МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ МЕНЕДЖМЕНТУ
Кафедра економічної кібернетики, комп’ютерних наук та
інформаційних технологій

Математичні методи в інформаційних технологіях

Конспект лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
ОПП «Комп’ютерні науки» за спеціальністю F3 (122) «Комп’ютерні науки»
денної форми здобуття вищої освіти

Миколаїв
2026

УДК 519.1:004
М74

Друкується за рішенням науково-методичної комісії факультету менеджменту Миколаївського національного університету від 21.05.2026 року протокол № 9

Укладач:

О. Є. Богатєнкова – асистент кафедри економічної кібернетики, комп’ютерних наук та інформаційних технологій, Миколаївський національний аграрний університет

Рецензенти:

В. О. Поздєєв – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри методики викладання фізики та математики Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова

В. В. Поживатенко – кандидат фізико-математичних наук, старший викладач кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського національного аграрного університету

© Миколаївський національний аграрний університет, 2026

ЗМІСТ

ВСТУП

Математичні методи в інформаційних технологіях – це комплексний розділ сучасної математики, що охоплює фундаментальні та прикладні методи аналізу, моделювання та оптимізації, які широко використовуються у сфері комп'ютерних наук. Дисципліна поєднує знання з лінійної та векторної алгебри, математичного аналізу, аналітичної геометрії, теорії ймовірностей, дискретної математики, забезпечуючи системний підхід до розв'язання задач інформаційних технологій.

Методичні рекомендації створено для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю F3 (122) «Комп'ютерні науки». Матеріал структуровано відповідно до програми фахового вступного випробування та спрямовано на узагальнення, повторення та структурування знань, здобутих у попередніх курсах математики, та формування цілісного уявлення про математичні основи ІТ. Це дозволить студентам підготуватися та успішно скласти іспит для вступу до магістратури на спеціальність F3 (122) «Комп'ютерні науки».

Вивчення дисципліни дозволяє студентам ефективно працювати з функціями, оптимізаційними задачами, числовими та векторними структурами, комбінаторними задачами, графами та логічними моделями, а також застосовувати статистичні методи для аналізу та прогнозування даних.

Запропоновані методичні рекомендації покликані допомогти студентам систематизувати набутий матеріал, опанувати основні математичні інструменти та підвищити компетентність у розв'язанні прикладних задач, що становлять основу сучасних інформаційних технологій.

1. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ, АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ, ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ В ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЯХ

1.1. Числова послідовність. Границя послідовності. Похідна функції

Послідовність. Поняття границі числової послідовності.

Послідовністю дійсних чисел називається функція $x_n=f(n)$ натурального аргументу, значення якої записано в порядку зростання аргументу. Послідовність будемо позначати так:

$$x_1\ ,\ x_2\ ,\dots,\ x_n\ ,\dots \tag{1}$$

або $\{x_n\}$, де $x_n=f(n)$ – n-й член послідовності ($n=1,\ 2,\ \dots$). Числа x_1, x_2, … називають відповідно першим, другим, … членом послідовності, а вираз x_n – n-им або загальним членом послідовності.

Числова послідовність вважається **заданою**, якщо відомий її загальний член або відомо правило, за яким можна відновити довільний член послідовності.

Послідовність $\{x_n\}$ називається **зростаючою (спадною, не зростаючою, неспадною)**, якщо кожний її наступний член більший (менший, не більший, не менший) від попереднього, тобто для кожного натурального n виконуються нерівності

$$x_{n+1} > x_n\ \ (\ x_{n+1} < x_n\ ,\ \ x_{n+1} \le x_n\ ,\ \ x_{n+1} \ge x_n\ ). \tag{2}$$

Зростаючі, спадні, неспадні та незростаючі послідовності називаються монотонними.

4. Означення 3. Послідовність $\{x_n\}$ називається **обмеженою**, якщо існує дійсне число M таке, що для всіх натуральних n виконується нерівність

$$|x_n| \le M\ . \tag{3}$$

На мові кванторів: $\exists\, M \in R\ \ \forall n \in N:\ |x_n| \le M\ .$

У противному випадку послідовність називається **необмеженою**. На мові кванторів: $\forall\ M \in R\ \exists n_0 \in N:\ |x_{n_0}| > M\,.$

5. Нехай маємо дві послідовності

$$x_1 , x_2 ,\dots , x_n ,\dots , \tag{4}$$

$$y_1 , y_2 ,\dots , y_n ,\dots , \tag{5}$$

Послідовності $\{x_n + y_n\}, \{x_n - y_n\}, \{x_n \cdot y_n\}, \left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\} \ (y_n \neq 0)$

називаються відповідно **сумою, різницею, добутком і часткою** послідовностей (4) і (5).

Число A називається границею числової послідовності $\{x_n\}$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує натуральне число $n_0(\varepsilon)$ таке, що

$$|x_n - A| < \varepsilon \tag{6}$$

для всіх $n > n_0(\varepsilon)$.

Символічний запис $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ або $x_n \to A, (n \to \infty)$.

На мові кванторів: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \in N \ \forall n > n_0(\varepsilon) : |x_n - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A.$

У противному випадку послідовність називається розбіжною, тобто послідовність називається розбіжною, якщо ніяке число не є її границею. На мові кванторів: $\forall A \ \exists \varepsilon_0 \ \forall n_0(\varepsilon) \in N \ \exists n > n_0(\varepsilon) : |x_n - A| \geq \varepsilon_0$.

Геометричний зміст границі послідовності.

Якщо число A є границею послідовності $\{x_n\}$, то для довільного додатного числа ε всі члени цієї послідовності, починаючи з деякого номера $n_0(\varepsilon)$, потрапляють до ε-околу точки A.

Якщо в числовій послідовності замінити, відкинути або приєднати скінченну множину членів, то це не вплине ні на існування, ні на величину границі даної послідовності.

Якщо $\{n_k\}$, де k = 1, 2, ..., є зростаючою послідовністю натуральних чисел, то послідовність $\{x_{n_k}\}$ називається **підпослідовністю послідовності $\{x_n\}$**.

Оскільки для всіх $k \geq 1$ виконується $n_k \geq k$, то $n_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

Якщо послідовність $\{x_n\}$ збігається до A, то і будь-яка її підпослідовність також збігається до A.

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, то послідовність $\{x_n\}$ називається **нескінченно малою.**

Теорема 1.1. Добуток нескінченно малої послідовності на обмежену послідовність є **нескінченно малою послідовністю**.

Теорема 1.2. Сума двох нескінченно малих послідовностей є **нескінченно малою послідовністю**.

Кажуть, що послідовність $\{x_n\}$ має нескінченну границю а) $\infty+$, б) $\infty-$, в) ∞, якщо для будь-якого числа $M > 0$ існує номер $n_0(M)$ такий, що для всіх $n > n_0(M)$ виконується нерівність

$$\text{а) } x_n > M, \quad \text{б) } x_n < -M, \quad \text{в) } |x_n| > M.$$

Записують а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, б) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, в) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Послідовність, яка має нескінченну границю, називається **нескінченно великою.**

Обчислення границь послідовностей

Основні теореми про границі

Теорема 1. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ і $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$, тобто границя суми (різниці) збіжних послідовностей дорівнює сумі (різниці) границь.

Теорема 2. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ і $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$, тобто границя добутку збіжних послідовностей дорівнює добутку границь.

Теорема 3. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ і $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, де a і b скінчені числа і $b \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$.

Теорема 4. Якщо послідовність $\{x_n\}$ стала, тобто $x_n = C,\ n = 1,2,\ldots$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$.

Теорема 5. Сталий множник можна виносити за знак границі, тобто якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} C \cdot x_n = C \cdot a$.

Теорема 6. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ і $k \in N$, то $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n^k) = (\lim\limits_{n\to\infty} x_k)^k = a^k$.

2. Число $\boldsymbol{e}$. Послідовність $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ має скінченну границю, яку називають числом $\boldsymbol{e}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \boldsymbol{e} = 2{,}718281828459045... \qquad (1)$$

Невизначеності.

1. Розкрити невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$ означає знайти границю відношення двох нескінченно великих послідовностей.

2. Розкрити невизначеність виду $\infty - \infty$ означає знайти границю різниці двох нескінченно великих послідовностей одного знаку.

3. Розкрити невизначеність виду $\frac{0}{0}$ означає знайти границю відношення двох нескінченно малих послідовностей.

4. Розкрити невизначеність виду $0 \cdot \infty$ означає знайти границю добутку нескінченно малої і нескінченно великої послідовностей.

5. Розкрити невизначеність виду 1^{∞} означає знайти границю степеня при умові, що основа степеня прямує до одиниці, а показник степеня є нескінченно велика послідовність.

Похідна функції

Похідною функції $y = f(x)$ в точці x називається границя відношення приросту функції Δy в цій точці до приросту аргументу Δx, коли приріст аргументу прямує до нуля, якщо ця границя існує.

Таким чином, за означенням

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Механічний зміст похідної. Швидкість в даний момент часу – це похідна від пройденого шляху $S(t)$ за часом t : $v = S'(t)$.

Фізичний зміст похідної. Якщо функція $y = f(x)$ описує деякий фізичний процес, то похідна $y' = f'(x)$ є швидкістю (миттєвою) зміни цього процесу.

Геометричний зміст похідної. Кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ або тангенс кута α, що утворює дотична до кривої в даній точці з додатним напрямом осі Ox, - це похідна $f'(x_0)$ в цій точці: $k = tg\alpha = f'(x_0)$.

Функція $f(x)$ називається диференційовною в точці $x0$, якщо в цій точці вона має похідну $f'(x_0)$.

Функцію $f(x)$ називають диференційовною на інтервалі, якщо вона диференційовна в кожній точці цього інтервалу.

Зв'язок між неперервністю функції в точці і диференційовністю її в цій точці встановлює така теорема.

Теорема 1.3. Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x_0, то вона в цій точці неперервна.

Правила диференціювання суми, різниці, добутку і частки.

Теорема 1.4. Якщо функції $u = u(x)$, $v = v(x)$ диференційовні в точці x, сума, різниця, добуток і частка цих функцій (частка за умови, що $v(x) \neq 0$) також диференційовні в цій точці і справедливі такі формули:

$$(u+v)' = u' + v';$$
$$(u-v)' = u' - v'$$
$$(uv)' = u'v + uv'$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Теорема 1.5. Якщо $y = f(x) = C$, де C – стале число, то

$$f'(x) = C' = 0$$

Теорема 1.6. Сталий множник можна виносити за знак похідної, тобто

$$(Cu)' = Cu'$$

Нехай $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ – пара взаємно обернених функцій.

Теорема 1.7. Якщо функція $y = f(x)$ строго монотонна на інтервалі $(a;\ b)$ і має відмінну від нуля похідну $f'(x)$ в довільній точці цього інтервалу, то існує обернена функція $x = \varphi(y)$, яка також має похідну $\varphi'(y)$, причому $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

Таблиця похідних

1. $c' = 0,\ c = \text{const}$
2. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$
3. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$
4. $\left(e^x\right)' = e^x$
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
10. $(\mathrm{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
11. $(\mathrm{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(\mathrm{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
15. $(\mathrm{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
16. $(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x$
17. $(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x$
18. $(\mathrm{th}\, x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$
19. $(\mathrm{th}\, x)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$

Нехай $y = f(u)$ і $u = \varphi(x)$, тоді $y = f\ \varphi\ x$ – складена функція з проміжним аргументом u і кінцевим x.

Теорема 1.8. Якщо функція $u = \varphi(x)$ мав похідну u'_x в точці x, а функція $y = f(u)$ має похідну y'_u у відповідній точці u, то складена функція $y = f(\varphi(x))$ має похідну y'_x в точці x і справедлива формула

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

Основні правила диференціювання:

1. $d(cu) = cdu$, c – стала; 2. $d(u \pm v) = du \pm dv$;

3. $d(u \cdot v) = udv + vdu$; 4. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$, $v(x) \neq 0$.

Ці рівності правильні за умови, що функції $u(x)$, $v(x)$ диференційовні в точці x.

Основні формули диференціювання:

1. $dc = 0$; 2. $dx^n = nx^{n-1}dx$; 3. $d\,sin\,x = cos\,xdx$;

4. $d\,cos\,x = -sin\,xdx$; 5. $da^x = a^x\,ln\,adx$; 6. $d\,log_a\,x = \frac{dx}{x\,ln\,a}$;

7. $dtgx = \frac{dx}{cos^2\,x}$; 8. $dctgx = -\frac{dx}{sin^2\,x}$; 9. $d\,arcsin\,x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

10. $d\,arccos\,x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 11. $darctgx = \frac{dx}{1+x^2}$; 12. $darcctgx = -\frac{dx}{1+x^2}$.

1.2. Частинні похідні. Екстремум функції. Визначений інтеграл

Припустимо, що задані функція $z = f(x, y)$ і точка $(x, y) \in D$. Якщо зміна функції z відбувається при зміні тільки одного з аргументів, наприклад x, при фіксованому значенні другого аргументу y, то функція набуває приросту $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$, який називається **частинним приростом** функції $f(x, y)$ за аргументом x.

Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \qquad (3.3)$$

то вона називається **частинною похідною** функції $f(x, y)$ за аргументом x і позначається одним із символів: $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}, f'_x$.

Аналогічно дається означення частинного приросту z за аргументом y і частинної похідної $f(x, y)$ за аргументом y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \qquad (3.4)$$

Під час обчислення частинних похідних користуються вже відомими правилами та формулами диференціювання функції однієї змінної, вважаючи при цьому другий аргумент сталою.

Частинними похідними другого порядку функції $z = f(x,y)$ називаються частинні похідні від її частинних похідних першого порядку, якщо вони існують.

Частинні похідні другого порядку позначаються так:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx}; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}.$$

Аналогічно визначаються частинні похідні більш високого порядку. Частинна похідна другого або більш високого порядку, взята за деякими різними змінними, називається **мішаною частинною похідною**.

Теорема. Дві мішані частинні похідні однієї й тієї ж функції, що відрізняються лише порядком диференціювання, дорівнюють одна одній за умови їх неперервності.

Дано функцію двох змінних $z = f(x, y)$. Припустимо, що її аргументи x і y отримують прирости Δx і Δy. Тоді функція $z = f(x, y)$ отримує повний приріст:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \qquad (3.10)$$

Геометрично повний приріст Δz дорівнює приросту аплікати графіка функції $f(x, y)$ при переході від точки $M(x, y)$ у точку $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

Функція $z = f(x, y)$ називається диференційованою в точці (x, y), якщо її повний приріст Δz може бути поданий у вигляді:

$$\Delta z = A(x, y)\Delta x + B(x, y)\Delta y + o(\rho),$$

де $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

$o(\rho)$ – нескінченно мала більш високого порядку, ніж ρ.

Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційована в даній точці, то її *повним диференціалом* називається головна частина повного приросту цієї функції, лінійна відносно Δx і Δy, тобто:

$$\mathrm{d}z = A(x,y)\Delta x + B(x,y)\Delta y.$$

Диференціали незалежних змінних, за означенням, дорівнюють приростам: $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$.

Диференціал функції $z = f(x, y)$ обчислюється за формулою:

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y. \qquad (3.11)$$

Якщо замінимо наближено приріст функції її диференціалом (за умови достатньо малих значень Δx і Δy), отримаємо:

$$\Delta z \approx \mathrm{d}z = f'_x(x,y)\mathrm{d}x + f'_y(x,y)\mathrm{d}y. \qquad (3.12)$$

Звідки маємо:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + \mathrm{d}z = f(x,y) + f'_x(x,y)\mathrm{d}x + f'_y(x,y)\mathrm{d}y.$$

Усі ці міркування можна перенести на функції трьох і більше змінних.

Екстремум функції

Точка x_0 називається **точкою максимуму (мінімуму)** функції $f(x)$, якщо існує окіл $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ цієї точки такий, що для всіх $x \in (x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$, виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$ (для максимуму) або $f(x) > f(x_0)$ (для мінімуму).

Значення функції в точці максимуму (мінімуму) називають **максимумом (мінімумом) функції**. Точки максимуму і точки мінімуму називають точками екстремуму. Максимуми і мінімуми функцій називають **екстремумами функції**.

Необхідні умови екстремуму. Якщо функція $f(x)$ в точці x_0 має екстремум і диференційовна в ній, то $f'(x_0) = 0$.

Точки, в яких похідна функції перетворюється в нуль, називаються стаціонарними.

Перші достатні умови екстремуму.

Нехай функція $f(x)$ диференційовна в околі точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0, у якій функція $f(x)$ неперервна.

Якщо при переході точки x через точку x_0 зліва направо похідна $f'(x)$ змінює знак з плюса на мінус, то точка x_0 є точкою максимуму. Якщо при переході точки x через точку x_0 похідна $f'(x)$ змінює знак з мінуса на плюс, то точка x_0 є точкою мінімуму.

Другі достатні умови екстремуму.

Нехай функція $f(x)$ диференційовна в околі точки x_0, а в самій точці x_0 виконується умова:

$f'(x_0) = 0$ і $f''(x_0) \neq 0$.

Якщо $f''(x_0) > 0$, то функція $f(x)$ у точці x_0 має мінімум.

Якщо $f''(x_0) < 0$, то функція $f(x)$ у точці x_0 має максимум.

Повне дослідження функції та побудова її графіка

Під повним дослідженням функції розуміють дослідження за такою схемою (водночас дамо деякі рекомендації щодо побудови графіка функції):

1. Визначити область існування функції. Це дає змогу визначити ті точки осі абсцис, над якими пройде графік.

2. Дослідити функцію на періодичність. Якщо функція буде періодичною з періодом Т, то подальше дослідження проводити лише на відрізку довжини Т.

