

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**  
**ІНЖЕНЕРНО-ЕНЕРГЕТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ**  
**КАФЕДРА ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИКИ, ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ ТА**  
**ЕЛЕКТРОМЕХАНІКИ**

**Теоретичні основи електротехніки:**

конспект лекцій  
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти ОПП  
«Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»  
спеціальності G3 «Електрична інженерія» денної форми здобуття  
вищої освіти

Миколаїв  
2026

УДК 621.3  
Т33

Рекомендовано до друку науково-методичною комісією Інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету (протокол № 9 від 16.06.2026 р)

Укладачі:

- Циганов О. М. – канд. тех. наук, старший викладач кафедри електроенергетики, електротехніки та електромеханіки, Миколаївський національний аграрний університет.
- Руденко А.Ю. – асистент кафедри електроенергетики, електротехніки та електромеханіки, Миколаївський національний аграрний університет.

Рецензенти:

- Рябенський В.М. – д-р техн. наук, професор, професор кафедри програмної електроніки, електротехніки та телекомунікацій Миколаївського національного університету кораблебудування ім. адм. Макарова
- Вахоніна Л. В. – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри електроенергетики, електротехніки та електромеханіки, Миколаївський національний аграрний університет.

Т33 **Теоретичні** основи електротехніки : конспект лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти ОПП «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» спеціальності G3 «Електрична інженерія» денної форми здобуття вищої освіти / уклад. : О. М. Циганов, А. Ю. Руденко. Миколаїв : МНАУ, 2026. 107 с.

УДК 621.3

## ЗМІСТ

Вступ.....	5
ЛЕКЦІЯ 1 НЕЛІНІЙНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ	
1.1. Нелінійні елементи.....	6
1.2. Розрахунок кіл при послідовному з'єднанні нелінійних елементів.....	8
1.3. Розрахунок кіл з паралельному з'єднанні нелінійних елементів.....	9
ЛЕКЦІЯ 2 МАГНІТНІ КОЛА ПРИ ПОСТІЙНИХ МАГНІТНИХ ПОТОКАХ	
2.1. Явище і закон електромагнетизму .....	12
2.2. Магнітне коло і її конструктивна схема.....	16
2.3. Крива намагнічування.....	16
2.4. Петля гістерезисну .....	16
2.5. Аналогія між електричними і магнітними колами.....	17
ЛЕКЦІЯ 3	
3.1. Розрахункова схема магнітного кола .....	20
3.2. Закони магнітних кіл .....	20
3.3. Розрахунок нерозгалужених магнітних кіл.....	23
3.4. Розрахунок розгалужених магнітних кіл.....	26
3.5. Електромагніти та їх розрахунок.....	31
ЛЕКЦІЯ 4 НЕЛІНІЙНІ КОЛА ЗМІННОГО СТРУМУ	
4.1. Загальні положення.....	32
4.2. Нелінійна індуктивність .....	33
4.3. Ідеальна котушка з феромагнітним осердям у колі змінного струму.....	34
4.4. Втрати активної потужності на гістерезис.....	39
4.5. Втрати активної потужності на вихрові струми.....	41
4.6. Реальна котушка з феромагнітним осердям у колі змінного струму.....	42

ЛЕКЦІЯ 5	
5.1. Ферорезонанс напруг і струмів.....	45
ЛЕКЦІЯ 6	
6.1. Трансформатор з феромагнітним осердям.....	57
6.2. Приведений трансформатор.....	63
ЛЕКЦІЯ 7 ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В ЛІНІЙНИХ КОЛАХ	
7.1. Причини виникнення перехідних процесів.....	67
7.2. Закони комутації.....	67
7.3. Класичний метод розрахунку.....	70
7.4. Підключення котушки до джерела постійної ЕРС.....	72
7.5. Коротке замикання котушки.....	74
ЛЕКЦІЯ 8	
8.1.Зарядження конденсатора через резистор.....	78
8.2. Розрядження конденсатора через резистор.....	80
ЛЕКЦІЯ 9	
9.1. Перехідний процес у колі з послідовно з'єднаними котушкою і конденсатором.....	83
9.2. Розрядка конденсатора на котушку.....	87
ЛЕКЦІЯ 10	
10.1.Включення котушки при синусоїдній напрузі.....	92
10.2.Включення послідовно з'єднаних резистора і конденсатора при синусоїдній напрузі.....	94
ЛЕКЦІЯ 11	
11.1.Розрахунок перехідного процесу в розгалуженому колі.....	98
11.2.Перетворення Лапласа.....	101
11.3.Закони Ома і Кірхгофа в операторній формі.....	102
ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНИХ ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ.....	104

## ВСТУП

Теоретичні основи електротехніки є фундаментальною дисципліною, на базі якої вивчаються всі інші електротехнічні дисципліни навчального плану спеціальності.

Даний конспект лекцій сприяє самостійній пізнавальній діяльності студентів з вивчення ТОЕ, частина 3 на трьох рівнях: знань, умінь і творчого мислення, забезпечуючи як вивчення навчального матеріалу, так і розвиток мислення, що є основною вимогою болонського процесу.

На базі запропонованого конспекту лекцій з ТОЕ, частина 3 з'являється можливість змінити парадигму навчального процесу від простої передачі знань викладачами студентам до самостійного здобування знань і вмінь студентами шляхом поєднання аудиторних та поза аудиторних занять в єдиний безперервний ланцюг самостійної пізнавальної діяльності студентів на двох рівнях: інформаційно-репродуктивному, практично-стереотипному.

Тому теоретичний матеріал, наведений у конспекту лекцій з ТОЕ, частина 3 є досить актуальним і доцільним для організації пізнавальної діяльності студентів і підготовки до лабораторних занять.

Науково-методична цінність конспекту лекцій з ТОЕ, частина 3 полягає у тому, що він дає можливість організувати аудиторну і поза аудиторну діяльність студентів з вивчення дисципліни і є базою для науково-методичного комплексу дисципліни.

# ЛЕКЦІЯ 1

## ТЕМА 1. НЕЛІНІЙНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

План лекції

- 1.1. Нелінійні елементи.
- 1.2. Розрахунок кіл при послідовному з'єднанні нелінійних елементів.
- 1.3. Розрахунок кіл при паралельному з'єднанні нелінійних елементів.

### 1.1. Нелінійні елементи

Відомо, що в реальних умовах всі електричні кола є нелінійними, а лінійними їх можна вважати в обмеженому діапазоні значень сил струмів і напруг. Наприклад, при проходженні струму по проводу спостерігається теплова дія струму, внаслідок чого збільшується опір проводу. Вольт-амперні характеристики нелінійних елементів мають вигляд кривих. На рисунку 1.1 показана вольт-амперна характеристика лампи розжарювання.

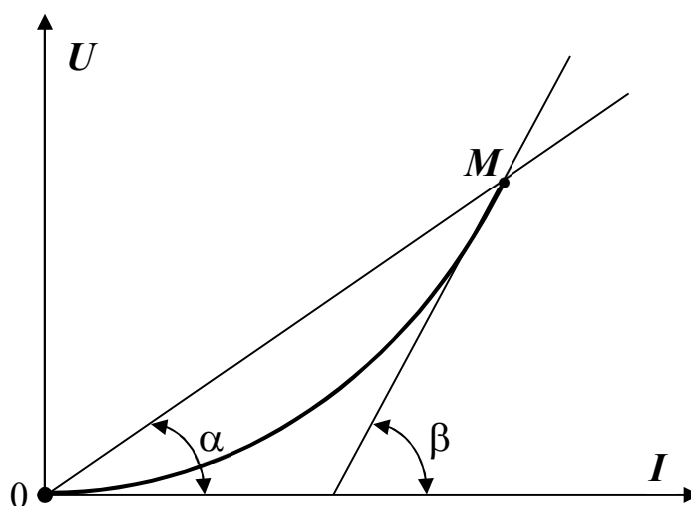


Рисунок 1.1 – Вольт-амперна характеристика нелінійного елемента

Робоча точка нелінійного елемента характеризується **статичним** і **динамічним** опором.

Під **динамічним** опором розуміють скалярну величину, рівну межі відношення приросту напруги на нелінійному елементі до приросту струму в

нім, коли приріст струму прагне до нуля.

$$r_D = \lim_{\Delta I \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{dU}{dI} \quad (1.1)$$

Вольт-амперні характеристики нелінійних елементів не завжди можна описати аналітичним рівнянням. Динамічний опір нелінійного елемента в цьому випадку можна визначити графоаналітичним способом: якщо в робочій точці  $M$  провести дотичну, то вона утворить з віссю струму кут  $\alpha$ . Значення динамічного опору пропорційно тангенсу кута  $\alpha$  і визначають за рівнянням

$$r_D = m_r \operatorname{tg} \alpha \quad (1.2)$$

де  $r_D$  – динамічний опір, Ом;  $m_r$  – масштаб опору, Ом/мм.

Масштаб опору дорівнює частці від ділення масштабу напруги на масштаб струму

$$m_r = \frac{m_U}{m_I}, \quad (1.3)$$

де  $m_U$  – масштаб напруги, В/мм;  $m_I$  – масштаб струму, А/мм.

Під статичним опором розуміють величину, рівну відношенню постійної напруги на нелінійному елементі до постійного струму в ньому у робочій точці.

$$r = \frac{U}{I}, \quad (1.4)$$

де  $r_C$  – статичний опір, Ом.

Для визначення статичного опору графоаналітичним методом необхідно з'єднати робочу точку  $M_C$  початком координат лінією, яка утворить з віссю струму кут  $\beta$ . Значення статичного опору пропорційно тангенсу кута  $\beta$  і визначають за рівнянням

$$r_C = m_r \operatorname{tg} \beta, \quad (1.5)$$

Зображення нелінійного елемента на розрахункових схемах наведено на рисунку 1.2.

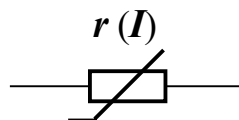


Рисунок 1.2 Зображення нелінійного елемента на розрахункових схемах

Для нелінійного елемента статичний і динамічний опори різні за величиною.

Якщо динамічний опір зростає при збільшенні струму на нелінійному елементі, то такий динамічний опір є **позитивним**. Якщо динамічний опір зростає при зменшенні струму на нелінійному елементі, то такий динамічний опір є **негативним**. Ділянки з позитивним і негативним опором має вольт-амперна характеристика лямбда-діода.

## 1.2. Розрахунок кіл з послідовним з'єднанням нелінійних елементів

Розрахункова схема двох послідовно з'єднаних нелінійних елементів  $r_1(I_1)$  і  $r_2(I_2)$  показана на рисунку 1.3, вольт-амперні характеристики яких  $I_1(U_1)$  і  $I_2(U_2)$  зображені на рисунку 1.4.

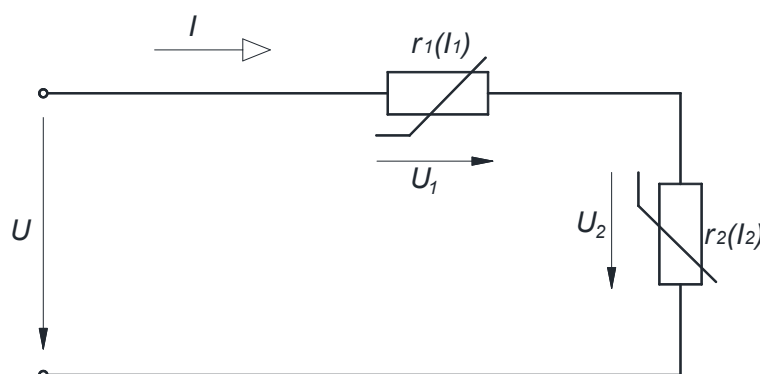


Рисунок 1.3 Розрахункова схема двох послідовно з'єднаних нелінійних елементів  $r_1(I_1)$  і  $r_2(I_2)$

Якщо напруга на затисках ділянки кола дорівнює  $U$ . Необхідно знайти струм  $I$  та напруги  $U_1$  і  $U_2$  на нелінійних елементах.

Розрахуємо таке коло графічним методом. З цією метою будемо допоміжну характеристику для всієї ділянки кола, яка являє собою залежність струму  $I$  від загальної напруги  $U$ . Оскільки в нерозгалуженому колі  $I = I_1 = I_2$ , то для побудови характеристики  $I(U_1 + U_2)$  необхідно скласти напруги  $U_1$  і  $U_2$  для однієї і тієї ж сили струму  $I$ . Якщо після цього відкласти на осі напруг відрізок

$Oa$ , який у масштабі напруги  $m_U$  дорівнює напрузі  $U$ , а з точки  $a$  провести пряму  $ab$ , паралельну осі струму, до перетинання з кривою  $I(U_1 + U_2)$ , то одержимо відрізок  $ab$ , який у масштабі струму  $m_I$  дорівнює струму  $I$ . Потім із точки  $b$  проводимо пряму  $bc$ , паралельну осі напруги. У результаті одержимо відрізки  $cd$  і  $cf$ , які у масштабі напруги  $m_U$  дорівнюють відповідно напругам  $U_1$  і  $U_2$ .

