{12} = -38; \\ M_{13} &= \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 7 - 30 = -23, & A_{13} &= (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = M_{13} = -23; \\ M_{21} &= \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 72 - 4 = 68, & A_{21} &= (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -M_{21} = -68; \\ M_{22} &= \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 24 = -8, & A_{22} &= (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = M_{22} = -8; \\ M_{23} &= \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 54 = -52, & A_{23} &= (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = -M_{23} = 52; \\ M_{31} &= \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 27 - 20 = 7, & A_{31} &= (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = M_{31} = 7; \\ M_{32} &= \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 28 = -22, & A_{32} &= (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = -M_{32} = 22; \end{aligned}$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 63 = -53, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = M_{33} = -53.$$

6. Знайдіть алгебраїчні доповнення A_{31} та A_{43} відповідних елементів матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 5 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 24 + 9 + 0 + 16 - 6 - 0 = 43; \quad A_{31} = M_{31} = 43.$$

$$M_{43} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 12 + 20 - 0 - 3 + 50 = 79; \quad A_{43} = -M_{43} = -79.$$

Відповідь: $A_{31} = 43$; $A_{43} = -79$.

7. Знайдіть визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix}$ за елементами другого стовпця.

Розв'язання:

Маємо $\Delta = a_{12}A_{12} + \underbrace{a_{22}}_{=0}A_{22} + a_{32}A_{32} = a_{12}A_{12} + a_{32}A_{32}$. Оскільки алгебраїчні

доповнення $A_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -(-25 - 6) = 31$, $A_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -(3 - 20) = 17$

, то отримаємо $\Delta = 2 \cdot 31 + 1 \cdot 17 = 62 + 17 = 79$.

Відповідь: $\Delta = 79$.

8. Знайдіть визначник $\begin{vmatrix} 1 & 13 & -4 \\ 0 & -9 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}$.

Розв'язання:

В першому стовпці всі елементи, крім одного, є нулями, тому розкладемо цей визначник за елементами цього стовпця $\Delta = a_{11}A_{11} + \underbrace{a_{21}}_{=0}A_{21} + \underbrace{a_{31}}_{=0}A_{31} = a_{11}A_{11}$.

Так як $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} -9 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -63 - 4 = -67$, то $\Delta = 1 \cdot (-67) = -67$.

Відповідь: $\Delta = -67$.

9. Знайдіть визначник $\begin{vmatrix} 1 & -18 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 19 & 1 \end{vmatrix}$.

Розв'язання:

Віднімемо від другого рядка перший $\begin{vmatrix} 1 & -18 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 19 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{II-I} \begin{vmatrix} 1 & -18 & 3 \\ 0 & 22 & -1 \\ 0 & 19 & 1 \end{vmatrix}$. Тоді

визначник $\Delta = a_{11}A_{11} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 22 & -1 \\ 19 & 1 \end{vmatrix} = 22 + 19 = 41$.

Відповідь: $\Delta = 41$.

10. Знайдіть визначник $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 9 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Розв'язання:

Віднімемо від другого рядка двічі третій: $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 9 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{II-2III} \begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Тоді визначник $\Delta = a_{21}A_{21} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(-1 - 6) = 7$.

Відповідь: $\Delta = 7$.

11. Знайдіть визначник четвертого порядку $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$.

Розв'язання:

Виконаємо перетворення, щоб у першому стовпі були всі нулі, крім a_{11} :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{II-I \\ III-3I \\ IV-2I}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & -7 & -11 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -4 & -7 & -11 \\ 1 & -5 & -7 \end{vmatrix}.$$

Знову виконаємо перетворення, щоб у першому стовпі були всі нулі, крім

$$a_{11}: \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -4 & -7 & -11 \\ 1 & -5 & -7 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{II+4I \\ III-I}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & -27 \\ 0 & -6 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = \begin{vmatrix} -3 & -27 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} = 9 - 162 = -153.$$

Відповідь: $\Delta = -153$.

12. Знайдіть визначник четвертого порядку $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 2 & -6 & -1 & -1 \end{vmatrix}$.

Розв'язання:

Виконаємо перетворення, щоб у першому рядку були всі нулі, крім a_{11} :

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{II}-\text{I} & \text{III}-2\text{I} & \text{IV}-3\text{I} \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 2 & -6 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 1 & -4 \\ 3 & -7 & -7 & -11 \\ 2 & -8 & -5 & -7 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = \begin{vmatrix} -5 & 1 & -4 \\ -7 & -7 & -11 \\ -8 & -5 & -7 \end{vmatrix}.$$

Знову виконаємо перетворення, щоб у першому рядку були всі нулі, крім

$$a_{21}: \begin{vmatrix} \text{I}+5\text{II} & & \text{III}+4\text{II} \\ -5 & 1 & -4 \\ -7 & -7 & -11 \\ -8 & -5 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -42 & -7 & -39 \\ -33 & -5 & -27 \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} = 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = - \begin{vmatrix} -42 & -39 \\ -33 & -27 \end{vmatrix} =$$

$$= -(1134 - 1287) = 153.$$

Відповідь: $\Delta = -153$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайдіть визначник другого порядку $\Delta = \begin{vmatrix} 3+\alpha & 6 \\ 5 & 10-\alpha \end{vmatrix}$.

2. Знайдіть визначник третього порядку $\begin{vmatrix} 1+\alpha & 2 & 4 \\ -2 & 1-\alpha & 3 \\ 3 & -4 & 2-\alpha \end{vmatrix}$.

3. Знайдіть визначник третього порядку $\begin{vmatrix} 1 & 2+\alpha & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1-\alpha & 1 \end{vmatrix}$.

4. Знайдіть визначник четвертого порядку $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1+\alpha \\ 1 & 2 & 3+\alpha & 4 \\ 1 & 3+\alpha & 6 & 10 \\ 1+\alpha & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$.

ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ. РАНГ МАТРИЦІ

1. Основні поняття та теореми

Матриця A^{-1} називається *оберненою* до квадратної матриці A , якщо виконується умова $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Формула оберненої матриці $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}^T$, де $\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$ –

транспонована матриця з алгебраїчних доповнень усіх елементів матриці A .

Кожна невинроджена квадратна матриця A має обернену матрицю.

Алгоритм знаходження оберненої матриці до матриці A :

- 1) знайти визначник матриці A ;
- 2) визначити алгебраїчні доповнення до всіх елементів матриці A ;
- 3) скласти матрицю з алгебраїчних доповнень $\tilde{A}$ і транспонувати її.
- 4) записати обернену матрицю як $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}^T$.

Мінором k -порядку матриці називається визначник, складений з елементів, що стоять на перетині будь-яких k рядків і k стовпців даної матриці.

Кожний елемент матриці є її мінором першого порядку.

Ранг матриці – це порядок її найбільшого ненульового мінору. Позначення: $r(A)$, $R(A)$.

З даного означення випливають наступні властивості рангу:

- ранг прямокутної матриці не перевищує меншого із чисел кількості рядків або стовпців;

- ранг матриці дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли матриця нульова. В інших випадках ранг матриці рівний деякому додатному числу;

- для квадратної матриці ранг дорівнює порядку матриці тоді і тільки тоді, коли матриця не вироджена, тобто коли її визначник відмінний від нуля.

У лінійній алгебрі доведено, що ранг матриці дорівнює максимальному числу лінійно незалежних рядків чи стовпців цієї матриці.

Ранг матриці обчислюють методом обвідних мінорів або елементарними перетвореннями унаочнюють число лінійно незалежних рядків чи стовпців).

2. Приклади виконання завдань

1. Знайдіть матрицю обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 3 & 14 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

- 1) Визначник матриці $|A| = \begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 3 & 14 \end{vmatrix} = 9 \cdot 14 - 2 \cdot 3 = 120$;

- 2) алгебраїчні доповнення $A_{11} = M_{11} = 14$, $A_{12} = -M_{12} = -3$, $A_{21} = -M_{21} = -2$, $A_{22} = M_{22} = 9$;

- 3) $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 14 & -3 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$, тоді $\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$;

- 4) обернена матриця $A^{-1} = \frac{1}{120} \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$.

Перевірка $A^{-1} \cdot A = \frac{1}{120} \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 3 & 14 \end{pmatrix} = \frac{1}{120} \begin{pmatrix} 120 & 0 \\ 0 & 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$.

$$c_{11} = 14 \cdot 9 + (-2) \cdot 3 = 126 - 6 = 120, \quad c_{12} = 14 \cdot 2 + (-2) \cdot 14 = 28 - 28 = 0,$$

$$c_{21} = -3 \cdot 9 + 9 \cdot 3 = -27 + 27 = 0, \quad c_{22} = -3 \cdot 2 + 9 \cdot 14 = -6 + 126 = 120.$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 3 & 14 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{120} \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{120} \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 3 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{120} \begin{pmatrix} 120 & 0 \\ 0 & 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$d_{11} = 9 \cdot 14 + 2 \cdot (-3) = 126 - 6 = 120,$$

$$d_{21} = 3 \cdot 14 + 14 \cdot (-3) = 42 - 42 = 0,$$

$$d_{12} = 9 \cdot (-2) + 2 \cdot 9 = -18 + 18 = 0,$$

$$d_{22} = 3 \cdot (-2) + 14 \cdot 9 = -6 + 126 = 120.$$

Відповідь: $A^{-1} = \frac{1}{120} \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}.$

2. Знайдіть матрицю обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \\ 8 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$

Розв'язання:

1) Визначник $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \\ 8 & -3 & 6 \end{vmatrix} \stackrel{III-2II}{=} \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & 9 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = a_{32} A_{32} = -5 \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} =$
 $= -5 \cdot (-6 + 4) = 10;$

2) знайдемо алгебраїчні доповнення до всіх елементів:

$$A_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = -24 + 9 = -15,$$

$$A_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = -(24 - 24) = 0,$$

$$A_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} = -12 + 32 = 20,$$

$$A_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = -(6 - 3) = -3,$$

$$A_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = -12 + 8 = -4,$$

$$A_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} = -(6 - 8) = 2,$$

$$A_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1,$$

$$A_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -(-6 + 4) = 2,$$

$$A_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 4 = 4;$$

3) $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -15 & 0 & 20 \\ -3 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \tilde{A}^T = \begin{pmatrix} -15 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 20 & 2 & 4 \end{pmatrix};$

4) $A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -15 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 20 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$

Виконаємо перевірку: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \\ 8 & -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -15 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 20 & 2 & 4 \end{pmatrix} =$
 $= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \\ 8 & -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -15 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 20 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

$$c_{11} = -2 \cdot (-15) + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 20 = 10,$$

$$c_{13} = -2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 = 0,$$

$$c_{22} = 4 \cdot (-3) + (-4) \cdot (-4) + 3 \cdot 2 = 10,$$

$$c_{31} = 8 \cdot (-15) + (-3) \cdot 0 + 6 \cdot 20 = 0,$$

$$c_{33} = 8 \cdot (-1) + (-3) \cdot 2 + 6 \cdot 4 = 10.$$

$$c_{12} = -2 \cdot (-3) + 1 \cdot (-4) + (-1) \cdot 2 = 0,$$

$$c_{21} = 4 \cdot (-15) + (-4) \cdot 0 + 3 \cdot 20 = 0,$$

$$c_{23} = 4 \cdot (-1) + (-4) \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 0,$$

$$c_{32} = 8 \cdot (-3) + (-3) \cdot (-4) + 6 \cdot 2 = 0,$$

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -15 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 20 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \\ 8 & -3 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$d_{11} = -15 \cdot (-2) + (-3) \cdot 4 + (-1) \cdot 8 = 10,$$

$$d_{13} = -15 \cdot (-1) + (-3) \cdot 3 + (-1) \cdot 6 = 0,$$

$$d_{22} = 0 \cdot 1 + (-4) \cdot (-4) + 2 \cdot (-3) = 10,$$

$$d_{31} = 20 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 8 = 0,$$

$$d_{33} = 20 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 6 = 10.$$

$$d_{12} = -15 \cdot 1 + (-3) \cdot (-4) + (-1) \cdot (-3) = 0,$$

$$d_{21} = 0 \cdot (-2) + (-4) \cdot 4 + 2 \cdot 8 = 0,$$

$$d_{23} = 0 \cdot (-1) + (-4) \cdot 3 + 2 \cdot 6 = 0,$$

$$d_{32} = 20 \cdot 1 + 2 \cdot (-4) + 4 \cdot (-3) = 0,$$

Відповідь: $A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -15 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 20 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$

3. Знайдіть матрицю обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 12 & 1 & 11 \\ 4 & 9 & 3 \\ 18 & -3 & 16 \end{pmatrix}.$

Розв'язання:

$$1) |A| = \begin{vmatrix} 12 & 1 & 11 \\ 4 & 9 & 3 \\ 18 & -3 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 1 \\ 4 & 9 \\ 18 & -3 \end{vmatrix} = 1728 + 54 - 132 - 1782 + 108 - 64 = -88;$$

2) алгебраїчні доповнення: $A_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ -3 & 16 \end{vmatrix} = 144 + 9 = 153,$

$$A_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 18 & 16 \end{vmatrix} = -(64 - 54) = -10, \quad A_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 18 & -3 \end{vmatrix} = -12 - 162 = -174,$$

$$A_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 11 \\ -3 & 16 \end{vmatrix} = -(16 + 33) = -49, \quad A_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} 12 & 11 \\ 18 & 16 \end{vmatrix} = 192 - 198 = -6,$$

$$A_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} 12 & 1 \\ 18 & -3 \end{vmatrix} = -(-36 - 18) = 54, \quad A_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 99 = -96,$$

$$A_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} 12 & 11 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -(36 - 44) = 8, \quad A_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 12 & 1 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 108 - 4 = 104;$$

$$3) \tilde{A} = \begin{pmatrix} 153 & -10 & -174 \\ -49 & -6 & 54 \\ -96 & 8 & 104 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 153 & -49 & -96 \\ -10 & -6 & 8 \\ -174 & 54 & 104 \end{pmatrix};$$

$$4) A^{-1} = -\frac{1}{88} \begin{pmatrix} 153 & -49 & -96 \\ -10 & -6 & 8 \\ -174 & 54 & 104 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Відповідь: } A^{-1} = -\frac{1}{88} \begin{pmatrix} 153 & -49 & -96 \\ -10 & -6 & 8 \\ -174 & 54 & 104 \end{pmatrix}.$$

$$4. \text{ Знайдіть ранг матриці } \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}, \text{ використовуючи: а) метод}$$

обвідних мінорів; б) елементарні перетворення.

Розв'язання:

а) Існують мінори першого порядку відмінні від нуля, отже ранг матриці більше нуля.

Обводячи $M_1 = |-1|$ за допомогою другого рядка і першого стовпця отримаємо мінор другого порядку $M_2 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 2$ також відмінний від нуля.

Переходимо до мінорів третього порядку, що обводять M_2 . Таких мінорів усього шість:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 0, M_3 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 \\ -4 & 5 & -10 \end{vmatrix} = 0, M_3 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \\ -4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 0, M_3 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 \\ -2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 0, M_3 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Всі вони дорівнюють нулю. Звідси приходимо до висновку, що ранг матриці дорівнює 2.

$$\begin{aligned} \text{б) Перетворимо } & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \\ & \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \\ & \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \\ & \sim \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \text{ У східчастій матриці два ненульових рядка, тому } r=2. \end{aligned}$$

Відповідь: $r = 2$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайдіть матрицю обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 8 - \alpha & 10 \\ 12 & 7 \end{pmatrix}$.

2. Знайдіть матрицю обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} \alpha - 10 & 1 & 3 \\ 2 & \alpha & 2 \\ \alpha & 2 & \alpha - 7 \end{pmatrix}$.

3. Знайдіть матрицю обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 + \alpha & 5 \\ 2 + \alpha & 4 + \alpha & 8 + \alpha \\ 2 & 7 + \alpha & 6 \end{pmatrix}$.

4. Визначте ранг матриці $A = \begin{pmatrix} -9 & 4 & 18 \\ 2(\alpha - 21) & 3(\alpha - 21) & -4(\alpha - 21) \\ -5 & 6 & 10 \end{pmatrix}$.

МЕТОД ОБЕРНЕНОЇ МАТРИЦІ. ФОРМУЛИ КРАМЕРА.

1. Основні поняття та теореми

Розв'язком системи $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$, $\in \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

Тобто матриця-стовпець з невідомих знаходиться як добуток оберненої матриці до матриці A з коефіцієнтів a_{ij} при невідомих і матриці-стовпця з вільних елементів. Це матричний метод розв'язування системи лінійних рівнянь (метод оберненої матриці). Метод застосовний, якщо існує A^{-1} .

Розв'язання квадратної системи можна подати безпосередньо через визначники. Для системи з трьох лінійних алгебраїчних рівнянь маємо *формули Крамера* для знаходження невідомих

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

де Δ – визначник матриці A з коефіцієнтів a_{ij} при невідомих, Δ_j – визначник матриці A із заміненям j -им стовпцем на стовпець B вільних елементів.

Система називається сумісною, якщо вона має хоча б один розв'язок, і несумісною (суперечливою), якщо вона не має жодного розв'язку.

Сумісна система називається визначеною, якщо її розв'язок єдиний, і невизначеною – у протилежному випадку.

Якщо визначник $\Delta = 0$, а хоча б один визначник Δ_j не дорівнює нулю, то система лінійних рівнянь розв'язків не має (несумісна).

Якщо $\Delta = 0$, а також $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, то система має нескінчену множину розв'язків (невизначена).

Якщо $\Delta \neq 0$, то система лінійних рівнянь має єдиний розв'язок (сумісна визначена).

Система рівнянь називається однорідною, якщо всі її вільні елементи дорівнюють нулю, і неоднорідною, якщо хоча б один з вільних елементів відмінний від нуля.

Однорідні системи завжди сумісні – бо мають нульовий розв'язок. Якщо визначник $\Delta \neq 0$, то нульовий розв'язок єдиний (система визначена). Якщо визначник $\Delta = 0$, то однорідна система рівнянь має ще й ненульові розв'язки (система невизначена).

2. Приклади виконання завдань

$$1. \text{ Розв'яжіть матричним методом систему рівнянь } \begin{cases} 3x + 5y - 2z = 5, \\ -x + 6y - z = -3, \\ 2x - y + z = 2. \end{cases}$$

Розв'язання:

$$\text{Значення невідомих знайдемо за формулою } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -1 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

I. Знайдемо обернену матрицю A^{-1} до матриці A :

$$1) \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -1 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 6 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 18 - 10 - 2 + 24 - 3 + 5 = 32 \neq 0, \quad A^{-1} \text{ існує;}$$

$$2) \text{ обчислимо алгебраїчні доповнення } A_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5,$$

$$A_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(-1 + 2) = -1, \quad A_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 12 = -11,$$

$$A_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(5 - 2) = -3, \quad A_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 4 = 7,$$

$$A_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-3 - 10) = 13, \quad A_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = -5 + 12 = 7,$$

$$A_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -(-3 - 2) = 5, \quad A_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 18 + 5 = 23;$$

$$3) \tilde{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -11 \\ -3 & 7 & 13 \\ 7 & 5 & 23 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 7 \\ -1 & 7 & 5 \\ -11 & 13 & 23 \end{pmatrix};$$

$$4) \text{ обернена матриця } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A}^T = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} 5 & -3 & 7 \\ -1 & 7 & 5 \\ -11 & 13 & 23 \end{pmatrix}.$$

II. Виконаємо множення матриць: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} 5 & -3 & 7 \\ -1 & 7 & 5 \\ -11 & 13 & 23 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix},$

$$c_{11} = 5 \cdot 5 + (-3) \cdot (-3) + 7 \cdot 2 = 25 + 9 + 14 = 48,$$

$$c_{21} = -1 \cdot 5 + 7 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 = -5 - 21 + 10 = -16,$$

$$c_{31} = -11 \cdot 5 + 13 \cdot (-3) + 23 \cdot 2 = -55 - 39 + 46 = -48,$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} 48 \\ -16 \\ -48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ -0,5 \\ -1,5 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $x = 1,5$, $y = -0,5$, $z = -1,5$.

2. Розв'яжіть матричним методом систему рівнянь $\begin{cases} x + y + 2z = 1, \\ 2x - 2y - z = 2, \\ y + z = -3. \end{cases}$

Розв'язання:

Значення невідомих знайдемо за формулою $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$

I. Знайдемо обернену матрицю:

$$1) \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0, \quad A^{-1} \text{ існує};$$

$$2) \text{ обчислимо алгебраїчні доповнення } A_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 1 = -1,$$

$$A_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(2 - 0) = -2,$$

$$A_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2,$$

$$A_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 2) = 1,$$

$$A_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1,$$

$$A_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 0) = -1,$$

$$A_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 4 = 3,$$

$$A_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 - 4) = 5,$$

$$A_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4;$$

$$3) \tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix};$$

$$4) \text{ обернена матриця } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A}^T = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

II. Виконаємо множення матриць: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix},$

$$c_{11} = -1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) = -1 + 2 - 9 = -8,$$

$$c_{21} = -2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 5 \cdot (-3) = -2 + 2 - 15 = -15,$$

$$c_{31} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 - 4 \cdot (-3) = 2 - 2 + 12 = 12,$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -15 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $x = -8, y = -15, z = 12$.

3. За допомогою формул Крамера розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 1, \\ 2x - z = 0, \\ 3x - y + z = -3. \end{cases}$$

Розв'язання:

Обчислимо визначник матриці, складеної з коефіцієнтів при невідомих:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 3 = 0 - 12 - 12 = -24,$$

замінивши перший стовпець визначника Δ на стовпець вільних коефіцієнтів,

$$\text{знайдемо } \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot A_{23} = M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7,$$

замінивши другий стовпець визначника Δ на стовпець вільних коефіцієнтів,

$$\text{знайдемо } \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 3 = 0 - 18 - 18 = -36,$$

замінивши третій стовпець визначника Δ на стовпець вільних коефіцієнтів,

$$\text{знайдемо } \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{21} = -2M_{21} = -2 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -2(6 + 1) = -14.$$

$$\text{Тоді } x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-7}{-24} = -1,4, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-36}{-24} = -4, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-14}{-24} = -2,8.$$

Перевірка: $-1,4 + 8 - 5,6 = 1$; $-2,8 + 2,8 = 0$; $-4,2 + 4 - 2,8 = -3$. Невідомі знайдені правильно.