3. Дослідити функцію на парність. Якщо функція буде парною або непарною, то подальше дослідження проводити лише на області визначення, що лежить на невід’ємній півосі дійсної осі.

4. Дослідити функцію на неперервність, встановити вид точок розриву та знайти границю функції на кінцях проміжків області визначення.

5. Знайти вертикальні і похилі асимптоти та побудувати їх.

6. Знайти інтервали монотонності і точки екстремуму функції. Знайти значення функції в цих точках та побудувати відповідні точки графіка.

7. Знайти інтервали опуклості, угнутості і точки перегину графіка функції. Побудувати одержані точки.

8. Знайти точки перетину графіка функції з осями координат та побудувати їх.

9. При необхідності побудувати декілька контрольних точок.

10. Графік будуємо паралельно повному дослідженню функції.

Визначений інтеграл

Функція *F(x)* називається первісною функції *f(x)* на проміжку $\langle a; b\rangle$, якщо $\forall\ x \in \langle a; b\rangle$ виконується рівність $F'(x) = f(x)$.

Таблиця основних інтегралів:

1.	$\int 0dx = C$;	8.	$\int \sin x dx = -\cos x + C$;
2.	$\int 1\,dx = x + C$;	9.	$\int \cos x dx = \sin x + C$;
3.	$\int x^{\alpha}\ dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$;	10.	$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\, x + C$;
4.	$\int \dfrac{dx}{x} = ln\lvert x \rvert + C$;	11.	$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + C$;
5.	$\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C$;	12.	$\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} ln \left\lvert \dfrac{x-a}{x+a} \right\rvert + C$;
6.	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arcsin \dfrac{x}{a} + C$;	13.	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = ln \left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right\rvert + C$;
7.	$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{ln\, a} + C$;	14.	$\int \dfrac{dx}{\sin x} = ln \left\lvert tg \dfrac{x}{2} \right\rvert + C$.

Теорема. Нехай функція *f(x)* неперервна на відрізку [*a; b*], і *F(x)* – яка-небудь первісна для *f(x)* на цьому відрізку. Тоді правильна рівність:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (1)$$

Формулу (1) називають **формулою Ньютона–Лейбніца**. Вона встановлює зв’язок між визначеним і невизначеним інтегралом. Формула Ньютона-Лейбніца є основною формулою інтегрального числення. Її можна взяти за означення визначеного інтеграла, що і зроблено в шкільному курсі математики.

Теорема (Метод заміни змінної для визначеного інтеграла). Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, функція $x = \varphi(t)$ і її похідна $\varphi'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha; \beta]$, причому $a = \varphi(\alpha) \le \varphi(t) \le \varphi(\beta) = b$, для $\alpha \le t \le \beta$.

Тоді правильна рівність:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t. \qquad (2)$$

Інтегрування за допомогою даної теореми і формули (2) називають **інтегруванням методом заміни змінної або методом підстановки**. Усі зауваження, зроблені для методу підстановки у невизначеному інтегралі, мають місце і при обчисленні визначеного інтеграла.

Площа криволінійної трапеції

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна і невід'ємна на відрізку $[a; b]$, то площа S фігури, яка обмежена лініями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$, $a < b$ (рис. 1.), існує і дорівнює:

$$S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \qquad (1)$$

Таку фігуру називають **криволінійною трапецією**.

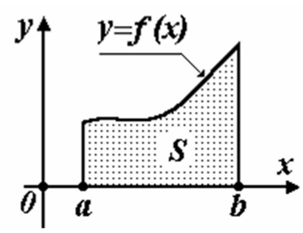


Рисунок 1.1. Криволінійна трапеція

Площа фігури, обмеженої двома функціями

Площа S фігури, обмеженої лініями $x = a$, $x = b$ (де $a < b$), та графіками функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$, де $f(x) \ge g(x)$ для всіх $x \in [a; b]$, виражається інтегралом:

$$S = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx. \qquad (2)$$

Такі фігури називають **простими відносно осі *OX***.

1.3. Методи оптимізації. Апроксимація даних. Метод найменших квадратів

Операція – це дія або сукупність дій, підпорядкованих єдиному задуму та спрямованих на досягнення певної мети, яка має характер повторюваності, тобто багаторазовості.

Дослідити операцію – означає знайти оптимальне рішення за наявності обмежень економічного, технічного характеру тощо.

Оптимальними вважають ті рішення, які з тих чи інших міркувань кращі за інші.

Мета дослідження операцій – попереднє кількісне обґрунтування оптимальних рішень.

Ефективність операції – кількісно виражається у вигляді критерію ефективності – цільової функції.

Для застосування кількісних методів дослідження потрібно побудувати **математичну модель операції**.

Задачі дослідження операцій, які є об’єктом математичних методів, це, як правило, задачі на знаходження екстремальних значень деяких функціональних залежностей.

Для постановки задачі дослідження операцій необхідно визначити:

– цілі функціонування досліджуваного об’єкта, вагомість кожного з них;

– можливі засоби реалізації досягнення поставлених цілей;

– критерії ефективності досягнення поставлених цілей.

До основних компонентів математичної моделі дослідження операцій належать:

1) змінні управління (керовані), умовно керовані та некеровані змінні;

2) обмеження;

3) цільові функції.

Змінними управління (керованими змінними) називають такі змінні, значення яких можливо змінювати у процесі управління деякою системою чи процесом під час знаходження певного рішення проблемної ситуації. Як правило, це змінні, значення яких може змінювати дослідник, і які необхідно відшукати при знаходженні найкращого (оптимального) розв’язку проблемної ситуації.

Дослідник повинен враховувати вплив значення **некерованих змінних** на досліджуваний об’єкт, але змінювати самостійно їх не може. Так, наприклад, під час знаходження оптимальної структури посівних площ ми не можемо змінювати погодні умови, що впливатимуть на врожайність культур. Іноді некеровані змінні називають параметрами задачі.

Потрібно зазначити, що залежно від мети розв’язування задачі керовані змінні можуть переходити у некеровані та навпаки.

Обмеження математичної моделі задачі дослідження операцій відображають зв’язок керованих і некерованих змінних. Як правило, це система рівнянь і (або) нерівностей, які у сукупності визначають область припустимих рішень (область зміни керованих змінних). Іноді досягнення поставленої мети при встановлених співвідношеннях змінних неможливе (область припустимих рішень нульова).

Критерій оптимальності – показник діяльності досліджуваного об’єкта, що має конкретний економічний (фізичний) зміст. За значенням цього критерію обирають таке рішення проблемної ситуації, що максимально задовольняє поставлену мету. Математична модель однієї задачі дослідження операцій може мати кілька критеріїв оптимальності.

Цільова функція – математична форма критерію оптимальності, вона пов’язує між собою мету розв’язування задачі дослідження операцій, керовані та умовно керовані змінні моделі.

Розглянемо загальну **постановку задачі дослідження операцій у математичному вигляді.**

Деякі з таких кількісних характеристик бувають незмінними, сталими для певної операції чи певних умов. Позначимо їх $c_k \left(k=\overline{1,l}\right)$. Це і є параметри задачі. Інші мають характер змінних величин, незалежних і залежних, детермінованих чи випадкових. Незалежні змінні можна поділити на дві групи: керовані, значення яких можна змінювати (позначимо їх $x_j \left(j=\overline{1,n}\right)$; некеровані, значення яких визначаються комплексом зовнішніх умов (зовнішнім оточенням), або параметри системи $y_r \left(r=\overline{1,s}\right)$.

За таких умов, як правило, вдається встановити функціональну залежність між деякою величиною *f (X)*, якою вимірюють ступінь досягнення мети, і незалежними змінними та параметрами операції:

$$f(X)=F\left(x_j,y_r,c_k\right). \tag{1.1}$$

Функція (1.1) є цільовою, або критерієм оптимальності, оскільки її значення є мірою ефективності проведення операції після досягнення певної мети.

Завдання полягає в тому, щоб вибрати такі значення керованих змінних x_j, які б надавали цільовій функції екстремального значення, тобто

$$f^*(X)=\underset{x_j}{extrem}\,F\left(x_j,y_r,c_k\right). \tag{1.2}$$

Проте можливості вибору керованих змінних j x завжди обмежені зовнішніми щодо операції умовами (енергетичними, матеріальними, людськими, грошовими ресурсами тощо), а також параметрами самої операції. В ідеальному випадку обмеження можна описати за допомогою математичних рівнянь і нерівностей:

$$g_i\left(x_j,y_r,c_k\right)\{\le=\ge\}b_i,\ i=\overline{1,m}. \tag{1.3}$$

Залежність (1.3) називають **системою обмежень**, або **системою умов задачі.**

Вирази (1.1) та (1.3) і є **математичною моделлю операції**. Таким чином, задача полягає в тому, щоб знайти

$$\underset{x_j}{extrem}\,F\left(x_j,y_r,c_k\right). \tag{1.4}$$

За умови

$$g_i\left(x_j,y_r,c_k\right)\{\le=\ge\}b_i,\ i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}, r=\overline{1,s}, k=\overline{1,l}, \tag{1.5}$$

де $f(\cdot)$ – цільова функція (показник якості або ефективності операції);
$g_i(\cdot)$, b_i – відповідно функція витрати та величини i-го ресурсу.

Приклад 1.1 Фермер відгодовує два види тварин – А і В. Для цього використовує три види кормів. Витрати корму кожного виду на одну тварину за видами наведені в табл. 1.1. У ній також зазначені запаси кормів та прибуток від реалізації однієї тварини. Визначити, скільки тварин кожного виду потрібно відгодовувати фермерові, щоб отримати максимальний прибуток. Скласти математичну модель операції.

Розв'язання

Кількість тварин виду А позначимо як x_1, кількість тварин виду В – як x_2.

Отже, визначено вектор керованих змінних $X=(x_1, x_2)$.

Запишемо функцію прибутку: $F=16x_1+6x_2 \to \max$. Ця функція виражає критерій оптимальності задачі у математичній формі – *цільову функцію*.

Таблиця 1.1.

Вид корму	**Витрати кормів на відгодівлю**		**Запаси кормів**
	тварини виду А	**тварини виду В**	
I	2	3	180
II	4	1	240
III	6	7	426
Прибуток від реалізації однієї тварини	16	6	

Складемо вектор некерованих змінних $B=(b_1, b_2, b_3)=(180;\ 240;\ 426)$.

За умовою задачі корм 1-го виду витрачається в кількості $2x_1+3x_2$, що не повинно перевищувати запаси цього виду корму, тобто 180. Маємо нерівність $2x_1+3x_2 \le 180$. Аналогічні нерівності складаємо щодо інших видів кормів: $4x_1+x_2 \le 240$; $6x_1+7x_2 \le 426$.

У результаті маємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2 \le 180, \\ 4x_1+x_2 \le 240, \\ 6x_1+7x_2 \le 426. \end{cases}$$

Потрібно додати, що кількість тварин не може бути від'ємним числом, тобто $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Об'єднуючи всі нерівності, одержимо *систему обмежень:*

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 180, \\ 4x_1 + x_2 \leq 240, \\ 6x_1 + 7x_2 \leq 426, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Цільова функція і система обмежень разом становлять *математичну модель*. Отже, математична модель наведеної задачі має вигляд

$$F = 16x_1 + 6x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 180, \\ 4x_1 + x_2 \leq 240, \\ 6x_1 + 7x_2 \leq 426, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Методи дослідження операцій

Під час розв'язування задач дослідження операцій використовують різноманітний математичний апарат (рис. 1.2).

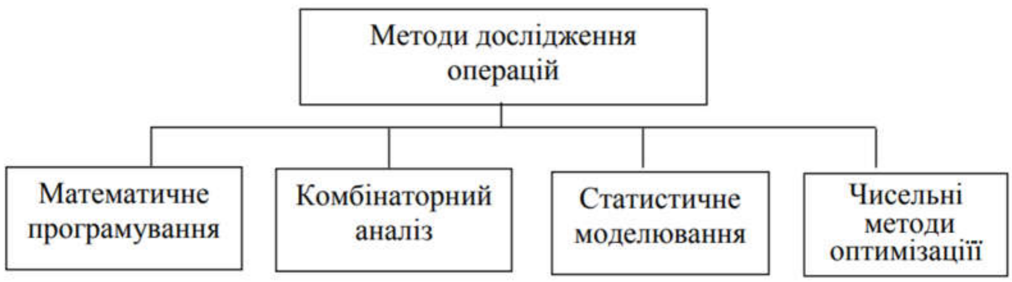


Рисунок 1.2. Методи розв'язування задач дослідження операцій

Математичне програмування – це прикладна математична дисципліна, що досліджує екстремальні (оптимізаційні) задачі та розробляє методи їх розв'язування.

Рисунок 1.3. схема задач математичного програмування

Задачі опуклого програмування – це задачі, розв'язком яких є максимум опуклої чи мінімум увігнутої функції.

Задачі квадратичного програмування – задачі, в яких необхідно знайти максимум чи мінімум квадратичної функції за умов, що її змінні задовольняють деяку систему лінійних обмежень (нерівностей чи рівнянь).

Задачі дробово-лінійного програмування – задачі, в яких цільова функція є співвідношенням двох лінійних функцій.

Задачі параметричного програмування – задачі, в яких цільова функція або коефіцієнти системи обмежень залежать від деяких параметрів.

Задачі стохастичного програмування – задачі, в яких цільова функція або система обмежень містять випадкові величини.

Задачі динамічного програмування – задачі, процес розв'язання яких є багатоетапним.

Чисельні методи оптимізації в дослідженні операцій використовуються для розв'язування задачі оптимізації, що базується на точному або наближеному обчисленні значення функції мети. У результаті із заданою точністю знаходять наближення до розв'язання задачі – точки екстремуму функції, якщо така точка не єдина, то до множини точок екстремуму.

Розрізняють методи безумовної та умовної оптимізації.

Чисельні методи безумовної оптимізації функції однієї змінної можна поділити на три групи:

– методи виключення інтервалів (метод поділу інтервалу навпіл, метод Фібоначчі, метод «золотого перетину»);

– методи поліноміальної інтерполяції (метод квадратичної інтерполяції та методи інтерполяції вищих порядків);

– методи з використанням похідних (метод середньої точки, метод хорд, метод Н'ютона).

До чисельних методів безумовної оптимізації функції багатьох змінних відносять метод конфігурацій (метод Хука – Дживса), метод деформованого багатогранника (метод Нелдера – Міда), градієнтний метод найшвидшого спуску, метод Н'ютона та ін.

Чисельні методи умовної оптимізації функції багатьох змінних поділяють на дві групи:

– методи, що використовують перетворення задачі умовної оптимізації у послідовність задач безумовної оптимізації шляхом уведення до розгляду допоміжних функцій;

– методи безпосереднього розв'язування задачі умовної оптимізації, що ґрунтуються на русі з однієї припустимої точки, де виконані всі обмеження, до іншої припустимої точки із кращим значенням цільової функції.

До методів першої групи належать такі методи: штрафних функцій, метод бар'єрних функцій, метод множників Лагранжа; другої групи – метод проекції градієнта і метод можливих напрямків Зойтендейка.

Лінійне програмування

Під задачею лінійного програмування в загальному вигляді розуміють задачу знаходження екстремуму (мінімуму, максимуму) лінійної функції від n змінних на множині розв'язків системи лінійних нерівностей або лінійних рівнянь. Математична модель загальної задачі лінійного програмування формулюється так: знайти такі числові значення змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, що перетворюють в екстремум (максимум або мінімум) лінійну функцію

$$\max(\min)F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{2.1}$$

і задовольняють систему лінійних обмежень

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \{\le, \ge, =\} b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \{\le, \ge, =\} b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \{\le, \ge, =\} b_m \end{cases} \tag{2.2}$$

за умови невід'ємності змінних

$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0, \ldots,\ \ x_n \ge 0. \tag{2.3}$$

Цю функцію називають **цільовою функцією**, вона моделює поставлену в задачі мету.

Математична модель загальної задачі лінійного програмування може бути записаною у **векторній формі**.

Будь-який вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, координати якого задовольняють систему обмежень (2.2) та умови невід'ємності змінних (2.3), називається допустимим розв'язком (планом) задачі лінійного програмування.

Існує три форми запису задач лінійного програмування:

1) загальна;

2) стандартна (симетрична);

3) канонічна.

Загальна форма запису задачі лінійного програмування задовольняє умови:

– цільова функція спрямована на максимум або мінімум;

– система обмежень складається з нерівностей і (або) рівнянь;

– на невідомі накладена умова невід'ємності.

Загальна форма запису задачі лінійного програмування у математичному вигляді подана формулами (2.1) – (2.3).

Стандартна (симетрична) форма запису задачі лінійного програмування задовольняє умови:

– цільова функція спрямована на максимум;

– система обмежень складається з нерівностей виду «≤»;

– на невідомі накладена умова невід'ємності.

Канонічна (основна) форма запису задачі лінійного програмування задовольняє такі умови:

– цільова функція спрямована на максимум;

– система обмежень складається з рівнянь із невід'ємною правою частиною;

– на невідомі накладена умова невід'ємності.

Задачу (2.1)–(2.3) можна звести до канонічної форми, тобто до такого вигляду, коли в системі обмежень (2.2) усі невід'ємні, а всі $b_i\ (i = 1, 2, \ldots, m)$ обмеження є рівностями.

Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування застосовують у тих випадках, коли система обмежень і цільова функція містять не більше двох змінних.

Нелінійне програмування

У загальному вигляді задача нелінійного програмування складається з визначення максимального чи мінімального значення функції

$$f\,(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \tag{5.1}$$

за умов, що її змінні задовольняють співвідношення:

$$\begin{cases} g_i\,(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \le b_i \quad (i = \overline{1, k}), \\ g_i\,(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = b_i \quad (i = \overline{k+1, m}) \end{cases}, \tag{5.2}$$

де f і g_i – деякі відомі функції n змінних, а b_i – задані числа.