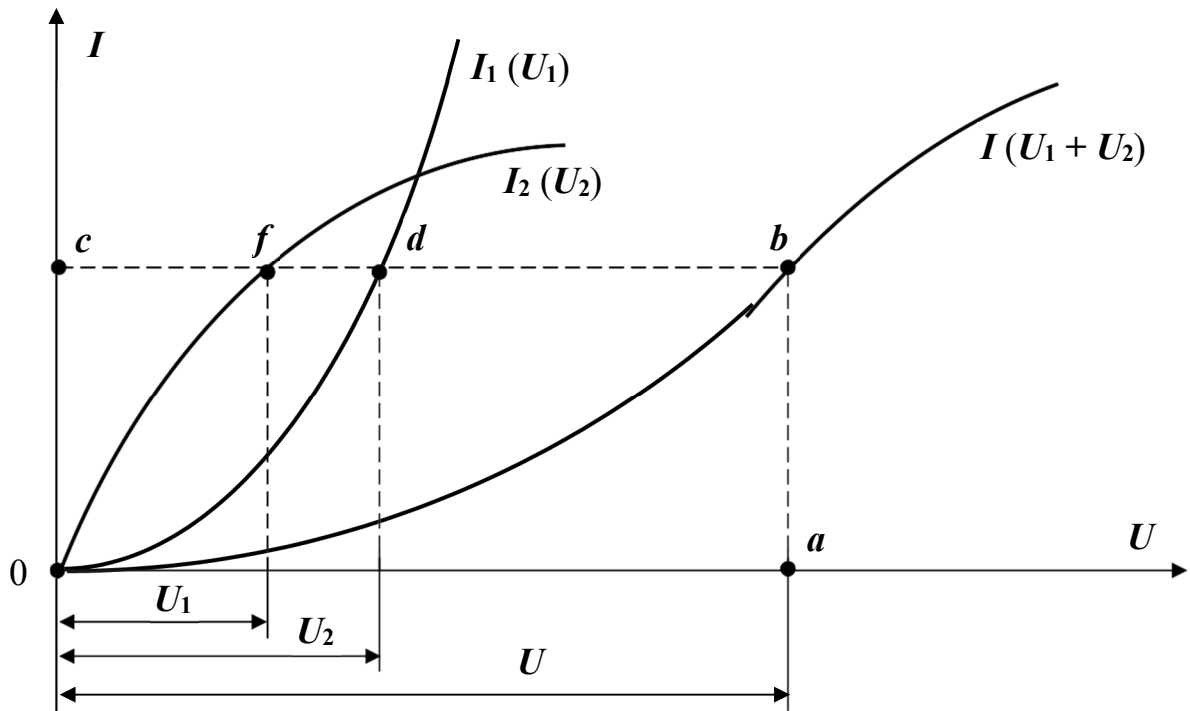


Рисунок 1.4 Вольт-амперні характеристики  $I_1(U_1)$  і  $I_2(U_2)$  і побудова характеристики  $I(U_1 + U_2)$  двох послідовно з'єднаних нелінійних елементів  $r_1(I_1)$  і  $r_2(I_2)$

Аналогічно розраховується коло, яке містить більшу кількість послідовно з'єднаних нелінійних елементів.

### 1.3. Розрахунок кіл з паралельним з'єднанням нелінійних елементів

На рисунку 1.5 показана розрахункова схема двох паралельно з'єднаних нелінійних елементів  $r_1(I_1)$  і  $r_2(I_2)$ , вольт-амперні характеристики яких  $I_1(U_1)$  і  $I_2(U_2)$  зображені на рисунку 1.6.

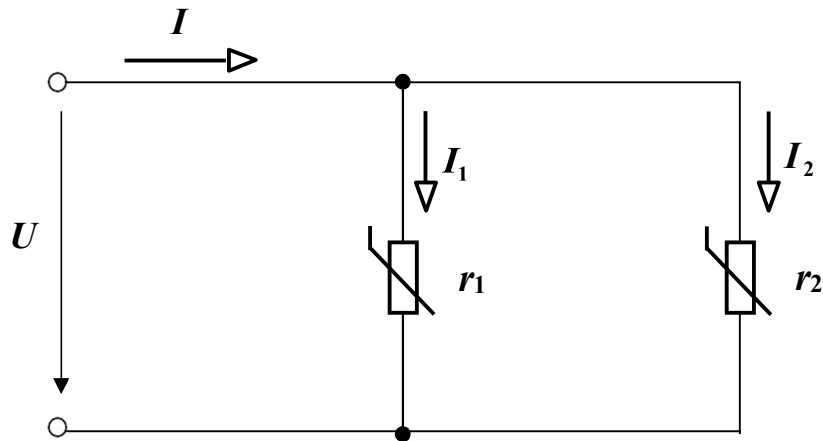


Рисунок 1.5 Розрахункова схема двох паралельно з'єднаних нелінійних елементів  $r_1(I_1)$  і  $r_2(I_2)$

Якщо напругу на затискачах ділянки кола прийняти рівною  $U$ , то за вольт-амперними характеристиками  $I_1(U_1)$  і  $I_2(U_2)$  легко знайти струми  $I_1$  і  $I_2$ , а за допомогою рівняння за першим законом Кірхгофа  $I_1 + I_2 = I$  – струм у нерозгалуженій ділянці кола. Якщо задано струм  $I$ , то для того, щоб знайти напругу  $U$  та струми  $I_1$  і  $I_2$ , необхідно побудувати допоміжну характеристику  $I_1 + I_2 = I(U)$ . Оскільки при паралельному з'єднанні  $U_1 = U_2 = U$ , то відповідно до рівняння  $I = I_1 + I_2$  необхідно скласти ординати кривих  $I_1(U_1)$  і  $I_2(U_2)$  для тих самих значень напруг  $U_1 = U_2$ . Якщо відкласти на осі ординат відрізок  $Oc$ , який у масштабі струму  $m_1$  дорівнює струму  $I$ , а потім із точки  $c$  провести пряму лінію, паралельну осі абсцис, до перетинання з кривою  $I_1 + I_2 = I(U)$ , то можна легко знайти напругу  $U = |Oa| \cdot m_U$ . Пряма  $ba$ , проведена паралельно осі ординат до перетинання з вольт-амперними характеристиками нелінійних елементів, дозволяє безпосередньо знайти струми  $I_1$  і  $I_2$ .

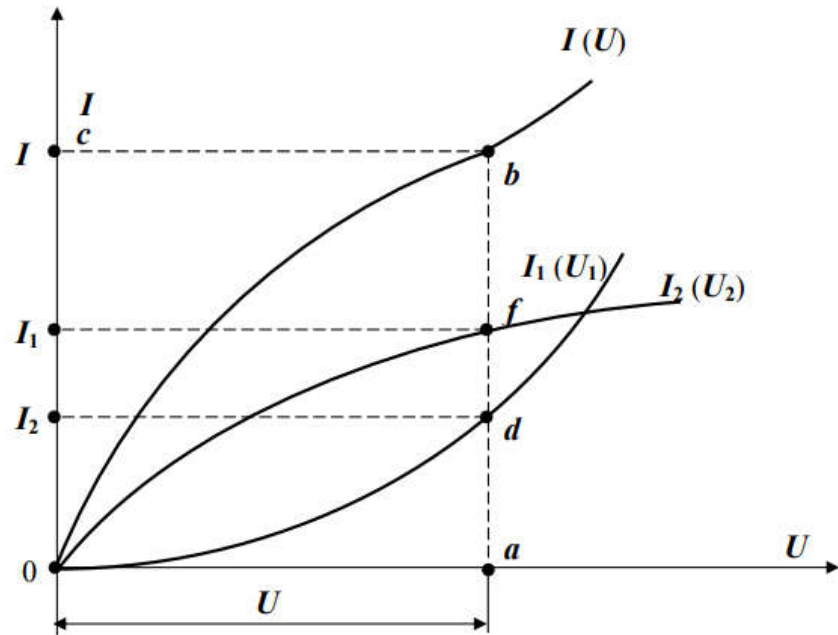


Рисунок 1.6 Вольт-амперні характеристики  $I_1(U_1)$  і  $I_2(U_2)$  і побудова характеристики  $I(U)$  двох паралельно з'єднаних нелінійних елементів  $r_1(I_1)$  і  $r_2(I_2)$

При змішаному з'єднанні нелінійних елементів розрахунок кола також проводиться аналогічно приведеному вище матеріалу.

### Список літератури

[1: с.165-168]; [2: с.386-398]; [3: с.7-16]; [4: с.330-336].

## ЛЕКЦІЯ 2

### ТЕМА 2. МАГНІТНІ КОЛА ПРИ ПОСТІЙНИХ МАГНІТНИХ ПОТОКАХ

План лекції

- 2.1. Явище і закон електромагнетизму.
- 2.2. Магнітне коло і її конструктивна схема.
- 2.3. Крива намагнічування.
- 2.4. Петля гістерезисну.
- 2.5. Аналогія між електричними і магнітними колами.

#### 2.1. Явище і закон електромагнетизму

**Явище електромагнетизму:** навколо провідника зі струмом утворюється магнітне поле. Магнітне поле розглядають як стан середовища, яке оточує провід з електричним струмом. Воно створюється завдяки руху заряджених часток: електронів або іонів. Напрямок силових ліній магнітного поля визначається за правилом «буравчика» або «правового гвинта»: якщо угвинчувати буравчик (правий гвинт) за напрямом електричного струму, то напрям його обертання буде збігатися з напрямом силових ліній магнітного поля (рисунок 2.1).

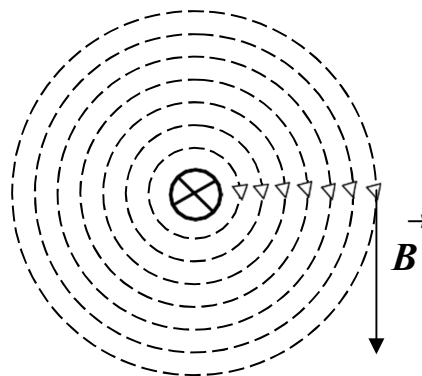


Рисунок 2.1 Визначення напрямку силових ліній магнітного поля за правилом «буравчика»

Силова характеристика магнітного поля – **магнітна індукція  $B$** . Вектор магнітної індукції в будь-якій точці магнітного поля є дотична силовій лінії магнітного поля. За модулем магнітна індукція дорівнює відношенню обертаючого моменту рамки зі струмом (поміщеної в дану точку поля) до добутку площі рамки на силу струму в ній

$$B = \frac{M}{I \cdot S}, \quad (2.1)$$

де  $B$  – магнітна індукція, Тл;  $M$  – обертаючий момент, Н·м;  $I$  – сила струму, А;  $S$  – площа рамки, м<sup>2</sup>.

$$[B] = \frac{H \cdot м}{A \cdot м^2} = \frac{Дж}{A \cdot м^2} = \frac{B \cdot A \cdot с}{A \cdot м^2} = \frac{B \cdot с}{м^2} = \text{Тл}.$$

Для однорідного магнітного поля введено **поняття магнітного потоку**, під яким розуміється добуток магнітної індукції на площу, через яку проходить магнітне поле

$$\Phi = B \cdot S, \quad (2.2)$$

де  $\Phi$  – магнітний потік, Вб;  $B$  – магнітна індукція, Тл;  $S$  – площа, через яку проходить магнітне поле, м<sup>2</sup>.

$$[\Phi] = \text{Тл} \cdot м^2 = \frac{B \cdot с}{м^2} \cdot м^2 = B \cdot с = \text{Вб}.$$

Зв'язок між магнітним потоком, який створюється котушкою зі струмом та силою електричного струму встановлює **закон електромагнетизму: потікозчеплення** (добуток кількості витків котушки на магнітний потік) **прямо пропорційно добутку індуктивності котушки на силу електричного струму**

$$\psi = w \cdot \Phi = L \cdot I, \quad (2.3)$$

де  $\psi$  – потікозчеплення, Вб;  $w$  – кількість витків котушки;  $\Phi$  – магнітний потік, Вб;  $L$  – індуктивність котушки, Гн;  $I$  – сила електричного струму, А.

Якщо провід з електричним струмом помістити в різні середовища, то в кожному середовищі значення магнітної індукції буде різним (рисунку 2.2).

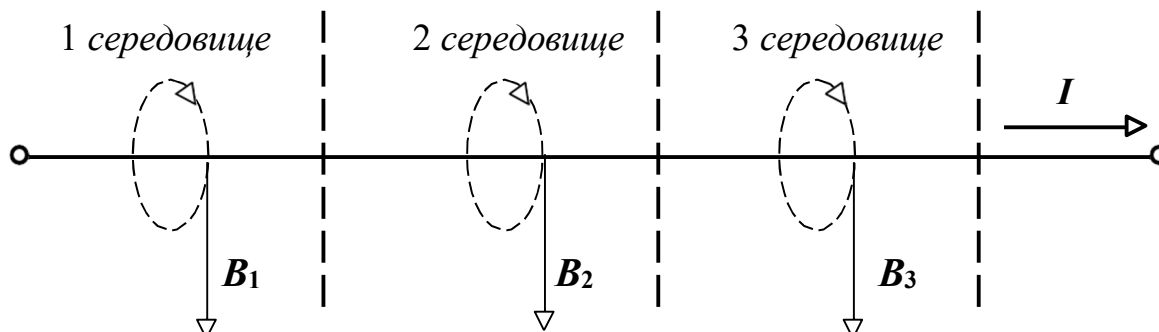


Рисунок 2.2 Залежність значення магнітної індукції від середовища

Введемо поняття **напруженості магнітного поля**, під яким розуміється відношення магнітної індукції до магнітної проникності середовища

$$H = \frac{B}{\mu_c}, \quad (2.4)$$

де  $H$  – напруженість магнітного поля,  $A/m$ ;  $B$  – магнітна індукція,  $Tл$ ;  $\mu_c$  – магнітна проникність середовища,  $Гн/м$ .