Відповідь: $x = -1,4, y = -4, z = -2,8$.

4. За допомогою формул Крамера розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 0, \\ -x - 2y - z = 1, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

Розв'язання:

Обчислимо визначник матриці, складеної з коефіцієнтів при невідомих:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 3 - 2 - 4 - 1 - 0 = -10,$$

замінивши перший стовпець визначника Δ на стовпець вільних коефіцієнтів,

$$\text{знайдемо } \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 6 + 2 - 8 - 0 - 0 = -12,$$

замінивши другий стовпець визначника Δ на стовпець вільних коефіцієнтів,

$$\text{знайдемо } \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 4 + 2 + 2 - 0 = 8,$$

замінивши третій стовпець визначника Δ на стовпець вільних коефіцієнтів,

$$\text{знайдемо } \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 3 + 0 - 0 + 1 + 6 = 6.$$

$$\text{Тоді } x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-12}{-10} = 1,2, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{8}{-10} = -0,8, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{6}{-10} = -0,6.$$

Перевірка: $1,2 - 2,4 + 1,2 = 0$; $-1,2 + 1,6 + 0,6 = 1$; $1,2 + 0,8 = 2$. Невідомі знайдені правильно.

Відповідь: $x = 1,2$, $y = -0,8$, $z = -0,6$.

5. За допомогою формул Крамера розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} 2x - y - 2z = 7, \\ 7x - 2y - z = 2, \\ x - y + 4z = -3. \end{cases}$$

Розв'язання:

Обчислимо визначник матриці, складеної з коефіцієнтів при невідомих:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 7 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -16 + 1 + 14 - 4 - 2 + 28 = 21,$$

замінивши перший стовпець визначника Δ на стовпець вільних коефіцієнтів,

$$\text{знайдемо } \Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -56 - 3 + 4 + 12 - 7 + 8 = -42,$$

замінивши другий стовпець визначника Δ на стовпець вільних коефіцієнтів,

$$\text{знайдемо } \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 & -2 \\ 7 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 16 - 7 + 42 + 4 - 6 - 196 = -147,$$

замінивши третій стовпець визначника Δ на стовпець вільних коефіцієнтів,

$$\text{знайдемо } \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 7 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 12 - 2 - 49 + 14 + 4 - 21 = -42.$$

$$\text{Тоді } x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-42}{21} = -2, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-147}{21} = -7, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-42}{21} = -2.$$

Перевірка: $-4 + 7 + 4 = 7$; $-14 + 14 + 2 = 2$; $-2 + 7 - 8 = -3$. Невідомі знайдені правильно.

Відповідь: $x = -2, y = -7, z = -2$.

$$6. \text{ Розв'яжіть систему рівнянь } \begin{cases} -2x + y + 3z = -2, \\ x + y - z = 2, \\ x - y - 2z = 0. \end{cases}$$

Розв'язання:

Обчислимо визначник матриці, складеної з коефіцієнтів при невідомих:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} I-II \\ \\ III+I \end{matrix} = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = a_{22}A_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 9 - 8 = 1,$$

замінивши перший стовпець визначника Δ на стовпець вільних коефіцієнтів,

$$\text{маємо } \Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ II+I \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} = -2M_{11} = -2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -2(-4 + 2) = 4,$$

замінивши другий стовпець визначника Δ на стовпець вільних коефіцієнтів,

$$\text{маємо } \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} I+II \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = a_{22}A_{22} = 2M_{22} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 = 0,$$

замінивши третій стовпець визначника Δ на стовпець вільних коефіцієнтів,

$$\text{маємо } \Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ II+I \end{matrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = a_{13}A_{13} = -2M_{13} = -2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2(1 - 2) = 2.$$

$$\text{За формулами Крамера маємо } x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4}{1} = 4, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{1} = 0, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{2}{1} = 2.$$

Перевірка: $-2 \cdot 4 + 0 + 3 \cdot 2 = -2$; $4 + 0 - 2 = 2$; $4 - 0 - 2 \cdot 2 = 0$. Невідомі знайдені правильно.

Відповідь: $x = 4, y = 0, z = 2$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайдіть розв'язок системи лінійних рівнянь матричним способом.
2. Розв'яжіть цю ж систему за формулами Крамера, порівняйте розв'язки, отримані різними методами.

1. $\begin{cases} x+2y+2z=3, \\ 4x-2y-5z=5, \\ 6x-y+3z=1. \end{cases}$	2. $\begin{cases} 3x+2y-z=3, \\ x-y+2z=-4, \\ 2x+2y+z=4. \end{cases}$	3. $\begin{cases} 3x+3y+2z=-1, \\ 2x+y-z=3, \\ x-2y-3z=4. \end{cases}$	4. $\begin{cases} 5x-2y+z=-1, \\ 2x+y+2z=6, \\ x-3y-z=-5. \end{cases}$
5. $\begin{cases} 3x-2y+2z=3, \\ 2x+y-z=-5, \\ 5x-y+3z=4. \end{cases}$	6. $\begin{cases} x+y-2z=1, \\ 2x+3y+z=0, \\ x-2y-z=7. \end{cases}$	7. $\begin{cases} 2x-3y+z=3, \\ x+y-2z=4, \\ 3x-2y+6z=0. \end{cases}$	8. $\begin{cases} 2x+3y-z=2, \\ x-y+3z=-4, \\ 3x+5y+z=4. \end{cases}$
9. $\begin{cases} 4x+3y-2z=-1, \\ 3x+y+z=3, \\ x-2y-3z=8. \end{cases}$	10. $\begin{cases} 2x-y+3z=1, \\ x+2y+z=8, \\ 4x-3y-2z=-1. \end{cases}$	11. $\begin{cases} 2x+3y-z=2, \\ x+2y+3z=0, \\ x-y-2z=6. \end{cases}$	12. $\begin{cases} 2x-3y+3z=0, \\ x+y-2z=-7, \\ x-2y+3z=3. \end{cases}$
13. $\begin{cases} x-3y+z=2, \\ 2x+y+3z=3, \\ 2x-y-2z=8. \end{cases}$	14. $\begin{cases} x+5y-z=-1, \\ 2x+y-2z=7, \\ x-4y+z=0. \end{cases}$	15. $\begin{cases} 2x-3y-5z=1, \\ 3x+y-2z=-4, \\ x-2y+z=5. \end{cases}$	16. $\begin{cases} x-3y-z=1, \\ 2x+y+z=-7, \\ 2x-y-3z=5. \end{cases}$
17. $\begin{cases} x-2y+z=4, \\ 2x+y+3z=5, \\ 3x+4y+z=-2. \end{cases}$	18. $\begin{cases} 3x+y-2z=1, \\ x-2y+3z=5, \\ 2x+3y-z=-4. \end{cases}$	19. $\begin{cases} 3x+y+2z=-4, \\ x-2y-z=-1, \\ 2x+3y+2z=0. \end{cases}$	20. $\begin{cases} 2x-y+3z=3, \\ x+2y+z=2, \\ x-3y+4z=-1. \end{cases}$
21. $\begin{cases} 2x+y-2z=5, \\ 3x+y+5z=7, \\ -x+3y+3z=1. \end{cases}$	22. $\begin{cases} 7x-3y-5z=2, \\ 5x+2y-2z=2, \\ 2x-y+z=8. \end{cases}$	23. $\begin{cases} 5x+y+z=4, \\ x-2y-z=-5, \\ 3x+4y+z=7. \end{cases}$	24. $\begin{cases} 3x+4y+z=1, \\ 2x+2y+3z=6, \\ 7x-6y-z=11. \end{cases}$
25. $\begin{cases} x+2y-3z=-3, \\ 2x-3y+4z=7, \\ 5x+y+z=8. \end{cases}$	26. $\begin{cases} 2x+3y+5z=5, \\ x+3y+z=-2, \\ 4x-y-4z=10. \end{cases}$	27. $\begin{cases} x-y+3z=-3, \\ 2x+2y+z=3, \\ x+4y-5z=10. \end{cases}$	28. $\begin{cases} 3x-2y-z=5, \\ 4x-5y+2z=0, \\ x+3y+z=-1. \end{cases}$
29. $\begin{cases} -2x+y+z=6, \\ 3x-4y+5z=-5, \\ 4x+3y+2z=-3. \end{cases}$	30. $\begin{cases} 3x-y-4z=-3, \\ 2x+2y-3z=1, \\ 5x+3y-7z=0. \end{cases}$	31. $\begin{cases} 2x+3y+3z=1, \\ 4x-y-2z=-6, \\ 5x+y+z=-4. \end{cases}$	32. $\begin{cases} 2x-3y+2z=2, \\ 4x+y-2z=0, \\ 6x-y+3z=13. \end{cases}$
33. $\begin{cases} 2x+2y+z=5, \\ 4x-y-5z=7, \\ 6x-y+2z=2. \end{cases}$	34. $\begin{cases} 2x+2y-z=4, \\ x-y+z=-4, \\ 2x+y+z=1. \end{cases}$	35. $\begin{cases} 2x+y+z=-1, \\ 3x+y+z=1, \\ 2x+y+2z=0. \end{cases}$	36. $\begin{cases} x-y+3z=0, \\ x+y+z=2, \\ 2x-3y+4z=2. \end{cases}$
37. $\begin{cases} 2x+4y+z=1, \\ 2x+2y+3z=-7, \\ 3x-4y-z=-1. \end{cases}$	38. $\begin{cases} 2x-3y+4z=-11, \\ x-2y-z=0, \\ 3x+y+z=-1. \end{cases}$	39. $\begin{cases} x+2y-3z=2, \\ x+5y-z=-1, \\ 2x+5y-2z=3. \end{cases}$	40. $\begin{cases} x-2y+z=3, \\ 2x+3y-z=3, \\ 3x-y-2z=4. \end{cases}$

МЕТОД ГАУССА РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

1. Основні поняття та теореми

Метод Гаусса (метод послідовного виключення невідомих) полягає у зведенні системи лінійних рівнянь до східчастого (верхньотрикутного) вигляду.

Зводити до східчастого вигляду зручніше розширену матрицю $\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right)$, що відповідає системі лінійних рівнянь $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases}$

При цьому застосовні такі перетворення (додавання-віднімання рядків матриці, множення-ділення рядків матриці на число, перестановки місцями рядків матриці), що дають рівноцінну систему рівнянь.

Невідомі визначаються із східчастої (верхньотрикутної) системи поступовим розв'язанням рівнянь від нижнього до верхнього з підстановкою вже знайдених невідомих.

2. Приклади виконання завдань

1. Розв'яжіть східчасту систему лінійних рівнянь $\begin{cases} x + 2y - 4z = 3, \\ -y + 21z = -3, \\ 2z = -64. \end{cases}$

Розв'язання:

З третього рівняння маємо $z = -32$, з другого рівняння одержимо $-y - 672 = -3$, $y = -669$, з першого рівняння отримаємо $x - 1338 + 128 = 3$, $x = 1213$.

Відповідь: $x = 1213$, $y = -669$, $z = -32$.

2. Розв'яжіть методом Гаусса систему рівнянь $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -25, \\ 3x_1 - 8x_2 - 18x_3 = -15, \\ x_1 - 4x_2 - 28x_3 = 25. \end{cases}$

Розв'язання:

Переставимо місцями перше та останнє рівняння і складемо розширену

матрицю $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -28 & 25 \\ 3 & -8 & -18 & -15 \\ 2 & -3 & 4 & -25 \end{array} \right)$.

Перетворимо на нулі елементи першого стовпця в двох останніх рядках. Для цього від другого рядка віднімемо перший рядок тричі, а від третього рядка

віднімемо перший рядок двічі: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -28 & 25 \\ 3 & -8 & -18 & -15 \\ 2 & -3 & 4 & -25 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{II-3I \\ III-2I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -28 & 25 \\ 0 & 4 & 66 & -90 \\ 0 & 5 & 60 & -75 \end{array} \right) \begin{matrix} \\ \div 2 \\ \div 5 \end{matrix}$

Після цього друге рівняння поділимо на 2, третє рівняння поділимо на 5.

Перетворимо на нуль елемент другого стовпця в останньому рядку. Для цього помножимо третій рядок на 2 і віднімемо від нього другий рядок,

отримаємо $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -28 & 25 \\ 0 & 2 & 33 & -45 \\ 0 & 1 & 12 & -15 \end{array} \right) \xrightarrow{2III-II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -28 & 25 \\ 0 & 2 & 33 & -45 \\ 0 & 0 & -9 & 15 \end{array} \right) \div 3$. Після цього

третє рівняння поділимо на 3.

Східчастій матриці відповідає східчаста система рівнянь
$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 28x_3 = 25, \\ 2x_2 + 33x_3 = -45, \\ -3x_3 = 5. \end{cases}$$

З останнього рівняння отримаємо $x_3 = -\frac{5}{3}$;

з другого рівняння одержимо $2x_2 - 55 = -45$, $2x_2 = 10$, $x_2 = 5$;

з першого рівняння маємо $x_1 - 20 + \frac{140}{3} = 25$, $x_1 = 45 - \frac{140}{3}$, $x_1 = \frac{135 - 140}{3}$, $x_1 = -\frac{5}{3}$.

Відповідь: $x_1 = -\frac{5}{3}$, $x_2 = 5$, $x_3 = -\frac{5}{3}$.

3. Розв'яжіть методом Гаусса систему лінійних рівнянь
$$\begin{cases} 3x + 4z = 7, \\ 5x - 2y - z = 2, \\ x - y - 2z = 1. \end{cases}$$

Розв'язання:

Складемо розширену матрицю $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 7 \end{array} \right)$, переставивши місцями рядки.

Перетворимо на нулі елементи першого стовпця в двох останніх рядках. Для цього від другого рядка віднімемо перший рядок п'ять разів, від третього рядка

віднімемо перший рядок тричі: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{II-5I \\ III-3I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 9 & -3 \\ 0 & 3 & 10 & 4 \end{array} \right)$.

Другий рядок поділимо на 3. Перетворимо на нуль елемент другого стовпця в останньому рядку. Для цього від третього рядка віднімемо другий

рядок, маємо $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 9 & -3 \\ 0 & 3 & 10 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{III-II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array} \right)$.

Східчастій матриці відповідає східчаста система рівнянь
$$\begin{cases} x - y - 2z = 1, \\ y + 3z = -1, \\ z = 7, \end{cases}$$

звідки маємо $z = 7$; з другого рівняння одержимо $y + 21 = -1$, $y = -22$; з першого рівняння отримаємо $x + 22 - 14 = 1$, $x = -7$.

Відповідь: $x = -7$, $y = -22$, $z = 7$.

4. Знайдіть методом Гаусса розв'язок системи рівнянь
$$\begin{cases} x - y + z = -1, \\ x + 2y - z = 2, \\ -x - y + 3z = 7. \end{cases}$$

Розв'язання:

Складемо розширену матрицю $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 7 \end{array} \right)$.

Перетворимо на нулі елементи першого стовпця в двох останніх рядках. Для цього від другого рядка віднімемо перший рядок, до третього рядка додамо

$$\text{перший рядок: } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{II-I} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{III+I} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right).$$

Перетворимо на нуль елемент другого стовпця в останньому рядку. Для цього помножимо третій рядок на 3 і додамо до нього другий рядок, маємо

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{3III+II} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{array} \right) \xrightarrow{\div 4} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

Східчастій матриці відповідає східчаста система рівнянь
$$\begin{cases} x - y + z = -1, \\ 3y - 2z = 3, \\ z = 3, \end{cases}$$

звідки $z = 3$; з другого рівняння маємо $3y - 6 = 3$, $3y = 9$, $y = 3$; з першого рівняння маємо $x - 3 + 3 = -1$, $x = -1$.

Відповідь: $x = -1$, $y = 3$, $z = 3$.

5. Знайдіть методом Гаусса розв'язок системи рівнянь
$$\begin{cases} x - y - 2z = -1, \\ x + 2y + z = -1, \\ x - 2y - z = 4. \end{cases}$$

Розв'язання:

Складемо розширену матрицю $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{array} \right)$.

Помножимо другий рядок на 2 і додамо до нього перший рядок, до третього рядка додамо другий рядок, отримаємо східчасту матрицю

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{2II+I} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\div 3} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right).$$

Маємо східчасту систему рівнянь
$$\begin{cases} x - y - 2z = -1, \\ x + y = -1, \\ 2x = 3. \end{cases}$$
 3 останнього рівняння

маємо $x = 1,5$; з другого рівняння одержимо $1,5 + y = -1$, $y = -2,5$; з першого рівняння отримаємо $1,5 + 2,5 - 2z = -1$, $-2z = -5$, $z = 2,5$.

Відповідь: $x = 1,5$; $y = -2,5$; $z = 2,5$.

Методом Гаусса зручно розв'язувати несумісні та невизначені системи лінійних рівнянь.

6. Розв'яжіть систему лінійних рівнянь
$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 1, \\ 2x + y - 5z = -1, \\ x - y - z = 2. \end{cases}$$

Розв'язання:

Складемо розширену матрицю і зведемо її до східчастого вигляду

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{II-2I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{III-I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right).$$

Останньому рядку східчастої матриці відповідає протиріччя $0 = 4$, система рівнянь несумісна.

Відповідь: розв'язків нема.

7. Розв'яжіть систему лінійних рівнянь
$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 1, \\ 2x + y - 5z = -1, \\ x - y - z = -2. \end{cases}$$

Розв'язання:

Складемо розширену матрицю і зведемо її до східчастого вигляду

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{II-2I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{III-I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Останньому рядку східчастої матриці відповідає тотожність $0 = 0$, маємо систему двох незалежних рівнянь з трьома невідомими
$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 1, \\ y - z = 1. \end{cases}$$
 Позначимо $z = t$, де

t – будь-яке дійсне число, тоді з другого рівняння одержимо $y - t = 1$, $y = 1 + t$, а з першого рівняння отримаємо $x + 2 \cdot (1 + t) - 4t = 1$, $x + 2 + 2t - 4t = 1$, $x = 2t - 1$.

Відповідь: $x = 2t - 1$, $y = 1 + t$, $z = t$.

8. Розв'яжіть однорідну систему лінійних рівнянь
$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0, \\ 2x + y - 2z = 0, \\ 5x + 4y - 2z = 0. \end{cases}$$

Розв'язання:

Складемо розширену матрицю і зведемо її до східчастого вигляду

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{II-2I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{III-2II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Маємо
$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0, \\ y + 2z = 0. \end{cases}$$

Позначимо $z = t$, де t – будь-яке дійсне число, тоді з другого рівняння одержимо $y + 2t = 0$, $y = -2t$, а з першого рівняння $x + 2(-2t) + 2t = 0$, $x = 2t$.

Відповідь: $x = 2t$, $y = -2t$, $z = t$.

9. Розв'яжіть однорідну систему лінійних рівнянь
$$\begin{cases} x - y - 2z = 0, \\ 3x + y + 2z = 0, \\ 5x + 2y + 4z = 0. \end{cases}$$

Розв'язання:

Складемо розширену матрицю і зведемо її до східчастого вигляду

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{II+I, III-2I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{4III+II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \text{ Маємо } \begin{cases} x - y - 2z = 0, \\ 4x = 0. \end{cases}$$

З другого рівняння одержимо $x = 0$, позначимо $z = t$, де t – будь-яке дійсне число, тоді з першого рівняння отримаємо $0 - y - 2t = 0$, $y = -2t$.

Відповідь: $x = 0$; $y = -2t$; $z = t$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Розв'яжіть методом Гаусса систему рівнянь з попереднього практичного.

2. Знайдіть всі розв'язки системи рівнянь
$$\begin{cases} 2(\alpha + 1)x + 2y - 3z = -10, \\ 5(\alpha + 1)x + 8y - 9z = 5, \\ (\alpha + 1)x + 4y - 3z = 25. \end{cases}$$

3. Знайдіть всі розв'язки системи рівнянь
$$\begin{cases} x + (\alpha + 1)y - 4z = 0, \\ x + (\alpha + 1)y - 9z = 0, \\ x + 2(\alpha + 1)y - 3z = 0. \end{cases}$$

4. Знайти всі розв'язки системи рівнянь
$$\begin{cases} x + (\alpha + 1)y - 4z = 0, \\ 2x + (\alpha + 1)y - 9z = 0, \\ x + 2(\alpha + 1)y - 3z = 0. \end{cases}$$

ВЕКТОРИ. ДІЇ НАД ВЕКТОРАМИ

1. Основні поняття та теореми

Вектор – напрямлений відрізок. Вектор з початком в точці $A(x_A; y_A)$ та кінцем у точці $B(x_B; y_B)$ позначається $\overrightarrow{AB}$ і має координати $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$.

Вектор можна позначити $\vec{a}(a_x; a_y)$. Координати вектора – проекції вектора на координатні осі. Вектор $\vec{a}(a_x; a_y)$ можна представити як $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$.

Відстань між початком і кінцем вектора називається довжиною (або модулем) вектора, позначається $|\vec{a}|$ і визначається як $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

Напрямок вектора задається напрямними кутами α , β (кутами, які вектор утворює з координатними осями), косинуси яких рівні $\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}$, $\cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}$.