У результаті розв'язування задачі визначають точку $X^*(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, координати якої задовольняють співвідношення (5.2), причому таку, що для будь-якої іншої точки $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, координати якої також задовольняють співвідношення (5.2), виконується нерівність $f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \ge f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ($f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \le f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$).

Якщо f і g_i – лінійні функції, то задача (5.1)–(5.2) є задачею лінійного програмування.

Задача **наближення функцій** виникає при розв'язанні багатьох практичних і теоретичних задач, а інколи і як самостійна. Так, наближення функцій є важливим допоміжним апаратом при розв'язанні інших задач чисельного аналізу: чисельного інтегрування і диференціювання, розв'язання диференціальних рівнянь, розв'язання систем нелінійних рівнянь, задач оптимізації та ін.

Апроксимація (Approximation) – це наближений опис однією функцією (апроксимувальною) заданого вигляду іншої функції (апроксимованої), яка задається у будь-якому вигляді (при апроксимації даних вона задається у вигляді масивів даних).

Існує два головних підходи до апроксимації даних. При одному з них вимагають, щоб апроксимувальна крива (можливо кусково-гладка) проходила через всі точки, які задані таблицею. Це можна зробити з допомогою методів інтерполяції, які були розглянуті в попередньому розділі. При іншому підході дані апроксимують простою функцією, яка використовується при всіх табличних значеннях, але не обов'язково, щоб вона проходила через всі точки. Такий підхід зветься припасуванням кривої, яку прагнуть провести так, щоб її відхилення від табличних даних був мінімальним. Як правило, користуються методом найменших квадратів (МНК), тобто зводять до мінімуму суму квадратів різниць між значенням функції, яка визначена обраною кривою, та таблицею.

1.4. Числові та степеневі ряди. Диференціальні рівняння

Поняття збіжності числового ряду. Додатні ряди. Знакозмінні ряди. Абсолютна та умовна збіжність

Розглянемо числову послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Числовим нескінченним рядом називається символічний вираз вигляду:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

де $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ – члени ряду, a_n – загальний член ряду.

Розглянемо нескінченний числовий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1.1)$$

Сума n перших членів ряду (1.1) називається n-ю частковою сумою ряду і позначається:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Якщо існує скінченна границя часткової суми ряду: $\lim_{n\to\infty} S_n = S,$ то число S називається **сумою ряду** (1.1), а ряд називається збіжним.

Записують:

$$S = a_1 + a_2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Якщо границя $\lim_{n\to\infty} S_n$ не існує, то такий ряд не має суми і називається **розбіжним**.

Якщо в ряді (1.1) відкинути перші n членів, то одержимо ряд, який називається n-им **залишком ряду**.

Якщо ряд (1.1) збіжний, то n-й залишок ряду дорівнює різниці $S - S_n$ і позначається:

$$r_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$$

Числовий ряд збіжний (розбіжний) тоді і тільки тоді, коли збіжний (розбіжний) довільний його залишок.

Необхідна ознака збіжності ряду

Якщо числовий ряд (1.1) збіжний, то його загальний член прямує до нуля при необмеженому збільшенні номера, тобто: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Достатня ознака розбіжності ряду

Якщо загальний член ряду не прямує до нуля при $n \to \infty$: $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ то ряд (1.1) **розбіжний**.

Ознаки збіжності знакододатних рядів

Якщо всі члени ряду **невід'ємні**, то ряд називається **знакододатним**.

Для числових рядів із додатними членами ($a_n > 0$) використовуються достатні ознаки збіжності.

Ознака порівняння

Нехай задано два числові ряди:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0; \qquad (1.2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad b_n \geq 0 \qquad (1.3)$$

і для всіх n виконується нерівність: $a_n \leq b_n$

Тоді, якщо ряд (1.3) збіжний, то збіжний і ряд (1.2); якщо ряд (1.2) розбіжний, то розбіжний і ряд (1.3).

Ознака Даламбера. Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ з додатними членами існує границя $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$, то цей ряд при *D<1* збіжний, а при *D>1* – розбіжний. Якщо *D=1*, то про поведінку ряду не можна нічого сказати і потрібно застосовувати іншу ознаку.

Радикальна ознака Коші. Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ із додатними членами існує $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = K$, то цей ряд при *K<1* збіжний, а при *K>1* – розбіжний. Якщо *K=1*, то про поведінку ряду не можна нічого сказати і потрібно застосовувати іншу ознаку.

Збіжність і рівномірна збіжність функціональних послідовностей

Якщо кожному натуральному числу n за певним законом поставлена у відповідність деяка функція $f_n(x)$, визначена на деякій множині E, то кажуть, що на множині E задана **функціональна послідовність** і записують:

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots; \qquad (1)$$

$$f_n(x) \quad (n = 1, 2, \ldots); \qquad (2)$$

$$\{f_n(x)\} \qquad (3)$$

Записи (1), (2) і (3) еквівалентні.

Числова послідовність

При будь-якому фіксованому $x_0 \in E$ функціональна послідовність $\{f_n(x)\}$ стає **числовою послідовністю** $\{f_n(x_0)\}$.

Отже, функціональну послідовність можна розглядати як множину числових послідовностей.

Збіжність у точці

Якщо числова послідовність $\{f_n(x_0)\}$ збігається, то функціональна послідовність $\{f_n(x)\}$ називається **збіжною в точці x_0**.

Множина збіжності

Множина всіх значень x, для яких функціональна послідовність $\{f_n(x)\}$ є збіжною, називається **множиною (або областю) збіжності** функціональної послідовності $\{f_n(x)\}$.

Збіжність і рівномірна збіжність функціональних рядів

Вираз вигляду

$$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots \qquad (1)$$

або, що те саме, вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),$$

де $\{f_n(x)\}$ – послідовність функцій, визначених на множині E, називається функціональним рядом.

Якщо числовій ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ збігається, то функціональний ряд (1) називається збіжним в точці $x = x_0$. Множина всіх тих значень x, для яких функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ є збіжним, називається множиною (або областю) збіжності цього функціонального ряду.

Степеневі ряди та їх властивості

Степеневим рядом називається функціональний ряд вигляду:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \qquad (1)$$

де a_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) – сталі дійсні числа, що називаються **коефіцієнтами степеневого ряду**, а x_0 – довільне фіксоване дійсне число.

Теорема Коші-Адамара

Нехай дано степеневий ряд (1) і

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \qquad (2)$$

Тоді:

а) Якщо $\lambda = +\infty$, то ряд (1) збігається в точці $x = x_0$.

б) Якщо $0 < \lambda < +\infty$, то ряд збігається абсолютно в інтервалі (x_0 - $1/\lambda$; $x_0 + 1/\lambda$) і розбігається поза цього інтервалу.

в) Якщо $\lambda = 0$, то ряд (1) збігається абсолютно на всій числовій осі.

Число

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad (3)$$

називається **радіусом збіжності** степеневого ряду (1), а інтервал (x_0 - R; $x_0 + R$) – **інтервалом збіжності**. Формула (3) називається **формулою Коші–Адамара**.

Якщо існує $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, то $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Інтервал і множина збіжності

Кожний степеневий ряд (1) має свій **інтервал збіжності**.

В середині інтервалу збіжності ряд збігається **абсолютно**, а поза інтервалом розбігається.

В кінцях інтервалу збіжності ряд може: збігатися абсолютно, збігатися умовно, або бути розбіжним.

Тобто **множина збіжності** степеневого ряду є одним із проміжків: $(x_0 - R; x_0 + R)$, $[x_0 - R; x_0 + R)$, $(x_0 - R; x_0 + R]$, $[x_0 - R; x_0 + R]$

Теорема Абеля

Якщо степеневий ряд (1) збігається в точці $x_1 \neq x_0$, то він збігається **абсолютно** в усіх точках x, для яких: $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$.

Теорема 1 (Рівномірна збіжність)

Степеневий ряд (1) збігається **рівномірно** в кожному відрізку $[x_0 - R; x_0 + R]$, що лежить всередині його інтервалу збіжності.

Теорема 2 (Неперервність суми)

Сума $f(x)$ степеневого ряду (1) **неперервна** всередині його інтервалу збіжності.

Теорема 3 (Диференціювання степеневого ряду)

Нехай степеневий ряд

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \qquad (4)$$

має **радіус збіжності** $R > 0$.

Тоді ряд, утворений почленним диференціюванням ряду (4):

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}, \qquad (5)$$

має **той самий радіус збіжності *R***.

Сума $f(x)$ ряду (4) є **диференційованою функцією** всередині його інтервалу збіжності, причому справедлива рівність:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1} \qquad (6)$$

Теорема 4 (Існування похідних)

Сума $f(x)$ степеневого ряду (4) в середині інтервалу збіжності має **похідні всіх порядків**.

Теорема 5 (Інтегрування степеневого ряду)

Нехай степеневий ряд (4) має радіус збіжності $R > 0$, і нехай $f(x)$ – його сума.

Тоді виконується правильна рівність:

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = a_0(x - x_0) + \frac{a_1}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1} + \cdots, \qquad (7)$$

Примітка: радіус збіжності ряду (7) **дорівнює радіусу збіжності** ряду (4).

1.5. Основи лінійної та векторної алгебри, аналітичної геометрії

Поняття матриці. Дії над матрицями.

Матрицею називається прямокутна таблиця чисел, яка має m рядків і n стовпців.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа a_{ij} називаються елементами матриці, а запис $m \times n$ означає її розмір: m – кількість рядків матриці, n – кількість стовпців матриці. Якщо m=n, то матриця називається **квадратною**. Дві матриці *рівні між собою*, якщо вони мають однаковий розмір і всі їх відповідні елементи рівні між собою.

Сумою матриць одного й того самого порядку A = (a_{ij}) та B = (b_{ij}) називається матриця C = A + B, C = (c_{ij}), кожний елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць A і B:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Добутком матриці A = (a_{ij}) на число α називається матриця C, кожний елемент якої c_{ij} утворюється множенням відповідного елемента матриці A на α:

$$c_{ij} = \alpha * a_{ij}$$

Властивості додавання матриць та множення матриці на число:

1. Асоціативний закон додавання: A + (B + C) = (A + B) + C
2. Комутативний закон: A + B = B + A
3. Дистрибутивний закон для чисел: (α + β) * A = α * A + β * A
4. Дистрибутивний закон для матриць: α * (A + B) = α * A + α * B
5. Ідентичність: A + 0 = A

Добутком матриці A = (a_{ij}) розміру m×n на матрицю B = (b_{ij}) розміру n×p називається матриця C = A * B розміру m×p, C = (c_{ij}), кожний елемент якої обчислюється за формулою:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} .$$

Кожний елемент матриці C утворюється як сума добутків відповідних елементів i–го рядка матриці A на відповідні елементи j–го стовпця матриці B. В результаті множення дістанемо матрицю розміру m × p.

Властивості множення матриць

1) $(AB)C = A(BC)$; (асоціативність множення матриць)
2) $(A+B)C = AC+BC$; (дистрибутивність множення)
3) $A(B+C) = AB+AC$; (дистрибутивність множення)
4) $\lambda(AB) = (\lambda A)B$.

З означення випливає, що в загальному випадку добуток матриць некомутативний: $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Матриці A та B називаються переставними, якщо $A \cdot B = B \cdot A$.

Перестановочними можуть бути тільки квадратні матриці однакової розмірності. Прикладом перестановочних матриць є діагональні матриці однакової розмірності.

Для довільної матриці $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ транспонованою матрицею називається матриця $A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, яка отримується з матриці А заміною рядків стовпцями, а стовпців рядками. Щоб з матриці А отримати матрицю A^T , потрібно перший рядок матриці А записати як перший стовпець матриці A^T, другий рядок матриці А записати як другий стовпець матриці A^T і т.д. Ця операція називається операцією **транспонування матриці**.

Визначники.

Вираз $a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$ називають визначником другого порядку, складеним для квадратної матриці $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Позначають визначник другого порядку $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$. Визначником третього порядку, складеним для квадратної матриці, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, називається число, що дорівнює алгебраїчній сумі $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{32}a_{23}a_{11}$. Її позначають $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Визначники третього порядку можна обчислювати за правилом, яке називається правилом трикутників:

“+” “–“

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Визначники третього порядку можна обчислювати за правилом Саррюса. За цим правилом складають таблицю, для якої обчисляють визначник. Справа до неї дописують два перші стовпці. В основній таблиці проводять головну діагональ і дві прямі, їй паралельні, що перетинають по три елементи. Добутки елементів, розміщених на зазначених трьох прямих, є трьома першими членами визначника. Щоб обчислити три інші члени визначника, проводять побічну діагональ і дві прямі, їй паралельні, на яких розміщено по три елементи. Добутки цих елементів беруть с протилежним знаком.

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$

Матрицею, оберненою до даної квадратної матриці A, називають матрицю A^{-1}, яка задовольняє співвідношення $A^{-1} \times A = A \times A^{-1} = E$, де E – одинична матриця.

Системи лінійних рівнянь.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = bm. \end{cases} \qquad (1)$$

де $x_1, x_2, \dots, x_n$ – невідомі, які треба знайти; a_{ij} – сталі числа ($i = 1,\dots,m$; $j = 1,\dots,n$), їх називають коефіцієнтами системи (перший індекс – номер рівняння, другий – номер невідомого); $b_1, b_2, \dots, b_m$ – сталі числа, їх називають вільними членами.

Розв'язок системи – будь-яка сукупність чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, яка при підстановці замість $x_1, x_2, \dots, x_n$ перетворює всі рівняння системи на тотожності.

Систему називають: **сумісною**, якщо вона має принаймні один розв’язок; **несумісною**, якщо розв’язків немає; **визначеною**, якщо система має єдиний розв’язок; **невизначеною**, якщо система має більше ніж один розв’язок; **однорідною**, якщо всі вільні члени рівні нулю; **неоднорідною**, якщо принаймні один вільний член не дорівнює нулю.

Однорідні системи завжди сумісні, оскільки мають тривіальний розв’язок: $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Дві системи лінійних рівнянь називають **еквівалентними** або **рівносильними**, якщо вони сумісні і мають одні й ті самі розв’язки, або обидві несумісні.

Елементарні перетворення системи, які не змінюють її розв’язки:

1. Множення обох частин рівняння на число, відмінне від нуля.
2. Додавання (або віднімання) до одного рівняння іншого, помноженого на число, відмінне від нуля.
3. Переставляння рівнянь місцями.
4. Викреслювання рівняння виду: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0$.
5. Переставляння невідомих у системі.

Найбільш поширений метод розв'язування систем лінійних рівнянь, який називають **методом послідовного виключення невідомих**, або **методом Гаусса**.

Якщо в системі лінійних рівнянь число невідомих дорівнює числу рівнянь і визначник системи відмінний від нуля, то система має єдиний розв'язок, який можна знайти за **формулами Крамера**.

Векторна алгебра

Вектором називається напрямлений відрізок, тобто відрізок, для якого зазначений порядок його кінців. Перша точка напрямленого відрізка називається його початком, друга точка-його кінцем.

Позначення: $\overline{a}, \overline{b}, \ldots,$ або $\overline{AB}, \overline{CD} \ldots$ (рис. 1.4)

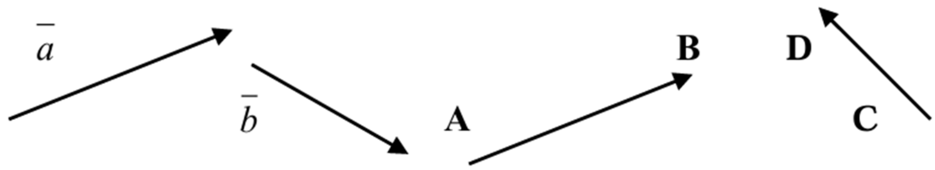


Рисунок 1.4. Приклади векторів

Вектор, у якого початок співпадає з його кінцем, називається **нульовим вектором**, або **нуль-вектором**.

Позначення: $\overline{0}, \overline{AA}$.

Два вектори $\overline{AB}, \overline{CD}$, називаються колінеарними, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Нуль-вектор вважається колінеарним будь-якому вектору.

Два ненульових колінеарних вектори $\overline{AB}, \overline{CD}$, які мають однаковий напрямок, називаються **співнапрямленими** (однаково напрямленими).

Позначення: $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$ (рис. 1.5 (а)).

Якщо вони мають протилежні напрямки – **протилежно напрямленими**.

Позначення: $\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{CD}$ (рис. 1.5 (б)).

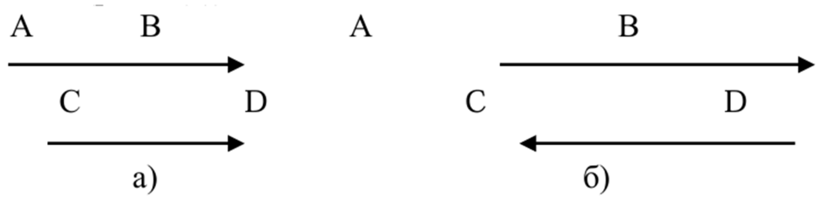


Рисунок 1.5.

Вектори називаються **компланарними**, якщо вони лежать в одній площині або паралельні одній площині.

Довжиною, або **модулем**, вектора $\overline{AB}$ називається довжина відрізка AB (при заданому масштабі), тобто відстань між його початком A і кінцем B.

Модуль нульового вектора дорівнює нулю.

Позначення модуля вектора: $|\overline{a}|, |\overline{AB}|$.

Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається **одиничним вектором або ортом**.

Вектори називаються **рівними**, якщо вони співнапрямлені і мають рівні модулі. Два вектори, які мають рівні модулі і протилежно напрямлені, називаються **протилежними**.