Магнітна проникність середовища може бути знайдена за формулою

$$\mu_c = \mu \cdot \mu_0, \quad (2.5)$$

де  $\mu_c$  – магнітна проникність середовища,  $Гн/м$ ;  $\mu$  – відносна магнітна проникність середовища;  $\mu_0$  – магнітна постійна,  $Гн/м$ ;  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} Гн/м$ .

Магнітне коло та його конструктивна схема

За аналогією з електричним колом під магнітним колом розуміється сукупність пристроїв, які забезпечують можливість створення магнітного потоку.

Магнітне коло містить магнітопровід (призначений для замикання і підсилення магнітного потоку), а також котушку, виконану з проволу (призначену для протікання електричного струму і створення магнітного потоку), яка живиться від джерела постійного електричного струму. Приведемо приклад конструктивної схеми нерозгалуженого магнітного кола (рисунку 2.3).

Магнітопровід містить дві ділянки: перша ділянка довжиною  $l_1$ , перетином  $S_1$ ; друга ділянка довжиною  $l_2$ , перетином  $S_2$ . Котушка містить кількість витків  $w$ .

До котушки підведена напруга  $U$ , під дією якої протікає намагнічуючий струм  $I$ . В результаті буде спостерігатися явище електромагнетизму: котушка з намагнічуючим струмом  $I$  створить магнітний потік  $\Phi$ .

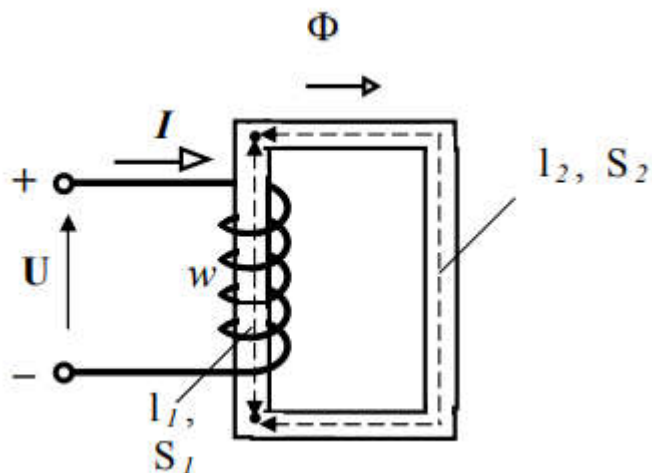


Рисунок 2.3 Конструктивна нерозгалуженого магнітного кола

Для однорідного магнітного поля відомий **закон повного струму**: намагнічуюча сила (добуток кількості витків котушки на силу струму) прямо пропорційна добутку напруженості магнітного поля на довжину магнітопроводу

$$F = w I = H \cdot l, \quad (2.6)$$

де  $F$  – намагнічуюча сила котушки,  $A$ ;  $w$  – кількість витків котушки;  $I$  – сила струму, який протікає в котушці,  $A$ ;  $H$  – напруженість магнітного поля,  $A/m$ ;  $l$  – довжина магнітопроводу котушки,  $m$ .

З рівняння (2.6) можна знайти залежність напруженості магнітного поля від намагнічуючого струму:

$$H = \frac{w \cdot I}{l}. \quad (2.7)$$

Якщо по котушці пропускати електричний струм, змінюючи силу електричного струму від нуля до певного значення, то відповідно до виразу (2.4) буде змінюватися і магнітна індукція за законом:

$$B = \mu_c \cdot H. \quad (2.8)$$

Магнітний потік буде змінюватися за законом:

$$\Phi = \mu_c H S. \quad (2.9)$$

## 2.2. Крива намагнічування

З курсу фізики відомо, що з ростом магнітного потоку у феромагнетик його магнітна проникність буде зменшуватися. Тому залежність  $\Phi = f(H)$  або  $B = f(H)$  буде нелінійною. Така крива називається **кривою намагнічування** (рисунку 2.4), яка вперше була експериментально встановлена для м'якого заліза фізиком *Олександром Григоровичем Столетовим* у 1871 році.

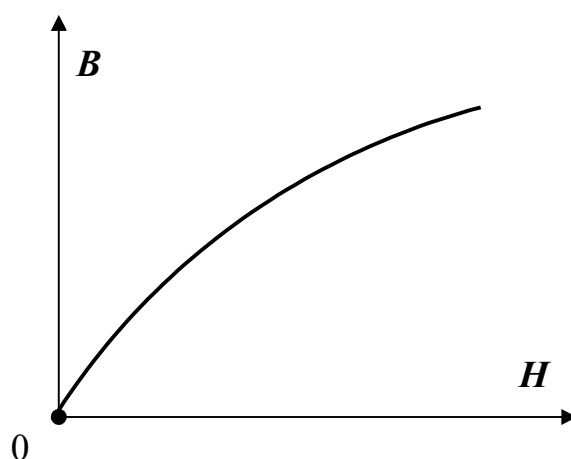


Рисунок 2.4 – Крива намагнічування  $B = f(H)$

Як видно з кривої намагнічування на рисунку 4 з ростом напруженості поступово настає насичення феромагнітного матеріалу і магнітна індукція далі практично не зростає.

## 2.3. Петля гістерезису

Якщо спочатку збільшувати силу струму до режиму насичення (рисунок 2.5), а потім його зменшувати, то залежність  $B = f(H)$  уже проходить вище (відрізок 1 рисунку 2.5). Для того, щоб магнітна індукція зменшилася до нуля, необхідно струм пропускати в зворотному напрямку (відрізок 2 рисунку 2.5). Якщо далі в зворотному напрямку пропускати струм, то поступово настає насичення (відрізок 3 рисунку 2.5).

Якщо тепер струм зменшувати до нуля, то залежність  $B = f(H)$  буде мати вигляд відрізка 4. Змінюємо напрям струму і при певному значенні сили струму магнітна індукція дорівнює нулю (відрізок 5).

Підвищуючи силу струму далі, поступово настає насичення (відрізок 6). Таким чином, ми одержали залежність  $B = f(H)$  у вигляді так званої **петлі гістерезиса**.

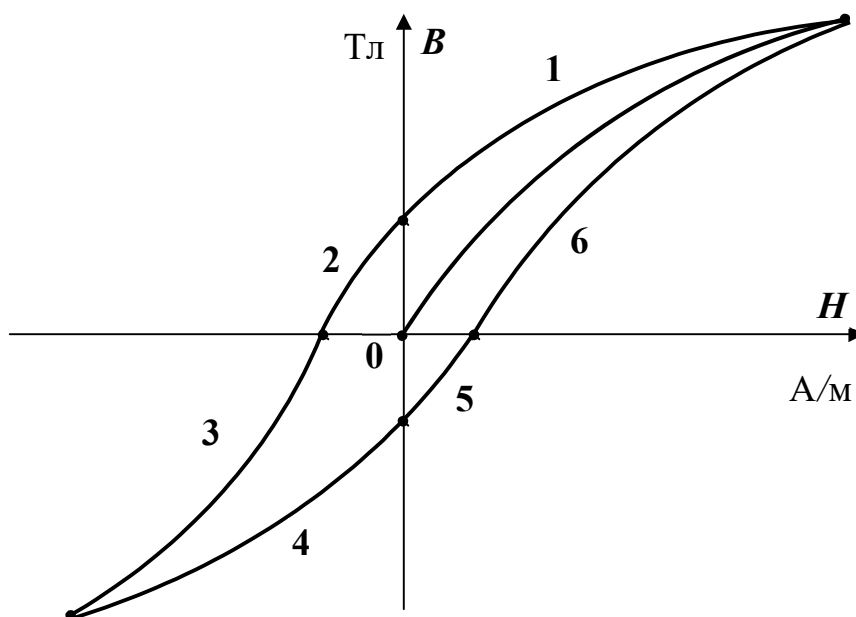


Рисунок 2.5 Петля гістерезису феромагнітних матеріалів

З курсу фізики відомо, що площа петлі гістерезиса прямо пропорційна втратам енергії на перемагнічування магнітопроводу.

Для зменшення витрат потужності на гістерезис магнітопроводи електричних машин, трансформаторів та інших електротехнічних пристроїв, що містять феромагнітні магнітопроводи, виконують з холоднокатаної (м'якої) сталі, що має вузьку петлю гістерезису.

#### 2.4. Аналогія між електричними і магнітними колами

Прийmemo наступну конструктивну схему нерозгалуженого магнітного поля (рисунок 2.6), що має дві ділянки з різними довжинами і перетинами.

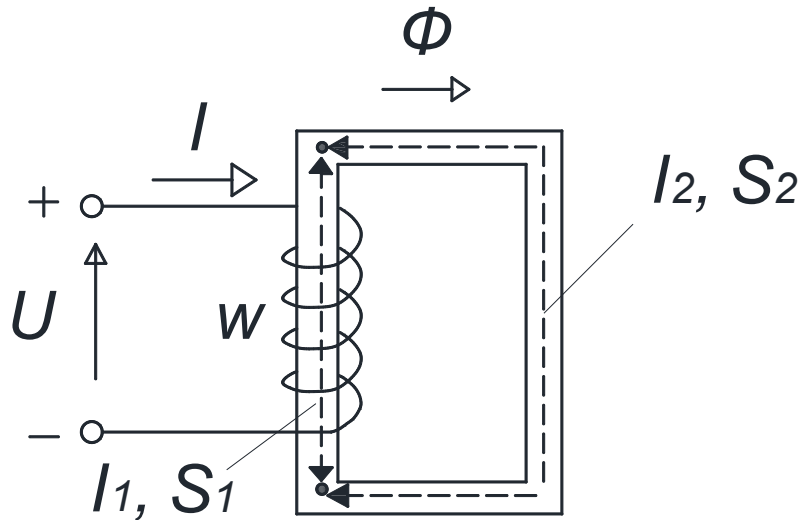


Рисунок 2.6 Конструктивна нерозгалуженого магнітного кола

Запишемо рівняння для магнітного кола (рисунок 3) за законом повного струму для однорідного магнітного поля

$$wI = H_1 l_1 + H_2 l_2, \quad (2.10)$$

де  $H_1$  і  $H_2$  – відповідно напруженості магнітного поля на першій і другій ділянках,  $A/m$ ;  $l_1$  і  $l_2$  – відповідно довжини першої і другої ділянок,  $m$ .

Підставимо в рівняння (2.10) напруженість магнітного поля, яка є відношенням магнітної індукції до магнітної проникності середовища. В результаті одержимо

$$wI = H_1 l_1 + H_2 l_2 \quad (2.11)$$

де  $B_1$  і  $B_2$  – відповідно магнітні індукції на першій і другій ділянках,  $Tл$ ;  $\mu_{c1}$  і  $\mu_{c2}$  – відповідно магнітні проникності першої і другої ділянок,  $Гн/м$ .

Запишемо магнітні індукції ділянок кола в рівнянні (2.11) через магнітний потік і перетин ділянок кола

$$wI = \Phi \frac{l_1}{\mu_{c1} S_1} + \Phi \frac{l_2}{\mu_{c2} S_2} \quad (2.12)$$

Введемо поняття **магнітного опору** ділянки магнітного кола

$$R_M = \frac{l}{\mu_c S},$$

де  $l$  – довжина ділянки,  $m$ ;  $S$  – площа поперечного перерізу ділянки,  $m^2$ ;  $\mu_c$  – магнітна проникність ділянки магнітопроводу,  $Гн/м$ .

Перепишемо вираз (2.12) з урахуванням (2.13) у наступному вигляді

$$wI = R_{M1}\Phi + R_{M2}\Phi . \quad (2.14)$$

Введемо поняття **магнітної напруги** на ділянці магнітного кола

$$U_M = R_M \cdot \Phi . \quad (2.15)$$

Введемо поняття **намагнічуючої (магніторушійної) сили (МРС)**, під яким будемо розуміти добуток кількості витків обмотки на силу струму в ній

$$F = w \cdot I . \quad (2.16)$$

Перепишемо вираз (2.14) з урахуванням (2.15) і (2.16). В результаті одержимо наступне

$$F = U_{M1} + U_{M2} . \quad (2.17)$$

Таким чином, між електричними і магнітними колами існує наступна формальна аналогія (таблиця 2.1).

Таблиця 2.1

Аналогія між фізичними величинами електричного і магнітного поля

Електричні величини	Магнітні величини
$E$ – електрорушійна сила	$F$ – магніторушійна сила
$R$ – опір електричному струму	$R_M$ – опір магнітному потоку
$I$ – сила електричного струму	$\Phi$ – магнітний потік
$U$ – напруга на ділянці кола	$U_M$ – магнітна напруга на ділянці кола

### Список літератури

[1: с.169-170]; [2: с.418-421]; [3: с. 35-41]; [4: с.346-352].