Лінійні операції над векторами виконуються покомпонентно:

- при додаванні векторів $\vec{a}(a_x; a_y)$, $\vec{b}(b_x; b_y)$ їхні відповідні координати додаються, тобто $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}(a_x + b_x; a_y + b_y)$;
- при відніманні векторів $\vec{a}(a_x; a_y)$, $\vec{b}(b_x; b_y)$ їхні відповідні координати віднімаються, тобто $\vec{a} - \vec{b} = \vec{d}(a_x - b_x; a_y - b_y)$;
- при множенні вектора $\vec{a}(a_x; a_y)$ на число λ кожна координата множиться на це число, тобто $\lambda\vec{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y)$.

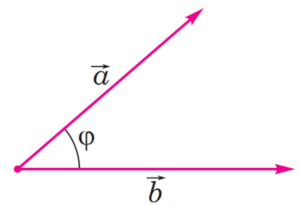
Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається добуток довжин цих векторів на косинус кута φ між ними $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$.

Умова перпендикулярності (ортогональності) двох векторів: два ненульові вектори перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли скалярний добуток їх дорівнює нулю.

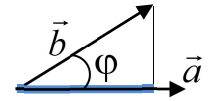
Якщо два вектори задані координатами $\vec{a}(a_x; a_y)$, $\vec{b}(b_x; b_y)$, то скалярним добутком цих векторів є число, що рівне $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$.

Скалярний добуток двох векторів застосовують для визначення кута між ними (або між прямими, на яких вектора розташовані). Косинус цього кута рівний

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$



Проекція вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$ рівна $pr_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$.



Для векторів у просторі у формулах додається ще одна координата.

Вектор $\vec{a}$ з початком в точці $(x_A; y_A; z_A)$ та кінцем у точці $(x_B; y_B; z_B)$ має координати $\vec{a}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

Для вектора $\vec{a}(a_x; a_y; a_z) = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ модуль $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$;

напрямні косинуси: $\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}$, $\cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}$, $\cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$; добуток $\vec{a}$ і скаляра λ :

$\lambda\vec{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z)$. Для векторів $\vec{a}(a_x; a_y; a_z)$ та $\vec{b}(b_x; b_y; b_z)$ сума $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}(a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z)$, різниця $\vec{a} - \vec{b} = \vec{d}(a_x - b_x; a_y - b_y; a_z - b_z)$, скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, який позначається $\vec{a} \times \vec{b}$, називається вектор, що задовольняє таким трьом умовам:

1. Модуль вектора $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta$, де θ – кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$.
2. Вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ перпендикулярний площині, де розташовані вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

3. Упорядкована трійка векторів $\vec{a}; \vec{b}; \vec{a} \times \vec{b}$, відкладених від однієї точки, утворює правий базис (напрямок вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ визначається за правилом буравчика).

Векторний добуток залежить від порядку множників: $\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$.

Два вектори, які лежать на паралельних прямих або на одній прямій, називаються *колінеарними* (паралельними).

Умова *колінеарності* (паралельності) двох векторів: два ненульові вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли їхні відповідні координати пропорційні

$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$. В цьому випадку модуль векторного добутку дорівнює нулю.

Векторний добуток векторів $\vec{a}(a_x; a_y; a_z)$ та $\vec{b}(b_x; b_y; b_z)$ визначається

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Модуль векторного добутку двох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ застосовують для визначення площ паралелограма і трикутника, побудованих на цих векторах. Площі визначають

за формулами: $S_{\text{паралелограма}} = |\vec{a} \times \vec{b}|$, $S_{\text{трикутника}} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$.

Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називається число рівне скалярному добутку вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ на вектор $\vec{c}$, тобто $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Мішаний добуток векторів $\vec{a}(a_x; a_y; a_z)$, $\vec{b}(b_x; b_y; b_z)$, $\vec{c}(c_x; c_y; c_z)$

$$\text{визначають як } (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

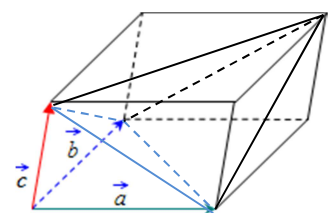
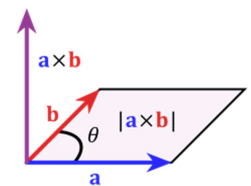
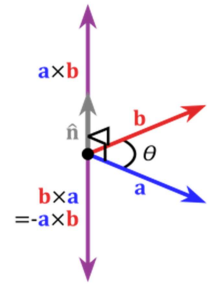
Мішаний добуток не змінюється при круговій перестановці векторів $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = (\vec{c}\vec{a}\vec{b}) = (\vec{b}\vec{c}\vec{a})$ і змінює знак при перестановці двох векторів місцями $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = -(\vec{b}\vec{a}\vec{c})$, $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = -(\vec{a}\vec{c}\vec{b})$, $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = -(\vec{c}\vec{b}\vec{a})$.

Три вектори називаються *компланарними*, якщо вони лежать в одній площині або в паралельних площинах.

Умова *компланарності* трьох векторів: три вектори компланарні тоді і тільки тоді, коли їх мішаний добуток дорівнює нулю.

Мішаний добуток трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ застосовують для визначення об'єму паралелепіпеда та піраміди, побудованих на цих векторах. Об'єми визначають

за формулами: $\pm V_{\text{паралелепіпеда}} = (\vec{a}\vec{b}\vec{c})$, $\pm V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{6} (\vec{a}\vec{b}\vec{c})$.



2. Приклади виконання завдань

1. Дано точки на площині $A(15;-5)$, $B(3;0)$, $C(10;5)$, $D(4;-3)$. Знайдіть координати та довжини векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$; вектори $2 \cdot \overrightarrow{AB}$, $-0,5 \cdot \overrightarrow{CD}$; суму, різницю, скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$; кут між векторами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$.

Розв'язання:

координати векторів:

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A) = \overrightarrow{AB}(3 - 15; 0 + 5) = \overrightarrow{AB}(-12; 5),$$

$$\overrightarrow{CD}(x_D - x_C; y_D - y_C) = \overrightarrow{CD}(4 - 10; -3 - 5) = \overrightarrow{CD}(-6; -8);$$

довжини векторів:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{AB_x^2 + AB_y^2} = \sqrt{(-12)^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13,$$

$$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{CD_x^2 + CD_y^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10;$$

добутки векторів на числа:

$$2 \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}(-12; 5) = \overrightarrow{AB}(-24; 10),$$

$$-0,5 \cdot \overrightarrow{CD} = -0,5 \cdot \overrightarrow{CD}(-6; -8) = \overrightarrow{AB}(3; 4);$$

сума і різниця векторів:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}(-12 - 6; 5 - 8) = \overrightarrow{AB}(-18; -3),$$

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}(-12 + 6; 5 + 8) = \overrightarrow{AB}(-6; 13);$$

скалярний добуток векторів: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -12 \cdot (-6) + 5 \cdot (-8) = 72 - 40 = 32$;

косинус кута між векторами: $\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}|} = \frac{32}{13 \cdot 10} \approx 0,246$, тоді кут між

векторами $\varphi \approx 76^\circ$.

Відповідь: $\overrightarrow{AB}(-12; 5)$, $\overrightarrow{CD}(-6; -8)$; $|\overrightarrow{AB}| = 13$, $|\overrightarrow{CD}| = 10$; $2 \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}(-24; 10)$,

$-0,5 \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}(3; 4)$; сума $\overrightarrow{AB}(-18; -3)$, різниця $\overrightarrow{AB}(-6; 13)$; скалярний добуток 32, кут 76° .

2. Дано точки в просторі $A(-2; 2; 1)$, $B(2; -2; 3)$ та $C(0; 4; 2)$. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, їхні довжини; суму, різницю, скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$; кут між векторами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Розв'язання:

координати векторів:

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = \overrightarrow{AB}(2 + 2; -2 - 2; 3 - 1) = \overrightarrow{AB}(4; -4; 2),$$

$$\overrightarrow{AC}(x_C - x_A; y_C - y_A; z_C - z_A) = \overrightarrow{AC}(0 + 2; 4 - 2; 2 - 1) = \overrightarrow{AC}(2; 2; 1);$$

довжини векторів:

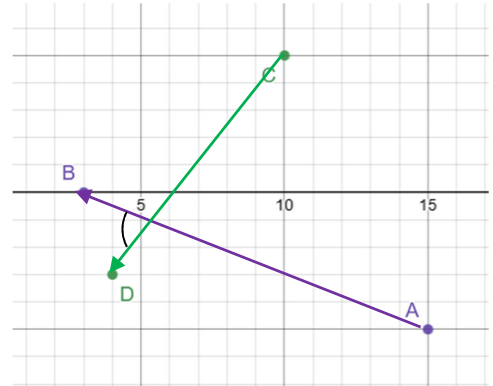
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{AB_x^2 + AB_y^2 + AB_z^2} = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{36} = 6,$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{AC_x^2 + AC_y^2 + AC_z^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3;$$

сума і різниця векторів:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}(4 + 2; -4 + 2; 2 + 1) = \overrightarrow{AB}(6; -2; 3), \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}(4 - 2; -4 - 2; 2 - 1) = \overrightarrow{AB}(2; -6; 1);$$

скалярний добуток: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \cdot 2 + (-4) \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 8 - 8 + 2 = 2$;



косинус кута між векторами: $\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{2}{6 \cdot 3} \approx 0,111$, тоді кут між

векторами $\varphi \approx 84^\circ$.

Відповідь: $\overrightarrow{AB}(4;-4;2)$, $\overrightarrow{AC}(2;2;1)$; $|\overrightarrow{AB}|=6$, $|\overrightarrow{AC}|=3$; сума $\overrightarrow{(6;-2;3)}$, різниця $\overrightarrow{(2;-6;1)}$; скалярний добуток 2; кут 84° .

3. Дано вектор $\vec{a}(1; -1; \sqrt{2})$. Знайдіть модуль та напрямні кути вектора.

Розв'язання:

Модуль вектора $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2$.

Направляючі косинуси: $\cos \alpha = \frac{a_x}{|a|} = \frac{1}{2}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|a|} = -\frac{1}{2}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|a|} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Направляючі кути: $\alpha = \arccos \frac{1}{2} = 60^\circ$, $\beta = \arccos \left(-\frac{1}{2} \right) = 120^\circ$, $\gamma = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ$.

Відповідь: $|\vec{a}| = 2, \alpha = 60^\circ, \beta = 120^\circ, \gamma = 45^\circ$.

4. Дано вектори $\vec{a}(7;-4;4)$, $\vec{b}(-3;2;6)$, $\vec{c}(-4;4;2)$. Знайдіть скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$, векторний добуток $\vec{a} \times \vec{b}$, мішаний добуток $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$.

Розв'язання:

Скалярный добуток $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 7 \cdot (-3) - 4 \cdot 2 + 4 \cdot 6 = -5$.

Векторный добуток $\vec{a} \times \vec{b} =$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 7 & -4 & 4 \\ -3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 7 & -4 & 4 \\ -3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 7 & -4 & 4 \\ -3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= \underline{-24\vec{i}} - 12\vec{j} + 14\vec{k} - 12\vec{k} - 8\vec{i} - 42\vec{j} = -32\vec{i} - 54\vec{j} + 2\vec{k} = (-32; -54; 2).$$

Мішаний добуток:

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \overline{(-32; -54; 2)} \cdot \overline{(-4; 4; 2)} = -32 \cdot (-4) - 54 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = -84;$$

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} -4 & 4 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 7 & 6 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 7 & -3 \end{vmatrix} = 28 + 96 - 48 + 32 - 168 - 24 = -84.$$

Відповідь: $\vec{a} \cdot \vec{b} = -5$; $\vec{a} \times \vec{b} = \overrightarrow{(-32; -54; 2)}$; $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = -84$.

5. Знайдіть площу паралелограма і трикутника, побудованих на векторах $\vec{a}(-2;3;4)$, $\vec{b}(2;2;1)$.

Розв'язування:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ -2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k} - 6\vec{k} - 8\vec{i} + 2\vec{j} = \overline{(-5; 10; -10)}.$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{5^2 + 10^2 + 10^2} = \sqrt{225} = 15, S_{\diamond} = 15 \text{ кв.од.}, S_{\Delta} = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ кв.од.}$$

Відповідь: 15; 7,5.

6. Знайдіть об'єм паралелепіпеда та об'єм піраміди, побудованих на векторах $\vec{a}(4;1;1)$, $\vec{b}(1;1;0)$, $\vec{c}(0;0;58)$.

Розв'язання:

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 58 \end{vmatrix} = 58 \cdot (4 - 1) = 174, V_{\square} = 174 \text{ куб.од.}, V_{\Delta} = \frac{174}{6} = 29 \text{ куб.од.}$$

Відповідь: 174; 29.

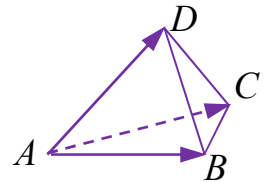
7. Дано вершини піраміди $A(1;2;3)$, $B(-3;10;4)$, $C(8;6;-1)$, $D(-2;4;9)$. Знайдіть: 1) координати та модулі векторів $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$; 2) кут між векторами $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ (відповідними ребрами); 3) площу грані ABC ; 4) об'єм піраміди $ABCD$.

Розв'язання:

$$1) \vec{AB}(-4;8;1), |\vec{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 8^2 + 1^2} = \sqrt{81} = 9 \text{ од.};$$

$$\vec{AC}(7;4;-4); |\vec{AC}| = \sqrt{7^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{81} = 9 \text{ од.};$$

$$\vec{AD}(-3;2;6), |\vec{AD}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7 \text{ од.}.$$



$$2) \cos \varphi = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|}, \vec{AB} \cdot \vec{AC} = -4 \cdot 7 + 8 \cdot 4 + 1 \cdot (-4) = -28 + 32 - 4 = 0, \varphi = 90^\circ.$$

$$3) \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 8 & 1 \\ 7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ -4 & 8 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = -32\vec{i} + 7\vec{j} - 16\vec{k} - 56\vec{k} - 4\vec{i} - 16\vec{j} = (-36; -9; -72).$$

$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{(-36)^2 + (-9)^2 + (-72)^2} = 9\sqrt{4^2 + 1 + 8^2} = 81, S_{ABC} = 40,5 \text{ кв.од.}.$$

$$4) (\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD} = \begin{vmatrix} -4 & 8 & 1 \\ 7 & 4 & -4 \\ -3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 8 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = -96 + 96 + 14 + 12 - 32 - 336 = -342,$$

$$V_{ABCD} = 57 \text{ куб.од.}.$$

Відповідь: 1) $\vec{AB}(-4;8;1)$, $|\vec{AB}| = 9 \text{ од.}$; $\vec{AC}(7;4;-4)$, $|\vec{AC}| = 9 \text{ од.}$; $\vec{AD}(-3;2;6)$, $|\vec{AD}| = 7 \text{ од.}$; 2) $\varphi = 90^\circ$; 3) $S_{ABC} = 40,5 \text{ кв.од.}$; 4) $V_{ABCD} = 57 \text{ куб.од.}$

3. Завдання для самостійного виконання

1. Дано точки на площині $A(\alpha - 5; -5)$, $B(\alpha + 7; 0)$, $C(7; 5 - \alpha)$, $D(4; 1 - \alpha)$. Знайдіть координати та довжини векторів $\vec{AB}$, $\vec{CD}$; вектори $2 \cdot \vec{AB}$, $-0,5 \cdot \vec{CD}$; суму, різницю, скалярний добуток векторів $\vec{AB}$, $\vec{CD}$; кут між векторами $\vec{AB}$, $\vec{CD}$.

2. Дано точки в просторі $A(2;1+\alpha;-7)$, $B(1;3+\alpha;-9)$, $C(-9;\alpha-1;3)$. Знайдіть координати та довжини векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$; суму, різницю, скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$; кут між векторами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

3. Дано вектор $\vec{a}(-1;0;\sqrt{3})$. Знайдіть модуль та напрямні кути вектора.

4. Дано вектори $\vec{a}(\alpha-3;-\alpha;\alpha)$, $\vec{b}(\alpha-7;\alpha+2;\alpha+6)$, $\vec{c}(-2\alpha;2\alpha;\alpha)$. Знайдіть скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$, векторний добуток $\vec{a} \times \vec{b}$, мішаний добуток $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$.

5. Знайдіть площу паралелограма і трикутника, побудованих на векторах $\vec{a}(-2;-3;4)$, $\vec{b}(2\alpha;-2\alpha;\alpha)$.

6. Знайдіть об'єм паралелепіпеда та об'єм піраміди, побудованих на векторах $\vec{a}(5;\alpha;36)$, $\vec{b}(1;1;0)$, $\vec{c}(0;0;36)$.

7. Дано вершини піраміди A , B , C , D . Знайдіть: 1) координати та модулі векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$; 2) кут між векторами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ (відповідними ребрами); 3) площу грані ABC ; 4) об'єм піраміди $ABCD$.

B.1. $A(-5;0;1)$, $B(-4;-2;3)$, $C(6;2;11)$, $D(3;4;9)$.

B.2. $A(1;-4;0)$, $B(2;-6;2)$, $C(12;-2;10)$, $D(9;0;8)$.

B.3. $A(-1;-2;-8)$, $B(0;-4;-6)$, $C(10;0;2)$, $D(7;2;0)$.

B.4. $A(0;2;-10)$, $B(1;0;-8)$, $C(11;4;0)$, $D(8;6;-2)$.

B.5. $A(3;1;-2)$, $B(4;-1;0)$, $C(14;3;8)$, $D(11;5;6)$.

B.6. $A(-8;3;-1)$, $B(-7;1;1)$, $C(3;5;9)$, $D(0;7;7)$.

B.7. $A(2;-1;-4)$, $B(3;-3;-2)$, $C(13;1;6)$, $D(10;3;4)$.

B.8. $A(-4;5;-5)$, $B(-3;3;-3)$, $C(7;7;5)$, $D(4;9;3)$.

B.9. $A(-2;-3;2)$, $B(-1;-5;4)$, $C(9;-1;12)$, $D(6;1;10)$.

B.10. $A(-3;4;-3)$, $B(-2;2;-1)$, $C(8;6;7)$, $D(5;8;5)$.

B.11. $A(2;-3;1)$, $B(6;1;-1)$, $C(4;8;-9)$, $D(2;-1;2)$.

B.12. $A(5;-1;-4)$, $B(9;3;-6)$, $C(7;10;-14)$, $D(5;1;-3)$.

B.13. $A(1;-4;0)$, $B(5;0;-2)$, $C(3;7;-10)$, $D(1;-2;1)$.

B.14. $A(-3;-6;2)$, $B(1;-2;0)$, $C(-1;5;-8)$, $D(-3;-4;3)$.

B.15. $A(-4;2;-1)$, $B(0;6;-3)$, $C(-2;13;-11)$, $D(-4;4;0)$.

B.16. $A(-2;5;-2)$, $B(-1;3;0)$, $C(9;7;8)$, $D(6;9;6)$.

B.17. $A(0;4;3)$, $B(4;8;1)$, $C(2;15;-7)$, $D(0;6;4)$.

B.18. $A(-2;0;-2)$, $B(2;4;-4)$, $C(0;11;-12)$, $D(-2;2;-1)$.

B.19. $A(3;3;-3)$, $B(7;7;-5)$, $C(5;14;-13)$, $D(3;5;-2)$.

B.20. $A(4;-2;5)$, $B(8;2;3)$, $C(6;9;-5)$, $D(4;0;6)$.

B.21. $A(-4;1;2)$, $B(-3;-1;4)$, $C(7;3;12)$, $D(4;5;10)$.

B.22. $A(2;-3;1)$, $B(3;-5;3)$, $C(13;-1;11)$, $D(10;1;9)$.

B.23. $A(0;-1;-7)$, $B(1;-3;-5)$, $C(11;1;3)$, $D(8;3;1)$.

B.24. $A(1;3;-9)$, $B(2;1;-7)$, $C(12;5;1)$, $D(9;7;-1)$.

B.25. $A(4;2;-1)$, $B(5;0;1)$, $C(15;4;9)$, $D(12;6;7)$.

B.26. $A(-7;4;0)$, $B(-6;2;2)$, $C(4;6;10)$, $D(1;8;8)$.

B.27. $A(3;0;-3)$, $B(4;-2;-1)$, $C(14;2;7)$, $D(11;4;5)$.

B.28. $A(-3;6;-4)$, $B(-2;4;-2)$, $C(8;8;6)$, $D(5;10;4)$.

B.29. $A(-1;-2;3)$, $B(0;-4;5)$, $C(10;0;13)$, $D(7;2;11)$.

B.30. $A(-1;1;-5)$, $B(3;5;-7)$, $C(1;12;-15)$, $D(-1;3;-4)$.

Модуль 2 «АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ»

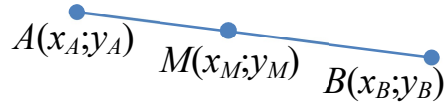
ЗАСТОСУВАННЯ КООРДИНАТ

1. Основні поняття та теореми

Відстань між точками $A(x_A; y_A)$ та $B(x_B; y_B)$ на площині визначається за формулою $d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Координати точки M , яка поділяє відрізок AB на частини у заданому відношенні $\lambda = \frac{AM}{MB}$, обчислюються за формулами $x_M = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}$, $y_M = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda}$.

Примітка: Якщо точка M – середина відрізка AB , то формули її координат мають вигляд $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$, $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$.



Приклади застосувань поділу відрізка у заданому відношенні:

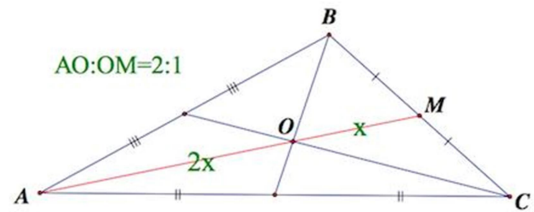
- медіана трикутника поділяє протилежну сторону навпіл;
- бісектриса трикутника поділяє протилежну сторону на два відрізки, які відносяться один до одного як відповідні бічні сторони трикутника;
- центр трикутника – точка перетину його медіан, в цій точці медіани діляться у відношенні $2 \div 1$, починаючи від вершин.