Вектор, протилежний вектору $\overline{a}$, позначається $-\overline{a}$.

Лінійні операції над векторами.

1. Сумою векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається такий вектор $\overline{p}$, який сполучає початок вектора $\overline{a}$ з кінцем вектора $\overline{b}$, при умові, що вектор $\overline{b}$ відкладено від кінця вектора $\overline{a}$ ("правило трикутника")

2. Різницею двох векторів $\overline{a}-\overline{b}$ називається такий вектор $\overline{c}$, який в сумі з вектором $\overline{b}$ дає вектор $\overline{a}$.

Властивості додавання векторів.

Для довільних векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ та $\overline{c}$ справедливі наступні рівності:

1. $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$ (властивість комутативності).
2. $(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$ (властивість асоціативності).
3. $\bar{a}+\bar{0}=\bar{a}$.
4. $\bar{a}+(-\bar{a})=\bar{0}$.

Добутком вектора $\bar{a}$ на дійсне число α називається вектор $\bar{p}$, який задовольняє умовам:

а) $|\bar{p}|=|\alpha|\cdot|\bar{a}|, |\alpha|$ – абсолютне значення числа α;

б) $\bar{p}\uparrow\uparrow\bar{a}$, якщо $\alpha\geq 0$, $\bar{p}\uparrow\downarrow\bar{a}$, якщо $\alpha<0$.

Позначення: $\bar{p}=\alpha\bar{a}$.

Добуток нульового вектора на довільне число або довільного вектора на число 0 дорівнює нуль-вектору: $\bar{a}\cdot 0=0\cdot\bar{a}=\bar{0}$.

Властивості множення вектора на число.

Для довільних чисел α, β і векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ справедливі наступні рівності:

1. $1\bar{a}=\bar{a}$.
2. $\alpha(\beta\bar{a})=(\alpha\beta)\bar{a}$.
3. $\alpha(\bar{a}+\bar{b})=\alpha\bar{a}+\alpha\bar{b}$.
4. $(\alpha+\beta)\bar{a}=\alpha\bar{a}+\beta\bar{a}$.

Скалярним добутком двох ненульових векторів називається число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними.

Позначають: $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\alpha$ або $(\bar{a},\bar{b})=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\alpha$.

Векторним добутком вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ називається вектор $\bar{p}$, що визначається наступними умовами:

- Модуль вектора $\bar{p}$ чисельно дорівнює $|\bar{p}|=|\bar{a}||\bar{b}|\sin(\bar{a};\hat{}\,\bar{b})$

- Вектор $\bar{p}$ перпендикулярний як вектору $\bar{a}$, так і вектору $\bar{b}$.

- Якщо вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ не колінеарні, то вектор $\bar{p}$ напрямлений так, що орієнтація трійок орієнтованих векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{p}$ і $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ співпадають.

Позначення: $[\bar{a}, \bar{b}]$ чи $\bar{a} \times \bar{b}$.

Мішаним, чи потрійним, добутком векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ називається їх векторно скалярний добуток. Позначається: $(\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c})$.

Аналітична геометрія

Тангенс кута φ нахилу прямої до осі Ox називається **кутовим коефіцієнтом** цієї прямої. Позначається: $tg\varphi = k$.

Рівняння $y = kx + b$ називається **рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом**.

Рівняння $y - y_1 = k(x - x_1)$ називається **рівнянням прямої, що проходить через задану точку в заданому напрямку**.

Рівняння $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ називається **рівнянням прямої, яка проходить через дві задані точки**.

Рівняння Ax + By + C = 0 визначає пряму лінію на площині і називається **загальним рівнянням прямої на площині**.

Рівняння $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ називається **рівнянням прямої у відрізках**.

Рівняння $\dfrac{x - x_1}{l} = \dfrac{y - y_1}{m}$ називається **канонічним рівнянням прямої**. Канонічне грецькою означає типове, традиційне.

Рівняння $\begin{cases} x = x_1 + lt \\ y = y_1 + mt \end{cases}$ називаються **параметричними рівняннями прямої**.

Кутом між прямими називається мінімальний кут між направляючими векторами цих прямих.

Нехай маємо дві прямі l_1 та l_2, які задано загальними рівняннями:

$$l_1: \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0$$
$$l_2: \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Кут між двома прямими обчислюється за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{|A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Способи задання площини

1. Площина задається точкою і направляючим підпростором

Вектори, які лежать в одній площині, називаються направляючим двовимірним векторним підпростором трьохвимірного векторного простору.

Нехай α – довільна площина, $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – точка, що належить площині α, а вектори $\overline{p}(a_1; a_2; a_3)$ і $\overline{q}(b_1; b_2; b_3)$ визначають направляючий підпростір даної площини (рис. 1). Візьмемо в площині α довільну точку $M(x, y, z)$. Оскільки $\overline{M_0M}(x - x_0; y - y_0; z - z_0)$, $\overline{p}$ і $\overline{q}$ компланарні, то виконується умова:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

Рівняння (1) є рівнянням площини, що задається точкою і направляючим підпростором.

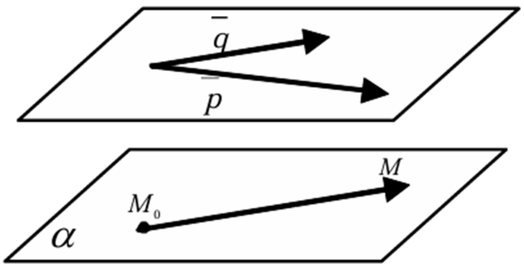


Рисунок 1.6.

Нехай маємо три точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$, які не лежать на одній прямій (рис. 1.7).

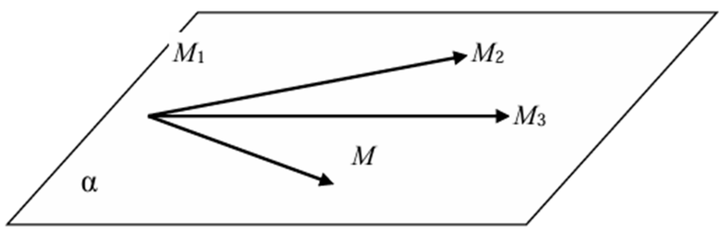


Рисунок 1.7.

Рівняння $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$ називається рівнянням площини, що проходить через три дані точки.

Нехай площина α відтинає на осях координат відрізки a, b, c.

Тоді $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ – точки перетину площини α з осями координат (рис. 3). Якщо $M(x;y;z)$ – довільна точка даної площини, то виконується умова компланарності векторів $\overline{AM}(x-a;y;z)$, $\overline{AB}(-a;b;0)$, $\overline{AC}(-a;0;c)$:

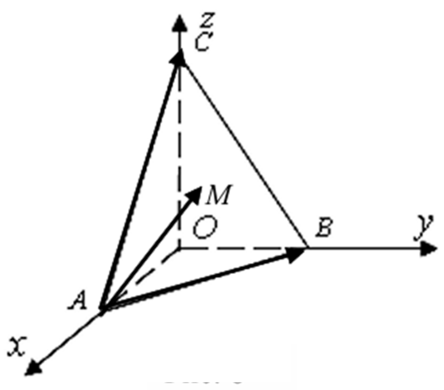


Рисунок 1.8.

Рівняння $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ називається рівнянням площини у відрізках.

2. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ В ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЯХ

2.1. Теорія множин

Для позначення конкретних множин використовують великі літери *A, S, X*… Для позначення елементів множин загалом застосовують малі літери *a, s, x*… Для позначення того, що x є елементом множини S (тобто x належить S), будемо застосовувати запис $x \in S$, а запис $x \notin S$ значитиме, що елемент x не належить множині S. Символ «$\in$» називається символом належності.

Однозначно визначена множина S, елементами якої є предмети $x_1, x_2, \ldots, x_n$, будемо позначати $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Зокрема, $\{x\}$ –**одинична множина**, тобто одноелементна множина, єдиним елементом якої є x. Якщо множина S скінчена, то кількість елементів в множині позначається $|S|$. Наприклад, для $S = \{a, b, c, d\}$ кількість елементів буде $|S| = 4$.

Порядок слідування елементів у множині не має значення. Наприклад, $\{a, b, c, d\}$ та $\{c, a, d, b\}$ – це одна й та сама множина.

Множини, як об’єкти, можуть бути елементами інших множин. Множину, елементами якої є множини, іноді називають **сімейством**. Як правило, визначення множин, які є сімействами, забезпечують індексами, щоби відрізняти їх одне від одної. Запис

$$\boldsymbol{S} = \{S_i\}_{i \in A}$$

позначає, що $\boldsymbol{S}$ є сімейством, елементами якого є множини S_i, причому індекс i «пробігає» множину А.

Сукупність об’єктів, які не є множиною, називається **класом**.

Множина, яка складається з елементів деякої множини S так, що ці елементи можуть входити до складу цієї множини в якій завгодно кількості екземплярів, називається **мультимножиною** множини S і позначається M(S). З точки зору теорії множин, множина і її мультимножина – це один і той самий об’єкт, і вони можуть не розрізнятися між собою. Але часто, особливо коли мова заходить про представлення множини в пам'яті ЕОМ, виникає потреба відрізняти мультимножину від множини.

Способи задання множин

Існує кілька способів задання множин.

1. Вербальний (словесний) спосіб за допомогою опису характеристичних властивостей, які повинні мати елементи множин. Наприклад, S – множина студентів жіночої статі в цій аудиторії.
2. Список (перелік) усіх елементів (у фігурних дужках). Наприклад, S = {1,2,3,4,5}.
3. Предикатний (характеристичний) спосіб за допомогою характеристичного предикату – деякої умови, вираженої у формі логічного твердження або процедури, яка повертає логічне значення, і дозволяє перевіряти, належить чи ні будь-який даний елемент множині. Якщо для даного елемента ця умова виконується, то він належить визначеній множині, у протилежному випадку – не належить. Тобто множина задається у вигляді $\{x : P(x)\}$ або $\{x \mid P(x)\}$, де $P(x)$ – характеристичний предикат. Наприклад:
   - S = $\{x \mid x$ – натуральне число$\}$;
   - S = $\{x \mid x$ – парне число$\}$;
   - S = $\{x \mid x$ – цифра десяткової системи числення$\}$.

Переліком можна задавати тільки скінченні множини. Нескінчені множини задаються характеристичними предикатами.

Задання множини називається **ненадлишковим**, якщо кожний її елемент входить в дану множину в єдиному екземплярі, і **надлишковим**, якщо хоча б один елемент цієї множини входить до її складу більш ніж в одному екземплярі (випадок мультимножини).

Універсум. Підмножини.

У теорії множин використовується поняття порожньої множини. **Порожня множина** – це множина, яка не містить елементів. Позначається вона символом $\varnothing$. Введення порожньої множини дає можливість оперувати будь-якою множиною без попереднього застереження, існує вона чи ні. Наприклад, множина S = $\{x \mid x$ – непарне число, що ділиться на 2$\}$ буде порожньою.

Означення 1.1. Множина A є **підмножиною** множини B, якщо кожний елемент A є елементом B, тобто якщо $x \in A$, то $x \in B$. Для позначення цього факту водиться знак «$\subset$» - символ включення (або «$\subseteq$»). При цьому множина B буде називатися **надмножиною** множини A.

Якщо необхідно підкреслити, що множина B містить також інші елементи, крім елементів множини A, то використовують символ строгого включення: $A \subset B$. Зв'язок між символами $\subset$ та $\subseteq$ задається виразом

$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \ \& \ A \neq B$.

Зокрема кожна множина є підмножиною самої себе. Якщо A не є підмножиною B, то пишуть $A \not\subset B$. Тобто існує елемент множини A, який не належить B.

Говорять, що множина A є **власною підмножиною** B, якщо $A \subset B$ і $A \neq B$. В такому випадку множина B буде власною надмножиною.

Означення 1.2. **Універсум (універсальна множина) U** – множина з такою властивістю, що всі множини, які розглядаються, є її підмножинами.

За визначенням, кожна з множин є підмножиною універсуму. Порожня множина є підмножиною будь-якої даної множини S, оскільки кожний елемент порожньої множини міститься в S (або не існує елементів порожньої множини, які б не належали S).

Означення 1.3. Дві множини рівні, коли вони складаються з одних і тих самих елементів: $A=B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

Наприклад, $\{1,2,3\} = \{3,2,1\}$.

Означення 1.4. Множину, елементами якої є всі підмножини A, називають множиною підмножин (**булеаном**) множини A і позначають P(A).

Так для триелементної множини A = $\{a,b,c\}$ маємо P(A) = $\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$.

У разі кінцевої множини A, що складається з n елементів, її булеан P(A) містить 2^n елементів. Доведення ґрунтується на підсумовуванні всіх коефіцієнтів розкладу бінома Н'ютона або на поданні підмножин n-розрядними двійковими числами, в яких 1 (або 0) відповідає елементам підмножин.

Операції над множинами

Означення 1.5. **Об'єднання** A і B ($A \cup B$) – множина, що складається з усіх елементів множин A, всіх елементів множини B і не містить ніяких інших елементів (рис 1.1,а), тобто $A \cup B = \{x \mid x \in A$ або $x \in B\}$.

Наприклад, $\{1,2,3\} \cup \{2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$.

Означення 1.6. **Переріз** (**перетин**) A і B ($A \cap B$) – множина, що складається з тих і тільки тих елементів, які належать одночасно множині A та множині B (рис 1.1,б), тобто $A \cap B = \{x \mid x \in A$ та $x \in B\}$.

Наприклад, $\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\} = \{2,3\}$.

Означення 1.7. **Різниця** A і B або **відносне доповнення** B до A (A-B, A\B) – множина, що складається з тих і тільки тих елементів, які належать множині A та не належать множині B (рис 1.1,в), тобто $A \setminus B = \{x \mid x \in A$ та $x \notin B\}$.

Наприклад, $\{1,2,3\} \setminus \{2,3,4\} = \{1\}$.

Означення 1.8. **Симетрична різниця** (**диз'юнктивна сума**) A і B ($A \div B$, $A \oplus B$) – множина, що складається з усіх елементів A, які не належать множині B, й усіх елементів B, які не належать множині A (рис 1.1,г), тобто

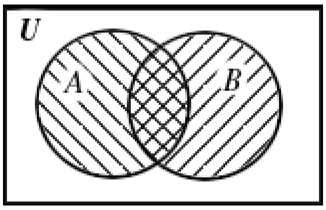
$A \div B = \{x \mid (x \in A$ та $x \notin B\}$ або $(x \notin A$ та $x \in B))$.

За означенням: $A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

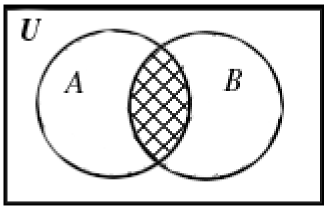
Наприклад, $\{1,2,3\} \div \{2,3,4\} = \{1,4\}$.

Означення 1.9. **Абсолютне доповнення** або просто **доповнення** A (A', $\overline{A}$) – множина, що містить усі елементи універсуму, за винятком елементів A (рис 1.1,д), тобто $A' = \{x \mid x \notin A)$.

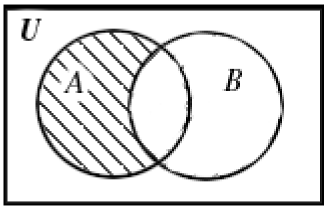
За означенням: $A' = \mathbf{U} \setminus A$.



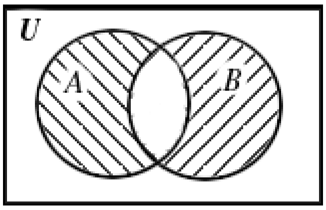
а



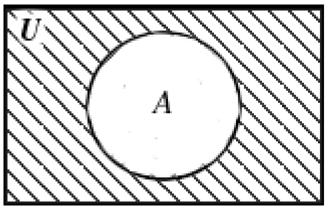
б



в



г



д

Рис 1.1. Діаграми Венна.

(а – об’єднання, б – перетин, в – різниця, г – симетрична різниця, д – доповнення)

Операції над множинами, як і операції над числами, мають деякі властивості. Останні виражаються сукупністю тотожностей незалежно від конкретного вмісту множин, що входять у них, і є підмножинами деякого універсуму **U**.

Для будь-яких множин A, B та C справедливі наступні властивості:

- *ідемпотентність* (*самопоглинання*)

1а) $A \cup A = A$ 1б) $A \cap A = A$

- *комутативність*

2а) $A \cup B = B \cup A$ 2б) $A \cap B = B \cap A$

- *асоціативність*

3а) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ 3б) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

- *дистрибутивність*

4а) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 4б) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

- *властивості* $\varnothing$ *та* **U**

5а) $A \cup \varnothing = A$ 5б) $A \cap \varnothing = \varnothing$

6а) $A \cup A' = \mathbf{U}$ 6б) $A \cap A' = \varnothing$

7а) $A \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}$ 7б) $A \cap \mathbf{U} = A$

8а) $\varnothing' = \mathbf{U}$ 8б) $\mathbf{U}' = \varnothing$

- *поглинання*

9а) $A \cup (A \cap B) = A$ 9б) $A \cap (A \cup B) = A$

- *закони де Моргана*

10а) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ 10б) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

- *властивості доповнення, різниці та рівності*

11) $A \cup B = \mathbf{U}$ & $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow B = A'$

12) $A'' = A$ (*інволютивність*)

13) $A \backslash B = A \cap B'$

14) $A \div B = (A \cap B') \cup (A' \cap B)$

15) $A \div B = B \div A$

16) $(A \div B) \div C = A \div (B \div C)$

17) $A \div \varnothing = \varnothing \div A = A$

18) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B' = \varnothing$

19) $A = B \Leftrightarrow (A \cap B') \cup (A' \cap B) = \varnothing$

Означення 1.10. Сукупність множин A_1, A_2, ..., A_n називається **розбиттям** множини A, якщо:

1. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$.
2. $A_i \cap A_j = \varnothing, \forall i \neq j$.