## ЛЕКЦІЯ 3

План лекції

3.1. Закони магнітних кіл

3.2. Розрахунок нерозгалужених магнітних кіл.

3.3. Розрахунок розгалужених магнітних кіл.

3.4. Електромагніти та їх розрахунок.

### 3.1. Розрахункова схема магнітного кола

За аналогією з розрахунковими схемами електричного кола складаються розрахункові схеми магнітного кола. Наприклад, для магнітного кола, приведенного на рисунку 2.6, розрахункова схема має вигляд, представлений на рисунку 3.1

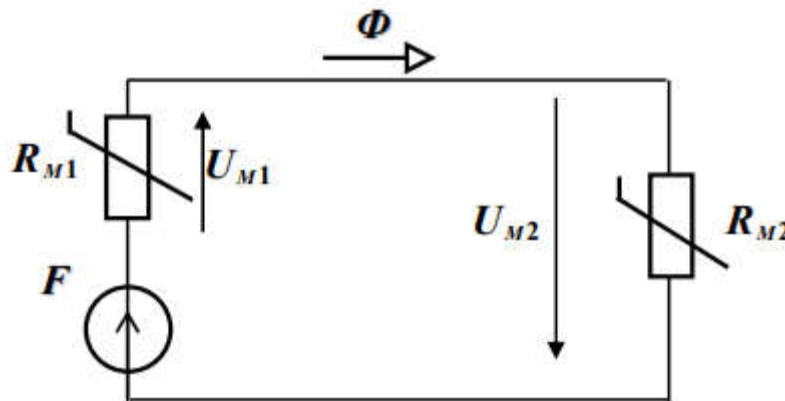


Рисунок 3.1 Розрахункова схема магнітного кола

На даній розрахунковій схемі позначені наступні величини:  $F$  – намагнічуюча сила або магніторухійна сила (МРС),  $A$ ;  $R_{M1}$ ,  $R_{M2}$  – магнітні опори ділянок кола,  $1/Гн$ ;  $U_{M1}$ ,  $U_{M2}$  – магнітні напруги на ділянках кола,  $A$ ;  $\Phi$  – магнітний потік,  $Вб$ .

### 3.2. Закони магнітних кіл

**Закон Ома для ділянки магнітного кола без джерела МРС** формулюється так: магнітний потік прямо пропорційний магнітній напрузі на

ділянці кола і зворотно пропорційний магнітному опорю ділянки кола.

**Математичний запис** закону

$$\Phi = \frac{U_M}{R_M}, \quad (3.1)$$

де  $\Phi$  – магнітний потік на ділянці кола,  $B\delta$ ;  $U_M$  – магнітна напруга на ділянці кола,  $A$ ;  $R_M$  – магнітний опір ділянки кола,  $1/\Gamma_H$ .

За аналогією з електричним колом запишемо рівняння за законами Ома для магнітного кола (рисунок 3.1). Наприклад, для ділянки нерозгалуженого магнітного кола з магнітним опором  $R_{M1}$  даний вираз буде виглядати так

$$\Phi_1 = \frac{U_{M1}}{R_{M1}}, \quad (3.2)$$

**Закон Ома для замкненого магнітного кола з джерелом МРС** формулюється так: магнітний потік дорівнює відношенню магніторушійної сили до суми магнітних опорів кола.

**Математичний запис** даного закону

$$\Phi = \frac{F}{\Sigma \cdot R_M}, \quad (3.3)$$

де  $\Phi$  – магнітний потік на ділянці кола,  $B\delta$ ;  $F$  – магніторушійна сила,  $A$ ;  $\Sigma R_M$  – сума магнітних опорів кола,  $1/\Gamma_H$ .

Наприклад, для замкненого магнітного кола з однією МРС і двома ділянками з різним магнітним опором (рисунок 3.1) даний вираз буде виглядати так

$$\Phi = \frac{F}{\Sigma \cdot R_{M1} + \Sigma \cdot R_{M2}}. \quad (3.4)$$

**Узагальнений закон Ома для магнітного кола** виглядає так

$$\Phi = \frac{U_M + \Sigma F}{\Sigma \cdot R_M}, \quad (3.5)$$

де  $U_M$  – магнітна напруга на затисках кола,  $A$ ,  $\Sigma F$  – алгебраїчна сума МРС у замкненому контурі кола,  $A$ . Розглянемо розгалужене магнітне коло (рисунок 3.2).

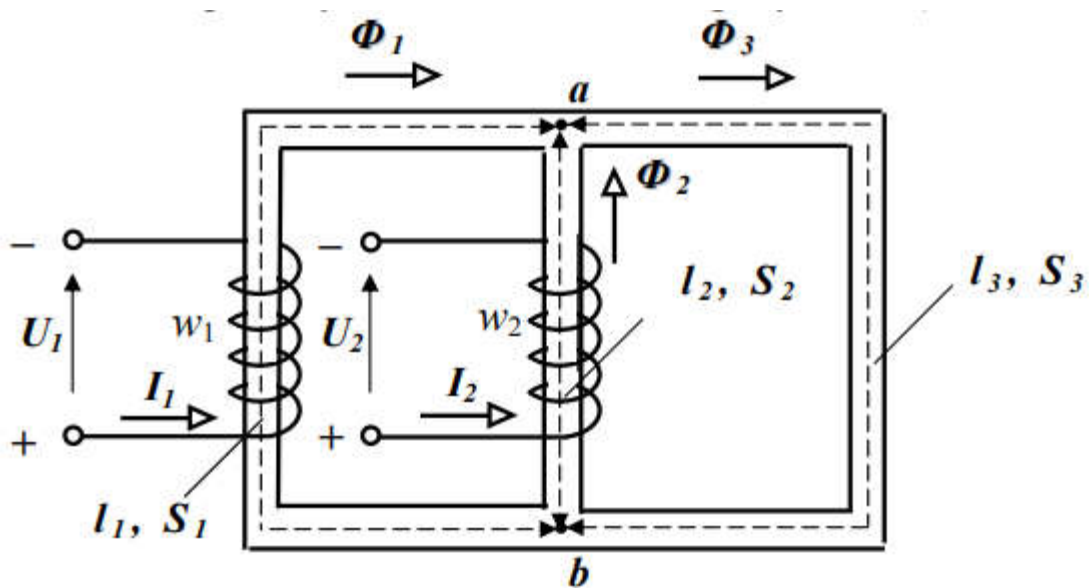


Рисунок 3.2 – Конструктивна схема розгалуженого магнітного кола

Складемо розрахункову схему даного розгалуженого магнітного кола (рисунок 3.3).

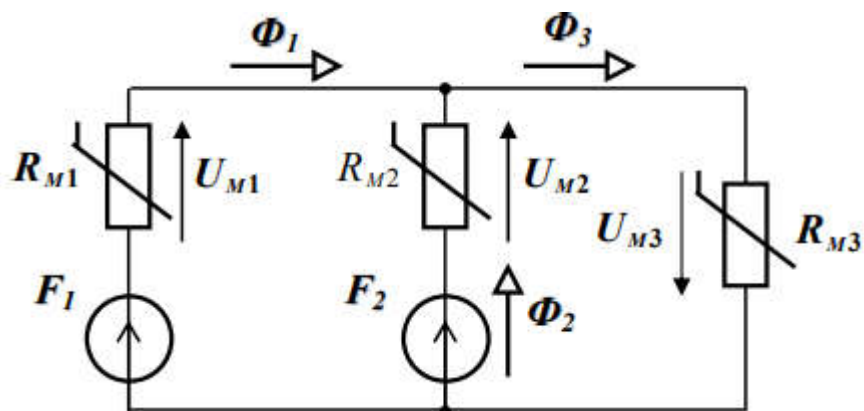


Рисунок 3.3 Розрахункова схему розгалуженого магнітного кола

**Перший закон Кірхгофа** для розгалуженого магнітного кола формулюється так: алгебраїчна сума магнітних потоків у вузлі кола дорівнює нулю. При цьому магнітні потоки, що входять у вузол, записуються зі знаком «плюс», а магнітні потоки, що виходять з вузла, записуються зі знаком «мінус».

**Математичний запис** першого закону Кірхгофа:

$$\sum_{i=1}^n \Phi_i = 0. \quad (3.6)$$

Наприклад, для вузла  $a$  розгалуженого магнітного кола (рисунок 3.3), даний вираз буде виглядати так

$$\Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_3 = 0. \quad (3.7)$$

**Другий закон Кірхгофа** для замкненого контуру магнітного кола формулюється так: алгебраїчна сума магніторушійних сил у контурі дорівнює алгебраїчній сумі добутків магнітних опорів (які входять у контур) на магнітний потік (який протікає в даних опорах).

**Математичний запис** другого закону Кірхгофа:

$$\sum_{i=1}^n F_i = \sum_{i=1}^n R_{Mi} \Phi_i. \quad (3.8)$$

Наприклад, для замкненого контуру розгалуженого магнітного кола (рисунок 3.3) з магнітними опорами  $R_{M1}$ ,  $R_{M2}$  та джерелами магніторушійних сил  $F_1$ ,  $F_2$ , даний вираз буде виглядати так:

$$F_1 - F_2 = R_{M1} \Phi_1 - R_{M2} \Phi_2. \quad (3.9)$$

### 3.3. Розрахунок нерозгалужених магнітних кіл

Нехай для П-подібного магнітопроводу електромагніта задані геометричні розміри, крива намагнічування та значення магнітного потоку (рисунок 3.4).

Необхідно визначити намагнічуючий струм, якщо відомо кількість витків  $w$  котушки.

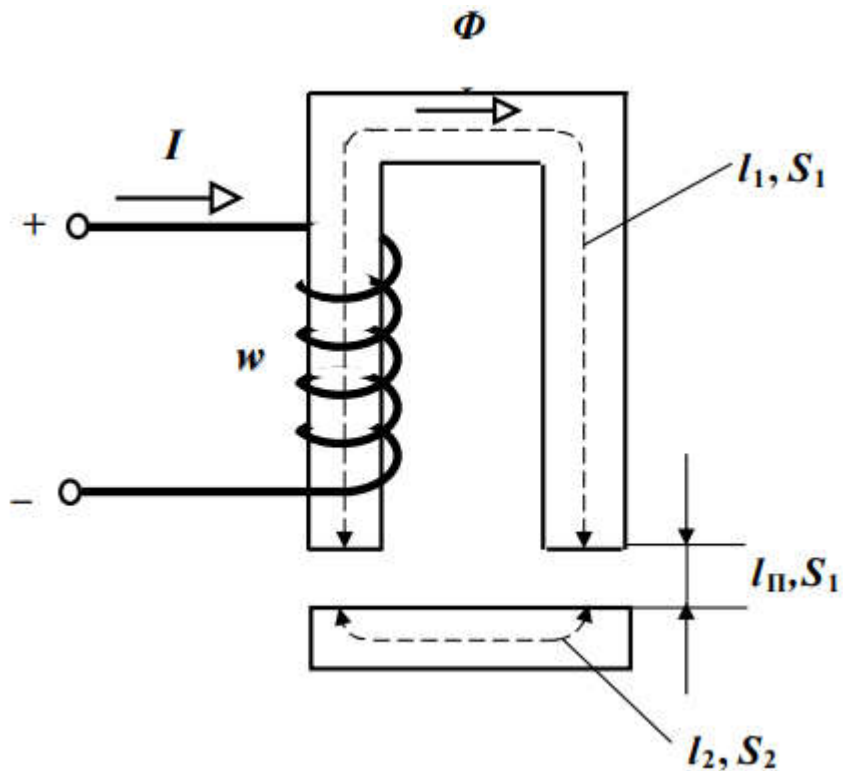


Рисунок 3.4 Конструктивна схема П-подібного магнітопроводу

Порядок розрахунку:

1. Позначаємо середню магнітну лінію та знаходимо довжину її окремих ділянок  $l_1, 2l_{\Pi}, l_2$ .

2. Складаємо еквівалентну розрахункову схему магнітного кола (рисунок 3.5).