Для координат центра трикутника

$$x_O = \frac{x_A + 2x_M}{1 + 2}, \quad y_O = \frac{y_A + 2y_M}{1 + 2} \quad \text{при}$$

підстановці виразів для координат точки M як середини відрізка BC маємо формули

$$x_O = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \quad y_O = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$



Площа трикутника з вершинами $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ визначається

$$\text{за формулами } \pm S_{\Delta} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \text{ або } \pm S_{\Delta} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Приклади виконання завдань

1. Знайдіть відстань між точками $A(15; -5)$ та $B(3; 0)$; координати точок M_1 , M_2 , що поділяють відрізок AB у відношенні $3 \div 1$ та $1 \div 3$ відповідно.

Розв'язання:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(3 - 15)^2 + (0 + 5)^2} = \sqrt{(-12)^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13;$$

$$x_{M_1} = \frac{x_A + \lambda_1 x_B}{1 + \lambda_1} = \frac{15 + 3 \cdot 3}{1 + 3} = \frac{24}{4} = 6, \quad y_{M_1} = \frac{y_A + \lambda_1 y_B}{1 + \lambda_1} = \frac{-5 + 3 \cdot 0}{1 + 3} = \frac{-5}{4} = -1,25;$$

$$x_{M_2} = \frac{x_A + \lambda_2 x_B}{1 + \lambda_2} = \frac{15 + \frac{1}{3} \cdot 3}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{16}{\frac{4}{3}} = 12, \quad y_{M_2} = \frac{y_A + \lambda_2 y_B}{1 + \lambda_2} = \frac{-5 + \frac{1}{3} \cdot 0}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{-5}{\frac{4}{3}} = \frac{-15}{4}.$$

Відповідь: $d_{AB} = 13$, $M_1(6; -1,25)$, $M_2(12; -3,75)$.

2. Дано точки $A(-7; 2)$, $B(3; -4)$, $C(3; 8)$. Знайдіть площу і координати центра трикутника ABC .

Розв'язання:

$$\text{Площа трикутника дорівнює } \pm S_{\Delta} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 + 7 & -4 - 2 \\ 3 + 7 & 8 - 2 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 10 & -6 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} = \frac{60 + 60}{2} = 60 \text{ кв.од.}$$

Координати центра трикутника становлять

$$x_O = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{-7 + 3 + 3}{3} = -\frac{1}{3}, \quad y_O = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{2 - 4 + 8}{3} = 2.$$

Відповідь: 60 кв.од., $x_O = -\frac{1}{3}$, $y_O = 2$.

3. На координатній площині задано вершини трикутника $A(4; 1)$, $B(-1; 3)$, $C(2; -1)$. Знайдіть довжини медіани BM і висоти AN трикутника.

Розв'язання:

Координати точки M як середини AC : $x_M = \frac{4 + 2}{2} = 3$, $y_M = \frac{1 - 1}{2} = 0$. Тоді довжина медіани $BM = \sqrt{(3 + 1)^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$.

Оскільки $S_{\Delta} = \frac{1}{2} BC \cdot AN$, то $AN = \frac{2S_{\Delta}}{BC}$. Площа трикутника ABC дорівнює

$$\pm S_{\Delta} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 - 4 & 3 - 1 \\ 2 - 4 & -1 - 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (10 + 4) = 7 \text{ кв.од.}$$

Довжина сторони BC :

$$BC = \sqrt{(2 + 1)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5.$$

Тоді довжина висоти: $AN = \frac{2 \cdot 7}{5} = 2,8$.

Відповідь: $BM = 5$; $AN = 2,8$.

4. На координатній площині задано вершини трикутника $A(-4; 0)$, $B(-1; 4)$, $C(2; -8)$. Знайдіть довжину бісектриси AD трикутника.

Розв'язання:

Бісектриса AD поділяє сторону BC у відношенні $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$. Так як

$$AB = \sqrt{(-1 + 4)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5, \quad AC = \sqrt{(2 + 4)^2 + (-8 - 0)^2} = \sqrt{36 + 64} = 10,$$

то $\frac{BD}{DC} = \frac{5}{10} = 0,5 = \lambda$. Тоді $x_D = \frac{x_B + \lambda \cdot x_C}{1 + \lambda} = \frac{-1 + 0,5 \cdot 2}{1 + 0,5} = \frac{0}{1,5} = 0$,

$$y_D = \frac{y_B + \lambda \cdot y_C}{1 + \lambda} = \frac{4 + 0,5 \cdot (-8)}{1 + 0,5} = \frac{0}{1,5} = 0, \quad AD = \sqrt{(0 + 4)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{16 + 0} = 4.$$

Відповідь: $AD = 4$.

5. Вершини трикутника – точки $A(30; -25)$, $B(-28; 10)$, третя вершина C лежить на осі ординат. Точка M – точка перетину медіан трикутника – лежить на осі абсцис. Знайдіть абсцису точки M і ординату точки C .

Розв'язання:

Оскільки $C \in Oy$, $M \in Ox$, то $C(0; y_C)$, $M(x_M; 0)$. Так як M – центр трикутника, то $x_M = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{30 - 28 + 0}{3} = \frac{2}{3}$; $y_M = 0 = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$, звідки $y_C = -y_A - y_B = 25 - 10 = 15$.

Відповідь: $x_M = \frac{2}{3}$; $y_C = 15$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайдіть відстань між точками $A(\alpha + 5; 2\alpha + 1)$ та $B(-2\alpha + 2; -2\alpha - 3)$; координати точок M_1 , M_2 , що поділяють відрізок AB у відношенні $4 \div 1$ та $1 \div 4$ відповідно.

2. Дано точки $A(9; \alpha + 1)$, $B(2; 4 + \alpha)$, $C(4; \alpha - 2)$. Знайдіть площу і координати центра трикутника ABC .

3. На координатній площині задано вершини трикутника ABC . Знайдіть довжини медіани BM , висоти CN та бісектриси AD трикутника.

Варіант	A	B	C	Варіант	A	B	C
1.	(-3;1)	(0;5)	(6;-11)	2.	(-2;2)	(1;6)	(7;-10)
3.	(-1;3)	(2;7)	(8;-9)	4.	(0;4)	(3;8)	(9;-8)
5.	(1;5)	(4;9)	(10;-7)	6.	(2;6)	(5;10)	(11;-6)
7.	(3;7)	(6;11)	(12;-5)	8.	(4;8)	(7;12)	(13;-4)
9.	(5;9)	(8;13)	(14;-3)	10.	(-3;1)	(6;-11)	(0;5)
11.	(-2;2)	(7;-10)	(1;6)	12.	(-1;3)	(8;-9)	(2;7)
13.	(0;4)	(9;-8)	(3;8)	14.	(1;5)	(10;-7)	(4;9)
15.	(2;6)	(11;-6)	(5;10)	16.	(3;7)	(12;-5)	(6;11)
17.	(4;8)	(13;-4)	(7;12)	18.	(5;9)	(14;-3)	(8;13)
19.	(-4;0)	(2;-8)	(-1;4)	20.	(-3;1)	(3;-7)	(0;5)
21.	(-2;2)	(4;-6)	(1;6)	22.	(-1;3)	(5;-5)	(2;7)
23.	(0;4)	(6;-4)	(3;8)	24.	(1;5)	(7;-3)	(4;9)
25.	(2;6)	(8;-2)	(5;10)	26.	(3;7)	(9;-1)	(6;11)
27.	(4;8)	(10;0)	(7;12)	28.	(5;9)	(11;1)	(8;13)
29.	(6;10)	(12;2)	(9;14)	30.	(7;11)	(13;3)	(10;15)

ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ

1. Основні поняття та теореми

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом має вигляд $y = kx + b$, де $k = \operatorname{tg} \alpha$ – кутовий коефіцієнт прямої, тобто тангенс кута, який утворює пряма з додатним напрямком осі Ox , причому цей кут відраховується від осі Ox до прямої проти руху годинникової стрілки; b – початкова ордината прямої, тобто ордината точки, в якій пряма перетинає вісь Oy .

Рівняння прямої, що проходить через задану точку $(x_0; y_0)$ в заданому напрямі, який визначається кутовим коефіцієнтом k , має вигляд $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Кутовий коефіцієнт прямої, якщо відомі дві її точки $(x_1; y_1)$ та $(x_2; y_2)$, можна знайти за формулою $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Рівняння прямої, що проходить через дві

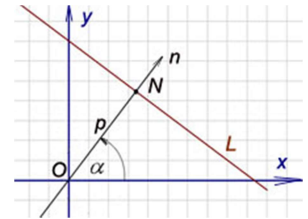
точки, має вигляд $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, звідки канонічне рівняння $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m}$, де $(\overrightarrow{l; m})$ – спрямовуючий вектор прямої.

Рівняння прямої у відрізках на осях $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, де a, b – відрізки, які пряма відтинає від початку координат відповідно на осі абсцис та осі ординат.

Всі наведені рівняння прямої можна звести до загального рівняння прямої $Ax + By + C = 0$, вектор $\vec{n}(A; B)$ – є нормаллю (перпендикуляром) до прямої.

Із загального рівняння прямої можна визначити кутовий коефіцієнт прямої $k = -\frac{A}{B}$ та початкову ординату прямої $b = -\frac{C}{B}$.

Нормальне рівняння прямої зарисується у вигляді $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$, де p – довжина перпендикуляра, який проведено з початку координат до прямої, α – кут, який цей перпендикуляр утворює з додатнім напрямком осі Ox і відлічується від осі проти годинникової стрілки.



Для приведення загального рівняння до нормального вигляду його множать на нормуючий множник $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ із знаком протилежним знаку C .

Координати точки перетину двох прямих є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$ Прямі перетинаються, якщо $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$, оскільки тоді система має єдиний розв'язок. Якщо система не має розв'язків, то прямі паралельні. Якщо система має безліч розв'язків, то прямі збігаються.

Кут φ між прямими визначається за формулою $\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$ (це формула

кута, що вимірюється від першої прямої до другої проти ходу годинникової стрілки). Якщо прямі задані загальними рівняннями, то кут між прямими можна

знайти як $\cos \varphi = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$.

Дві прямі паралельні на площині, якщо $k_2 = k_1$ або $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.

Дві прямі перпендикулярні на площині, якщо $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ або $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$.

Відстань від точки $(x_0; y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ рівна $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

2. Приклади виконання завдань

1. Дано точки $A(8;-3)$, $B(-4;6)$. Знайдіть канонічне і загальне рівняння прямої AB , кутовий коефіцієнт прямої, точки перетину прямої з осями координат, відстань від прямої до початку координат.

Розв'язання:

З $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ отримаємо рівняння прямої AB через дві точки

$$\frac{x-8}{-4-8} = \frac{y+3}{6+3}, \text{ звідки канонічне рівняння } \frac{x-8}{-12} = \frac{y+3}{9} \text{ або } \frac{x-8}{-4} = \frac{y+3}{3}.$$

Помножимо обидві частини на -12 , маємо $3(x-8) = -4(y+3)$, $3x-24 = -4y-12$, звідки загальне рівняння прямої $3x+4y-12=0$.

Виразимо y , отримаємо рівняння з кутовим коефіцієнтом: $4y = -3x+12$, $y = -\frac{3}{4}x+3$; отже, кутовий коефіцієнт прямої $k_{AB} = -\frac{3}{4}$.

Точки перетину з осями можна визначити з рівняння прямої у відрізках на осях $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Із загального рівняння маємо $3x+4y=12$, $\frac{3x}{12} + \frac{4y}{12} = 1$, $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$. Звідки координати точок перетину прямої з осями: $(4;0)$, $(0;3)$.

Координати точок перетину з осями можна визначити, наприклад, з рівняння $3x+4y-12=0$:

$x=0$, тоді $4y=12$, $y=3$, точка перетину з віссю ординат $(0;3)$;

$y=0$, тоді $3x=12$, $x=4$, точка перетину з віссю абсцис $(4;0)$.

Для отримання нормального рівняння помножимо загальне рівняння $3x+4y-12=0$ на нормуючий множник $\mu = +\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{1}{5}$, бо $\underbrace{3x}_A + \underbrace{4y}_B - \underbrace{12}_C = 0$, маємо $\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{12}{5} = 0$. Відстань від прямої до початку координат становить

$$d = p = 2,4.$$

Відповідь: $\frac{x-8}{-12} = \frac{y+3}{9}$; $3x+4y-12=0$; $k_{AB} = -\frac{3}{4}$; $(4;0)$; $(0;3)$; $d=2,4$.

2. Для чотирикутника з вершинами $A(-2;14)$, $B(4;-2)$, $C(6;-2)$, $D(6;10)$ знайдіть точку перетину діагоналей.

Розв'язання:

Рівняння AC : $\frac{x-x_A}{x_C-x_A} = \frac{y-y_A}{y_C-y_A}$; $\frac{x+2}{6+2} = \frac{y-14}{-2-14}$; $\frac{x+2}{8} = \frac{y-14}{-16}$; $2(x+2) = -(y-14)$; $2x+4 = -y+14$; $2x+4+y-14=0$; $2x+y-10=0$.

Рівняння BD : $\frac{x-x_B}{x_D-x_B} = \frac{y-y_B}{y_D-y_B}$; $\frac{x-4}{6-4} = \frac{y+2}{10+2}$; $\frac{x-4}{2} = \frac{y+2}{12}$; $6(x-4) = y+2$; $6x-24 = y+2$; $6x-24-y-2=0$; $6x-y-26=0$.

Точка перетину прямих є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} 2x + y - 10 = 0, \\ 6x - y - 26 = 0; \end{cases} +$

звідки $8x - 36 = 0$, $x_{\times} = \frac{36}{8} = \frac{9}{2} = 4,5$; тоді $2 \cdot 4,5 + y - 10 = 0$, $9 + y - 10 = 0$, $y_{\times} = 1$.

Відповідь: (4,5; 1).

3. Знайдіть кут між прямими а) $5x - y + 7 = 0$ і $3x + 2y = 0$; б) $\sqrt{3}x + y + 7 = 0$ і $x + \sqrt{3}y = 0$; в) $\sqrt{3}x - y + 7 = 0$ і $\sqrt{3}x + y = 0$.

Розв'язання:

а) I метод: застосуємо формулу $\cos \varphi = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$. Оскільки

$$\underbrace{5x}_{A_1} - \underbrace{1y}_{B_1} + 7 = 0, \quad \underbrace{3x}_{A_2} + \underbrace{2y}_{B_2} = 0, \quad \text{то} \quad \cos \varphi = \frac{|5 \cdot 3 + (-1) \cdot 2|}{\sqrt{5^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{13}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

звідки $\varphi = 45^\circ$.

II метод: застосуємо формулу $\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$. Оскільки кутові коефіцієнти прямих $k_1 = -\frac{A_1}{B_1} = 5$, $k_2 = -\frac{A_2}{B_2} = -\frac{3}{2}$, то $\operatorname{tg} \varphi = \frac{-1,5 - 5}{1 + 5 \cdot (-1,5)} = \frac{-6,5}{-6,5} = 1$, звідки $\varphi = 45^\circ$.

б) Із загальних рівнянь прямих маємо $\underbrace{\sqrt{3}x}_{A_1} + \underbrace{1y}_{B_1} + 7 = 0$, $\underbrace{1x}_{A_2} + \underbrace{\sqrt{3}y}_{B_2} = 0$, тоді

$$\cos \varphi = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = \frac{|\sqrt{3} \cdot 3 + 1 \cdot \sqrt{3}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \varphi = 30^\circ.$$

в) Оскільки кутові коефіцієнти прямих $k_1 = -\frac{A_1}{B_1} = \sqrt{3}$, $k_2 = -\frac{A_2}{B_2} = -\sqrt{3}$, то

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{-\sqrt{3} - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3} \cdot (-\sqrt{3})} = \frac{-2\sqrt{3}}{1 - 3} = \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3}, \quad \text{звідки} \quad \varphi = 60^\circ.$$

Відповідь: а) 45° ; б) 30° ; в) 60° .

4. Дано вершини $A(5;0)$, $B(0;1)$, $C(3;3)$ трикутника. Знайдіть рівняння сторін та кути трикутника.

$$AB: \frac{x-5}{0-5} = \frac{y-0}{1-0}; \frac{x-5}{-5} = \frac{y}{1}; x-5 = -5y; x+5y-5=0; k_{AB} = -\frac{1}{5}.$$

$$BC: \frac{x-0}{3-0} = \frac{y-1}{3-1}; \frac{x}{3} = \frac{y-1}{2}; 2x = 3(y-1); 2x-3y+3=0; k_{BC} = \frac{2}{3}.$$

$$AC: \frac{x-5}{3-5} = \frac{y-0}{3-0}; \frac{x-5}{-2} = \frac{y}{3}; 3(x-5) = -2y; 3x+2y-15=0; k_{AC} = -\frac{3}{2}.$$

$$\text{Для } \angle A \text{ маємо } \operatorname{tg} A = \frac{k_{AB} - k_{AC}}{1 + k_{AC} k_{AB}} = \frac{-0,2 - (-1,5)}{1 + (-1,5)(-0,2)} = \frac{-0,2 + 1,5}{1 + 0,3} = \frac{1,3}{1,3} = 1,$$

$\angle A = 45^\circ$.

$\angle C = 90^\circ$, бо k_{BC} і k_{AC} взаємно обернені та з протилежними знаками.

Так як $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$, то $\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C = 45^\circ$.

Відповідь: $x + 5y - 5 = 0$; $2x - 3y + 3 = 0$; $3x + 2y - 15 = 0$; $\angle A = 45^\circ$; $\angle B = 45^\circ$; $\angle C = 90^\circ$.

5. Напишіть рівняння прямої, що проходить а) через точку $(-1; 4)$ паралельно прямій $3x + 2y - 7 = 0$; б) через точку $(-2; 3)$ перпендикулярно прямій $4x - 5y + 6 = 0$.

Розв'язання:

Застосуємо рівняння прямої, що проходить через дану точку в даному напрямі $y - y_0 = k(x - x_0)$.

а) З рівняння $\underbrace{3x + 2y - 7 = 0}_{\substack{A \\ B}}$ маємо кутовий коефіцієнт $k = -\frac{A}{B} = -\frac{3}{2}$.

Шукана пряма паралельна даній, тому $k_{\parallel} = k = -\frac{3}{2}$. Маємо $y - 4 = -\frac{3}{2}(x + 1)$; $2(y - 4) = -3(x + 1)$; $2y - 8 = -3x - 3$; $3x + 2y - 5 = 0$.

б) З рівняння $\underbrace{4x - 5y + 6 = 0}_{\substack{A \\ B}}$ маємо кутовий коефіцієнт $k = -\frac{A}{B} = \frac{4}{5}$.

Шукана пряма перпендикулярна даній, тому $k_{\perp} = -\frac{1}{k} = -\frac{5}{4}$. Маємо $y - 3 = -\frac{5}{4}(x + 2)$; $4(y - 3) = -5(x + 2)$; $4y - 12 = -5x - 10$; $5x + 4y - 2 = 0$.

Відповідь: а) $3x + 2y - 5 = 0$; б) $5x + 4y - 2 = 0$.

6. Знайдіть відстань а) від прямої $3x - 4y + 6 = 0$ до точки $(-1; 2)$; б) від прямої $3x - y = 0$ до точки $(-4; -2)$.

Розв'язання:

$$\text{а) } d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3x_0 - 4y_0 + 6|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|3 \cdot (-1) - 4 \cdot 2 + 6|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|-3 - 8 + 6|}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1;$$

$$\text{б) } d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3x_0 - y_0|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{|3 \cdot (-4) - (-2)|}{\sqrt{9 + 1}} = \frac{|-12 + 2|}{\sqrt{10}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}.$$

Відповідь: а) 1; б) $\sqrt{10}$.

7. Точки $A(1; -3)$, $B(3; 1)$, $C(-4; 7)$ – вершини трикутника ABC . Складіть рівняння висоти CD та знайдіть її довжину.

Розв'язання:

Висота CD перпендикулярна стороні AB .

Знайдемо рівняння прямої AB : $\frac{x-1}{3-1} = \frac{y+3}{1+3}$; $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4}$; $2(x-1) = y+3$;

$2x - 2 = y + 3$; $2x - y - 5 = 0$; $y = 2x - 5$. Оскільки $k_{AB} = 2$, то кутовий

коефіцієнт висоти $k_{CD} = -\frac{1}{2}$.

Висота CD проходить через точку $C(-4;7)$. Застосуємо рівняння прямої у вигляді $y - y_0 = k(x - x_0)$, тоді рівняння висоти $y - 7 = -\frac{1}{2}(x + 4)$, $2(y - 7) = -(x + 4)$, $2y - 14 = -x - 4$, $x + 2y - 10 = 0$.

Довжина висоти CD – це відстань від точки $C(-4;7)$ до прямої $2x - y - 5 = 0$, отже маємо $d = \frac{|2x_0 - y_0 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|2(-4) - 7 - 5|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|-8 - 7 - 5|}{\sqrt{5}} = \frac{20}{\sqrt{5}} = \frac{20\sqrt{5}}{5} = 4\sqrt{5}$.

Відповідь: $x + 2y - 10 = 0$; $4\sqrt{5}$.

8. Задано координати вершин трикутника $A(-7;7)$, $B(8;-7)$, $C(9;18)$. Знайдіть: 1) довжини та рівняння сторін трикутника, їхні кутові коефіцієнти; 2) величину кута B ; 3) рівняння висоти CD та її довжину; 4) рівняння медіани AE та координати точки P перетину медіани з висотою CD ; 5) рівняння прямої p , що проходить через точку P паралельно до сторони AB .