Якщо умова 2 не задовольняється, то сукупність множин буде називатися **покриттям**.

Відношення

Декартовий добуток

Означення 2.1. Нехай A і B – дві множини. Розглянемо множину $C = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$. Ця множина називається **декартовим (прямим) добутком множин** A і B і позначається $A \times B$. Якщо множини A і B скінченні і складаються відповідно із m і n елементів, то очевидно, що C складається із mn елементів.

Нехай A = {1,2} і B = {2,3,4}. Тоді $A \times B$ = {(1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4)}.

Елементами декартового добутку є **упорядковані пари**, де перший елемент пари належить першій множині, а другий – другій. Порядок входження пар може бути будь-яким, але розташування елементів у кожній парі визначається порядком множин, що перемножуються. Тому $A \times B \neq B \times A$, тобто декартовий добуток властивості комутативності не має.

Самостійний інтерес викликає випадок, коли множини A і B рівні між собою. Тоді елементами упорядкованої пари множини $A \times B$ будуть об'єкти, які складаються із двох не обов'язково різних елементів множини A. Також важливим залишається порядок елементів у парі. Для наведеної вище множини A, упорядковані пари (1,2) та (2,1) слід вважати різними.

Означення 2.2. Множина $C = \{(a_1,a_2) \mid a_1,a_2 \in A\}$ всіх впорядкованих пар елементів із множини A називається **декартовим квадратом множини A** і позначається A^2.

Поняття упорядкованої пари можна розширити на упорядковані трійки елементів (a_1,a_2,a_3), упорядковані четвірки (a_1,a_2,a_3,a_4) і т.д. Взагалі, упорядкована n-ка елементів із множини A – це n не обов'язково різних між собою елементів із A, заданих в певній послідовності.

Наведене вище означення декартового добутку двох множин і декартового квадрату множини можна звичайним способом узагальнити і на випадок довільної скінченої сукупності множин.

Декартовим добутком $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ множин $A_1, A_2, ..., A_n$ називається сукупність послідовностей (тобто сукупність упорядкованих n-ок елементів) виду $(a_1,a_2,...,a_n)$, де $a_i \in A_i$, $i=1,..,n$.

Елементи декартового добутку називають іще **кортежами** або **вектором** довжиною n.

Якщо $A_1=A_2=...=A_n=A$, то декартовий добуток $A_1\times A_2\times...\times A_n$ називається **декартовим добутком n-ї степені множини A (A^n)**.

Властивості асоціативності для декартового добутку не виконуються, але виконується властивість дистрибутивності відносно об'єднання, перерізу і відносного доповнення (різниці).

$(A_1\cup A_2) \times B = (A_1\times B) \cup (A_2\times B)$

$(A_1\cap A_2) \times B = (A_1\times B) \cap (A_2\times B)$

$(A_1\setminus A_2) \times B = (A_1\times B) \setminus (A_2\times B)$

Операція декартового добутку відрізняється від операції, введених раніше, тим, що елементи добутку множин суттєво відрізняються від елементів співмножників і є об'єктами іншої природи. Наприклад, якщо R – множина дійсних чисел, то декартовий добуток $R\times R$ – множина всіх точок площини.

Відношення

Означення 2.3. Довільна підмножина множини $A_1\times A_2\times...\times A_n$ називається **відношенням**, заданим або визначеним на множинах A_1, A_2,...,A_n. Якщо $A_1=A_2=...=A_n=A$, тобто річ йде про декартовий добуток n-ої степені множини A, то відношення R, яке задано на множинах $A_1=A_2=...=A_n$, називається **n-арним відношенням на множині A**.

Коли $(a_1,a_2,...,a_n)\in R$, то говорять, що елементи a_i (i=1,..,n) знаходяться між собою у відношенні R або відношення R істинне для $a_1,a_2,...,a_n$. Якщо $(a_1,a_2,...,a_n)\notin R$, то вважають, що R хибне для $a_1,a_2,...,a_n$. При n=1 відношення називається **унарним**, при n=2 – **бінарним**, при n=3 – **тернарним**.

Загалом відношення означає який-небудь зв'язок між предметами або поняттями. Приклади бінарних відношень: відношення належності, включення множин, рівності дійсних чисел, нерівності, бути братом, ділитися на яке-небудь натуральне число, входити до складу якого-небудь колективу.

Частіше за все бінарні відношення записуються у вигляді співвідношень aRb, де R – відношення, яке встановлює зв'язок між елементами $a\in A$ та $b\in B$.

Наведемо ще декілька прикладів бінарних відношень.

1. Якщо A – множина дійсних чисел, то $\{(x,y) \mid x\in A, y\in A, x^2+y^2=4\}$ є бінарне відношення на A.
2. Нехай A – множина товарів в магазині, а B – множина дійсних чисел. Тоді $\{(x,y) \mid x\in A, y\in B,$ y – ціна x$\}$ – відношення множин A та B.
3. Якщо A – множина людей, то $\{(x,y) \mid x\in A, y\in A,$ y є рідним x$\}$ є бінарне відношення на A.

Означення 2.4. **Область визначення** відношення R на A та B є множина всіх $a\in A$ таких, що для деяких $b\in B$ маємо $(a,b)\in R$. Іншими словами, область визначення R є множина всіх перших координат впорядкованих пар із R. **Множина значень** відношення R на A та B є множина всіх $b\in B$ таких, що $(a,b)\in R$ для деяких $a\in A$. Іншими словами, множина значень R є множина всіх других координат впорядкованих пар із R.

Означення 2.5. Нехай $R\subseteq A\times B$ є відношення на $A\times B$. Тоді відношення R^{-1} на $B\times A$ визначається наступним чином

$$R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b)\in R\}.$$

Іншими словами, $(b,a)\in R^{-1}$ тоді і тільки тоді, коли $(a,b)\in R$, або, що рівнозначно, $bR^{-1}a$ тоді і тільки тоді, коли aRb. Відношення R^{-1} називається **оберненим (симетричним) відношенням** до даного відношення R.

Означення 2.6. Нехай $R\subseteq A\times B$ – відношення на $A\times B$, а $S\subseteq B\times C$ – відношення на $B\times C$. **Композицією** відношень R та S є відношення $T\subseteq A\times C$, визначене наступним чином:

$T = \{(a,c) \mid a\in A, c\in C$ та $\exists b\in B, (a,b)\in R$ та $(b,c)\in S\}$.

Це відношення позначається $T = R°S$.

Наприклад, нехай $R = \{(1,2), (3,4), (5,6)\}$ та $S=\{(2,3),(2,7),(4,1),(6,9)\}$, тоді $T_1 = R°S = \{(1,3), (1,7), (3,1), (5,9)\}$ та $T_2 = S°R = \{(2,4),(4,2)\}$. Інший приклад: $R = \{(x,x^2) \mid x\in N\}$ та $S = \{(x,x+2) \mid x\in N\}$, тоді $T_1 = R°S = \{(x,x^2+2) \mid x\in N\}$ та $T_2 = S°R = \{(x,(x+2)^2) \mid x\in N\}$.

Означення 2.7. Нехай R – відношення на множині A. Ступенем відношення R на множині A є його композиція із самим собою. Позначається:

$$R^n = R\circ\ldots(n \text{ разів})\ldots\circ R.$$

Відповідно, $R^0 = I$, $R^1 = R$, $R^2 = R\circ R$ і взагалі $R^n = R^{n-1}\circ R$.

Теорема 2.1. Якщо R, R_1, R_2 – бінарні відношення, задані на множині A, то:

а) $(R_1\cup R_2)\circ R = R_1\circ R \cup R_2\circ R$; $R_1\subseteq R_2 \Rightarrow R_1\circ R \subseteq R_2\circ R$.

б) $(R^{-1})^{-1} = R$; $R\subseteq R_1 \Rightarrow R^{-1}\subseteq R_1^{-1}$.

в) $(R_1\circ R_2)^{-1} = (R_2^{-1})\circ (R_1^{-1})$.

г) $(R_1\cap R_2)^{-1} = (R_1^{-1})\cap(R_2^{-1})$.

д) $(R\circ R_1)\circ R_2 = R\circ(R_1\circ R_2)$.

Властивості відношень

Означення 2.9. Нехай R – бінарне відношення у множині A ($R\subseteq A\times A$). Тоді відношення R є:

- **рефлексивним**, якщо $I\subseteq R$, тобто, іншими словами, воно завжди виконується між елементом і ним самим ($\forall a\in A$, aRa). Як приклад такого відношення можна навести відношення нестрогої нерівності на множині натуральних або дійсних чисел.

Матриця рефлексивного відношення характеризується тим, що всі елементи її головної діагоналі – одиниці. Граф рефлексивного відношення – тим, що петлі є у всіх вершинах.

- **антирефлексивним (іррефлексивним)**, якщо $R\cap I=\varnothing$, тобто якщо співвідношення a_iRa_j виконується, то $a_i\neq a_j$. Це, наприклад, відношення строгої нерівності на множинах натуральних або дійсних чисел, відношення “бути старшим” у множині людей.

Матриця антирефлексивного відношення характеризується тим, що всі елементи її головної діагоналі – нулі. Граф антирефлексивного відношення не має жодної петлі.

- **симетричним**, якщо $R = R^{-1}$, тобто при виконанні співвідношення a_iRa_j виконується співвідношення a_jRa_i. Як приклад такого відношення можна навести відстань між двома точками на площині, відношення "бути братом" на множині людей.

Симетричність відношення спричиняє також симетричність матриці. Також для такого відношення вершини графа можуть бути пов'язані тільки парами протилежно спрямованих дуг (тобто ребрами).

- **асиметричним**, якщо $R \cap R^{-1} = \varnothing$, тобто із двох співвідношень a_iRa_j та a_jRa_i щонайменше одне не виконується. Як приклад такого відношення можна навести відношення "бути батьком" у множині людей, відношення строго включення в множині всіх підмножин деякого універсуму. Очевидно, якщо відношення асиметричне, то воно й антирефлексивне.

Матриця асиметричного відношення характеризується тим, що всі елементи її головної діагоналі – нулі й немає жодної пари одиниць на місцях, симетричних відносно головної діагоналі. У графа такого відношення петлі відсутні, а вершини можуть бути пов'язані тільки однією спрямованою дугою.

- **антисиметричним**, якщо $R \cap R^{-1} \subseteq I$, тобто обидва співвідношення a_iRa_j та a_jRa_i одночасно виконуються тоді й тільки тоді, коли $a_j=a_i$. Як приклад можна навести нестрогу нерівність.

Матриця антисиметричного відношення має ті самі властивості, що й асиметричного, за винятком вимоги рівності нулю елементів головної діагоналі. У графі такого відношення можуть бути петлі, але зв'язок між вершинами, якщо він є, також відбувається тільки однією спрямованою дугою.

- **транзитивним**, якщо $R \circ R \subseteq R$, тобто з виконання співвідношень a_iRa_j та a_jRa_k випливає виконання співвідношення a_iRa_k. Як приклад можна навести відношення "бути дільником" на множині цілих чисел, "бути старшим" на множині людей.

Матриця транзитивного відношення характеризується тим, що коли $r_{ij}=1$ й $r_{jk}=1$, то $r_{ik}=1$, причому наявність одиничних елементів на головній діагоналі не порушує транзитивність матриці. Граф транзитивного відношення характеризується тим, що коли через деяку сукупність вершин графа проходить шлях, то існують дуги, які з'єднують будь-яку пару вершин з цією сукупністю в напрямку шляху. Як правило, на графі транзитивного відношення зображують тільки цей шлях, а зумовлені транзитивністю дуги опускають. Такий граф називають **графом редукції** (або **кістяковим графом**).

Означення 2.10. Нехай R – бінарне відношення на множині A. **Рефлексивним замкненням** R є найменше рефлексивне відношення на A, що містить R як підмножину. **Симетричне замкнення** R є найменше симетричне відношення на A, що містить R як підмножину. **Транзитивне замкнення** R є найменше транзитивне відношення на A, яке містить R як підмножину.

Теорема 2.2. Нехай R – бінарне відношення на множині A і I – тотожне відношення на A. Тоді:

а) $R \cup I$ є рефлексивним замкненням R.

б) $R \cup R^{-1}$ є симетричним замкненням R.

в) якщо A – кінцева множина, що містить n елементів, то відношення $R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^n$ є транзитивним замкненням R.

2.2. Комбінаторний аналіз

В багатьох практичних випадках виникає необхідність підрахунку кількості можливих комбінацій об'єктів, які задовольняють певним властивостям. Такі задачі називаються **комбінаторними**. Багатоманітність комбінаторних задач неможливо описати, але серед них є цілий ряд таких, які зустрічаються особливо часто та для яких відомі способи підрахунку.

Для формулювання та розв'язку комбінаторних задач використовуються різні моделі комбінаторних конфігурацій. Розглянемо наступні дві найбільш популярні.

1. Задано n предметів. Їх потрібно розмістити по m ящикам так, щоби виконувались задані обмеження. Скількома способами це можна зробити?

2. Розглянемо множину функцій F: $X \rightarrow Y$, де $|X|=n$, $|Y|=m$. Можемо враховувати, що $X=\{1,\ldots,n\}$, $Y=\{1,\ldots,m\}$, $F=\langle F(1),\ldots,F(n)\rangle$, $1 \leq F(i) \leq m$. Скільки існує функцій F, які задовольняють заданим обмеженням?

Правила суми та добутку

Правило суми. Якщо об'єкт x можна вибрати n_1 способами, а інший об'єкт y – n_2 способами, то можна вибрати або x, або y n_1+n_2 способами.

Наприклад, студент має вибрати тему реферату зі списку, розміщеного на трьох аркушах. Аркуші містять відповідно 20, 15 і 17 тем. З якої кількості можливих тем студент робить свій вибір? За правилом суми кількість тем для вибору становить 20 + 15 + 17 = 52.

У ящику знаходиться 20 кульок: 5 білих, 6 чорних, 7 синіх та 2 червоних. Скількома способами можна взяти з ящику одну кольорову кульку? Тут передбачається, що кольорова кулька – це або синя, або червона кулька, тому потрібно застосовувати правило суми. Кольорову кульку можна вибрати 7+2 = 9 способами.

Правило добутку. Якщо об'єкт x можна вибрати n_1 способами та після кожного такого вибору об'єкт y можна вибрати n_2 способами, то пару об'єктів (x,y) у зазначеному порядку можна вибрати $n_1 \times n_2$ способами.

Це правило можна узагальнити на довільну кількість елементів. Нехай є n об'єктів. Якщо об'єкт x_1 можна вибрати n_1 способами, після чого об'єкт x_2 можна вибрати n_2 способами, і для будь-якого j, $2 \leq j \leq m-1$, після вибору об'єктів $x_1,\ldots,x_j$ об'єкт x_{j+1} можна вибрати n_{j+1} способами, то вибір упорядкованої послідовності m об'єктів $(x_1, x_2,\ldots,x_m)$ може бути здійснений $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_m$ способами.

Наприклад, припустимо, що певний шифр містить дві літери українського алфавіту, за якими йдуть три цифри. Тоді існує 33 способи вибору кожної літери та 10 способів вибору кожної цифри. Таким чином, загальна кількість можливих шифрів складатиме:

$33 \times 33 \times 10 \times 10 \times 10 = 1089000$.

Скільки може бути різних комбінацій випадання граней коли підкидують дві гральні кісті (гральна кість – це кубик, на гранях якого нанесені числа 1, 2, 3, 4, 5, 6)? На першій кісті може випасти 1, 2, 3, 4, 5 або 6, тобто всього буде 6 варіантів. Так само й на другій кісті. Отримуємо 6×6 = 36 способів.

З міста А у місто В йде 5 доріг, а з міста В у місто С – 3 дороги. Скількома способами можна проїхати з міста А до міста С? Щоби проїхати з А до С, треба проїхати з А до В та з В до С, тому застосуємо правило добутку: 5×3 = 15.

Розміщення, сполучення та перестановки

Розглянемо основні комбінаторні об’єкти – розміщення, сполучення та перестановки, - попередньо означивши важливе поняття вибірки.

<u>Означення.</u> Нехай задано скінчену не порожню множину $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$ і виконано r таких кроків.

Крок 1. Із множини А вибирають якийсь елемент a_{i1}.

Крок 2. Із множини А чи з $A\setminus\{a_{i1}\}$ вибирають якийсь елемент a_{i2}.

....

Крок r. Якщо $a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{ir-1}$ – елементи, які вибрані на перших r-1 кроках (r≥3), то на цьому кроці вибирають якийсь елемент a_{ir} із множини А чи $A\setminus \bigcup_{k=1}^{r-1}\{a_{ik}\}$. Тоді елементи $a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{ir}$ утворюють **вибірку обсягом** r, або **r-вибірку**, з множини А.

Вибірку називають **впорядкованою**, якщо задано порядок її елементів, а якщо порядок не задано, то – **невпорядкованою**.

Наприклад, з цифр 1, 2, 3, 4, 5 складаємо трьохзначні числа 123, 431, 524,... і т.д. Це впорядковані трьохзначні вибірки, тому що 123 та 132 – різні числа. Інший приклад: з 20 учнів класу будемо обирати двох чергових. Будь-яка пара чергових є невпорядкована двохелементна вибірка, тому що порядок їх вибору не важливий.

<u>Означення.</u> Впорядковані r-вибірки з n-елементної множини називають **розміщенням з n елементів по r**, а невпорядковані – **сполученнями з n**

елементів по r. Розміщення з n елементів по n називається **перестановкою**. Використовують також поняття r-розміщення, r-сполучення та n-перестановки.