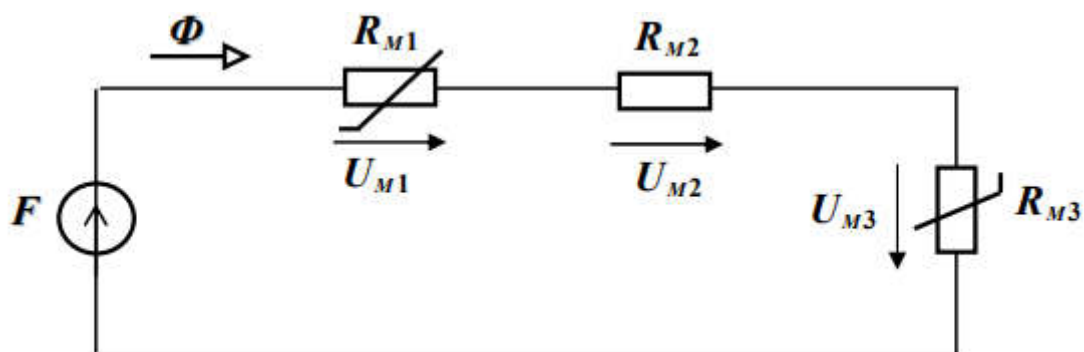


Рисунок 3.5 Розрахункова схема П-подібного магнітопроводу

3. Запишемо рівняння за другим законом Кірхгофа

$$F = R_{M1} \Phi + R_{M\Pi} \Phi + R_{M2} \Phi = H_1 l_1 + 2H_{\Pi} l_{\Pi} + H_2 l_2 = w I,$$

звідки

$$I = \frac{H_1 l_1 + 2H_{\Pi} l_{\Pi} + H_2 l_2}{w}$$

4. Будуємо криву намагнічування  $B = f(H)$  П-подібного магнітопроводу (рисунок 3.6)

5. Визначаємо магнітні індукції  $B_1$  та  $B_2$  на окремих ділянках кола

$$B_1 = \frac{\Phi}{S_1}; \quad B_2 = \frac{\Phi}{S_2};$$

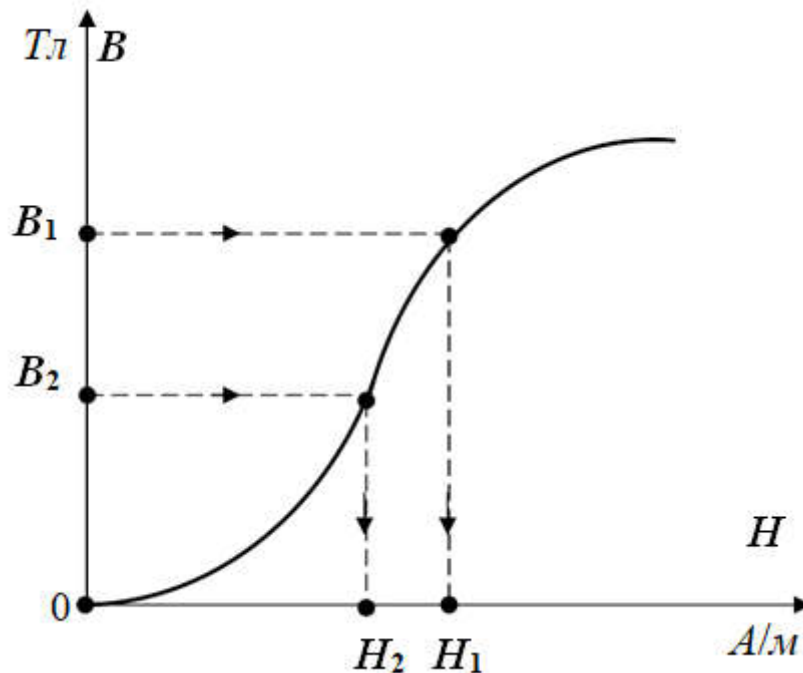


Рисунок 3.6 Крива намагнічування П-подібного магнітопроводу

6. За допомогою кривої намагнічування визначаємо напруженості магнітного поля  $H_1$  та  $H_2$  на окремих ділянках кола.

7. Визначаємо напруженість поля в повітряному прошарку

$$H_{\Pi} = \frac{B_{\Pi}}{\mu_{\Pi}}; \quad \mu_{\Pi} \approx \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}.$$

Підставляємо знайдені значення напруженостей  $H_1$ ,  $H_2$  та  $H_{\Pi}$  і визначаємо намагнічуючий струм  $I$ .

Нехай тепер задані значення намагнічуючої сили, геометричні розміри магнітопроводу, крива намагнічування. Необхідно визначити магнітний потік  $\Phi$ .

*Порядок розрахунку:*

1. Задаємося кількома значеннями магнітного потоку і визначаємо, як і в попередньому випадку, відповідні значення намагнічуючої сили за формулою

$$F = H_1 l_1 + 2H_{II} l_{II} + H_2 l_2 .$$

2. Будуємо залежність  $\Phi = f(F)$  (рисунок 3.7).

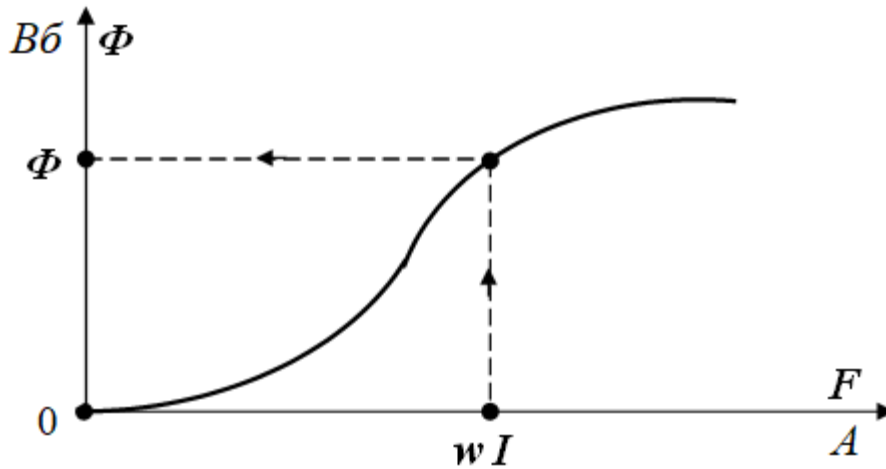


Рисунок 3.7 Графік залежності магнітного потоку від намагнічуючої сили (МРС)

3. Відклавши значення заданої намагнічуючої сили, за допомогою кривої  $\Phi = f(F)$  визначаємо відповідне значення магнітного потоку  $\Phi$ .

### 3.4. Розрахунок розгалужених магнітних кіл

Розрахунок розгалужених магнітних кіл ґрунтуються на застосуванні законів Кірхгофа і Ома для магнітного кола.

Для заданого магнітного кола (рисунок 1) відомі: геометричні розміри магнітопроводу  $l_1, S_1, l_2, S_2, l'_3, S_3$  та  $l''_3, S_3$ , крива намагнічування магнітопроводу з феромагнітного матеріалу  $B=f(H)$ , магнітний потік  $\Phi_3$ . Необхідно знайти намагнічуючу силу  $F$ .

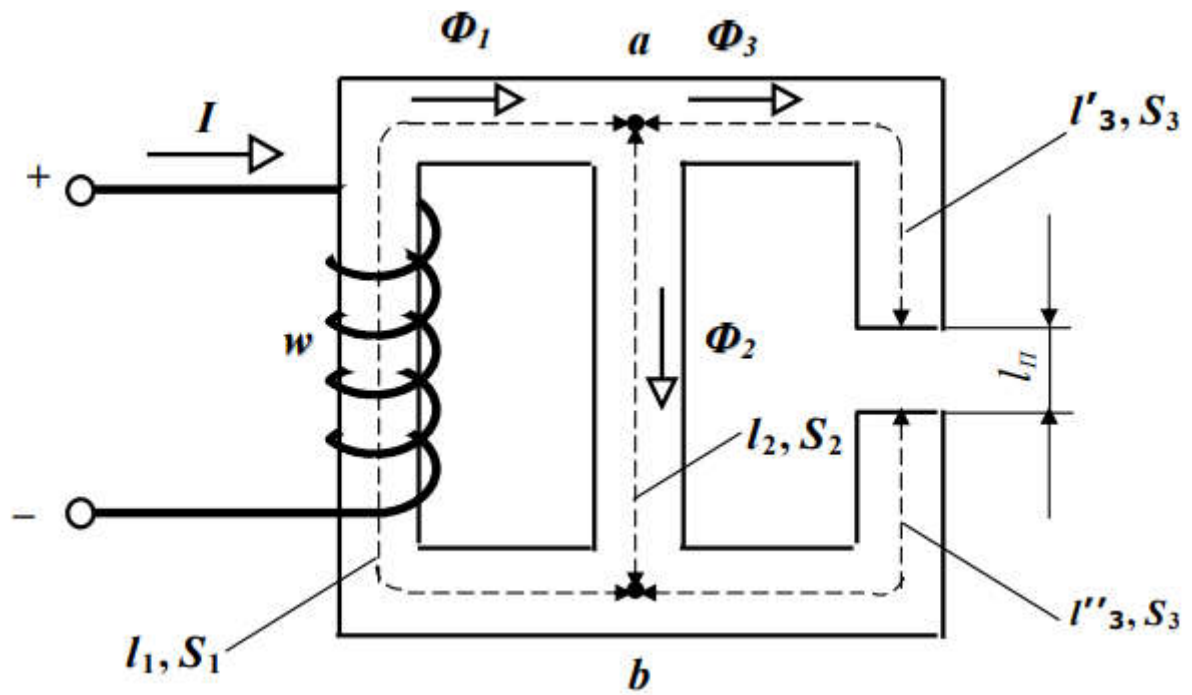


Рисунок 3.8 Конструктивна схема заданого розгалуженого магнітного кола

Порядок розрахунку:

1. Складаємо еквівалентну розрахункову схему магнітного кола (рисунок 3.8) і вибираємо умовно позитивні напрями магнітних потоків (рисунок 3.9).

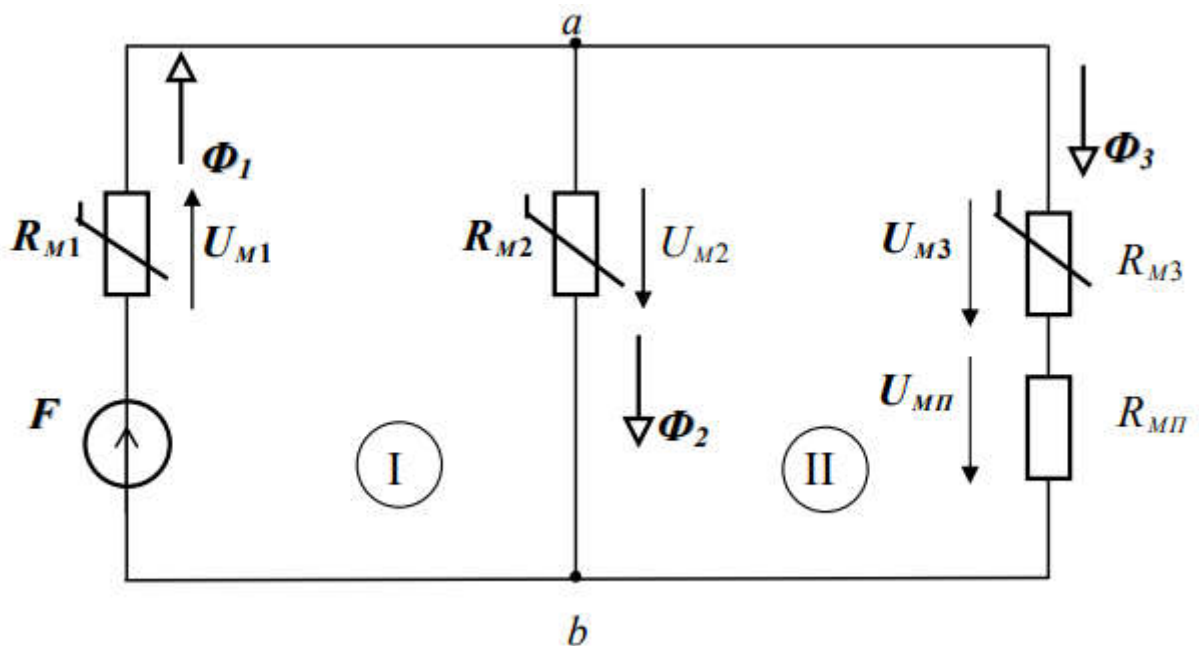


Рисунок 3.9 Розрахункова схема розгалуженого магнітного кола

2. Для визначення намагнічуючої сили запишемо рівняння за другим законом Кірхгофа для першого контуру (I)

$$F = R_{M1} \Phi_1 + R_{M2} \Phi_2 \quad (3.10)$$

або за законом повного струму

$$F = H_1 l_1 + U_{M.ab}. \quad (3.11)$$

Таким чином, задача зводиться до визначення  $H_1$  та  $U_{M.ab}$ .

3. Магнітна напруга на ділянці  $ab$  для другого контуру (II)

$$U_{M.ab} = R_{M3} \Phi_3 + R_{M\Pi} \Phi_3 \quad (3.12)$$

або

$$U_{M.ab} = H_3 l_3 + H_{\Pi} l_{\Pi}, \quad (3.13)$$

де  $l_3$  – довжина середньої лінії на третій ділянці  $l_3 = l'_3 + l''_3$ .

Знаючи  $\Phi_3$ , визначаємо  $B_3 = \frac{\Phi_3}{S_3}$ , а потім за допомогою кривої намагнічування знаходимо  $H_3$ . Оскільки  $H_{\Pi} = \frac{B_3}{\mu_0}$ , то підставивши значення, знаходимо  $U_{M.ab}$ .

4. Напруженість  $H_1$  знаходимо за допомогою кривої намагнічування, визначивши спочатку магнітну індукцію  $B_1 = \frac{\Phi_1}{S_1}$ . Магнітний потік  $\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$ . При цьому  $\Phi_2 = B_2 S_2$ . Для визначення магнітної індукції  $B_2$  спочатку знаходимо напруженість магнітного поля на ділянці  $l_2$ , скориставшись законом Ома

$$U_{M.ab} = R_{M2} \Phi_2 = H_2 l_2. \quad (3.14)$$

звідки

$$H_2 = \frac{U_{M.ab}}{l_2}. \quad (3.15)$$

За допомогою кривої намагнічування знаходимо магнітну індукцію  $B_2$  та розраховуємо магнітний потік  $\Phi_2$ . Після чого визначаємо магнітну індукцію  $B_1$  за формулою  $B_1 = \frac{\Phi_1}{S_1}$  та напруженість  $H_1$  за допомогою кривої намагнічування.