Розв'язання:

1) Довжини сторін трикутника:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(8 - (-7))^2 + ((-7) - 7)^2} = \sqrt{15^2 + (-14)^2} = \sqrt{421} \approx 20,52,$$

$$d_{BC} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(9 - 8)^2 + (18 - (-7))^2} = \sqrt{1^2 + 25^2} = \sqrt{626} \approx 25,02,$$

$$d_{CA} = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(9 + 7)^2 + (18 - 7)^2} = \sqrt{16^2 + 11^2} = \sqrt{377} \approx 19,42.$$

Рівняння сторін знайдемо як рівняння прямих через дві точки:

$$AB: \frac{x+7}{8+7} = \frac{y-7}{-7-7}, \quad \frac{x+7}{15} = \frac{y-7}{-14}, \quad 14(x+7) = -15(y-7), \quad 14x+98 = -15y+105,$$

$$14x+15y-7=0, \quad k_{AB} = -\frac{14}{15};$$

$$BC: \frac{x-8}{9-8} = \frac{y+7}{18+7}; \quad \frac{x-8}{1} = \frac{y+7}{25}; \quad 25(x-8) = y+7, \quad 25x-200 = y+7,$$

$$25x-y-207=0, \quad k_{BC} = 25;$$

$$AC: \frac{x+7}{9+7} = \frac{y-7}{18-7}, \quad \frac{x+7}{16} = \frac{y-7}{11}, \quad 11(x+7) = 16(y-7), \quad 11x+77 = 16y-112,$$

$$11x-16y+189=0, \quad k_{AC} = \frac{11}{16}.$$

2) Шукаємо кут B . Це кут між прямими AB та BC . Так як $k_{AB} = -\frac{14}{15}$,

$$k_{BC} = 25, \text{ то } \operatorname{tg} B = \frac{k_{AB} - k_{BC}}{1 + k_{BC} k_{AB}} = \frac{-\frac{14}{15} - 25}{1 + \left(-\frac{14}{15}\right) \cdot 25} = \frac{-14 - 25 \cdot 15}{15 - 14 \cdot 25} = \frac{-389}{-335} \approx 1,16, \quad \angle B \approx 49^\circ.$$

3) Висота CD перпендикулярна стороні AB , тоді $k_{CD} = -\frac{1}{k_{AB}} = \frac{15}{14}$.

Підставимо в рівняння $y - y_0 = k(x - x_0)$ координати точки C та кутовий коефіцієнт висоти, дістанемо $y - 18 = \frac{15}{14}(x - 9)$, $14(y - 18) = 15(x - 9)$, $14y - 252 = 15x - 135$, $15x - 14y + 117 = 0$.

Довжина висоти CD – це відстань від точки $C(9;18)$ до прямої AB із загальним рівнянням $14x + 15y - 7 = 0$: $d_{CD} = \frac{|14 \cdot 9 + 15 \cdot 18 - 7|}{\sqrt{14^2 + 15^2}} = \frac{389}{\sqrt{421}} \approx 18,96$.

4) Медіана AE проведена до сторони BC . Точка E є серединою BC . Координати точки E : $x_E = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{8 + 9}{2} = 8,5$; $y_E = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-7 + 18}{2} = 5,5$.

Рівняння медіани AE , що проходить через точки $A(-7;7)$ і $E(8,5;5,5)$: $\frac{x+7}{8,5+7} = \frac{y-7}{5,5-7}$, $\frac{x+7}{15,5} = \frac{y-7}{-1,5}$, $\frac{x+7}{-31} = \frac{y-7}{3}$, $3x + 21 = -31y + 217$, $3x + 31y - 196 = 0$.

Щоб знайти координати точки P перетину висоти CD та медіани AE , розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} 15x - 14y + 117 = 0, \\ 3x + 31y - 196 = 0; \end{cases} \cdot 5 \quad \begin{cases} 15x - 14y + 117 = 0, \\ 15x + 155y - 980 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -169y + 1097 = 0, \\ y_P = \frac{1097}{169} \approx 6,49, \end{cases}$ тоді з $3x + 31y - 196 = 0$ маємо $3x + 31 \cdot 6,49 - 196 \approx 0$, звідки $3x \approx -5,19$, $x_P \approx -1,73$, $P(-1,73;6,49)$.

5) Пряма p паралельна до сторони AB , тому $k_{PL} = k_{AB} = -\frac{14}{15}$. Підставляючи в рівняння $y - y_0 = k(x - x_0)$ координати точки P та кутовий коефіцієнт прямої p , маємо $y - 6,49 = -\frac{14}{15}(x + 1,73)$ або $14x + 15y - 73,13 = 0$.

Відповідь: 1) $d_{AB} \approx 20,52$, $14x + 15y - 7 = 0$, $k_{AB} = -\frac{14}{15}$; $d_{BC} \approx 25,02$, $25x - y - 207 = 0$, $k_{BC} = 25$; $d_{AC} \approx 19,42$, $11x - 16y + 189 = 0$, $k_{AC} = \frac{11}{16}$; 2) $\angle B \approx 49^\circ$; 3) $15x - 14y + 117 = 0$, $d_{CD} \approx 18,96$; 4) $3x + 31y - 196 = 0$, $P(-1,73;6,49)$; 5) $14x + 15y - 73,13 = 0$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайдіть кут між прямими а) $5x + y - 7 = 0$ та $2x + 3y = 0$; б) $\sqrt{3}x + y + 7 = 0$ та $\sqrt{3}x - y = 0$; в) $\sqrt{3}x - y + 7 = 0$ та $x - \sqrt{3}y = 0$.

2. Напишіть рівняння прямої, що проходить через точку $(2;1)$ а) паралельно прямій $3x - 5y + 1 = 0$; б) перпендикулярно прямій $3x - 5y + 1 = 0$.

3. Знайдіть відстань а) від прямої $3x - 4y + 6 = 0$ до точки $(4;2)$; б) від прямої $7x - y - 6 = 0$ до точки $(-3;-2)$.

4. Дано вершини A , B , C трикутника. Знайдіть рівняння висоти CD та її довжину.

5. Дано вершини трикутника ABC . Знайдіть: 1) довжини та рівняння сторін трикутника, їхні кутові коефіцієнти; 2) величину кута B ; 3) рівняння висоти CD та її довжину; 4) рівняння медіани AE та координати точки P перетину медіани з висотою CD ; 5) рівняння прямої PL , що паралельна до сторони AB .

Варіант	A	B	C	Варіант	A	B	C
1	(-3;1)	(0;5)	(6;-11)	2	(-2;2)	(1;6)	(7;-10)
3	(-1;3)	(2;7)	(8;-9)	4	(0;4)	(3;8)	(9;-8)
5	(1;5)	(4;9)	(10;-7)	6	(2;6)	(5;10)	(11;-6)
7	(3;7)	(6;11)	(12;-5)	8	(4;8)	(7;12)	(13;-4)
9	(5;9)	(8;13)	(14;-3)	10	(-3;1)	(6;-11)	(0;5)
11	(-2;2)	(7;-10)	(1;6)	12	(-1;3)	(8;-9)	(2;7)
13	(0;4)	(9;-8)	(3;8)	14	(1;5)	(10;-7)	(4;9)
15	(2;6)	(11;-6)	(5;10)	16	(3;7)	(12;-5)	(6;11)
17	(4;8)	(13;-4)	(7;12)	18	(5;9)	(14;-3)	(8;13)
19	(-4;0)	(2;-8)	(-1;4)	20	(-3;1)	(3;-7)	(0;5)
21	(-2;2)	(4;-6)	(1;6)	22	(-1;3)	(5;-5)	(2;7)
23	(0;4)	(6;-4)	(3;8)	24	(1;5)	(7;-3)	(4;9)
25	(2;6)	(8;-2)	(5;10)	26	(3;7)	(9;-1)	(6;11)
27	(4;8)	(10;0)	(7;12)	28	(5;9)	(11;1)	(8;13)
29	(6;10)	(12;2)	(9;14)	30	(7;11)	(13;3)	(10;15)

ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ НА ПЛОЩИНІ

1. Основні поняття та теореми

Коло – це геометричне місце точок площини, кожна з яких рівновіддалена від однієї і тієї ж точки, яка називається *центром кола*, на відстань, що є *радіусом кола*. Рівняння кола має вигляд $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, де $(x_0; y_0)$ – координати центра кола, r – радіус кола.

Еліпсом називається геометричне місце точок площини, для кожної з яких сума відстаней від двох фіксованих точок площини (F_1 і F_2), які називаються *фокусами еліпса*, є сталою.

Канонічне рівняння еліпса з центром симетрії у початку координат має вигляд $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, де a – *велика піввісь* еліпса, b – *мала піввісь* еліпса ($a > b$).

Фокуси еліпса розташовані на великій осі: $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$, де $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

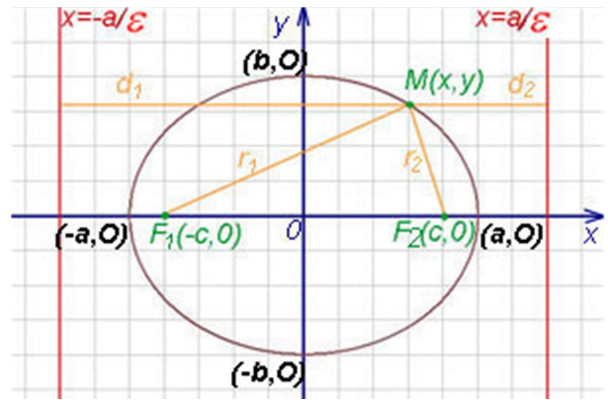
Ексцентриситет еліпса (ε) – відношення *фокальної відстані* ($2c$) до довжини його великої осі ($2a$), тобто $\varepsilon = \frac{c}{a}$. Для еліпса $0 < \varepsilon < 1$. Чим більше значення ε , тим сильніше еліпс відрізняється від кола.

Дві прямі, які перпендикулярні до великої осі, розташовані симетрично відносно центра на відстані $\frac{a}{\varepsilon}$ від нього, називаються *директрисами еліпса*.

Рівняння директрис $x = \pm \frac{a}{\varepsilon} = \pm \frac{a^2}{c}$.

Директриси розміщені за межами еліпса.

Ці прямі характерні тим, що відношення відстані між будь-якою точкою еліпса та найближчим фокусом до відстані від цієї точки до найближчої директриси є сталим і дорівнює ексцентриситету, тобто $\frac{r}{d} = \varepsilon$.



Якщо в канонічному рівнянні еліпса $a < b$, то a – мала піввісь (вздовж осі абсцис), b – велика піввісь (вздовж осі ординат), координати фокусів $F_1(0; -c)$, $F_2(0; c)$, де $c = \sqrt{b^2 - a^2}$, ексцентриситет визначається формулою $\varepsilon = \frac{2c}{2b} = \frac{c}{b}$, а

рівняння директрис $y = \pm \frac{b}{\varepsilon} = \pm \frac{b^2}{c}$.

Якщо $a = b = r$, то з рівняння еліпса отримаємо рівняння кола $x^2 + y^2 = r^2$. Для кола ексцентриситет $\varepsilon = 0$.

Побудова еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ виконується по точкам $(a; 0)$, $(-a; 0)$, $(0; b)$, $(0; -b)$.

Гіперболою називається геометричне місце точок площини, для кожної з яких модуль різниці відстаней від двох фіксованих точок площини (F_1 і F_2), які називаються *фокусами гіперболи*, є сталою.

Канонічне рівняння гіперболи з центром симетрії у початку координат має вигляд $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, де a – дійсна піввісь, b – уявна піввісь.

Гіпербола складається з двох нескінченних симетричних гілок (лівої та правої), які мають центри $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$ відповідно.

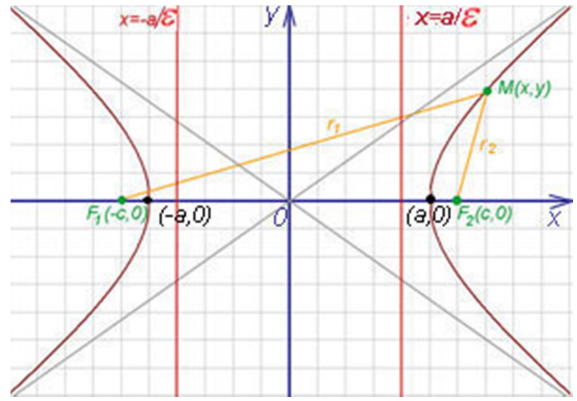
Фокуси гіперболи розташовані на дійсній осі: $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$, де $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Ексцентриситет гіперболи (ε) – відношення фокальної відстані ($2c$) до довжини її дійсної осі ($2a$), тобто $\varepsilon = \frac{c}{a}$. Для гіперболи $\varepsilon > 1$. Чим більше значення ε , тим ширше відкриті гілки гіперболи і тим сильніше вона відрізняється від параболи.

Дві прямі, які перпендикулярні до дійсної осі гіперболи, розташовані симетрично відносно центра на відстані $\frac{a}{\varepsilon}$ від нього, називаються *директрисами гіперболи*. Рівняння директрис $x = \pm \frac{a}{\varepsilon} = \pm \frac{a^2}{c}$. Директриси розміщені між гілками гіперболи.

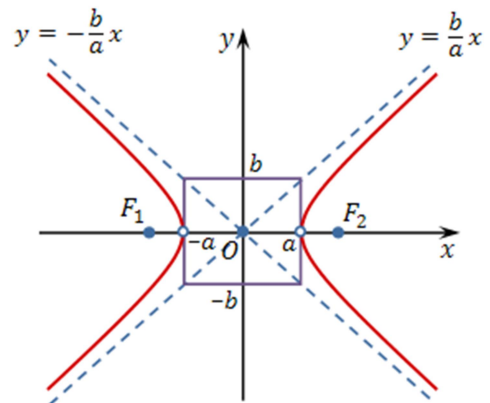
Ці прямі характерні тим, що відношення відстані між будь-якою точкою гіперболи та найближчим фокусом до відстані від цієї точки до найближчої директриси є сталим і дорівнює ексцентриситету, тобто $\frac{r}{d} = \varepsilon$.

Якщо $a = b$, то гіпербола є рівнобічною, її рівняння має вигляд $x^2 - y^2 = a^2$.



Якщо рівняння гіперболи має вигляд $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, то b – дійсна піввісь (вздовж осі ординат), a – уявна піввісь (вздовж осі абсцис); гіпербола складається з нижньої та верхньої гілок, які мають центри $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$ відповідно; координати фокусів $F_1(0; -c)$, $F_2(0; c)$; ексцентриситет гіперболи визначається формулою $\varepsilon = \frac{2c}{2b} = \frac{c}{b}$; рівняння директрис $y = \pm \frac{b}{\varepsilon} = \pm \frac{b^2}{c}$.

Прямі $y = \pm \frac{b}{a}x$ є асимптотами гіперболи (асимптотою називається пряма, що необмежено зближається з гілкою кривої на нескінченності). Асимптоти застосовують для побудови гіперболи. Для цього по точкам $(a; 0)$, $(-a; 0)$, $(0; b)$, $(0; -b)$ будують прямокутник зі сторонами паралельними координатним осям, проводять діагоналі прямокутника і продовжують їх за межі прямокутника – це асимптоти. Далі з вершин проводять вітки гіперболи, наближаючись до асимптот, але не перетинаючи їх.

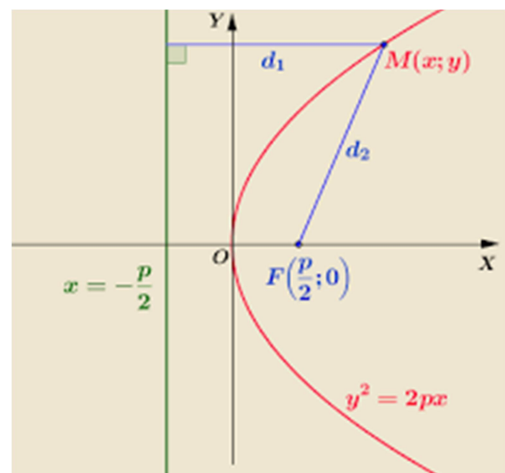


Параболою є геометричне місце точок площини, для кожної з яких відстань до деякої фіксованої точки площини (F), яка називається *фокусом параболі*, дорівнює відстані до деякої фіксованої прямої, що не проходить через фокус і називається *директрисою*.

Оскільки ексцентриситет – відношення відстані від будь-якої точки параболі до фокуса та відстані від цієї точки до директриси, то *ексцентриситет параболі* $\varepsilon = 1$.

Відстань від фокуса до директриси позначають p – це *параметр параболі*, $p > 0$.

Парабола має лише одну гілку. *Вершина* параболі розташована між фокусом і директрисою.



Канонічне рівняння параболи з вершиною у початку координат і вітками вправо має вигляд $y^2 = 2px$. Координати фокуса $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, рівняння директриси $x = -\frac{p}{2}$.

Рівняння $y^2 = -2xp$ ($p > 0$) визначає параболу з вершиною у початку координат і вітками вліво, оскільки $x \leq 0$. Координати фокуса $F\left(-\frac{p}{2}; 0\right)$, рівняння директриси $x = \frac{p}{2}$.

Рівняння $x^2 = 2yp$ ($p > 0$) визначає параболу з вершиною у початку координат і вітками вгору, оскільки $y \geq 0$. Координати фокуса $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$, рівняння директриси $y = -\frac{p}{2}$.

Рівняння $x^2 = -2yp$ ($p > 0$) визначає параболу з вершиною у початку координат і вітками вниз, оскільки $y \leq 0$. Координати фокуса $F\left(0; -\frac{p}{2}\right)$, рівняння директриси $y = \frac{p}{2}$.

Асимптот парабола не має.

Криві другого порядку ще називають конічними перерізами, оскільки їх можна отримати у перерізі конуса.

2. Приклади виконання завдань

1. Запишіть канонічне рівняння еліпса $144x^2 + 169y^2 = 24336$, визначте півосі, фокуси, ексцентриситет, рівняння директрис, побудуйте еліпс.

Розв'язання:

Поділимо обидві частини рівняння $144x^2 + 169y^2 = 24336$ на 24336, маємо $\frac{144x^2}{24336} + \frac{169y^2}{24336} = \frac{24336}{24336}$ або $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$, канонічне рівняння $\frac{x^2}{13^2} + \frac{y^2}{12^2} = 1$. Це еліпс з центром симетрії у початку координат і півосями $a = 13$, $b = 12$.

Визначаємо $c^2 = a^2 - b^2 = 169 - 144 = 25$, тоді $c = 5$, фокуси є $F_1(-5; 0)$ та $F_2(5; 0)$.

Ексцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{13}$. Рівняння директрис $x = \pm \frac{a^2}{c} = \pm \frac{169}{5}$.

Графік еліпса наведений.

Відповідь: $\frac{x^2}{13^2} + \frac{y^2}{12^2} = 1$; $a = 13$, $b = 12$; $F_1(-5; 0)$, $F_2(5; 0)$; $\varepsilon = \frac{5}{13}$; $x = \pm \frac{169}{5}$.

2. Запишіть канонічне рівняння гіперболи $25x^2 - 144y^2 = 3600$, визначте півосі, фокуси, ексцентриситет, рівняння директрис, рівняння асимптот, побудуйте гіперболу.

Розв'язання:

Поділимо обидві частини рівняння $25x^2 - 144y^2 = 3600$ на 3600, маємо $\frac{25x^2}{3600} - \frac{144y^2}{3600} = \frac{3600}{3600}$ або $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$, канонічне рівняння $\frac{x^2}{12^2} - \frac{y^2}{5^2} = 1$. Це гіпербола з центром симетрії у початку координат і півосями $a=12$ (дійсна), $b=5$ (уявна). Гілки гіперболи розташовані зліва і справа відносно її центра симетрії.

Визначаємо $c^2 = a^2 + b^2 = 144 + 25 = 169$, тоді $c=13$, отже фокусами є $F_1(-13;0)$ та $F_2(13;0)$.

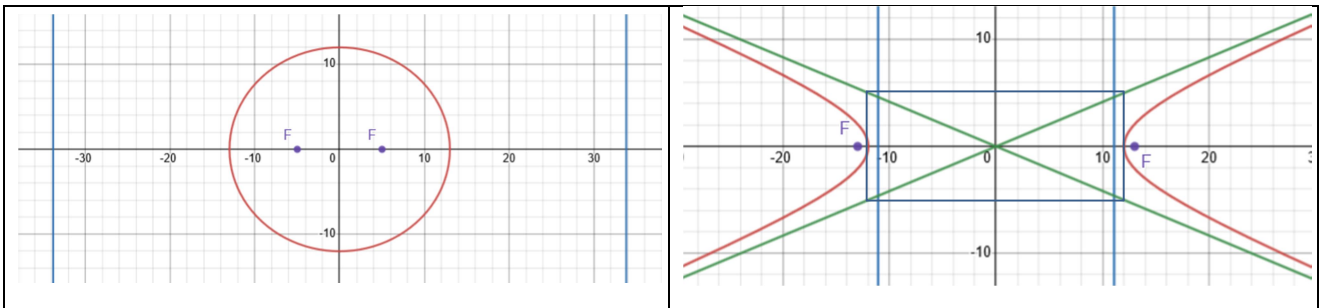
Ексцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{13}{12}$. Рівняння директрис $x = \pm \frac{a^2}{c} = \pm \frac{144}{13}$.

Рівняння асимптот $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{5}{12}x$.

Графік гіперболи наведений.

Відповідь: $\frac{x^2}{12^2} - \frac{y^2}{5^2} = 1$; $a=12$, $b=5$; $F_1(-13;0)$, $F_2(13;0)$; $\varepsilon = \frac{13}{12}$; $x = \pm \frac{144}{13}$;

$y = \pm \frac{5}{12}x$.



3. Запишіть канонічне рівняння гіперболи $9y^2 - 16x^2 = 144$, визначте півосі, фокуси, ексцентриситет, рівняння директрис, рівняння асимптот, побудуйте гіперболу.