Розглянемо два способи вибору елементів. Згідно з першим способом вибору на кожному кроці вибирають елемент з усієї множини A. Отже, один й той самий елемент із множини A може зустрітись у вибірці декілька разів. Такі вибірки називають **вибірками з повтореннями**.

У разі застосування другого способу вибраний елемент вилучають із множини A. Це означає, що на кожному j-му кроці ($1 \le j \le k$) вибирають елемент із множини $A \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} \{a_{ik}\}$ і вибірка не містить однакових елементів. Такі вибірки називають **вибірками без повторень**.

Наприклад, задано множину A = {a,b,c}, тобто n=3. Наведемо розміщення без повторень із трьох елементів по два, тобто r=2:

(a,b), (a,c), (b,c), (b,a), (c,a), (c,b);

розміщення з повтореннями з трьох елементів по два:

(a,b), (a,c), (b,c), (b,a), (c,a), (c,b), (a,a), (b,b), (c,c);

сполучення без повторень із трьох елементів по два:

(a,b), (a,c), (b,c);

сполучення з повтореннями з трьох елементів по два:

(a,b), (a,c), (b,c), (a,a), (b,b), (c,c);

Розміщення

Кількість усіх розміщень без повторень з n елементів по r позначають як A_n^r або A(n,r), де r і n – невід'ємні цілі числа, причому $r \le n$.

Твердження 1. Справджується рівність $A_n^r = n(n-1)...(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$.

Знайдемо, наприклад, число розміщень з 7 по 3. Тут n=7, n-r+1 = 5. Значить A_7^3=7×6×5=210. Відмітимо, що верхній індекс показує яку кількість співмножників потрібно взяти у добутку.

Рекурентна формула має вигляд:

$A_n^r = A_{n-1}^r + rA_{n-1}^{r-1}$,

де $A_k^0 = 1$ (не має комбінаторного значення); $A_k^1 = k, \forall k$; $A_k^s = 0$ при k<s.

Наприклад, на п’яти картках написані числа 1, 2, 3, 4, 5. Скільки різних трьохзначних чисел можна з них скласти? Трьохзначні числа представляють собою трьохелементі вибірки з п’яти цифр, причому, вибірки впорядковані, оскільки порядок цифр в числі є важливим. Відповідно цих чисел буде стільки, скільки існує з п’яти елементів по 3: A_5^3=5×4×3=60.

Кількість різних розміщень із повтореннями з n елементів по r позначають як $\widetilde{A}_n^r$ або $\widetilde{A}(n,r)$, де r і n – невід’ємні цілі числа.

<u>Твердження 2.</u> Справджується рівність $\widetilde{A}_n^r$ = n^r.

Наприклад, скільки чотирьохлітерних “слів” можна скласти з літер “М” та “А”? Складемо декілька таких “слів”: ММMA, MAMA, MAAA ... Ми бачимо, що склад вибірки змінюється, порядок елементів у виборці є суттєвим. Значить, це – розміщення з повторенням з 2-х літер “М” та “А” по 4 літери: $\widetilde{A}_2^4$ = 2^4 = 16.

Інший приклад: вздовж дороги стоять 6 світлофорів. Скільки може бути різних комбінацій їх сигналів, якщо кожний світлофор має 3 стани: “червоний”, “жовтий”, “зелений”? Випишемо декілька комбінацій: ЧЧЧЖЗЗ, ЗЗЗЗЗЗ, ЧЖЗЧЖЗ,... Ми бачимо, що склад вибірки змінюється і порядок елементів є суттєвим (якщо, наприклад, у вибірці ЧЖЗЧЖЗ замінити місцями Ч та Ж, то ситуація на дорозі стане іншою). Тому застосовуємо формулу розміщень з повтореннями з 3 по 6: $\widetilde{A}_3^6$ = 3^6 = 729.

Перестановки

Кількість різних перестановок позначають як P_n. Формулу для P_n одержують із формули для A_n^n=n!

Наприклад, потрібно знайти кількість способів складання 7 книжок у стопку. Кожна стопка буде відрізнятись від іншої порядком слідування книжок. Тому це буде перестановка з семи елементів $P_7 = 7! = 7\times6\times5\times4\times3\times2\times1 = 5040$.

Розглянемо тепер задачу про перестановки n елементів за умови, що не всі елементи різні (перестановки з повтореннями). Точніше, нехай є n елементів k різних типів, а число n_j ($j=1,\ldots,k$) – кількість елементів j-го типу. Очевидно, що $n_1+\ldots+n_k = n$. Перестановки з n елементів за такої умови називають перестановками з повтореннями. Кількість таких перестановок позначають як $P_n(n_1,\ldots,n_k)$. Щоб знайти явний вираз для $P_n(n_1,\ldots,n_k)$, візьмемо окрему перестановку та замінимо в ній усі однакові елементи різними. Тоді кількість різних перестановок, котрі можна отримати з узятої однієї перестановки, дорівнює $n_1! \times n_2! \times\ldots\times n_k!$. Якщо зробити це для кожної перестановки, то одержимо n! перестановок. Отже:

$$P_n(n_1,\ldots,n_k) = \frac{n!}{n_1!\times\ldots\times n_k!}.$$

Наприклад, знайдемо кількість слів, які можна утворити, переставляючи літери слова СОНЦЕ. Оскільки кожна літера тут не повторюється, то можна утворити $P_5 = 5! = 120$ слів. Тепер знайдемо теж саме для слова МАТЕМАТИКА. У цьому слові є повторні входження літер, тому скористаємося формулою для перестановок із повтореннями:

$$P_{10}(2,3,2,1,1,1) = \frac{10!}{2!\times3!\times2!\times1!\times1!\times1!} = 151\,200.$$

Скількома способами можна розставити білі фігури (2 ладі, 2 коня, 2 слона, ферзя та короля) на першій лінії шахової дошки? Перша лінія шахової дошки являє собою 8 клітин, на яких і потрібно розташувати ці 8 фігур. Різні варіанти будуть відрізнятися тільки порядком фігур, тому, це буде перестановка з повторенням $P_8(2,2,2,1,1) = 5040$.

Сполучення

Кількість усіх сполучень без повторень з n елементів по r позначають як C_n^r або C(n,r), де r і n – невід’ємні цілі числа, причому $r\le n$. Щоб знайти C_n^r, задамося питанням, скільки r-розміщень можна утворити з кожного r-сполучення. Очевидно, що r!. Тому шукане число, буде в r! разів меншим, ніж число r-розміщень з n елементів.

Твердження 3. Справджується рівність

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n(n-1)...(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Наприклад, потрібно скласти всі сполучення з трьох літер A, B, C по дві літери. Це будуть AB, AC, BC. Перевіримо це за формулою: $C_3^2 = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3$.

З 20 учнів потрібно обрати двох чергових. Скількома способами це можна зробити? Потрібно обрати двох людей з 20. Ясно, що від порядку вибору нічого не залежить, тобто Іваненко-Петренко та Петренко-Іваненко – це одна й та сама пара чергових. Відповідно, це буде сполучення з 20 по 2: $C_{20}^2 = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190$.

Скількома способами можна групу з 15 студентів розбити на дві групи так, щоби в одній групі було 4, а в іншій – 11 людей? Щоб це зробити, достатньо вибрати 4 людини з 15, а решта самі утворять іншу групу. А обрати 4 людини з 15 можна C_{15}^4 способами.

Цю задачу можна розв'язати інакше: з 15 студентів обрати 11, а решта 4 утворять другу групу. Це можна зробити C_{15}^{11} способами.

Отримуємо ту ж саму відповідь і виникає підозра, що $C_{15}^{11} = C_{15}^4$. Це дійсно так. Сполучення мають властивість:

$$C_n^r = C_n^{n-r}.$$

В цьому легко переконатись:

$$C_n^{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!(n-n+r)!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = C_n^{n-r}.$$

Твердження 4. Справджується рівність $C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}$.

Кількість усіх сполучень із повтореннями з n елементів по r позначають як $\tilde{C}_n^r$ або $\tilde{C}(n,r)$, де r і n – невід'ємні цілі числа.

Твердження 5. Справджується рівність $\widetilde{C}_n^r = \dfrac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = C_{n+r-1}^r$.

Розглянемо наступний приклад. У хлібному відділі магазину є буханки білого та чорного хлібу. Скількома способами можна купити 6 буханок хлібу? Позначаючи буханки білого та чорного хлібу літерами Б та Ч, складемо декілька вибірок: БББЧЧЧ, БЧБЧБЧ, БББББЧ... Склад змінюється від вибірки до вибірки, значить це вже не перестановки; порядок елементів несуттєвий – це сполучення з повторенням з 2 по 6: $\widetilde{C}_2^6 = C_{2+6-1}^6 = C_7^6 = 7$. Зробимо перевірку та випишемо всі варіанти покупок: ББББББ, БББББЧ, ББББЧЧ, БББЧЧЧ, ББЧЧЧЧ, БЧЧЧЧЧ, ЧЧЧЧЧЧ. Їх дійсно 7.

Схема визначення виду комбінації

Приведемо у систему отримані формули всіх шести видів комбінацій з повтореннями та без. Представимо алгоритм визначення виду комбінації наступною схемою.

Розглянемо декілька прикладів. На колі розташовано 20 точок. Скільки існує вписаних трикутників з вершинами в цих точках? Для знаходження розв’язку пронумеруємо точки числами від 1 до 20. Тоді кожний вписаний трикутник буде представляти собою трійку чисел. Випишемо декілька вибірок: (1, 5, 19), (15, 2, 9), (14, 13, 7),... Числа у вибірках не можуть повторюватися, тому що всі вершини трикутника різні. Склад змінюється від вибірки до вибірки, порядок не суттєвий, тому що (1, 5, 19) та (19, 5, 1) – один й той самий трикутник. За схемою отримємо, що це сполучення без повторень з 20 по 3.

$$C_{20}^{3}=\frac{20\cdot 19\cdot 18}{2\cdot 3}=1140.$$

В деякій казковій країні не було двох мешканців з однковим набором зубів (або в них різна кількість зубів, або зубів не має в різних містах). Потрібно оцінити найбільшу чисельність населення цієї країни, якщо максимальна кількість зубів в людини – 32. Для розв’язку закодуємо кожного мешканця набором з 32 нулей та одиниць. Одиниця відповідає наявності зуба в даному місті, нуль – його відсутності. Випишемо декілька комбінацій: 11111...11, 1010...11, 0000...00,... Елементи не повторюються, склад змінюється, порядок суттєвий. Це – розміщення з повтореннями з 2 по 32.

$$A_{2}^{32}=2^{32}=4\ 294\ 967\ 296.$$

2.3. Математична логіка

Алгебра висловлень

Поняття висловлення. Логічні операції (зв'язки). Складені висловлення

Просте (елементарне) висловлення – це просте твердження, тобто розповідне речення, щодо змісту якого доречно ставити запитання про його правильність або неправильність. Прості висловлення, у яких виражено правильну думку, називають істинними, а ті, що виражають неправильну, – хибними.

Приклад. Чи є наведений вираз простим висловленням? Якщо вираз є висловленням, то вказати, яким саме – істинним чи хибним.

(а) Число 48 є парним.

(б) У цьому абзаці сім слів.

(в) Нехай нам щастить!

(г) Париж — столиця Нідерландів.

(д) Існує нескінченно багато натуральних чисел.

(е) Чи можна поділити 17 на 5 без остачі?

(є) Не розмовляйте під час лекції.

(ж) Сьогодні йде дощ.

(з) Перевірте правильність розв’язку.

(и) Рівність $5 + 7 = 12$ істинна.

(і) Рівність $10 < 4$ істинна.

(ї) Це висловлення є істинним.

У наведених прикладах висловленнями є лише ті речення, зміст яких можна однозначно оцінити як істинний або хибний факт. Істинними є твердження: (а); (д); (и). Хибними є висловлення: (б); (г); (і). Речення (ж) може бути істинним або хибним залежно від обставин, але все ж є висловленням.

Речення, які є наказами, побажаннями або запитаннями ((в), (є), (з)), не відносять до висловлень, оскільки вони не мають істиннісного значення. Вислів (ї) становить логічний парадокс, у якому неможливо встановити істинність без суперечності, тому він також не є висловленням у логічному сенсі.

Зазвичай конкретні елементарні висловлення позначають малими латинськими літерами: a, b, c, … (інколи з індексами), а значення висловлень істинно та хибно – відповідно символами 1 та 0 (або **І** та **Х**, а в англомовній літературі – відповідно **T** і **F**).

Крім того, розглядатимемо **змінні висловлення**, які позначатимемо латинськими літерами x, y, z, … (інколи з індексами) і називатимемо також **пропозиційними** змінними. Після підстановки замість пропозиційної змінної певного елементарного висловлення ця змінна набуде відповідного значення (1 або 0).

Окремі елементарні висловлення можна з'єднувати між собою за допомогою певних зв'язок (сполучників), утворюючи складені висловлення.

У математичній логіці використання мовних зв'язок трактується як виконання над висловленнями певних логічних операцій, що мають такі назви: кон'юнкція, диз'юнкція, заперечення, імплікація та еквівалентність. У табл. 2.1 наведено різні назви та позначення, що використовують для цих операцій.

Таблиця 2.1

Назва	**Позначення**
Кон'юнкція (логічне множення, логічне *і*)	$\wedge$ & $\cdot$
Диз'юнкція (логічне додавання, логічне *або*)	$\vee$
Заперечення (логічне *ні*)	$\neg$ $'$ $\bar{\ }$
Імплікація (логічне *якщо, …то…*)	$\rightarrow \supset \Rightarrow$
Еквівалентність (рівнозначність)	$\sim \leftrightarrow \equiv$

Зазвичай використовуватимемо перші із наведених назв і по значень. Табл. 2.2 містить означення цих операцій.

Таблиця. 2.2

$x\ y$	$x \wedge y$	$x \vee y$	$\neg x$	$x \rightarrow y$	$x \sim y$
0 0	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**
0 1	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**
1 0	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
1 1	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**

Отже, з елементарних висловлень і пропозиційних змінних за допомогою означених операцій і дужок утворюються складені висловлення, яким відповідають формули або вирази. Зауважимо, що символам логічних операцій відповідають у звичайній мові такі мовні зв'язки, або сполучники:

$\wedge$ – і; та; а; але; хоч; разом із; незважаючи на; …

$\vee$ – або; чи; хоч (принаймні) одне з; …

$\neg$ – не; неправильно, що; …

$\rightarrow$ – якщо (коли) … , то (тоді)…; … імплікує …; із … випливає …; у разі … має місце …; …

~ – … тоді й тільки тоді, коли …; … якщо й тільки якщо …; … еквівалентне …; … рівносильне … тощо.

Застосовуючи пропозиційні змінні та символи логічних операцій, будь-яке складене висловлення можна формалізувати, тобто перетворити на формулу, яка виражатиме (задаватиме) його логічну структуру.

Формули алгебри висловлень. Таблиця істинності. Тавтології

Алфавіт найбільш поширеної формальної мови алгебри висловлень складається з трьох груп символів:

1) символи елементарних висловлень і пропозиційних змін них: a, b, c, … та x, y, z, … (інколи з індексами);

2) символи операцій: $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, ~ ;

3) допоміжні символи – круглі дужки: (і).

Із символів цього алфавіту будують пропозиційні формули або просто формули алгебри висловлень за індуктивним правилом:

1) усі пропозиційні змінні та елементарні висловлення є формулами;

2) якщо A та B – формули, то вирази $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(\neg A)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \sim B)$ також є формулами (для всіх цих виразів фор мули A та B є підформулами);

3) інших формул, крім тих, що побудовані за правилами 1) та 2), немає.

Формули алгебри висловлень позначатимемо великими латинськими літерами.

Нехай $\mathbf{p_1, p_2, \ldots, p_n}$ – це всі пропозиційні змінні, що входять до формули A; позначатимемо цей факт $\mathbf{A(p_1, p_2, \ldots, p_n)}$. Формулі $\mathbf{A(p_1, p_2, \ldots, p_n)}$ поставимо у відповідність функцію $\mathbf{f\,(p_1, p_2, \ldots, p_n)}$, що означена на множині впорядкованих наборів $\mathbf{(p_1, p_2, \ldots, p_n)}$, де кожне $\mathbf{p_i}$ набуває значення у множині $\mathbf{B = \{0, 1\}}$, і значенням функції **f** є **0** або **1**. Значення функції f на наборі значень $a_1, a_2, \ldots, a_n$ її змінних $p_1, p_2, \ldots, p_n$ дорівнює значенню формули $A(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ при підстановці до неї замість пропозиційних змінних $p_1, p_2, \ldots, p_n$ значень a_1,

a_2, …, a_n, відповідно. Зауважимо, що **кількість елементів в області визначення функції f** дорівнює $\mathbf{2^n}$.

Функцію f називають **функцією істинності** для формули A або відповідного складеного висловлення. Для функції істинності f можна побудувати таблицю істинності (табл. 2.3). Традиційно набори значень змінних розташовують у цій таблиці в лексикографічному порядку.

Таблиця 2.3

$p_1\, p_2 \dots p_{n-1}\, p_n$	$f(p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n)$
0 0 ... 0 0	f**(0, 0, ..., 0, 0)**
0 0 ... 0 1	f**(0, 0, ..., 0, 1)**
0 0 ... 1 0	f**(0, 0, ..., 1, 0)**
0 0 ... 1 1	f**(0, 0, ..., 1, 1)**
....	....
1 1 ... 1 0	f**(1, 1, ..., 1, 0)**
1 1 ... 1 1	f**(1, 1, ..., 1, 1)**

Формулу алгебри висловлень $\mathbf{A(p_1, p_2, \dots, p_n)}$ називають **тавтологією**, коли їй відповідає функція істинності, що тотожно дорівнює 1. Те, що формула A є тавтологією, позначають як $\vDash$ A.