5. За знайденими значеннями розраховуємо намагнічуючу силу  $F$  за формулою (2.16).

Нехай тепер задані всі геометричні розміри магнітопроводу, крива намагнічування і намагнічуюча сила. Необхідно знайти всі магнітні потоки в розгалуженнях кола.

Порядок розрахунку:

1. Складаємо розрахункову схему кола і вибираємо умовно позитивні напрями магнітних потоків.

2. Для вузла  $a$  записуємо рівняння за першим законом Кірхгофа

$$\Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 = 0 \text{ або } \Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3 . \quad (3.16)$$

3. Оскільки коло нелінійне, задачу вирішуємо графоаналітичним методом. Для цього спочатку будуємо допоміжні характеристики

$$I = f(U_{M.ab}); \Phi_2 = f'(U_{M.ab}); \Phi_3 = f''(U_{M.ab}).$$

Для першого розгалуження за законом Ома можемо записати

$$\Phi_1 = \frac{(\varphi_{M.a} - \varphi_{M.b}) + F}{R_{M1}} = \frac{-U_{M.ab} + F}{R_{M1}}, \quad (3.17)$$

звідки

$$U_{M.ab} = F - R_{M1} \Phi_1 \quad (3.18)$$

або

$$U_{M.ab} = F - H_1 l_1. \quad (3.19)$$

Щоб побудувати допоміжну характеристику  $\Phi_1 = f(U_{M.ab})$ , задаємося кількома значеннями магнітної індукції  $B_1$ , визначаємо за допомогою кривої намагнічування напруженість магнітного поля  $H_1$ , потім магнітну напругу  $U_{M.ab}$  та відповідні значення магнітного потоку  $\Phi_1$ .

Для другого розгалуження за законом Ома можемо записати

$$\Phi_2 = \frac{\varphi_{M.a} - \varphi_{M.b}}{R_{M2}} = \frac{U_{M.ab}}{R_{M2}}, \quad (3.20)$$

звідки

$$U_{M.ab} = R_{M2} \Phi_2 \quad (3.21)$$

або

$$U_{M.ab} = H_2 l_2. \quad (3.22)$$

Щоб побудувати допоміжну характеристику  $\Phi_2 = f'(U_{M.ab})$ , задаємося кількома значеннями магнітної індукції  $B_2$ , визначаємо за допомогою кривої намагнічування напруженість магнітного поля  $H_2$ , потім магнітну напругу  $U_{M.ab}$  та відповідні значення магнітного потоку  $\Phi_2$ .

Для третього розгалуження за законом Ома можемо записати

$$\Phi_3 = \frac{\varphi_{M.a} - \varphi_{M.b}}{R_{M2} + R_{M.П}} = \frac{U_{M.ab}}{R_{M3} + R_{M.П}}, \quad (3.23)$$

звідки

$$U_{M.ab} = R_{M3} \Phi_3 + R_{M.П} \Phi_3. \quad (3.24)$$

або

$$U_{M.ab} = H_1 l_1 + H_{П} l_{П}. \quad (3.25)$$

Щоб побудувати допоміжну характеристику  $\Phi_3 = f''(U_{M.ab})$ , задаємося кількома значеннями магнітної індукції  $B_3$ , визначаємо за допомогою кривої намагнічування напруженість магнітного поля  $H_3$ , потім магнітну напругу  $U_{M.ab}$  та відповідні значення магнітного потоку  $\Phi_3$ .

Всі отримані залежності  $\Phi_1 = f(U_{M.ab})$ ,  $\Phi_2 = f'(U_{M.ab})$ ,  $\Phi_3 = f''(U_{M.ab})$ ,  $\Phi_2 + \Phi_3 = f'''(U_{M.ab})$  наносимо на одну площину (рисунку 3.10).

За першим законом Кірхгофа  $\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$ . Тому будуємо допоміжну характеристику  $\Phi_2 + \Phi_3 = f'''(U_{M.ab})$ . Точка перетинання «а» кривих  $\Phi_1 = f(U_{M.ab})$  та  $\Phi_2 + \Phi_3 = f'''(U_{M.ab})$  визначає магнітну напругу  $U_{M.ab}$ . Проводимо через точку перетинання  $a$  пряму, паралельну вісі магнітного потоку  $\Phi$ . Потім визначаємо магнітні потоки  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$ .

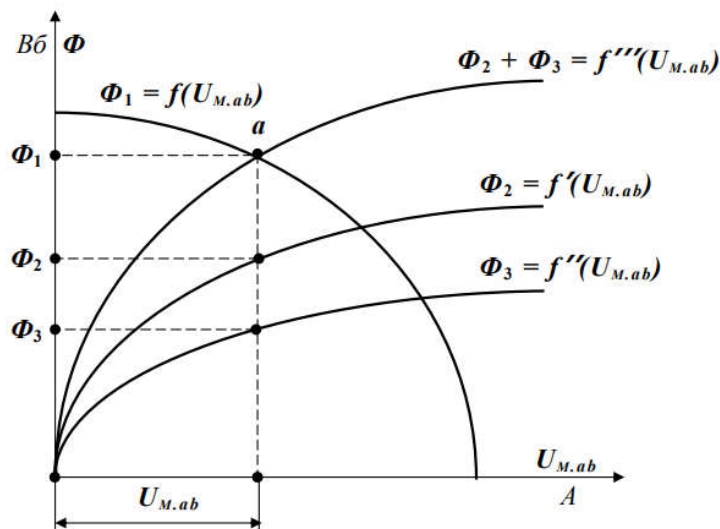


Рисунок 3.10 Побудова залежностей  $\Phi_1 = f(U_{M.ab})$ ,  $\Phi_2 = f'(U_{M.ab})$ ,  $\Phi_3 = f''(U_{M.ab})$ ,  $\Phi_2 + \Phi_3 = f'''(U_{M.ab})$  і визначення магнітних потоків

### 3.5. Електромагніти та їх розрахунок

Електромагніти широко застосовуються в техніці. Вони служать для створення магнітного поля в електрогенераторах, електродвигунах, трансформаторах, електровимірювальних приладах, електричних апаратах, а також для створення стискальних зусиль.

Електромагніт, призначений для стискальних зусиль, складається з нерухомого осердя (магнітопроводу), рухливого якоря (магнітопроводу) та котушок збудження (виконаних із провідників). Котушки розташовані на осерді, а осердя відділене від якоря повітряним зазором (рисунок 3.11).

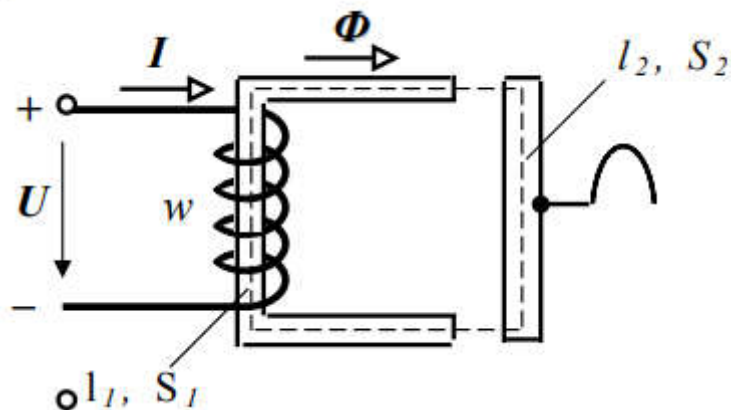


Рисунок 3.11 Конструктивна схема електромагніту, призначеного для стискальних зусиль

Піднімальна сила електромагніта визначається за формулою

$$F_{EMM} = \frac{B^2 \cdot S}{2\mu_0}, \quad (3.26)$$

де  $F_{EMM}$  – піднімальна сила електромагніта,  $H$ ;  $S$  – загальна площа поперечного перерізу полюсів електромагніта,  $m^2$ ;  $B$  – магнітна індукція,  $Tл$ ;  $\mu_0$  – магнітна постійна,  $Гн/м$ .

### Список літератури

[1: с.170-177]; [2: с.421-429]; [3: с.42-57]; [4: с.330-364].

## ТЕМА 4 НЕЛІНІЙНІ КОЛА ЗМІННОГО СТРУМУ

План лекції

- 4.1. Загальні положення.
- 4.2. Нелінійна індуктивність.
- 4.3. Ідеальна котушка з феромагнітним осереддям у колі змінного струму.

### 4.1. Загальні положення

Для лінійних кіл змінного струму залежності (рисунок 4.1) між

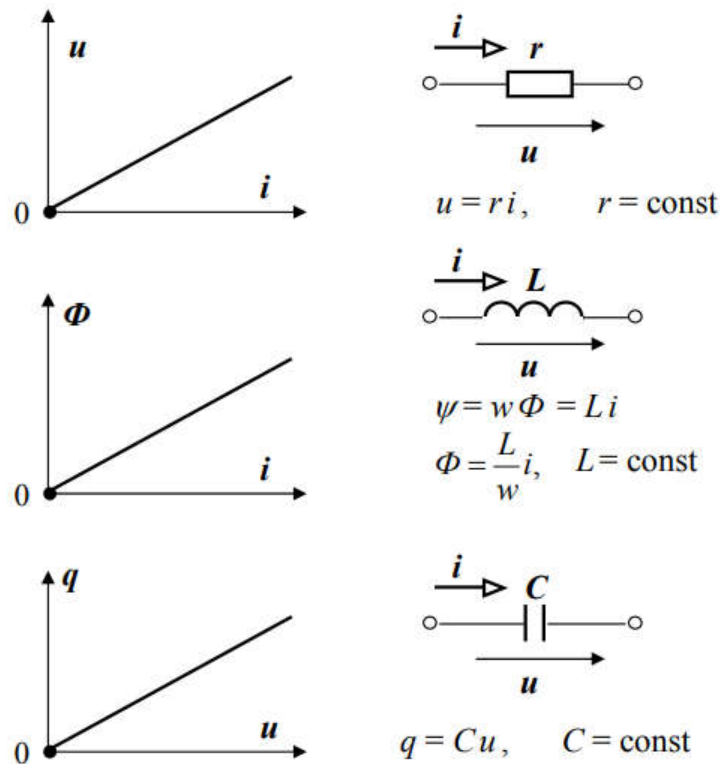


Рисунок 4.1 Графіки лінійних елементів і залежності між параметрами і величинами

напругою і струмом в активному опорі  $u(i)$ , між магнітним потоком і струмом в індуктивності  $\Phi(i)$ , між зарядом і напругою в ємності  $q(u)$  мають лінійний характер.

Для нелінійних кіл – нелінійний характер, наприклад, на рисунку 4.2.

Вебер-амперна характеристика нелінійного елементу.

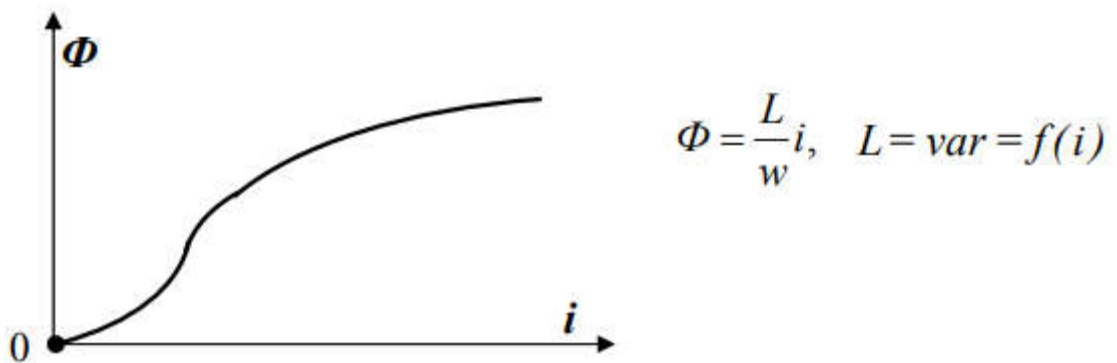


Рисунок 4.2 Вебер-амперна характеристика нелінійного елементу

#### 4.2. Нелінійна індуктивність

Розглянемо котушку з феромагнітним осердям, включену в коло постійного струму (рисунок 4.3).