Розв'язання:

Поділимо обидві частини рівняння $9y^2 - 16x^2 = 144$ на 144, маємо $\frac{9y^2}{144} - \frac{16x^2}{144} = \frac{144}{144}$ або $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$, канонічне рівняння $\frac{y^2}{4^2} - \frac{x^2}{3^2} = 1$. Це гіпербола з центром симетрії у початку координат і півосями $b=4$ (дійсна), $a=3$ (уявна). Гілки гіперболи розташовані зверху і знизу відносно її центра симетрії.

Визначаємо $c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25$, тоді $c=5$, отже фокусами є $F_1(0;-5)$ та $F_2(0;5)$.

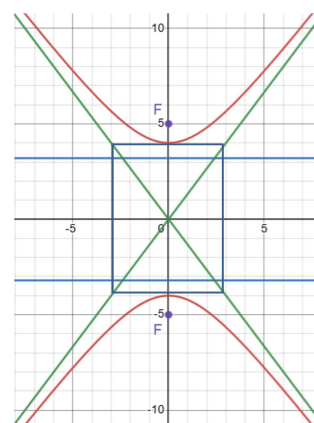
Ексцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{5}{4}$. Рівняння директрис $y = \pm \frac{b^2}{c} = \pm \frac{16}{5}$.

Рівняння асимптот гіперболи $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{4}{3}x$.

Графік гіперболи наведений.

Відповідь: $\frac{y^2}{4^2} - \frac{x^2}{3^2} = 1$; $b = 4$, $a = 3$; $F_1(0; -5)$, $F_2(0; 5)$;

$$\varepsilon = \frac{5}{4}; y = \pm \frac{16}{5}; y = \pm \frac{4}{3}x.$$



4. Запишіть канонічне рівняння параболи $y^2 + 20x = 0$, визначте параметр, фокус, рівняння директриси, побудуйте параболу.

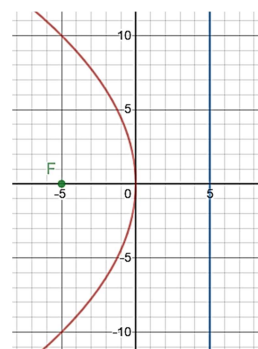
Розв'язання:

Канонічне рівняння $y^2 = -20x$. Це параболу з вершиною в початку відліку, вітки параболи спрямовані вліво.

Оскільки $20 = 2p$, то параметр $p = 10$. Фокусом є $F(-5; 0)$, рівняння директриси $x = 5$.

Графік параболи наведений.

Відповідь: $y^2 = -20x$; $p = 10$; $F(-5; 0)$; $x = 5$.



3. Завдання для самостійного виконання

1. Запишіть канонічне рівняння еліпса $\alpha^2 x^2 + (\alpha + 2)^2 y^2 = \alpha^2 (\alpha + 2)^2$, визначте півосі, фокуси, ексцентриситет, рівняння директрис, побудуйте еліпс.

2. Запишіть канонічне рівняння гіперболи $(\alpha + 2)^2 x^2 - \alpha^2 y^2 = (\alpha + 2)^2 \alpha^2$, визначте півосі, фокуси, ексцентриситет, рівняння директрис, рівняння асимптот, побудуйте гіперболу.

3. Запишіть канонічне рівняння параболи $y^2 - 2\alpha x = 0$, визначте параметр, фокус, рівняння директриси, побудуйте параболу.

ПЕРЕТВОРЕННЯ КООРДИНАТ НА ПЛОЩИНІ

1. Основні поняття та теореми

Паралельне перенесення – перетворення координат точок із збереженням напрямку координатних осей, але із зміною положення початку координат. Нехай $(a; b)$ – координати початку відліку O' «нової» системи координат $O'x'y'$ відносно «старої» системи координат Oxy , тоді формули заміни «старих» координат «новими» координатами мають вигляд $x = x' + a$, $y = y' + b$; а формули $x' = x - a$, $y' = y - b$ виражають «нові» координати через «старі» координати.

Поворот осей координат навколо центра системи координат – перетворення, при якому не змінюється положення початку координат, але координатні осі повертаються на деякий кут α . Якщо поворот відбувся проти ходу годинникової стрілки, то формули заміни «старих» координат «новими» мають вигляд $x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha$, $y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$; а формули $x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha$, $y' = y \cos \alpha - x \sin \alpha$ виражають «нові» координати через «старі» координати.

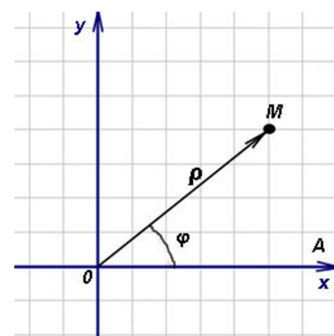
За допомогою паралельного перенесення та повороту загальне рівняння кривої другого порядку $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ можна привести або до канонічних рівнянь еліпса, гіперболи чи параболи, або до випадків їх «виродження».

Декартова (прямокутна) система координат – не єдиний спосіб задавання положення точок на площині. Полярна система координат – двовимірна система координат, що задається променем (полярна вісь) і точкою (поліус), з якої виходить цей промінь. Будь-яка інша точка на площині визначається двома полярними координатами: радіальна координата ρ – відстань від точки до поліуса; кутова координата φ (полярний кут) – кут між полярною віссю та напрямком на точку.

Якщо поліус полярної системи координат знаходиться у початку прямокутної системи координат, вісь Ox співпадає з полярною віссю, вісь Oy спрямована так, що їй

відповідає полярний кут $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то формули переходу від полярних координат точки до її прямокутних координат: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. а формули переходу від прямокутних координат точки до її полярних координат:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$



Деякі криві з центральною симетрією зручно представляти саме в полярних координатах.

2. Приклади виконання завдань

1. Визначте центр і радіус кола $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$.

Розв'язання:

Зведемо рівняння до вигляду $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$. Для цього виділимо повні квадрати $x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 6y + 9 - 9 - 3 = 0$, $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$.

Відповідь: центр кола $(2; -3)$, радіус кола $r = 4$.

2. Запишіть канонічне рівняння параболи $y^2 - 24x + 4y + 76 = 0$, визначте вершину, параметр, фокус, рівняння директриси.

Розв'язання:

Зведемо рівняння до вигляду $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$, де $(x_0; y_0)$ – вершина параболи. Для цього виділимо повний квадрат $y^2 + 2y \cdot 2 + 4 - 4 - 24x + 76 = 0$, $(y + 2)^2 = 24x - 72$, тоді маємо $(y + 2)^2 = 24(x - 3)$. Вершина параболи $(3; -2)$, параметр $p = 12$.

Відносно вершини параболи $(3; -2)$ координати фокуса $F'(6; 0)$, рівняння директриси $x' = -6$. У системі координат з центром $(0; 0)$ координати фокуса $F(9; -2)$, рівняння директриси $x = -3$.

Відповідь: $(y + 2)^2 = 24(x - 3)$; $(3; -2)$; $p = 12$; $F(9; -2)$; $x = -3$.

3. Запишіть канонічне рівняння еліпса $25x^2 + 16y^2 - 50x + 32y - 359 = 0$, визначте центр симетрії, півосі, фокуси, ексцентриситет, рівняння директрис.

Розв'язання:

Зведемо рівняння до вигляду $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$, де $(x_0; y_0)$ – центр симетрії еліпса. Маємо $25x^2 - 50x + 25 - 25 + 16y^2 + 32y + 16 - 16 - 359 = 0$, $25(x-1)^2 + 16(y+1)^2 = 400$, $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{25} = 1$, $\frac{(x-1)^2}{4^2} + \frac{(y+1)^2}{5^2} = 1$.

Це канонічне рівняння еліпса з центром симетрії $(1; -1)$ і півосями $a = 4$, $b = 5$. Визначаємо $c^2 = 25 - 16 = 9$, $c = 3$, тоді ексцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{3}{5}$.

Відносно центра симетрії еліпса координати фокусів $F_1'(0; -3)$, $F_2'(0; 3)$, рівняння директрис $y' = \pm \frac{b^2}{c} = \pm \frac{25}{3}$. У системі координат з центром $(0; 0)$ координати фокусів $F_1(1; -4)$, $F_2(1; 2)$, рівняння директрис $y = \pm \frac{25}{3} - 1$.

Відповідь: $\frac{(x-1)^2}{4^2} + \frac{(y+1)^2}{5^2} = 1$; $(1; -1)$, $a = 4$, $b = 5$; $\varepsilon = \frac{3}{5}$; $F_1(1; -4)$, $F_2(1; 2)$; $y = -\frac{28}{3}$ та $y = \frac{22}{3}$.

4. Запишіть канонічне рівняння гіперболи $4x^2 - 9y^2 - 8x + 18y - 41 = 0$, визначте центр симетрії, півосі, фокуси, ексцентриситет, рівняння директрис, рівняння асимптот.

Розв'язання:

Зведемо рівняння до вигляду $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$, де $(x_0; y_0)$ – центр симетрії гіперболи. Маємо $4x^2 - 8x + 4 - 4 - 9y^2 + 18y - 9 + 9 - 41 = 0$, звідки $4(x-1)^2 - 9(y-1)^2 = 36$, $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$, $\frac{(x-1)^2}{3^2} - \frac{(y-1)^2}{2^2} = 1$.

Це канонічне рівняння гіперболи з центром симетрії $(1; 1)$ і півосями $a = 3$, $b = 2$. Визначаємо $c^2 = 9 + 4 = 13$, $c = \sqrt{13}$, тоді ексцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3}$.

Відносно центра симетрії гіперболи координати фокусів $F_1'(-\sqrt{13}; 0)$, $F_2'(\sqrt{13}; 0)$, рівняння директрис $x' = \pm \frac{a^2}{c} = \pm \frac{9}{\sqrt{13}}$, рівняння асимптот $y' = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{2}{3}x$. У системі координат з центром $(0; 0)$ координати фокусів $F_1(-\sqrt{13} + 1; 1)$, $F_2(\sqrt{13} + 1; 1)$, рівняння директрис $x = \pm \frac{9}{\sqrt{13}} + 1$, рівняння асимптот $y - 1 = \pm \frac{2}{3}(x - 1)$.

Відповідь: $\frac{(x-1)^2}{3^2} - \frac{(y-1)^2}{2^2} = 1$; $(1;1)$, $a=3$, $b=2$; $\varepsilon = \frac{\sqrt{13}}{3}$; $F_1(-\sqrt{13}+1;1)$, $F_2(\sqrt{13}+1;1)$; $x = \pm \frac{9}{\sqrt{13}} + 1$; $y-1 = \pm \frac{2}{3}(x-1)$.

5. Знайдіть декартові координати точки, полярні координати якої $\left(52; -\frac{\pi}{4}\right)$.

Розв'язання:

Застосуємо формули переходу від полярних координат до прямокутних координат: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. З умови маємо $\rho = 52$, $\varphi = -\frac{\pi}{4}$. Тоді

$$x = \rho \cos \varphi = 52 \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 26\sqrt{2}, \quad y = \rho \sin \varphi = 52 \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -26\sqrt{2}.$$

Відповідь: $(26\sqrt{2}; -26\sqrt{2})$.

6. Знайдіть полярні координати точки, декартові координати якої $(-50; 50\sqrt{3})$.

Розв'язання:

Застосуємо формули переходу від прямокутних координат до полярних координат: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$. З дано маємо $x = -50$, $y = 50\sqrt{3}$. Тоді

$$\rho = \sqrt{2500 + 7500} = 100; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{50\sqrt{3}}{-50} = -\sqrt{3}. \quad \text{Так як } x < 0, \quad y > 0, \quad \text{то точка лежить}$$

в другій координатній чверті, $\varphi = \pi - \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

Відповідь: $\left(100; \frac{2\pi}{3}\right)$.

7. Знайдіть радіус та центр кола з рівнянням у полярних координатах $\rho = 70 \cos \varphi$.

Розв'язання:

Помножимо обидві частини $\rho = 70 \cos \varphi$ на ρ , маємо $\rho^2 = 70 \rho \cos \varphi$. Підставимо вирази $\rho^2 = x^2 + y^2$, $x = \rho \cos \varphi$, маємо $x^2 + y^2 = 70x$. Перетворимо рівняння кола до вигляду $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r$, маємо $x^2 - 70x + 35^2 + y^2 = 35^2$ або $(x - 35)^2 + y^2 = 35^2$. Це рівняння кола з центром у точці $(35; 0)$ та радіусом 35.

Відповідь: $(35; 0)$, 35.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Визначте центр і радіус кола $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 4y - 5 + \alpha^2 = 0$.

2. Запишіть канонічне рівняння параболи $y^2 - 24x - 4y + 4 + 24\alpha = 0$, визначте вершину, параметр, фокус, рівняння директриси.

3. Запишіть канонічне рівняння еліпса $25x^2 + 16y^2 - 50\alpha x - 64y - 336 + 25\alpha^2 = 0$, визначте центр симетрії, півосі, фокуси, ексцентриситет, рівняння директрис.

4. Запишіть канонічне рівняння гіперболи $4x^2 - 9y^2 - 8\alpha x + 36y - 72 + 4\alpha^2 = 0$, визначте центр симетрії, півосі, фокуси, ексцентриситет, рівняння директрис, рівняння асимптот.

5. Знайдіть декартові координати точки, полярні координати якої $\left(2 + \alpha; \frac{\pi}{3}\right)$.

6. Знайдіть полярні координати точки, декартові координати якої $(-\alpha; \alpha\sqrt{3})$.

7. Знайдіть радіус та центр кола з рівнянням у полярних координатах $\rho = 2\alpha \sin \varphi$.

ПЛОЩИНА ЯК ПОВЕРХНЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

1. Основні поняття та теореми

Площина – найпростіша поверхня.

Рівняння площини – рівняння першого порядку.

Рівняння площини можна записати у різних виглядах.

Загальне рівняння площини $Ax + By + Cz + D = 0$, де A, B, C – координати вектора нормалі $\vec{n}$. Нормаль – перпендикуляр до поверхні. Нормаль визначає орієнтацію площини в просторі.

Рівняння площини, яка проходить через дану точку $(x_0; y_0; z_0)$ в даному напрямі (напрямок визначає нормаль до площини $\vec{n}$), записується як $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Рівняння площини, яка проходить через три задані точки $(x_1; y_1; z_1)$, $(x_2; y_2; z_2)$, $(x_3; y_3; z_3)$ має вигляд
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Рівняння площини у відрізках на координатних осях $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ вказує, що площина відтинає на координатних осях такі відрізки: a – на осі Ox , b – на осі Oy , а c – на осі Oz .

Нормальне рівняння площини має вигляд $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$, де α, β, γ – кути, що перпендикуляр, проведений з початку відліку на площину, утворює з координатними осями, p – довжина цього перпендикуляра.

Для приведення загального рівняння до нормального вигляду його потрібно помножити на нормуючий множник $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ (знак множника протилежний знаку коефіцієнта D у загальному рівнянні).

Кут між площинами $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ рівний куту між нормальми цих площин і визначається формулою

$$\cos \varphi = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Умова паралельності двох площин має вигляд $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Умова перпендикулярності площин має вигляд $A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$.

Відстань від точки $(x_0; y_0; z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$

визначається за формулою $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

2. Приклади виконання завдань

1. Складіть рівняння площини, що проходить через точку $(2; 1; -1)$ і має нормаль $(1; -2; 3)$. Які відрізки відтинає площина на координатних осях?

Розв'язання:

Застосуємо рівняння площини, яка проходить через точку $(x_0; y_0; z_0)$ і має вектор нормалі $\vec{n}(A; B; C)$, тобто $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Маємо $1(x - 2) - 2(y - 1) + 3(z + 1) = 0$. Розкриємо дужки $x - 2 - 2y + 2 + 3z + 3 = 0$, зведемо подібні доданки $x - 2y + 3z + 3 = 0$. Це загальне рівняння площини.

Перетворимо рівняння до вигляду $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Для цього перенесемо 3 вправо, маємо $x - 2y + 3z = -3$; поділимо на -3 обидві частини рівняння, отримаємо $\frac{x}{-3} - \frac{2y}{-3} + \frac{3z}{-3} = \frac{-3}{-3}$, виконаємо скорочення в межах кожного дробу $\frac{x}{-3} + \frac{y}{1,5} + \frac{z}{-1} = 1$. Звідки видно, що площина відтинає відрізок $a = -3$ на осі абсцис, відрізок $b = 1,5$ на осі ординат, відрізок $c = -1$ на осі аплікат.

Відповідь: $x - 2y + 3z + 3 = 0$; $a = -3$, $b = 1,5$, $c = -1$.

2. Яка відстань від площини $10x + 15y - 6z - 380 = 0$ до початку відліку?

Розв'язання:

Перетворимо загальне рівняння площини в нормальне. Оскільки $A = 10$, $B = 15$, $C = -6$, $D < 0$, то нормуючий множник $\mu = + \frac{1}{\sqrt{10^2 + 15^2 + (-6)^2}} = \frac{1}{19}$,

нормальне рівняння площини $\frac{10}{19}x + \frac{15}{19}y - \frac{6}{19}z - 20 = 0$, звідки $p = 20$.

Відповідь: 20.

3. Які кути з координатними осями утворює перпендикуляр до площини $x - y + \sqrt{2}z - 2 = 0$, проведений з початку відліку?

Розв'язання:

Нормуючий множник рівний $\mu = + \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (\sqrt{2})^2}} = \frac{1}{2}$, тоді нормальне

рівняння площини $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z - 1 = 0$, де $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, $\cos \beta = -\frac{1}{2}$, $\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Звідки отримаємо кути, які перпендикуляр до площини утворює з координатними осями: $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 45^\circ$.

Відповідь: $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 45^\circ$.

4. Складіть рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(2;2;-4)$, $M_2(1;1;2)$, $M_3(3;0;-1)$.

Розв'язання:

Застосуємо рівняння площини, що проходить через три точки, тобто

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad \text{Підставимо координати точок, отримаємо}$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z+4 \\ 1-2 & 1-2 & 2+4 \\ 3-2 & 0-2 & -1+4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{або} \quad \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z+4 \\ -1 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\text{Розкриємо визначник будь-яким способом} \quad \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z+4 \\ -1 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x-2 & y-2 \\ -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

. Отримаємо $-3(x-2)+6(y-2)+2(z+4)+1(z+4)+12(x-2)+3(y-2)=0$ або $9(x-2)+9(y-2)+3(z+4)=0$, поділимо на спільний дільник коефіцієнтів дужок $3(x-2)+3(y-2)+(z+4)=0$, розкриємо дужки $3x-6+3y-6+z+4=0$, зведемо подібні доданки $3x+3y+z-8=0$. Отримали загальне рівняння площини.

Підставивши координати заданих точок у знайдене рівняння площини $3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + (-4) - 8 \equiv 0$, $3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2 - 8 \equiv 0$, $3 \cdot 3 + 3 \cdot 0 + (-1) - 8 \equiv 0$, переконаємось, що загальне рівняння площини знайдено вірно.

Відповідь: $3x+3y+z-8=0$.

5. Задано точки $M_1(-1;1;-2)$, $M_2(1;0;4)$, $M_3(3;2;1)$. Знайдіть загальне та нормальне рівняння площини, що проходить через ці точки; запишіть вектор нормалі до площини.

Розв'язання:

Підставивши координати заданих точок у рівняння площини, що проходить

$$\text{через три точки, маємо} \quad \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z+2 \\ 1+1 & 0-1 & 4+2 \\ 3+1 & 2-1 & 1+2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{або} \quad \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z+2 \\ 2 & -1 & 6 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Для отримання загального рівняння розкриємо визначник

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z+2 \\ 2 & -1 & 6 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x+1 & y-1 \\ 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -3(x+1)+24(y-1)+2(z+2)+4(z+2)-6(x+1)-6(y-1)=0;$$

перетворимо $-9(x+1)+18(y-1)+6(z+2)=0$, $3(x+1)-6(y-1)-2(z+2)=0$, $3x+3-6y+6-2z-4=0$, $3x-6y-2z+5=0$.

Підставивши координати заданих точок у знайдене рівняння площини $3 \cdot (-1) - 6 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) + 5 \equiv 0$, $3 \cdot 1 - 6 \cdot 0 - 2 \cdot 4 + 5 \equiv 0$, $3 \cdot 3 - 6 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 5 \equiv 0$, переконаємось, що загальне рівняння площини знайдено вірно.

Для отримання нормального рівняння площини помножимо загальне рівняння площини на нормуючий множник. Оскільки $A = 3$, $B = -6$, $C = -2$,

$D > 0$, то маємо $\mu = -\frac{1}{\sqrt{3^2 + (-6)^2 + (-2)^2}} = -\frac{1}{7}$. Тоді нормальне рівняння

площини має вигляд $-\frac{3}{7}x + \frac{6}{7}y + \frac{2}{7}z - \frac{5}{7} = 0$.

Координати вектора нормалі до площини знайдемо із загального рівняння площини $\underbrace{3x}_A - \underbrace{6y}_B - \underbrace{2z}_C + 5 = 0$, тобто маємо $\vec{n}(3; -6; -2)$.

Відповідь: $3x - 6y - 2z + 5 = 0$, $-\frac{3}{7}x + \frac{6}{7}y + \frac{2}{7}z - \frac{5}{7} = 0$, $\vec{n}(3; -6; -2)$.

6. Знайдіть кут між площинами $x + 2y + 2z - 3 = 0$ та $16x + 12y - 15z - 1 = 0$.

Розв'язання:

Формула кута між площинами $\cos \varphi = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$.

Оскільки $A_1 = 1$, $B_1 = 2$, $C_1 = 2$ та $A_2 = 16$, $B_2 = 12$, $C_2 = -15$, то дістанемо

$$\cos \varphi = \frac{|1 \cdot 16 + 2 \cdot 12 + 2 \cdot (-15)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{16^2 + 12^2 + (-15)^2}} = \frac{10}{3 \cdot 25} = \frac{2}{15}, \quad \varphi \approx 82^\circ.$$

Відповідь: $\varphi \approx 82^\circ$.