Тавтології ще називають **тотожно істинними формулами**, або **законами алгебри висловлень**.

Наведемо приклади деяких важливих тавтологій:

$(p \lor (\neg\, p))$ – закон виключення третього;

$(\neg\, (p \land (\neg\, p)))$ – закон виключення суперечності;

$(p \to p)$ – закон тотожності.

Переконатись у тому, що ці формули є тавтологіями, можна за допомогою відповідних таблиць істинності.

Іноді перевірку того, що певна формула є тавтологією, виконують за допомогою **способу відшукання контрприкладу** (або методу від супротивного). Пояснимо його на прикладі.

Якщо формула $A \to B$ є тавтологією, то кажуть, що формула A **сильніша ніж** B, а формула B **слабша ніж** A.

Формула алгебри висловлень $A(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, яка набуває значення 0 на всіх наборах $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ значень своїх пропозиційних змінних, називається **суперечністю**, або **тотожно хибною формулою**. Формулу, що не є ні тавтологією, ні суперечністю, називають **нейтральною**. Множину всіх формул алгебри висловлень розбивають на тавтології, суперечності та нейтральні формули. Формулу, яка не є суперечністю, називають **виконуваною**, інакше – **невиконуваною**.

Порядок виконання операцій у формулі визначається за допомогою дужок. Задля зменшення їх кількості випускають зовнішні дужки й запроваджують такий порядок (пріоритет) виконання операцій у разі відсутності дужок: **¬, ∧, ∨, →, ~** (за спаданням). Часто у формулах алгебри висловлень випускають знак кон'юнкції ∧ і замість $a \wedge b$ записують ab.

Для визначення порядку виконання операцій у формулі пріоритету операцій не достатньо. Потрібно ще вказувати для однакових операцій, групуються вони зліва направо чи справа наліво. Наприклад, операції ∧ та ∨ групуються зліва направо, а операція → – справа наліво. Тому для формули $a \wedge b \wedge c$ дужки роз ставляємо таким чином: $((a \wedge b) \wedge c)$, для формули $a \to b \to a$ дужки розставляємо так: $(a \to (b \to a))$. Зазначимо, що для операцій ∧ та ∨ порядок групування не є суттєвим, але для операції → він є важливим. Тому для формули $a \to b \to a$ при групуванні дужок справа наліво отримаємо формулу $(a \to (b \to a))$, яка не еквівалентна попередній формулі $(a \to (b \to a))$.

Структура формули. Розстановка дужок у формулі вказує не лише на порядок виконання операцій, а фактично задає її структуру. Тут важливими є поняття головної операції у формулі та її аргументів.

Проблема розв'язності в алгебрі висловлень – це задача знаходження алгоритму, за допомогою якого для будь-якої формули A алгебри висловлень можна визначити, є A тотожно істинною (тавтологією), чи ні.

Для алгебри висловлень цю проблему можна, зокрема, роз в'язати такими двома способами:

1) побудувати таблицю істинності для формули А й перевіри ти, чи складається стовпчик значень А лише з одиниць;

2) застосувати спосіб відшукання контрприкладу.

Аналогічно можна сформулювати й розв'язати проблему розв'язності для визначення того, чи є певна формула алгебри висловлень суперечністю або виконуваною.

Рівносильні формули алгебри висловлень.

Формули А та В алгебри висловлень називають **рівносильними**, якщо їм відповідає та сама функція істинності, тобто вони набувають однакових значень на всіх наборах значень їхніх пропозиційних змінних.

Рівносильність формул А та В позначають за допомогою позначення ≡ (= або ↔): записують А ≡ В.

Рівносильні формули ще часто називають **еквівалентними**.

Рівносильність формул можна перевірити складанням таблиць істинності відповідних функцій і порівнюванням цих таблиць.

Рівносильним перетворенням формули А називають дію або процедуру, у результаті якої дістаємо формулу В, рівносильну формулі А.

Неважко довести (побудовою відповідних таблиць істинності) **основні тотожності (рівносильності, закони) алгебри висловлень.**

1. $(a \vee b) \vee c \equiv a \vee (b \vee c)$, $(a \wedge b) \wedge c \equiv a \wedge (b \wedge c)$ – **асоціативність**;

2. $a \vee b \equiv b \vee a$, $a \wedge b \equiv b \wedge a$ – **комутативність**;

3. $a \wedge (b \vee c) \equiv (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, $a \vee (b \wedge c) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ – **дистрибутивність**;

4. $a \vee a \equiv a$, $a \wedge a \equiv a$ – **ідемпотентність**;

5. $\neg (a \vee b) \equiv \neg a \wedge \neg b$, $\neg (a \wedge b) \equiv \neg a \vee \neg b$ – **закони де Моргана**;

6. $\neg \neg a \equiv a$ – **закон подвійного заперечення**;

7. $a \vee 0 \equiv a$, $a \wedge 1 \equiv a$; $a \vee 1 \equiv 1$, $a \wedge 0 \equiv 0$ – **властивості елементів 0 та 1**;

8. $a \vee \neg a \equiv 1$, $a \wedge \neg a \equiv 0$ – **властивості заперечення**;

9. $a \vee (a \wedge b) \equiv a$; $a \wedge (a \vee b) \equiv a$ – **правила поглинання**.

Кожну із наведених рівносильностей неважко довести, побудувавши відповідні таблиці істинності для її правої і лівої частин і порівнявши ці таблиці.

Важливим висновком із цих рівносильностей є те, що операції $\rightarrow$ та $\sim$ є надлишковими в алгебрі висловлень. Кожну під формулу, що містить такі операції, можна замінити на рівно сильну їй (згідно з наведеними рівносильностями), що міститиме лише операції кон'юнкції, диз'юнкції та заперечення.

Нормальні форми логічних функцій. Досконала диз'юнктивна нормальна форма (ДДНФ). Досконала кон'юнктивна нормальна форма (ДКНФ).

Вище описано спосіб побудови таблиці істинності для заданої пропозиційної формули, тобто побудови таблиці логічної функції, яку задає ця формула.

Не менш важливою є обернена задача: для функції, заданої таблицею, графіком, словесно тощо, визначити (побудувати) формулу, що цю функцію задає. У багатьох розділах математики побудувати таку формулу для довільної функції не вдається. Замість формули, яка абсолютно точно визначає вихідну функцію, використовують методи побудови різних формул, що відтворюють цю функцію наближено (або апроксимують її) з певною точністю.

В алгебрі логіки існує кілька процедур, що дають змогу для заданої логічної функції побудувати формули, які задають цю функцію й використовують певний набір логічних операцій.

Будемо вважати, що основною формою задання логічної функції є її таблиця істинності. Якщо функція задана якимось іншим способом (словесно, графіком, якоюсь формулою з іншим набором операцій тощо), то спочатку визначаємо за заданням відповідну таблицю істинності.

Досконала диз'юнктивна нормальна форма (ДДНФ).

Уведемо такі позначення: для логічної змінної x вважатимемо, що $x_0 = \neg x$ та $x_1 = x$. Неважко переконатись, що для логічної змінної $a \in B$ виконується $x_a = 1$, якщо $a = x$ (тобто якщо значення змінних а та х збігаються), а $x_a = 0$, якщо $a \neq x$.

Розглянемо довільну логічну функцію $f(x, y, z)$ від трьох змінних. Нехай $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), \ldots, (a_k, b_k, c_k)$ – це всі набори значень змінних, для яких функція f істинна (тобто дорівнює 1). Тоді формула, що задає цю функцію, має вигляд:

$$x^{a_1} y^{b_1} z^{c_1} \vee x^{a_2} y^{b_2} z^{c_2} \vee \ldots \vee x^{a_k} y^{b_k} z^{c_k} \qquad (1.1)$$

Справді, якщо до цієї формули підставити замість x, y та z один із наборів (a_i, b_i, c_i) (тобто покласти $x = a_i$, $y = b_i$ і $z = c_i$), то рівно один із логічних доданків формули (1.1), а саме доданок $x^{a_i} y^{b_i} z^{c_i}$ дорівнюватиме 1, $i = 1, 2, \ldots, k$. Отже, значенням усієї формули (1.1) на цьому наборі (a_i, b_i, c_i) буде 1. Якщо ж до (1.1) підставити будь-який інший набір значень змінних (тобто набір, що не увійшов до вищезазначеного списку з k елементів), то всі доданки формули (1.1) дорівнюватимуть 0, отже, і значенням усієї формули на такому наборі буде 0.

Таким чином, обґрунтовано, що значення формули (1.1) збігається зі значенням заданої функції $f(x, y, z)$ на будь-якому на борі (a, b, c) значень її змінних, тобто (1.1) задає (реалізує) функцію $f(x, y, z)$.

Формулу (1.1) називають **досконалою диз'юнктивною нормальною формою** (ДДНФ) логічної функції $f(x, y, z)$.

Операції, що входять до складу ДДНФ – це кон'юнкція, диз'юнкція та заперечення.

Досконала кон'юнктивна нормальна форма (ДКНФ).

За допомогою тих самих операцій кон'юнкції, диз'юнкції і заперечення можна побудувати іншу формулу, що реалізує певну логічну функцію.

Нехай $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), \ldots, (a_k, b_k, c_k)$ – це всі набори значень змінних, для яких логічна функція f(x, y, z) хибна (набуває значення 0). Тоді формула

$$(x^{\neg a_1} \vee y^{\neg b_1} \vee z^{\neg c_1}) \wedge (x^{\neg a_2} \vee y^{\neg b_2} \vee z^{\neg c_2}) \vee \ldots \vee (x^{\neg a} y^{\neg b_k} z^{\neg c_k}) \qquad (1.2)$$

реалізує функцію *f*.

Аналогічно вищенаведеним міркуванням можна обґрунтувати, що для будь-якого набору (a_i, b_i, c_i), $i = 1, 2, \ldots, k$ значенням формули (1.2) буде 0, а для будь-якого іншого набору, що не увійшов до цього списку, (1.2) дорівнюватиме 1. Пропонуємо переконатись у цьому самостійно.

Формулу (1.2) називають **досконалою кон'юнктивною нормальною формою (ДКНФ)** відповідної логічної функції *f(x, y, z)*.

Логіка предикатів. Квантори

Алгебра висловлень, яку вже було розглянуто, справді є важливою частиною математичної логіки, проте її можливостей недостатньо, щоб повноцінно описувати й аналізувати навіть відносно прості міркування з науки чи практики.

Це зумовлено, зокрема, тим, що в логіці висловлень будь-яке просте висловлення трактується як неподільна одиниця без внутрішньої структури, яка має лише одну характеристику – бути істинним або хибним.

Щоб створити систему правил, яка дозволяє робити логічні міркування й отримувати змістовні, нетривіальні висновки з урахуванням структури складених висловлень і змісту простих, була розроблена формальна теорія, що отримала назву **числення предикатів**.

Теорія предикатів починається з уважного аналізу простих висловлень і спирається на таке їх трактування: просте висловлення повідомляє про те, що певний об’єкт (або кілька об’єктів) має конкретну властивість або перебуває у певному відношенні з іншим об’єктом.

Для прикладу, у висловленні «3 – просте число» об’єктом є число 3, а вислів «просте число» описує його властивість.

У класичній латинській граматиці така частина речення називається **предикатом**, звідси й походження відповідного терміну в математичній логіці. У логіці предикатів головну роль відіграє саме ця частина – присудок, що задає властивість або відношення. Його фіксують, а значення об'єкта змінюють, щоб у кожному випадку отримувати осмислені речення, тобто висловлення.

Такий підхід дає змогу тлумачити вислів *«x – просте число»* не як окреме елементарне висловлення, а як **висловлювальну форму** – певний шаблон, який перетворюється на конкретне висловлення лише після того, як замість змінної x підставляють об'єкт із заданої множини M. Іншими словами, ця форма задає структуру висловлення, а його істинність чи хибність визначається вже після вибору конкретного значення для x.

n-місним предикатом $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ на якійсь множині М називають довільну функцію, яка впорядкованому набору елементів (a_1, a_2, …, a_n) множини М ставить у відповідність логічне значення **1** або **0**.

Множину М називають предметною областю, або універсальною множиною, а $x_1, x_2, ..., x_n$ – предметними змінними предикату Р.

Множина наборів $(a_1, a_2, ..., a_n)$ таких, що $P(a_1, a_2, ..., a_n) = \mathbf{1}$, називається **областю істинності (або характеристичною множиною)** предиката Р.

Якщо $P(a_1, a_2, ..., a_n) = \mathbf{1}$, то згідно із логічною інтерпретацією казатимемо, що предикат P є **істинним** на $(a_1, a_2, ..., a_n)$. В іншому разі казатимемо, що предикат P є **хибним**.

Вираз $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, що перетворюється на висловлення після заміни всіх його змінних $x_1, x_2, ..., x_n$ на елементи певної предметної області М, називають **пропозиційною (висловлювальною) формою**.

Приклад.

Нехай предметною областю є множина N натуральних чисел, тоді вирази x – просте число, x ділить y, $x + y = z$, $x < 5$ тощо є пропозиційними формами.

Пропозиційна форма є одним зі способів задання предиката.

Для $n = 1$ предикат $P(x)$ називається **одномісним**, або унарним, для $n = 2$ $P(x, y)$ – **двомісним**, або **бінарним**, для $n = 3$ $P(x, y, z)$ – **тримісним**, або **тернарним предикатом**.

Якщо в n-арному предикаті P(x1, x2, …, xn) зафіксувати значення деяких m змінних (тобто надати їм певних значень із множини M), то отримаємо (n – m)-місний предикат на множині M. Тому можна вважати висловлення нульмісними предикатами, які утворено з багатомісних предикатів підстановкою замість усіх їх параметрів певних значень із предметної області. Отже, висловлення можна розглядати як окремий випадок предиката.

Як з елементарних висловлень за допомогою логічних операцій можна утворювати складені висловлення, так і, використовуючи прості (елементарні) предикати й логічні зв'язки (операції), можна будувати складені предикати, або **предикатні формули**.

Зазвичай основні логічні операції $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, ~ означають для предикатів, що задані на тій самій предметній області M і залежать від тих самих змінних.

Нехай $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ і $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ – n-місні предикати на множині M.

Кон'юнкцією $P(x_1, x_2, ..., x_n) \wedge Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ називають предикат $R(x_1, x_2, ..., x_n)$, що набуває значення 1 на тих і тільки тих наборах значень змінних, на яких обидва предикати $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ і $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ дорівнюють 1.

Зауважимо, що на інших наборах значень змінних предикат набуває значення 0.

Диз'юнкцією $P(x_1, x_2, ..., x_n) \vee Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ називають пре дикат $T(x_1, x_2, ..., x_n)$, що набуває значення 1 на тих і тільки тих наборах значень змінних, на яких принаймні один із предикатів $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ або $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ дорівнює 1.

Відповідно на ін ших наборах значень змінних предикат набуває значення 0.

Запереченням $\neg P(x_1, x_2, ..., x_n)$ предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ на зивають предикат $S(x_1, x_2, ..., x_n)$, що дорівнює 1 на тих і лише тих наборах значень термів, на яких предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ до рівнює 0.

Аналогічно вводять також інші логічні операції: →, ~ тощо. Знаючи, як виконуються окремі операції предикатів, можна утворювати вирази або формули, операндами яких є предикати.

У логіці предикатів додають дві спеціальні операції – **квантори**. Завдяки їм можна точніше описувати властивості об’єктів та узагальнювати висловлення. Ці операції значно розширюють можливості логічного аналізу, роблять теорію предикатів гнучкішою й змістовнішою. Саме через важливу роль кванторів логіку предикатів інколи називають ***теорією квантифікації***.

Найпопулярнішими й найуживанішими виразами в математиці є фрази або формулювання типу для всіх та існує. Поняття, що відповідає словам для всіх, лежить в основі означення квантора загальності.

Нехай $P(x)$ – предикат на множині M. Тоді **квантор загальності** (із параметром x) – це операція, що ставить у відповідність $P(x)$ висловлення для всіх x із M $P(x)$ істинне; для позначення цієї операції використовують знак ∀, записують $\forall x P(x)$ (читають для всіх x P від x).

Іншу операцію називають **квантором існування** та позначають її знаком ∃. Якщо $Q(x)$ – деякий предикат на множині M, то висловлення існує в множині M елемент x такий, що $Q(x)$ істинне записують у вигляді $\exists x Q(x)$ і читають існує такий x, що Q від x або є такий x, що Q від x.

Походження обраних позначень пояснюється тим, що символ ∀ – це перевернута велика перша літера німецького слова alle або англійського слова all, що перекладають як усі. А символ ∃ відповідає першій літері слів existieren (нім.) або exist (англ.) – існувати.

Вираз $\forall x$ читають також як усі x; для кожного x; для довільного x; для будь-якого x; а вираз $\exists\, x$ – як деякий x; для деякого x; знайдеться такий x тощо.

Зазначимо, що, крім уведених символічних позначень кванторів, використовують також інші позначення. Наприклад, замість $\forall\, x$ іноді пишуть $\forall(x)$, (x) або $\wedge x$, а замість $\exists x$ – відповідно $\exists(x)$, $(\mathrm{E}x)$ або $\vee x$.

Важливу роль у логіці предикатів відіграє поняття області дії квантора у заданій формулі, під якою розумітимемо той вираз (підформулу), до якого належить квантор. Область дії квантора позначають за допомогою дужок. Ліва дужка, що відповідає початку області дії, записується безпосередньо після кванторної змінної даного квантора, а відповідна до неї права дужка означає закінчення області дії цього квантора. Там, де це не викликає невизначеності, дужки можна опускати й замість $\forall x(P(x))$ або $\exists x(P(x))$ писати відповідно $\forall xP(x)$ або $\exists xP(x)$. Це означає, що операції квантифікації мають більший пріоритет, ніж логічні операції.