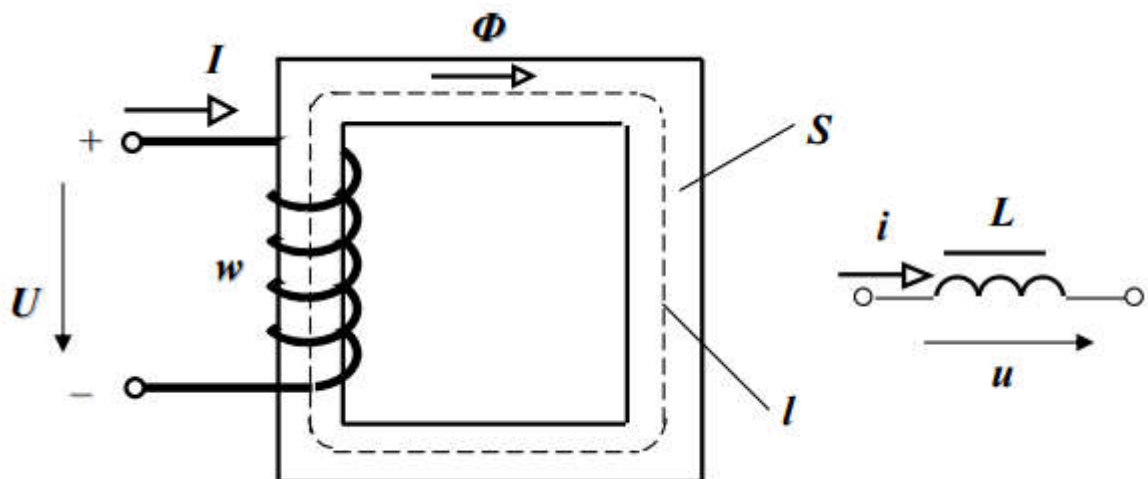


Рисунок 4.3 Конструктивна схема та умовно графічне і літерне позначення котушки з феромагнітним осердям колі постійної ЕРС

При цьому будемо вважати, що магнітний потік, який замикається частково по повітрю (потік розсіювання), дорівнює нулю.

Запишемо основні співвідношення, одержані раніше:

$$\Phi = \frac{F}{R_M} = \frac{wi}{R_M}; \quad R_M = \frac{l}{\mu\mu_0 S}; \quad \psi = w\Phi = Li;$$

$$L = \frac{w\Phi}{i} = \frac{w^2}{R_M} = \frac{w^2\mu\mu_0S}{l}. \quad (4.1)$$

Знайдемо залежність  $\Phi(I)$ . Відомо, що  $B = \frac{\Phi}{S}$ ,  $H = \frac{wI}{l}$ . Оскільки  $S$ ,  $w$ ,  $l$  – величини постійні, то залежність  $\Phi(I)$  аналогічна залежності  $B(H)$ , тобто повторює криву намагнічування (рисунок 4.4).

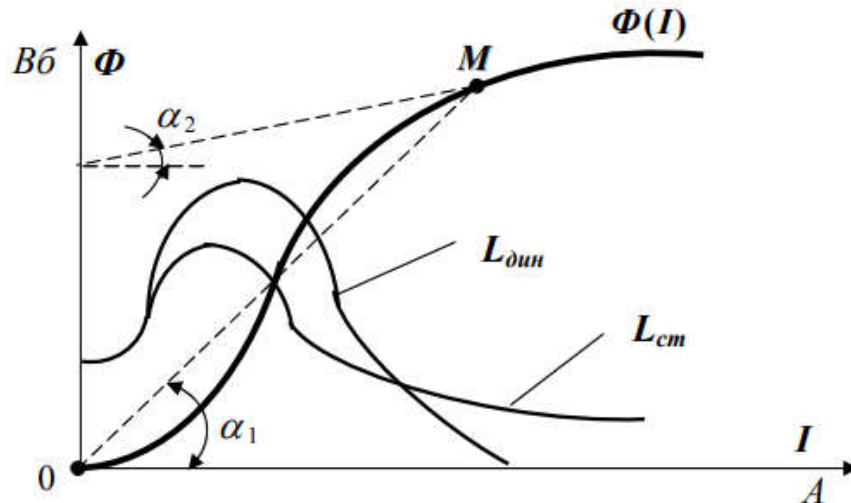


Рисунок 4.4 Залежності магнітного потоку та статичної і динамічної індуктивностей від струму

Індуктивність котушки, як видно з формули, залежить тільки від змінної частини  $\mu\mu_0 = \frac{B}{H}$ . Якщо струм збільшувати, то збільшиться напруженість магнітного поля, а відповідно і магнітна індукція  $B$ . Але магнітна індукція на нелінійній частині характеристики збільшується не пропорційно напруженості. Так, в області, близької до насичення, магнітна індукція збільшується менше в порівнянні зі збільшенням напруженості, а це значить, що зменшується й індуктивність  $L$ .

Кожній точці характеристики  $\Phi(I)$  відповідає певне значення статичної індуктивності

$$L_{ст} = w \frac{\Phi}{I} = m_L \operatorname{tg} \alpha_1 \quad (4.2)$$

і динамічної індуктивності

$$L_{дин} = w \frac{d\Phi}{dI} = m_L \operatorname{tg} \alpha_2 \quad (4.3)$$

де  $m_L$  – масштаб індуктивності, Гн/см.

### 4.3. Ідеальна котушка з феромагнітним осердям у колі змінного струму

Підключимо ідеальну котушку з феромагнітним осердям до джерела змінного синусоїдного струму. При цьому будемо вважати, що ідеальна котушка з феромагнітним осердям не має петлі гістерезиса, активний опір її дорівнює нулю, магнітний потік розсіювання відсутній (рисунок 4.5).

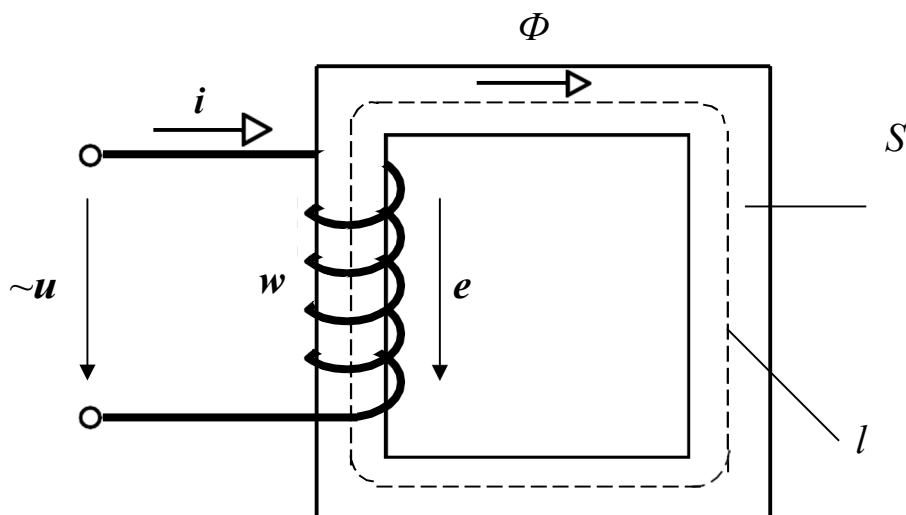


Рисунок 4.5 Конструктивна схема котушки з феромагнітним осердям в колі синусоїдної напруги

Запишемо основні співвідношення для цього випадку

$$\Phi = \frac{F}{R_M} = \frac{wi}{R_M}; \quad R_M = \frac{l}{\mu\mu_0 S}; \quad \psi = w\Phi = Li;$$

$$L = \frac{w\Phi}{i} = \frac{w^2}{R_M} = \frac{w^2 \mu\mu_0 S}{l}. \quad (4.4)$$

Залежність  $\Phi(i)$  для котушки з феромагнітним осердям така ж, як і  $\Phi(I)$  (рисунок 4).

Розглянемо форму кривої струму в колі з нелінійною індуктивністю при синусоїдній напрузі джерела. Припустимо, що напруга джерела має початкову фазу  $90^\circ$  і рівняння миттєвого значення

$$u = U_m \sin(\omega t + 90^\circ). \quad (4.5)$$

Зневажаючи активним опором котушки з феромагнітним осердям і магнітним потоком розсіювання, можемо записати:

$$u = -e; \quad e = -w \frac{d\Phi}{dt}; \quad (4.6)$$

$$U_m \sin(\omega t + 90^\circ) = w \frac{d\Phi}{dt}; \quad (4.7)$$

звідки

$$d\Phi = \frac{U_m}{w} \sin(\omega t + 90^\circ) dt,$$

$$\Phi = \frac{U_m}{\omega w} \sin \omega t = \Phi_m \sin \omega t. \quad (4.8)$$

Таким чином, при синусоїдній напрузі магнітний потік також синусоїдний.

Для знаходження кривої струму в котушці з феромагнітним осердям, скористаємося залежностями  $\Phi(t)$  і  $\Phi(i)$  та побудуємо залежність  $i(t)$  графічним способом (рисунок 6).

Отже, крива струму несинусоїдна. Замінімо її еквівалентною синусоїдою (4.6)

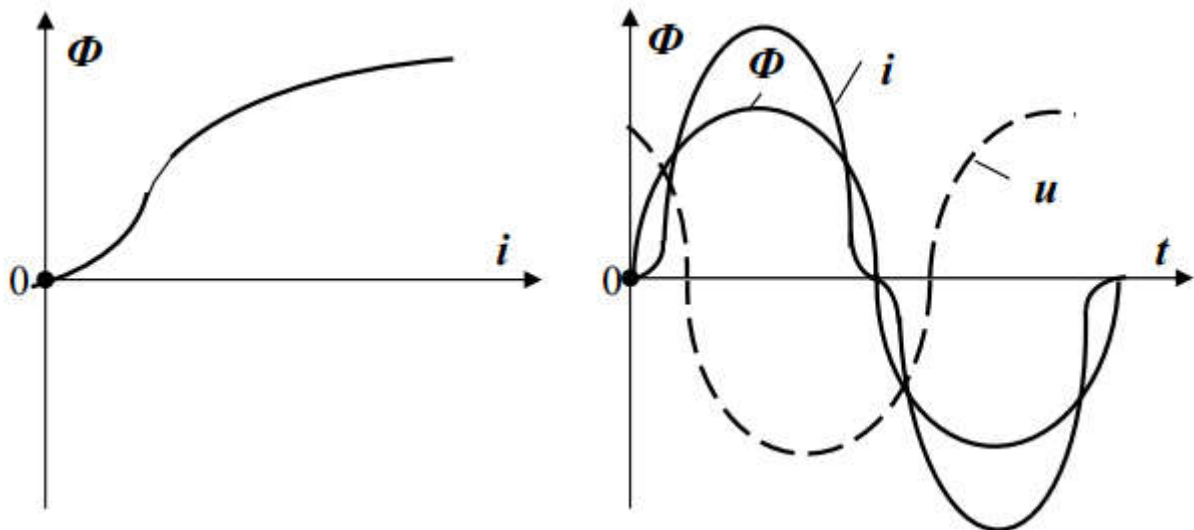


Рисунок 4.6 Графічні залежності  $\Phi(i)$ ,  $i(t)$ ,  $\Phi(t)$ ,  $ui(t)$  в ідеальній котушці з феромагнітним осердям

$$i = I_m \sin \omega t; \quad I_m = \sqrt{2} \cdot I, \quad (4.9)$$

де  $I$  – діюче значення несинусоїдного струму,  $A$ ;

Рівняння миттєвої електрорушійної сили самоіндукції в котушці з феромагнітним осердям

$$e = E_m \sin(\omega t - 90^\circ). \quad (4.10)$$

Запишемо рівняння для ідеальної котушки з феромагнітним осердям

$$\dot{U} = jx\dot{I}_p, \quad (4.11)$$

де  $I_p$  – реактивний (намагнічуючий) струм,  $A$ ;  $x = \omega \cdot L$  – індуктивний опір,  $\Omega$ ,  $L$  – еквівалентна індуктивність,  $H$ .

Потокозчеплення котушки за законом електромагнетизму

$$\psi = w\Phi = LI_p. \quad (4.12)$$

Побудуємо векторну діаграму ідеальної котушки з феромагнітним осердям та складемо її схему заміщення (рисунку 4.7).

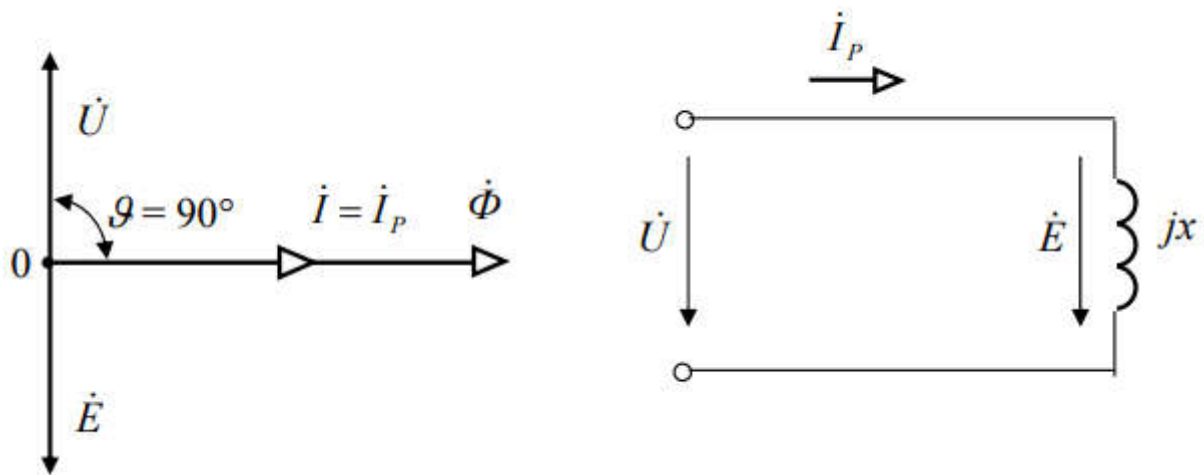


Рисунок 4.7 Векторна діаграма і розрахункова схема ідеальної котушки з феромагнітним осердям

Розглянемо тепер котушку з феромагнітним осердям з урахуванням петлі гістерезиса.