7. При яких значеннях параметрів k_1 і k_2 площина $k_1 x + 52y - 4k_2 z + 5 = 0$ паралельна площині $2x + y - 2z - 1 = 0$?

Розв'язання:

Використаємо умову паралельності площин $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, тоді маємо

$$\frac{k_1}{2} = \frac{52}{1} = \frac{-4k_2}{-2}, \text{ звідки } \frac{k_1}{2} = \frac{52}{1}, k_1 = 52 \cdot 2 = 104 \text{ і } \frac{52}{1} = \frac{-4k_2}{-2}, k_2 = \frac{52 \cdot 2}{4} = 26.$$

Відповідь: $k_1 = 104$, $k_2 = 26$.

8. При якому значенні параметра k площина $104x + 52y - 4kz + 5 = 0$ перпендикулярна площині $2x + y - 2z - 1 = 0$?

Розв'язання:

Використаємо умову перпендикулярності площин $A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$, маємо $104 \cdot 2 + 52 \cdot 1 + (-4k) \cdot (-2) = 0$, $208 + 52 + 8k = 0$, $8k = -260$, звідки $k = -32,5$.

Відповідь: $k = -32,5$.

9. Знайдіть рівняння площини, яка проходить через точку $(1; -2; -3)$ і паралельна до площини $2x - 3y + 5z + 2 = 0$.

Розв'язання:

Застосуємо рівняння площини, яка проходить через дану точку і має дану нормаль, тобто $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Нормаллю площини $2x - 3y + 5z + 2 = 0$ є $\vec{n}(2; -3; 5)$. Цю нормаль можна взяти в якості нормалі шуканої площини. Отже, отримаємо $2(x - 1) - 3(y + 2) + 5(z + 3) = 0$, $2x - 2 - 3y - 6 + 5z + 15 = 0$, $2x - 3y + 5z + 7 = 0$.

Відповідь: $2x - 3y + 5z + 7 = 0$.

10. Знайдіть відстань від точки $(-15; 4; 6)$ до площини $2x - y + 2z + 10 = 0$.

Розв'язання:

Скористаємось формулою відстані від площини до точки $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|2x_0 - y_0 + 2z_0 + 10|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}}$, підставимо координати точки

$$d = \frac{|2 \cdot (-15) - 4 + 2 \cdot 6 + 10|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{|-30 - 4 + 12 + 10|}{\sqrt{9}} = \frac{12}{3} = 4 \text{ од.}$$

Відповідь: 4 од.

11. Знайдіть рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(1; -1; -2)$ і $M_2(3; 1; 1)$ перпендикулярно до площини $x - 2y + 3z - 5 = 0$.

Розв'язання:

Рівняння площини, що проходить через дану точку у заданому напрямі, має вигляд $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

В якості точки $(x_0; y_0; z_0)$ можна застосувати будь-яку з даних точок. Наприклад, $M_1(1; -1; -2)$.

Нормаль даної площини $\vec{n}(1; -2; 3)$, нормаль шуканої площини позначимо $\vec{n}^*$. Площини перпендикулярні, тому $\vec{n}^* \perp \vec{n}$. Вектор $\overrightarrow{M_1M_2}(2; 2; 3)$ належить шуканій площині, отже $\vec{n}^* \perp \overrightarrow{M_1M_2}$. Напрямок $\vec{n}^*$ можна визначити за $\overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{n}$.

Оскільки $\overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k} - 2\vec{k} + 6\vec{i} - 6\vec{j} = 12\vec{i} - 3\vec{j} - 6\vec{k}$,

то $\vec{n}^*(4; -1; -2)$.

Тоді рівняння шуканої площини має вигляд $4(x - 1) - (y + 1) - 2(z + 2) = 0$ або $4x - 4 - y - 1 - 2z - 4 = 0$, $4x - y - 2z - 9 = 0$.

Відповідь: $4x - y - 2z - 9 = 0$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Задано точки M_1, M_2, M_3, M_0 . Знайдіть: 1) рівняння площини α , що проходить через точки M_1, M_2, M_3 ; 2) загальне рівняння площини α ; 3) вектор нормалі до площини α ; 4) рівняння площини α у відрізках на осях; 5) нормальне рівняння площини α ; 6) рівняння площини, що проходить через точку M_0 до площини α ; 7) відстань від точки M_0 до площини α .

Варіант	Точки у просторі
1.	$M_1(-3;-2;-4), M_2(-4;2;-7), M_3(5;0;3), M_0(-9;7;8)$
2.	$M_1(-2;4;-6), M_2(0;-6;1), M_3(4;2;1), M_0(-2;13;12)$
3.	$M_1(3;-2;3), M_2(6;6;2), M_3(1;4;-2), M_0(-12;3;5)$
4.	$M_1(-4;-2;-5), M_2(1;8;-5), M_3(0;4;-4), M_0(-8;12;11)$
5.	$M_1(2;8;-3), M_2(10;4;7), M_3(4;8;-1), M_0(-8;10;13)$
6.	$M_1(3;9;-2), M_2(11;5;8), M_3(5;9;0), M_0(-7;12;12)$
7.	$M_1(-2;0;-3), M_2(3;10;-3), M_3(2;6;-2), M_0(-5;13;16)$
8.	$M_1(3;6;-2), M_2(0;2;-3), M_3(1;-2;0), M_0(-12;13;14)$
9.	$M_1(7;9;2), M_2(10;5;7), M_3(1;3;-1), M_0(-10;9;12)$
10.	$M_1(2;-2;1), M_2(-3;0;-5), M_3(0;-2;-1), M_0(-12;7;8)$
11.	$M_1(0;1;-1), M_2(-1;5;-4), M_3(8;3;6), M_0(-2;13;18)$
12.	$M_1(6;8;1), M_2(9;4;6), M_3(0;2;-2), M_0(-4;13;14)$
13.	$M_1(-1;0;-2), M_2(-2;4;-5), M_3(7;2;5), M_0(-6;6;8)$
14.	$M_1(0;6;-4), M_2(2;-4;3), M_3(6;4;3), M_0(-9;3;5)$
15.	$M_1(5;8;0), M_2(2;4;-1), M_3(3;0;2), M_0(-7;10;11)$
16.	$M_1(-1;1;-2), M_2(4;11;-2), M_3(3;7;-1), M_0(-12;9;10)$
17.	$M_1(3;4;-1), M_2(2;-4;2), M_3(5;6;0), M_0(-5;15;14)$
18.	$M_1(6;7;2), M_2(5;-1;5), M_3(8;9;3), M_0(-11;11;19)$
19.	$M_1(5;4;1), M_2(-1;-2;-2), M_3(3;-2;2), M_0(-9;8;9)$
20.	$M_1(0;6;-5), M_2(8;2;5), M_3(2;6;-3), M_0(-8;7;12)$
21.	$M_1(5;6;1), M_2(4;-2;4), M_3(7;8;2), M_0(-6;9;11)$
22.	$M_1(4;6;-1), M_2(7;2;4), M_3(-2;0;-4), M_0(-5;10;12)$
23.	$M_1(4;0;3), M_2(-1;2;-3), M_3(2;0;1), M_0(-12;3;2)$
24.	$M_1(5;1;4), M_2(0;3;-2), M_3(3;1;2), M_0(-7;9;15)$
25.	$M_1(0;-2;-1), M_2(2;4;-2), M_3(3;2;0), M_0(-11;8;10)$
26.	$M_1(4;-1;4), M_2(7;7;3), M_3(2;5;-1), M_0(-9;16;14)$
27.	$M_1(8;7;4), M_2(2;1;1), M_3(6;1;5), M_0(-10;8;8)$
28.	$M_1(1;-4;1), M_2(4;4;0), M_3(-1;2;-4), M_0(-3;13;14)$
29.	$M_1(1;7;-3), M_2(3;-3;4), M_3(7;5;4), M_0(-6;14;18)$
30.	$M_1(6;9;1), M_2(3;5;0), M_3(4;1;3), M_0(-4;12;15)$

2. Визначте, при яких значеннях параметрів k_1, k_2 площина $k_1x + (2 + \alpha)y - 4k_2z + 5 = 0$ паралельна площині $2x + y - 2z - 1 = 0$.

3. Визначте, при якому значенні параметра k площина $(4 + 2\alpha)x + (2 + \alpha)y - 4kz + 5 = 0$ перпендикулярна площині $2x + y - 2z - 1 = 0$.

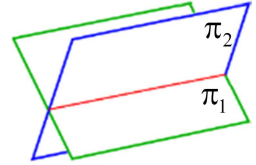
4. Знайдіть кут між площиною $2x + y - 2z - 1 = 0$ і площиною $6x + 2y - 3z + \alpha = 0$.

5. Знайдіть рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(1+\alpha; -1; -2)$ і $M_2(3; 1; 1)$ перпендикулярно до площини $x - 2y + 3z - 5 = 0$.

ПРЯМА У ПРОСТОРИ

1. Основні поняття та теореми

Пряму в просторі можна задати як перетин двох площин,
тобто $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 & (\pi_1), \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & (\pi_2). \end{cases}$ Це загальне рівняння
прямої у просторі.



Пряма у просторі, яка проходить через дві задані точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ та $M_2(x_2; y_2; z_2)$, визначається рівнянням $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

Канонічне рівняння прямої в просторі, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ в напрямі напрямного вектора



$\vec{a}(l; m; p)$, має вигляд $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{p}$.

У параметричному вигляді рівняння прямої в просторі записуються таким

чином $\begin{cases} x = x_0 + l \cdot t, \\ y = y_0 + m \cdot t, \\ z = z_0 + p \cdot t, \end{cases}$ де t – параметр.

Кут між прямими у просторі визначається як кут між їхніми напрямними векторами, тобто $\cos \varphi = \frac{|l_1 l_2 + m_1 m_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + p_2^2}}$.

Умова паралельності двох прямих у просторі має вигляд $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1}{p_2}$.

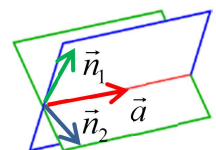
Умова перпендикулярності двох прямих у просторі має вигляд $l_1 l_2 + m_1 m_2 + p_1 p_2 = 0$.

Відстань від точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ до прямої $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{p}$

визначається формулою $d = \frac{|\overrightarrow{M_0 M_1} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}$.

2. Приклади виконання завдань

1. Запишіть рівняння прямої, представлені як лінія перетину двох площин $\begin{cases} 2x + y + z - 2 = 0 \\ 2x - y - 3z + 6 = 0, \end{cases}$ у канонічному вигляді.



Розв'язання:

Щоб записати рівняння прямої у просторі в канонічному вигляді, треба знайти напрямний вектор прямої та координати точки, що належить прямій.

Напрямний вектор прямої перпендикулярний нормалям обох площин, тому визначимо напрямний вектор за допомогою векторного добутку нормалей площин. Оскільки нормалі площин $\vec{n}_1(2;1;1)$, $\vec{n}_2(2;-1;-3)$, то векторний добуток

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k} - 2\vec{k} + 1\vec{i} + 6\vec{j} = -2\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k}, \quad \text{тоді}$$

маємо напрямний вектор прямої $\vec{a}(-2;8;-4)$ або $\vec{a}(1;-4;2)$.

В якості точки M_0 можна вибрати довільну точку прямої, просто треба підібрати такі координати точки, що задовольняють рівняння обох площин. Оскільки таких точок безліч, то зафіксуємо довільно одну з координат (наприклад, $z = 0$), а дві інші визначимо з системи рівнянь
$$\begin{cases} 2x + y + z - 2 = 0 \\ 2x - y - 3z + 6 = 0, \end{cases}$$

що при $z = 0$ має вигляд
$$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ 2x - y + 6 = 0. \end{cases}$$
 Додамо рівняння, маємо $4x + 4 = 0$, звідки $4x = -4$, $x = -1$. Віднімемо рівняння, отримаємо $2y - 8 = 0$, звідки $2y = 8$, $y = 4$. Маємо точку прямої $M_0(-1;4;0)$.

Отже, канонічне рівняння прямої у просторі має вигляд
$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z}{2}.$$

Відповідь:
$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z}{2}.$$

2. Запишіть рівняння прямої, представленої як лінія перетину двох площин
$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 4 = 0, \\ x + 3y + 5z - 2 = 0, \end{cases}$$
 у канонічному вигляді.

Розв'язання:

Визначимо напрямний вектор за допомогою векторного добутку нормалей площин. Оскільки нормалі площин $\vec{n}_1(2;-1;3)$, $\vec{n}_2(1;3;5)$, то векторний добуток

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k} + 1\vec{k} - 9\vec{i} - 10\vec{j} = -14\vec{i} - 7\vec{j} + 7\vec{k}, \quad \text{тоді}$$

маємо напрямний вектор прямої $\vec{a}(-14;-7;7)$ або $\vec{a}(2;1;-1)$.

В якості точки M_0 прямої виберемо точку з $z = 0$. Тоді одержимо
$$\begin{cases} 2x - y - 4 = 0, \\ x + 3y - 2 = 0. \end{cases}$$
 Маємо з першого рівняння системи $y = 2x - 4$, тоді друге рівняння системи набуде вигляду $x + 3(2x - 4) = 2$, звідки $x + 6x - 12 = 2$, $7x = 14$, $x = 2$, тоді $y = 2 \cdot 2 - 4 = 0$. Маємо точку прямої $M_0(2;0;0)$.

Отже, канонічне рівняння прямої у просторі має вигляд
$$\frac{x-2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}.$$

Відповідь: $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$.

3. Знайдіть канонічне рівняння та напрямний вектор прямої, що проходить через дві точки $M_1(2;3;5)$ та $M_2(4;8;9)$. Запишіть рівняння прямої у параметричному вигляді.

Розв'язання:

Знайдемо рівняння прямої, яка проходить через дві точки, за формулою $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$. Маємо $\frac{x-2}{4-2} = \frac{y-3}{8-3} = \frac{z-5}{9-5}$, $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-5}{4}$. Це канонічне рівняння прямої у просторі. Направний вектор прямої $\vec{a}(2;5;4)$.

Прирівняємо всі частини канонічного рівняння прямої до параметра t ,

тобто $\begin{cases} \frac{x-2}{2} = t, \\ \frac{y-3}{5} = t, \\ \frac{z-5}{4} = t, \end{cases}$ звідки $\begin{cases} x-2=2t, \\ y-3=5t, \\ z-5=4t, \end{cases} \begin{cases} x=2t+2, \\ y=5t+3, \\ z=4t+5. \end{cases}$ Це параметричні рівняння

прямої у просторі.

Відповідь: $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-5}{4}$, $\vec{a}(2;5;4)$, $\begin{cases} x=2t+2, \\ y=5t+3, \\ z=4t+5. \end{cases}$

4. Знайдіть кут між прямими у просторі $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-2}$ та $\frac{x}{-4} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{7}$.

Розв'язання:

Застосуємо формулу кута між прямими в просторі, отримаємо $\cos \varphi = \frac{|l_1 l_2 + m_1 m_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + p_2^2}} = \frac{|2 \cdot (-4) + 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 7|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 7^2}} = \frac{18}{3 \cdot 9} = \frac{2}{3}$, $\varphi \approx 48^\circ$.

Відповідь: 48° .

5. Знайдіть рівняння прямої, що проходить через точку $(4;-1;5)$ паралельно прямій $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+1}{2}$.

Розв'язання:

В якості напрямного вектора шуканої прямої візьмемо напрямний вектор даної прямої $\vec{a}(1;3;2)$.

Підставивши координати напрямного вектора і координати заданої точки у $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{p}$, маємо рівняння шуканої прямої $\frac{x-4}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-5}{2}$.

Відповідь: $\frac{x-4}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-5}{2}$.

6. Дано дві прямі в просторі $\begin{cases} 4x + 2y - 3z - 16 = 0, \\ 3x + 4y - 5z - 12 = 0 \end{cases}$ та $\frac{x-9}{8} = \frac{y-12}{-1} = \frac{z+11}{4}$.

Запишіть рівняння першої прямої в канонічному вигляді (в якості довільної точки прямої візьміть точку перетину прямої з координатною площиною Oxy).

Знайдіть кут між прямими.

Розв'язання:

Щоб записати канонічне рівняння першої прямої, необхідно знайти напрямний вектор $\vec{a}$ та координати довільної точки M_0 , що належить цій прямій.

Напрямний вектор визначимо за допомогою векторного добутку нормалей площин. Оскільки нормалі площин $\vec{n}_1(4;2;-3)$, $\vec{n}_2(3;4;-5)$, то векторний добуток

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -10\vec{i} - 9\vec{j} + 16\vec{k} - 6\vec{k} + 12\vec{i} + 20\vec{j} = 2\vec{i} + 11\vec{j} + 10\vec{k}, \text{ тоді}$$

маємо напрямний вектор прямої $\vec{a}(2;11;10)$.

Точку M_0 прямої потрібно вибрати з координатою $z = 0$. Для знаходження інших координат точки M_0 необхідно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 4x + 2y - 16 = 0, \\ 3x + 4y - 12 = 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} 12x + 6y - 48 = 0, \\ 12x + 16y - 48 = 0. \end{cases} \text{ З різниці рівнянь системи отримуємо}$$

$-10y = 0$, $y = 0$, тоді $x = 4$. Маємо точку прямої $M_0(4;0;0)$.

Таким чином, канонічне рівняння першої прямої має вигляд $\frac{x-4}{2} = \frac{y}{11} = \frac{z}{10}$.

Застосуємо формулу кута між прямими в просторі, отримаємо

$$\cos \varphi = \frac{|l_1 l_2 + m_1 m_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + p_2^2}} = \frac{|2 \cdot 8 + 11 \cdot (-1) + 10 \cdot 4|}{\sqrt{2^2 + 11^2 + 10^2} \cdot \sqrt{8^2 + (-1)^2 + 4^2}} = \frac{45}{15 \cdot 9} = \frac{1}{3},$$

$\varphi \approx 70,5^\circ$.

Відповідь: $\frac{x-4}{2} = \frac{y}{11} = \frac{z}{10}$, $70,5^\circ$.

7. Дано рівняння двох площин $4x + 2y - 3z + 6 = 0$, $2x + 2y - z + 2 = 0$ та координати двох точок $(1;4;-3)$, $(3;0;-7)$. Знайдіть: канонічне рівняння першої прямої, що є лінією перетину двох площин; канонічне рівняння другої прямої, яка проходить через дві задані точки; кут між першою та другою прямими.

Розв'язання:

Визначимо напрямний вектор першої прямої за допомогою векторного добутку нормалей заданих площин, тобто $\vec{n}_1(4;2;-3)$, $\vec{n}_2(2;2;-1)$. Оскільки

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 6\vec{j} + 8\vec{k} - 4\vec{k} + 6\vec{i} + 4\vec{j} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}, \text{ то маємо}$$

напрямний вектор першої прямої $\vec{a}(2;-1;2)$.

Для знаходження координат довільної точки першої прямої M_0 зафіксуємо координату $x = 0$. Для знаходження інших координат точки M_0 необхідно розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} 2y - 3z + 6 = 0, \\ 2y - z + 2 = 0. \end{cases}$$
 З різниці рівнянь системи отримуємо $-2z + 4 = 0$, $z = 2$, тоді $y = 0$. Маємо точку першої прямої $M_0(0;0;2)$.

Отже, канонічне рівняння першої прямої у просторі має вигляд
$$\frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{2}.$$

Знайдемо рівняння другої прямої у просторі, яка проходить через дві точки, маємо $\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-4}{0-4} = \frac{z+3}{-7+3}$, $\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z+3}{-4}$. Це канонічне рівняння другої прямої у просторі.

Застосуємо формулу кута між прямими в просторі, отримаємо
$$\cos \varphi = \frac{|l_1 l_2 + m_1 m_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + p_2^2}} = \frac{|2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-4) + 2 \cdot (-4)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-4)^2 + (-4)^2}} = \frac{0}{3 \cdot 9} = 0,$$
 $\varphi = 90^\circ$.

Відповідь: $\frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{2}$, $\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z+3}{-4}$, 90° .

8. Знайдіть відстань від точки $M_1(1;-1;-2)$ до прямої $\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2}$.

Розв'язання:

Застосуємо формулу відстані від точки до прямої, тобто $d = \frac{|\overrightarrow{M_0 M_1} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}$.

З рівняння прямої маємо $\vec{a}(3;2;-2)$, $M_0(-3;-2;8)$, тоді $\overrightarrow{M_0 M_1}(4;1;-10)$,

$$\overrightarrow{M_0 M_1} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 1 & -10 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 30\vec{j} + 8\vec{k} - 3\vec{k} + 20\vec{i} + 8\vec{j} = 18\vec{i} - 22\vec{j} + 5\vec{k}.$$

Отже, маємо $d = \frac{\sqrt{18^2 + (-22)^2 + 5^2}}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{324 + 484 + 25}}{\sqrt{9 + 4 + 4}} = \frac{\sqrt{833}}{\sqrt{17}} = \sqrt{49} = 7 \text{ од.}$

Відповідь: 7 од.

9. Дано прями в просторі $\frac{x}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-2}$ та $\frac{x+41}{l+41} = \frac{y-7}{3} = \frac{z+5}{-4}$. Знайдіть значення l , при якому вони перетинаються; координати точки перетину.