Зауважимо, що така ситуація не виняткова й доволі часто зустрічається в інших розділах математики. Наприклад, у виразах

$$\int_a^b f(x)dx, \lim_{x \to c} x^n \quad \text{та} \quad \sum_{j=k}^{n} f(j)$$

параметри a, b, c, k і n – це змінні, замість яких можна підставляти певні значення, а параметри x та j – зв'язані змінні, підстановка замість яких будь-яких значень не має жодного сенсу.

Навішувати квантори можна й на багатомісні предикати. Наприклад, застосовуючи квантори $\forall$ і $\exists$ до змінних x та y двомісно го предиката $A(x, y)$, отримаємо чотири різні одномісні предикати:

$\forall x\, A(x, y)$, $\exists x\, A(x, y)$, $\forall y\, A(x, y)$ і $\exists y\, A(x, y)$.

У перших двох змінна x є зв'язаною, а змінна y – вільною, а у двох останніх – навпаки.

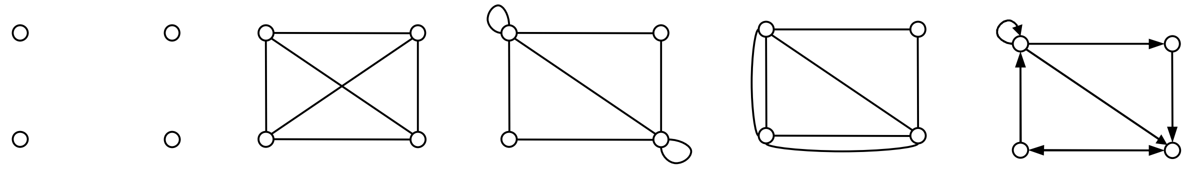
Вираз $\forall x\, A(x, y)$ (читають як *для всіх x A від x та y*) є одномісним предикатом $B(y)$. Він є істинним для тих і тільки тих $b \in M$, для яких одномісний предикат $A(x, b)$ є істинним для всіх x із M.

Навішування одного квантора завжди зменшує кількість вільних змінних і арність предиката на одиницю. Застосування кванторів до всіх змінних предиката перетворює його на висловлення (іноді таку предикатну формулу називають **замкненою**).

2.4. Графи. Типи графів. Операції над графами

Графом G = (V,E) називається об’єкт, який заданий парою множин (V, E), де V – множина **вершин**, $E \subseteq V \times V$ – множина **ребер**. Граф називається скінченним, якщо множини його вершин і ребер є скінченними. Множину вершин графа G позначають V(G), а множину ребер – E(G).

Кількість вершин графа n(G) = |V(G)|, а кількість ребер m(G) = |E(G)|. Кількість вершин n(G) графа називають його **порядком**.



а б в г д

Рисунок 5.1.

Якщо для деякого ребра $e = (v,w) \in E(G)$, то кажуть:

- вершини v та w **суміжні**;
- вершини v та w **інцидентні** ребру e;
- ребро e **інцидентне** вершинам v і w.

Означення 21.2. Множина вершин, які суміжні з вершиною v, називається **множиною суміжності** вершини v і позначається $\Gamma^+(v)$:

$\Gamma^+(v) = \{w \in V \mid (w,v) \in E\}$, $\Gamma^*(v) = \Gamma^+(v) + v$.

Зазвичай $\Gamma^+(v)$ позначається просто Γ(v). Очевидно, $w \in \Gamma(v)$ тоді й тільки тоді, коли $v \in \Gamma(w)$.

Якщо $A \subset V$ – множина вершин, то Γ(A) – множина всіх вершин, суміжних з вершинами з A:

$$\Gamma(A) = \{w \in V \mid \exists v \in A,\ w \in \Gamma(v)\} = \bigcup_{v \in A} \Gamma(v).$$

Множина ребер E може бути порожньою (рис. 5.1, а). Такий граф називається **нуль-графом** і позначається ∅. Якщо ж множина вершин V – порожня, то порожньою є також множина E. Такий граф називається **порожнім**. Лінії, що зображують ребра графа, можуть перетинатися, але точки перетину не є вершинами (рис. 5.1, б). Ребро може з’єднувати деяку вершину саму з собою (рис. 5.1, в), таке ребро називається **петлею**. Цей випадок відповідає наявності в множині E пар вигляду (v, v). Різні ребра можуть бути інцидентними одній і тій самій парі вершин (тобто одну й ту саму пару вершин з'єднує більше ніж одне ребро), такі ребра називаються **кратними** (рис. 5.1, г).

Граф називається **простим**, якщо кожну пару вершин з'єднує не більше, ніж одне ребро. Граф називається **мультиграфом**, якщо він має кратні ребра. Граф називається **псевдографом**, якщо він має петлі та кратні ребра.

Розглядають також орієнтовані графи (до цього були розглянуті неорієнтовані графи).

Орієнтованим графом (орграфом) називається граф D = (V, E), де V – множина вершин, $E \subseteq V \times V$ – множина орієнтованих ребер, або **дуг**.

При зображенні орієнтованих графів напрямки ребер позначаються стрілками (рис. 5.1, д). Орієнтований граф може мати кратні ребра, петлі, а також петлі, що з'єднують одні й ті самі вершини, але у зворотних напрямках.

Кожному неорієнтованому графу можна поставити у відповідність орієнтований граф з тією самою множиною вершин, в якій кожне ребро замінено двома орієнтованими ребрами, що є інцидентними тим самим вершинам і мають зворотні напрямки.

2.5. Маршрути, ланцюги, цикли та їх різновиди у графах. Дерева, ліси: основні поняття

Нехай G – неорієнтований граф. **Маршрутом** M у графі G називається така скінчена або нескінчена послідовність вершин і ребер, які чергуються,

$(\ldots, v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n, \ldots)$,

що кожні два сусідні ребра e_{i-1} та e_i мають спільну інцидентну вершину v_i.

Очевидно, маршрут M можна задавати послідовністю $(\ldots, v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots)$ його вершин (у звичайному графі), а також послідовністю $(\ldots, e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots)$ ребер, що й робитимемо далі. Одне і те саме ребро може зустрічатися в маршруті кілька разів. Надалі будуть розглядатися в основному скінченні маршрути. У таких маршрутах існують перше e_1 й останнє e_n ребра. Вершина v_0, інцидентна ребру e_1, називається початком маршруту. Якщо ребра e_1 та e_2 – кратні, то потрібна спеціальна вказівка, яку з двох інцидентних ним вершин слід вважати початком маршруту. Аналогічно означається кінець маршруту. Вершини, інцидентні ребрам маршруту, крім початкової і кінцевої, називаються внутрішніми, або проміжними.

Оскільки різні ребра маршруту можуть бути інцидентними одній і тій самій вершині, початок або кінець маршруту може одночасно виявитися внутрішньою вершиною.

Нехай маршрут $M(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ має початок v_0 і кінець v_n. Тоді його називають **сполучним**. Число ребер маршруту є його довжиною. Якщо $v_0=v_n$, то маршрут називають замкненим, або **циклічним**. Відрізок $(e_i, e_{i+1}, \ldots, e_j)$ скінченного або нескінченного маршруту М є маршрутом. Він називається **ділянкою** маршруту М.

Маршрут М називається **ланцюгом**, якщо кожне ребро зустрічається в ньому не більше одного разу, і **простим ланцюгом**, якщо будь-яка вершина, крім, можливо, початкової, зустрічається в ньому не більш як один раз. Якщо ланцюг є замкненим, то його називають **циклом**, а якщо простий ланцюг – замкнений, то це – простий цикл. Граф, який не містить циклів, називається **ациклічним**.

В орієнтованому графі маршрут називається **шляхом**. Відповідно можна перенести також визначення ланцюга, простого ланцюга та циклу. Простий цикл в орієнтованому графі ще називається **контуром**.

Граф, якій складається з простого циклу з k вершинами, позначається C_k.

Граф називається **зв'язним**, якщо будь-яка пара його вершин є зв’язаною. Якщо граф не є зв'язним, то він називається **незв'язним**.

Зв’язністю графа називається мінімальна кількість вершин, вилучення яких приводить до утворення незв'язного графа.

Кількість вершин у максимальному повному підграфі графа G називається щільністю $\alpha(G)$ графа G. Кількість вершин у максимальному порожньому підграфі графа G називається нещільністю $\varepsilon(G)$ графа G.

Довжина найменшого ланцюга між вершинами v і w звичайного графа G називається відстанню $d(v,w)$ між цими вершинами.

Вона задовольняє аксіоми метрики:

$d(v,w) \geq 0$;

$d(v,w) = 0 \Leftrightarrow v = w$;

$d(v,w) = d(v,w)$;

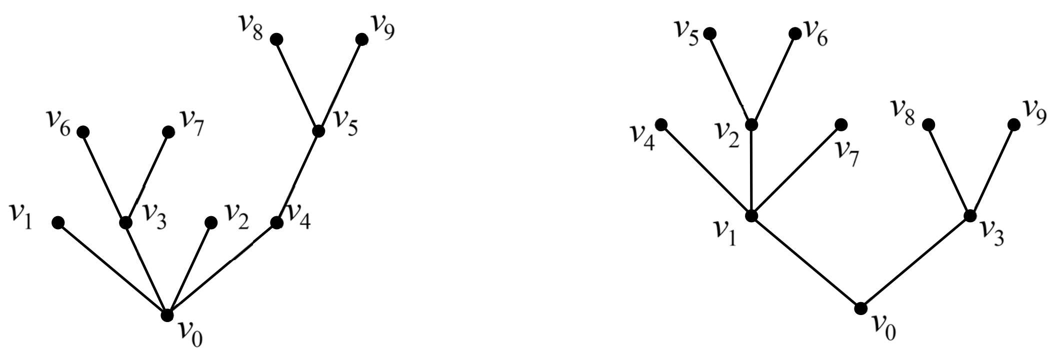
$d(v,w) + d(w,u) \geq d(v,u)$.

Діаметром графа G називається величина $d(G) = \max\limits_{v,w \in V} d(v,w)$.

Іншими словами, діаметром графа G називається максимальна відстань між двома вершинами графа G.

Звичайний граф G називається **деревом**, якщо він є зв'язним і не має циклів, а граф G, всі компоненти зв’язності якого є деревами − **лісом**.

Графи, зображені на рис.5.2., є деревами.



а) б)

Рисунок 5.2.

Розглянемо деякі властивості дерев.

Вершина v графа G називається **кінцевою** (такою що висить), якщо її локальний ступінь $g(v)=1$. Ребро, яке інцідентне кінцевої вершини, називається **кінцевим**.

Очевидно, якщо дерево має більш за одну вершину, то воно має хоча б одне кінцеве ребро, якщо дерево має більш двох вершин, то серед них є некінцеві.

Можна сказати, що такі твердження є еквівалентними:

1) граф G – дерево;

2) граф G є зв'язним і не має простих циклів;

3) граф G є зв'язним, і $n(G)=m(G)+1$;

4) для будь-яких двох різних вершин графа G існує єдиний (і притому простий) ланцюг;

5) граф G не містить циклів, але, додаючи до нього будь-яке нове ребро, дістаємо рівно один і притому простий цикл.

В дереві G вибирають вершину v_0, яку називають коренем дерева G. На рис.7.13 а) і б) наведено приклади двох ізоморфних графів – дерев, які відрізняються за вибором кореня.

Нехай v – деяка вершина дерева G з коренем v_0, V_1 – множина вершин, які зв'язані з коренем v_0 ланцюгами, що містять вершину v. Ця множина породжує підграф $G_1(V)$, який називається гілкою вершини v у дереві з коренем v_0.

Нехай є дерево G. Вершинами типа 1 називаються **кінцеві вершини**. Якщо з дерева G вилучити всі кінцеві вершини разом з інцідентними ребрами, то в частині графа, що залишилася, є кінцеві вершини. Вони називаються **вершинами типа 2** дерева G. Аналогічно визначаються вершини типа 3, 4, …

Нехай $G=(V,E)$ – звичайний граф. Його **цикломатичним числом** називається число

$$\gamma(G)=n_\sigma+m-n,$$

де n_σ – кількість зв’язних компонент графа; m – кількість його ребер, а n – кількість вершин.

Цикломатичне число звичайного графа є невід’ємним.

Цикломатичне число дерева дорівнює нулю, цикломатичне число лісу – сумі цикломатичних чисел своїх зв’язних компонент-дерев, тобто також дорівнює нулю.

Кістяковим деревом зв’язного графа G називається будь-яка його частина, що містить усі вершини графа G і є деревом.

Нехай G − зв’язний граф. Тоді кістякове дерево графа G (якщо воно існує) має містити $n(G)-1$ ребер, і є результатом вилучення з G рівно $m(G)-(n(G)-1)=m(G)-n(G)+1$ ребер. Покажемо існування кістякового дерева для довільного зв’язного псевдографа $G=(V,X)$, описавши алгоритм його вибору.

Граф $G(V,E)$ називається **зваженим**, якщо на множині його ребер означено вагову функцію $l:E\to R$, тобто кожному ребру $e\in E$ зв'язного графа $G(V,E)$ поставлена у відповідність величина $l(e)$ – вага ребра e.

Цикли, що містять усі ребра графа, називаються ейлеревими, а графи, які мають цей цикл, − **ейлеревими**.

Іншими словами **Ейлерові графи** − це такі графи, які можна зобразити одним розчерком пера, причому процес цього зображення починається й закінчується в одній і тій самій вершині. Л. Ейлер розв’язав поставлену задачу і сформулював так звану теорему Ейлера.

Теорема Ейлера. Скінчений неорієнтований граф G є ейлеревим тоді й тільки тоді, коли він зв'язний і степені всіх його вершин парні.

Гамільтоновим циклом називається простий цикл, що проходить через усі вершини графа. Граф, який містить гамільтонів цикл, називається гамільтоновим.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ТА ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Борисенко О. А. Дискретна математика: підручник. Суми: Університетська книга, 2023. 255 с.
2. Вища математика. Аналітична геометрія: методичні рекомендації для практичних занять для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти ОПП «Менеджмент» спеціальності D3 «Менеджмент» денної та заочної форм здобуття вищої освіти / уклад. В. М. Дармосюк. Миколаїв: МНАУ, 2025. 53 с.
3. Вища математика: Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії: Навчальний посібник: навч. посіб. для студ. Спеціальності 122 «Комп'ютерні науки та інформаційні технології» /КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: Т. О. Єрьоміна, О. А. Поварова. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 112 с.
4. Дискретна математика : конспект лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти ОПП «Комп'ютерні науки» спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» денної форми здобуття вищої освіти / уклад. О. В. Шебаніна, С. І. Тищенко, В. О. Крайній, О. Ю. Пархоменко, І. І. Хилько. Миколаїв: МНАУ, 2023. 162 с. URL: https://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/14555
5. Дискретна математика: конспект лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти ОПП «Комп'ютерні науки» спец. 122 «Комп'ютерні науки» денної форми здобуття вищої освіти / уклад. О. Ю. Пархоменко. Миколаїв: МНАУ, 2025. 60 с. https://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/22002
6. Ємець О. О., Парфьонова Т. О. Дискретна математика : навчальний посібник для самостійного вивчення навчальної дисципліни студентами денної форми навчання спеціальності 122 Комп'ютерні науки освітня програма «Комп'ютерні науки» ступеня бакалавра. Полтава : ПУЕТ, 2023. 282 с. URL: https://files.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi73/0053713.pdf.

7. Круглова, Н. В. Обчислювальна ймовірність та статистика. Конспект лекцій: навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освіт. програмою «Страхова та фінансова математика» спец. 111 Математика / Н. В. Круглова, О. О. Диховичний ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025. 128 с.

8. Маловічко, Т. В. Математичний аналіз. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Конспект лекцій: навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю 104 Фізика та астрономія / Т. В. Маловічко ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025. 151 с.

9. Математичне моделювання систем і процесів : конспект лекцій / уклад. Н. В. Богданова, О. В. Богданов. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 85 с. URL: https://ela.kpi.ua/server/api/core/bitstreams/b0f1b40c-289d-4385-956e-0791d55ede37/content.

10. Математичні методи в задачах автоматизації : навчальний посібник / уклад.: А. І. Жученко, Л. Д. Ярощук, Т. А. Дунаєва. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 385 с. URL: https://ela.kpi.ua/33bitstreams/0cf19009-04aa-490e-a00f-71a0715bf1c0/download.

11. Методи оптимізації. Компьютерний практикум : навчальний посібник / уклад.: А. П. Яковлева, І. Я. Спекторський. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 82 с. URL: https://ela.kpi.ua/bitstreams/222e5ba9-a5a6-4f94-acae-77bef6b23df7/download.

12. Скуратовський Р. В. Вища математика з прикладами і задачами: Підручник. Київ : Національна академія управління, 2021. 232 с.

13. Теорія ймовірностей та математична статистика: навчальний посібник / О. І. Огірко, Н. В. Галайко. Львів: ЛьвДУВС, 2017. 292 с.

14. Яровий А. А., Ваховська Л. М., Крилик Л. В. Математичні методи дослідження операцій. Лінійне програмування: навчальний посібник. Вінниця: ВНТУ, 2020. Ч. 1. 86 с. URL: https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/IRVC/Yarovij_P1_2020_86.pdf.

Навчальне видання

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ В ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЯХ

Конспект лекцій

Конспект лекцій

Укладач:

Богатєнкова Олександра Євгенівна

Формат 60х84 1/16. Ум. друк. арк. 5,25.
Наклад 50 прим. Зам. № _____

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.