Розв'язання:

Параметричні рівняння першої прямої мають вигляд
$$\begin{cases} x = 3t_1, \\ y = t_1 - 1, \\ z = -2t_1 + 1. \end{cases}$$

Параметричні рівняння другої прямої мають вигляд
$$\begin{cases} x = (l + 41)t_2 - 41, \\ y = 3t_2 + 7, \\ z = -4t_2 - 5. \end{cases}$$

Для точки перетину прямих має місце система рівнянь
$$\begin{cases} 3t_1 = (l + 41)t_2 - 41, \\ t_1 - 1 = 3t_2 + 7, \\ -2t_1 + 1 = -4t_2 - 5, \end{cases}$$

звідки
$$\begin{cases} 3t_1 - 41t_2 + 41 = lt_2, \\ t_1 = 3t_2 + 8, \\ t_1 = 2t_2 + 3, \end{cases} \quad \begin{cases} lt_2 = 3t_1 - 41t_2 + 41, \\ t_1 = 3t_2 + 8, \\ 0 = t_2 + 5, \end{cases} \quad \begin{cases} lt_2 = 225, \\ t_1 = -7, \\ t_2 = -5, \end{cases} \quad \text{тоді} \quad \begin{cases} l = -45, \\ t_1 = -7, \\ t_2 = -5. \end{cases}$$

Таким чином, дані дві прямі перетинаються при значенні $l = -45$. Підставляючи або значення параметра $t_1 = -7$ в параметричні рівняння першої прямої, або значення $t_2 = -5$ і $l = -45$ у параметричні рівняння другої прямої,

знаходимо координати точки перетину
$$\begin{cases} x = -21, \\ y = -8, \\ z = 15. \end{cases}$$

Відповідь: $l = -45, (-21; -8; 15)$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайдіть канонічне рівняння та напрямний вектор прямої, що проходить через точки $M_1(3 - \alpha; \alpha; \alpha + 3)$ та $M_2(30 - \alpha; \alpha + 5; \alpha + 30)$. Запишіть рівняння прямої у параметричному вигляді.

2. Запишіть рівняння прямої, що проходить через точку $(2\alpha; 0; -\alpha)$ паралельно прямій $\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z}{2}$.

3. Знайдіть кут між прямими: $\frac{x-4}{10} = \frac{y+5}{11} = \frac{z}{2}$ та $\frac{x}{-4} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-\alpha}{7}$.

4. Запишіть канонічне рівняння прямої, представленій як лінія перетину двох площин $2x - 3(\alpha + 1)y + 4z - 10 = 0$ і $x - 2(\alpha + 1)y + 3z - 6 = 0$. В якості довільної точки прямої візьміть точку з ординатою $y = 0$.

5. Знайдіть відстань від точки $M_1(\alpha; 2; 1 - \alpha)$ до прямої $\frac{x-\alpha}{6} = \frac{y}{-2} = \frac{z+\alpha}{-3}$.

6. Дано прямі в просторі $\frac{x}{6} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-3}$ та $\frac{x+\alpha}{l+\alpha} = \frac{y-10}{4} = \frac{z+9}{2}$.

Знайдіть значення l , при якому вони перетинаються; координати точки перетину.

ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ У ПРОСТОРИ

1. Основні поняття та теореми

Пряма або перетинає площину, або паралельна площині, або належить площині.

Гострий кут між прямою $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{p}$ та площиною

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ визначається як } \sin \varphi = \frac{|Al + Bm + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + p^2}}.$$

Умова перпендикулярності прямої і площини має вигляд $\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{p}$ і

виражає умову паралельності векторів $\vec{a}(l; m; p)$ та $\vec{n}(A; B; C)$.

Умова паралельності прямої та площини має вигляд $Al + Bm + Cp = 0$ і виражає умову перпендикулярності векторів $\vec{a}(l; m; p)$ та $\vec{n}(A; B; C)$.

Умова належності площині $Ax + By + Cz + D = 0$ прямої $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{p}$ має вигляд $\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \\ Al + Bm + Cp = 0. \end{cases}$

Алгоритм знаходження точки перетину прямої і площини: 1) записати параметричні рівняння прямої; 2) підставити їх у рівняння площини, вийде рівняння відносно параметра t ; 3) розв'язавши одержане рівняння, отримати значення параметра t_x ; 4) підставивши t_x у параметричні рівняння прямої, визначити координати точки перетину.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайдіть кут між прямою $\frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+4}{6}$ та площиною $4x + 4y + 7z - 3 = 0$.

Розв'язання:

Маємо $l = 2$, $m = 2$, $p = 6$ з рівняння прямої, $A = 4$, $B = 4$, $C = 7$ з рівняння площини. Застосуємо формулу кута між прямою і площиною $\sin \varphi = \frac{|Al + Bm + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + p^2}} = \frac{|4 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 7 \cdot 6|}{\sqrt{4^2 + 4^2 + 7^2} \cdot \sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2}} = \frac{62}{63}$, тоді $\varphi \approx 80^\circ$.

Відповідь: 80° .

2. При якому значенні l пряма $\frac{x+30}{l} = \frac{y-60}{3} = \frac{z-5}{2}$ паралельна площині $4x - 6y - z + 7 = 0$?

Розв'язання:

Використаємо умову паралельності прямої та площини $Al + Bm + Cp = 0$, тоді отримаємо $4l + (-6) \cdot 3 + (-1) \cdot 2 = 0$, звідки $4l - 18 - 2 = 0$, $4l = 20$, $l = 5$.

Відповідь: 5.

3. Знайдіть рівняння площини, що проходить через точку $(-5; 4; 6)$ перпендикулярно прямій $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+7}{3}$.

Розв'язання:

Застосуємо рівняння площини, що проходить через задану точку і має дану нормаль, $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. В якості нормалі шуканої площини візьмемо напрямний вектор прямої $\vec{n}(A; B; C) = \vec{a}(1; -2; 3)$. Тоді рівняння шуканої площини має вигляд $1(x + 5) - 2(y - 4) + 3(z - 6) = 0$, $x + 5 - 2y + 8 + 3z - 18 = 0$ або $x - 2y + 3z - 5 = 0$.

Відповідь: $x - 2y + 3z - 5 = 0$.

4. Знайдіть рівняння прямої, що проходить через точку $(2; -3; -5)$ перпендикулярно площині $6x - 3y - 5z + 2 = 0$.

Розв'язання:

Застосуємо рівняння прямої, яка проходить через дану точку в заданому напрямним вектором напрямі, $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{p}$. В якості напрямного вектора шуканої прямої візьмемо нормаль даної площини $\vec{a}(l; m; p) = \vec{n}(6; -3; -5)$.

Тоді рівняння шуканої прямої $\frac{x - 2}{6} = \frac{y + 3}{-3} = \frac{z + 5}{-5}$.

Відповідь: $\frac{x - 2}{6} = \frac{y + 3}{-3} = \frac{z + 5}{-5}$.

5. Знайдіть рівняння площини, що проходить через точку $(1; 2; 3)$ паралельно прямим $\frac{x - 2}{4} = \frac{y - 3}{5} = \frac{z + 1}{-4}$ та $\frac{x + 1}{3} = \frac{y - 2}{4} = \frac{z + 6}{-5}$.

Розв'язання:

Застосуємо рівняння площини у вигляді $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Точка $(x_0; y_0; z_0)$ задана. Вектор нормалі площини перпендикулярний напрямним векторам обох прямих, тому визначимо вектор нормалі площини за допомогою векторного добутку напрямних векторів прямих $\vec{a}_1(4; 5; -4)$, $\vec{a}_2(3; 4; -5)$. Оскільки

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 5 & -4 \\ 3 & 4 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \underline{-25\vec{i}} - \underline{12\vec{j}} + \underline{16\vec{k}} - \underline{15\vec{k}} + \underline{16\vec{i}} + \underline{20\vec{j}} = -9\vec{i} + 8\vec{j} + \vec{k}, \text{ то}$$

маємо $\vec{n}(9; -8; -1)$.

Тоді рівняння шуканої площини має вигляд $9(x - 1) - 8(y - 2) - 1(z - 3) = 0$ або $9x - 9 - 8y + 16 - z + 3 = 0$, звідки $9x - 8y - z + 10 = 0$.

Відповідь: $9x - 8y - z + 10 = 0$.

6. Знайдіть точку перетину площини $2x + 3y + z - 1 = 0$ з прямою $\frac{x - 1}{1} = \frac{y + 1}{-2} = \frac{z}{6}$.

Розв'язання:

Щоб записати параметричні рівняння прямої прирівняємо всі частини канонічного рівняння прямої до параметра t , тобто $\frac{x - 1}{1} = t$, $\frac{y + 1}{-2} = t$, $\frac{z}{6} = t$.

Звідки маємо
$$\begin{cases} x-1=1 \cdot t, \\ y+1=-2 \cdot t, \\ z=6 \cdot t, \end{cases} \begin{cases} x=t+1, \\ y=-2t-1, \\ z=6t. \end{cases}$$

Підставляючи ці вирази для x , y та z в рівняння площини, одержимо $2(t+1)+3(-2t-1)+6t-1=0$, звідки $2t+2-6t-3+6t-1=0$, $2t=2$, $t_x=1$.

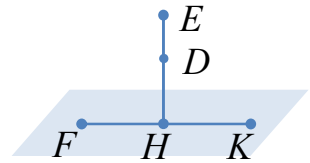
Це значення параметра t_x відповідає точці перетину прямої і площини

$$\begin{cases} x_x = 1+1=2, \\ y_x = -2 \cdot 1 - 1 = -3, \\ z_x = 6 \cdot 1 = 6. \end{cases}$$

Відповідь: $(2; -3; 6)$.

7. Дано три точки $D(-3; -2; 8)$, $E(0; 0; 6)$, $F(1; -1; -2)$.

Знайдіть параметричні рівняння прямої DE ; рівняння площини, що проходить через точку F перпендикулярно прямій DE ; точку H – точку перетину цієї площини з прямою DE ; відстань від точки F до прямої DE ; точку K , що є симетричною до точки F відносно прямої DE .



Розв'язання:

Застосуємо рівняння прямої в просторі через дві точки, підставимо координати точок D і E , одержимо $\frac{x+3}{0+3} = \frac{y+2}{0+2} = \frac{z-8}{6-8}$, $\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2}$.

Це канонічне рівняння прямої DE .

Прирівнюємо всі частини канонічного рівняння прямої до параметра t :

$$\frac{x+3}{3} = t, \quad \frac{y+2}{2} = t, \quad \frac{z-8}{-2} = t. \quad \text{Звідки маємо} \quad \begin{cases} x+3=3t, \\ y+2=2t, \\ z-8=-2t, \end{cases} \begin{cases} x=3t-3, \\ y=2t-2, \\ z=-2t+8. \end{cases} \quad \text{Це}$$

параметричні рівняння прямої DE .

Застосуємо рівняння площини, що проходить через задану точку і має задану нормаль. Точка $F(1; -1; -2)$ задана. В якості нормалі шуканої площини візьмемо напрямний вектор прямої DE , тобто $\vec{n} = \vec{d}(3; 2; -2)$. Тоді рівняння площини має вигляд $3(x-1)+2(y+1)-2(z+2)=0$, звідки $3x+2y-2z-5=0$.

Підставимо параметричні рівняння прямої в рівняння площини, маємо $3(3t-3)+2(2t-2)-2(-2t+8)-5=0$, тоді $9t-9+4t-4+4t-16-5=0$, звідки $17t-34=0$, $t_x=2$. Це значення параметра t_x відповідає точці перетину прямої

$$\text{і площини} \quad \begin{cases} x_H = 3 \cdot 2 - 3 = 3, \\ y_H = 2 \cdot 2 - 2 = 2, \\ z_H = -2 \cdot 2 + 8 = 4. \end{cases}$$

Відстань від точки F до прямої DE рівна відстані між точками $F(1; -1; -2)$ і $H(3; 2; 4)$, тоді отримаємо $d = \sqrt{(3-1)^2 + (2+1)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{4+9+36} = 7$.

Пряма FH розташована в площині, тому перпендикулярна до прямої DE . Отже, шукана точка K , що симетрична до точки F відносно прямої DE , знаходиться на прямій FH . Точка H є серединою відрізка FK . Застосуємо формули середини відрізка $x_H = \frac{x_F + x_K}{2}$, $y_H = \frac{y_F + y_K}{2}$, $z_H = \frac{z_F + z_K}{2}$, тоді координати точки K : $x_K = 2x_H - x_F = 2 \cdot 3 - 1 = 5$, $y_K = 2y_H - y_F = 2 \cdot 2 + 1 = 5$, $z_K = 2z_H - z_F = 2 \cdot 4 + 2 = 10$.

Підставляючи координати знайденої точки $K(5;5;10)$ в рівняння площини $3 \cdot 5 + 2 \cdot 5 - 2 \cdot 10 - 5 \equiv 0$, переконаємось, що точка K належить площині.

$$\text{Відповідь: } \begin{cases} x = 3t - 3, \\ y_H = 2t - 2, \quad 3x + 2y - 2z - 5 = 0, \quad H(3;2;4), \quad d = 7, \quad K(5;5;10). \\ z_H = -2t + 8, \end{cases}$$

8. Дано загальне рівняння площини $3x + 6y - 2z + 20 = 0$ і координати точки $M(4;9;-6)$. Знайдіть канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку перпендикулярно до площини; точку N – точку перетину цієї прямої з даною площиною; відстань від точки M до площини; координати точки P , яка симетрична до точки M відносно площини.

Розв'язання:

Застосуємо рівняння площини, що проходить через задану точку і має заданий напрямний вектор. Точка $M(4;9;-6)$ задана. В якості напрямного вектора шуканої прямої візьмемо нормаль даної площини $\vec{a} = \vec{n}(3;6;-2)$. Тоді рівняння прямої має вигляд $\frac{x-4}{3} = \frac{y-9}{6} = \frac{z+6}{-2}$.

Прирівняємо всі частини канонічного рівняння прямої до параметра t :

$$\frac{x-4}{3} = t, \quad \frac{y-9}{6} = t, \quad \frac{z+6}{-2} = t, \quad \text{маємо параметричні рівняння прямої} \quad \begin{cases} x = 3t + 4, \\ y = 6t + 9, \\ z = -2t - 6. \end{cases}$$

Підставимо параметричні рівняння прямої в рівняння площини, одержимо $3(3t + 4) + 6(6t + 9) - 2(-2t - 6) + 20 = 0$, звідки $9t + 12 + 36t + 54 + 4t + 12 + 20 = 0$, $49t + 98 = 0$, $t_x = -2$. Це значення параметра t_x відповідає точці перетину

$$\text{прямої і площини} \quad \begin{cases} x_N = 3 \cdot (-2) + 4 = -2, \\ y_N = 6 \cdot (-2) + 9 = -3, \\ z_N = -2 \cdot (-2) - 6 = -2. \end{cases}$$

Відстань від точки до площини рівна відстані між точками $M(4;9;-6)$ і $N(-2;-3;-2)$, тобто $d = \sqrt{(4+2)^2 + (9+3)^2 + (-6+2)^2} = \sqrt{36+144+16} = 14$.

З формул середини відрізка $x_N = \frac{x_M + x_P}{2}$, $y_N = \frac{y_M + y_P}{2}$, $z_N = \frac{z_M + z_P}{2}$, отримаємо формули координат точки P : $x_P = 2x_N - x_M = 2 \cdot (-2) - 4 = -8$, $y_P = 2y_N - y_M = 2 \cdot (-3) - 9 = -15$, $z_P = 2z_N - z_M = 2 \cdot (-2) + 6 = 2$.

Відповідь: $\frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{6} = \frac{z+4}{-2}$; $N(-2; -3; -2)$; $d = 14$; $P(-8; -15; 2)$.

9. Знайдіть точки перетину прямої $\begin{cases} x = 3t + 4, \\ y = 6t + 9, \\ z = -2t - 6 \end{cases}$ з координатними

площинами.

Розв'язання:

Точка перетину прямої з координатною площиною xy : $z = 0$, $0 = -2t - 6$,

$$t_1 = -3, \begin{cases} x_{xy} = -5, \\ y_{xy} = -9, \\ z_{xy} = 0. \end{cases}$$

Точка перетину прямої з координатною площиною xz : $y = 0$, $0 = 6t + 9$,

$$t_2 = -\frac{3}{2}, \begin{cases} x_{xz} = -\frac{1}{2}, \\ y_{xz} = 0, \\ z_{xz} = -3. \end{cases}$$

Точка перетину прямої з координатною площиною yz : $x = 0$, $0 = 3t + 4$,

$$t_3 = -\frac{4}{3}; \begin{cases} x_{yz} = 0, \\ y_{yz} = 1, \\ z_{yz} = -\frac{10}{3}. \end{cases}$$

Відповідь: $(-5; -9; 0)$, $(-\frac{1}{2}; 0; -3)$, $(0; 1; -\frac{10}{3})$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайдіть кут між прямою $\frac{x-\alpha}{12} = \frac{y+\alpha}{4} = \frac{z-1}{3}$ і площиною $6x - 2y - 3z + \alpha = 0$.

2. Знайдіть рівняння площини, що проходить через точку $(3; -1; 1)$ паралельно прямим $\frac{x-2}{2-\alpha} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3}$ та $\frac{x-4}{1} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{3}$.

3. Знайдіть точку перетину площини $2x + 3y + \alpha z - \alpha + 1 = 0$ з прямою $\frac{x-1}{\alpha} = \frac{y+1}{-2\alpha} = \frac{z}{6}$.

4. Дано три точки D , E , F . Знайдіть параметричні рівняння прямої DE ; рівняння площини, що проходить через точку F перпендикулярно прямій DE ; точку H – точку перетину цієї площини з прямою DE ; відстань від точки F до прямої DE ; точку K , що є симетричною до точки F відносно прямої DE .

Варіант	D	E	F	Варіант	D	E	F
1.	(5;1;7)	(9;3;3)	(6;0;3)	2.	(2;-3;7)	(6;-1;3)	(3;-4;3)
3.	(1;4;5)	(5;6;1)	(2;3;1)	4.	(2;-6;7)	(6;-4;3)	(3;-7;3)
5.	(5;5;4)	(9;7;0)	(6;4;0)	6.	(-1;4;2)	(3;6;-2)	(0;3;-2)
7.	(5;1;0)	(1;-1;4)	(4;2;4)	8.	(-2;2;10)	(2;4;6)	(-1;1;6)
9.	(2;0;8)	(6;2;4)	(3;-1;4)	10.	(1;-1;3)	(5;1;-1)	(2;-2;-1)
11.	(3;-1;5)	(7;1;1)	(4;-2;1)	12.	(1;-4;6)	(5;-2;2)	(2;-5;2)
13.	(1;-1;7)	(5;1;3)	(2;-2;3)	14.	(-5;4;3)	(-1;6;-1)	(-1;3;2)
15.	(4;-1;9)	(8;1;5)	(5;-2;5)	16.	(-1;2;-2)	(3;4;-6)	(0;1;-6)
17.	(-3;1;9)	(1;3;5)	(-2;0;5)	18.	(6;-2;11)	(10;0;7)	(7;-3;7)
19.	(1;4;0)	(5;6;-4)	(2;3;-4)	20.	(-4;0;8)	(0;2;4)	(-3;-1;4)
21.	(0;-2;6)	(4;0;2)	(1;-3;2)	22.	(-2;3;1)	(2;5;-3)	(-1;2;-3)
23.	(3;6;2)	(7;8;-2)	(4;5;-2)	24.	(-3;1;2)	(1;3;-2)	(-2;0;-2)
25.	(3;3;2)	(7;5;-2)	(4;2;-2)	26.	(-2;2;3)	(2;4;-1)	(-1;1;-1)
27.	(-1;2;3)	(3;4;-1)	(0;1;-1)	28.	(-3;2;0)	(1;4;-4)	(-2;1;-4)
29.	(4;-4;9)	(8;-2;5)	(5;-5;5)	30.	(-3;0;1)	(1;2;-3)	(-2;-1;-3)

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алгебра та аналітична геометрія : курс лекцій / уклад. Ю. Є. Бохонов. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 273 с.
2. Бондаренко Н. В., Отрашевська В. В. Лінійна алгебра : навчальний посібник. Київ : КНУБА, 2023. 180 с.
3. Вишнякова А. М., Заварзіна О. О. Лінійна алгебра : навчальний посібник. Харків : Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, 2024. – 160 с.
4. Вища математика. Алгебра та геометрія : методичні рекомендації для виконання самостійної роботи здобувачами першого (бакалаврського) рівня вищої освіти ОПП «Комп'ютерні науки» спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» денної форми здобуття вищої освіти / уклад. : О. В. Бойчук, С. І. Богданов, Є. Ю. Борчик, В. В. Поживатенко. Миколаїв : МНАУ, 2023. 52 с. URL: <https://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/17436>
5. Вища математика. Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії : навчальний посібник / уклад. Т. О. Єр'оміна, О. А. Поварова. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 115 с.
6. Коляда Р. В., Мельник І. О., Мельник О. М. Вища математика : навч. посібник. Львів : Магнолія 2006, 2024. 342 с.
7. Лозовий Б. Л., Пушак Я. С., Шабат О. Є. Практикум з вищої математики : навч. посібник. 3-тє вид., доповн. і переробл. Львів : «Магнолія-2006», 2025. 285 с.
8. Михайленко С. В., Свіщова Є. В. Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії : навчальний посібник. 2-е вид., випр. Харків : НУА, 2023. 104 с.
9. Панченко Н. Г., Резуненко М. Є. Вища математика : навчальний посібник. Харків : УкрДУЗТ, 2022. Ч. 1. 231 с.
10. Практикум з вищої математики. Комп'ютерна система для дистанційного навчання. Частина І : навч. посіб. в 2-х ч. / В. С. Шебанін, О. В. Шебаніна, І. П. Атаманюк та ін. Миколаїв : МНАУ, 2016. 229 с. URL: <https://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/2378>
11. Шапочка І. В. Лінійна алгебра: навчальний посібник. Ужгород : Говерла, 2023. 224 с.

Навчальне видання

АЛГЕБРА ТА ГЕОМЕТРІЯ

Методичні рекомендації

Укладач: **Бойчук** Олена Володимирівна

Формат 60x84/16 Ум. друк. арк.

Тираж __ прим. Зам. №

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Г. Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.