Якщо несинусоїдну криву струму замінити еквівалентною синусоїдою, то можна записати вирази миттєвих: напруги сили струму, магнітного потоку і ЕРС самоіндукції ідеальної котушки з феромагнітним осердям з урахуванням петлі гістерезису

$$u = U_m \sin(\omega t + 90^\circ); \quad (4.13)$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \delta),$$

$$\Phi = \Phi_m \sin \omega t;$$

$$e = E_m \sin(\omega t - 90^\circ).$$

де  $\delta$  – кут втрат у котушці. Визначається за виразом  $\delta = 90^\circ - \varphi$ .

Якщо побудувати криву струму в цьому випадку на базі залежностей  $\Phi(t)$  і  $\Phi(i)$ , яка має форму петлі гістерезиса, то одержимо несинусоїдну форму кривої струму (рисунок 4.8). Крива струму випереджає синусоїду магнітного потоку на кут втрат у котушці  $\delta$ .

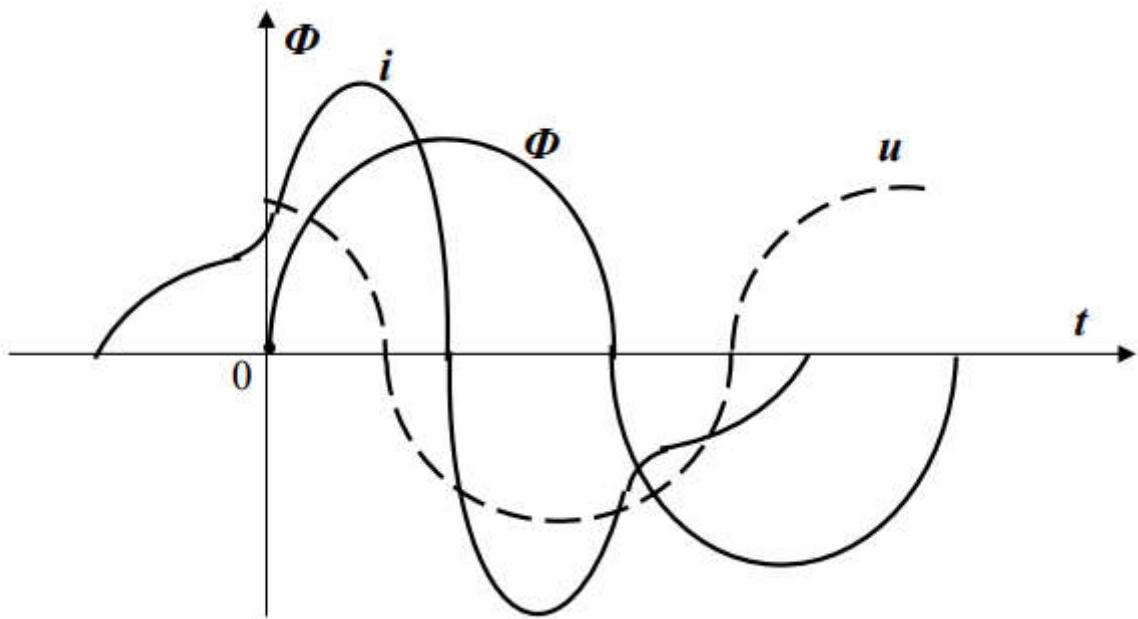


Рисунок 4.8 Залежності  $i(t)$ ,  $\Phi(t)$ ,  $u(t)$  в ідеальній котушці з феромагнітним осердям з урахуванням петлі гістерезису

Побудуємо векторну діаграму напруги і струмів котушки з феромагнітним осердям з урахуванням петлі гістерезису та складемо її схему заміщення для цього випадку (рисунок 4.9).

На схемі  $I_a$  – активна складова струму втрати на вихрові струми і гістерезис),  $I_p$  – реактивна складова струму (основний магнітний потік).

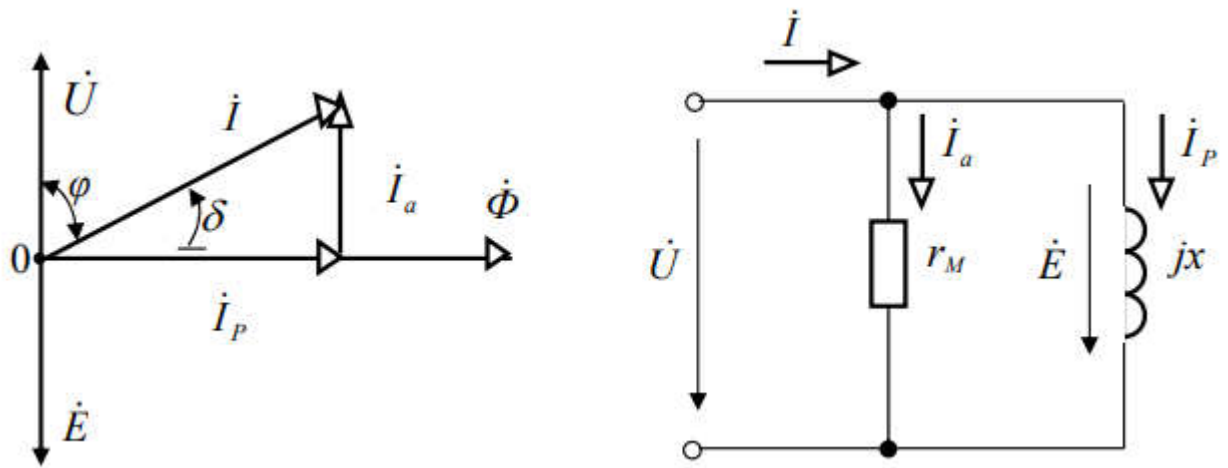


Рисунок 4.9 Векторна діаграма та і розрахункова схема ідеальної котушки з феромагнітним осердям

На схемі (рисунок 9)  $I_a$  – активна складова струму характеризує втрати в магнітопроводі на вихрові струми і гістерезис,  $I_p$  – реактивна складова струму – створює основний магнітний потік.

Поява в схемі активного опору магнітопроводу  $r_m$  (активний опір проводу котушки дорівнює нулю) обумовлена споживанням котушкою з феромагнітним осердям активної потужності, яка втрачається на гістерезис і вихрові струми у магнітопроводі.

#### 4.4. Втрати активної потужності на гістерезис

Активна потужність, яку споживає ідеальна котушка, дорівнює

$$P_r = \frac{1}{T} \int_0^T u \cdot i \cdot dt. \quad (4.14)$$

Якщо вважати, що активний опір котушки дорівнює нулю, то прикладена напруга врівноважується ЕРС самоіндукції  $e$ , тобто

$$u = -e = w \frac{d\Phi}{dt} \quad (4.15)$$

У свою чергу  $\Phi = B \cdot S$ , тоді

$$u = w \cdot S \frac{dB}{dt} \quad (4.16)$$

Струм у котушці знайдемо, використовуючи закон повного струму

$$i = \frac{Hl}{w} \quad (4.17)$$

Тоді втрати потужності на гістерезис

$$P_r = \frac{1}{T} \int_0^T wS \frac{dB}{dt} \cdot \frac{Hl}{w} dt = \frac{Sl}{T} \oint HdB = fV \oint HdB \quad (4.18)$$

$$i = \frac{Hl}{w} \quad (4.19)$$

де  $V$  – об'єм осердя магнітопроводу,  $m^3$ ;  $f$  – частота струму,  $Гц$ .

Якщо розглянути петлю гістерезиса (рисунок 1), то її площа дорівнює  $\oint HdB$ . Таким чином, **втрати активної потужності на гістерезис прямо пропорційні частоті струму, об'єму осердя та площі петлі гістерезиса**. Для зменшення втрат активної потужності на гістерезис треба магнітопроводи виготовлять з феромагнітного матеріалу, що має вузьку петлю гістерезису. Вперше, вивчаючи феромагнітні матеріали і ряд закономірностей їх намагнічування, відкрив петлю гістерезиса О.Г. Столетов.

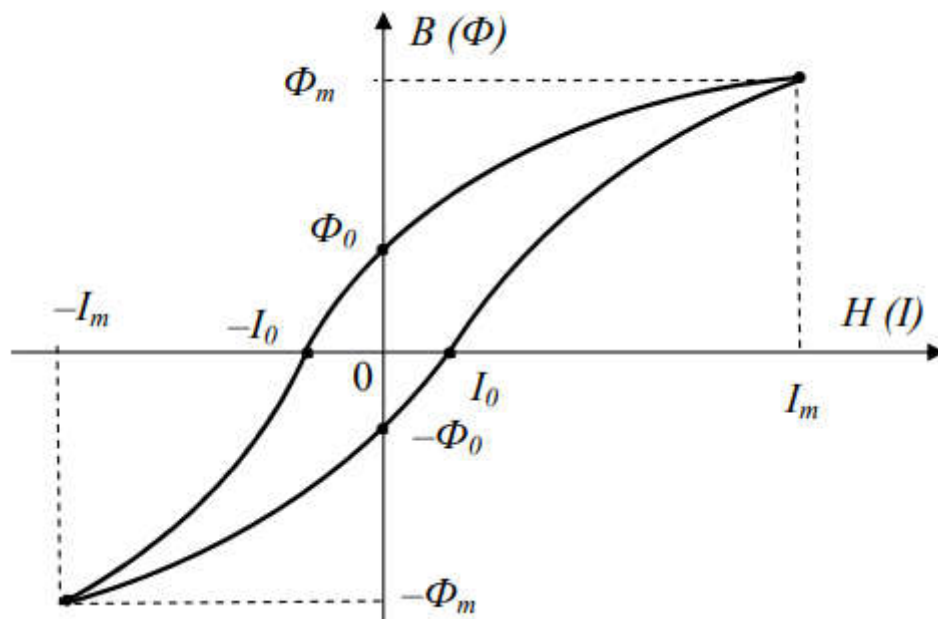


Рисунок 4.10 Петля гістерезису феромагнітних матеріалів

На рисунку 1:  $\Phi_0$  і  $-\Phi_0$  – залишковий магнітний потік у феромагнітному магнітопроводі котушки;  $I_0$  і  $-I_0$  – коерцитивна сила струму (*coercitio* – від *лат. утримування*).

В іншому вигляді можемо записати

$$P_r = r_{Mr} I_a^2, \quad (4.19)$$

де  $r_{Mr}$  – еквівалентний активний опір магнітопроводу, за допомогою якого враховуються втрати активної потужності на гістерезис,  $O_m$ ;  $P_r$  – втрати активної потужності на гістерезис,  $Вт$ .

#### 4.5. Втрати активної потужності на вихрові струми

Змінний струм, який проходить по котушці, створює в магнітопроводі змінний магнітний потік (рисунок 2).

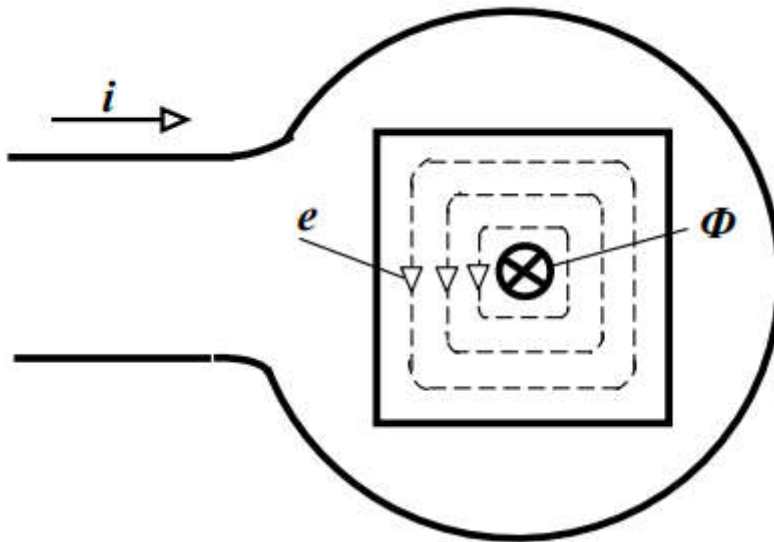


Рисунок 4.11 Напрями ЕРС і магнітного потоку в залежності від напрямку струму в котушці

Останній наводить у осерді електрорушійну силу (ЕРС), під дією якої виникають вихрові струми, які замикаються по симетричних контурах. Ці вихрові струми нагрівають сталеве осердя, тобто в осерді мають місце втрати активної потужності. Крім цього, вихрові струми, які мають напрям, протилежний напрямку струму в проводі котушки, розмагнічують внутрішню частину осердя.

Для зменшення цих негативних явищ осердя складається з окремих ізолюваних одна від іншої пластин (рисунок 3). При цьому опір проходженню вихрових струмів різко зростає, тому ці струми стають

незначними. У цілому втрати активної потужності на вихрові струми прямо пропорційні квадрату частоти струму, товщині окремих листів електротехнічної сталі та магнітній індукції.

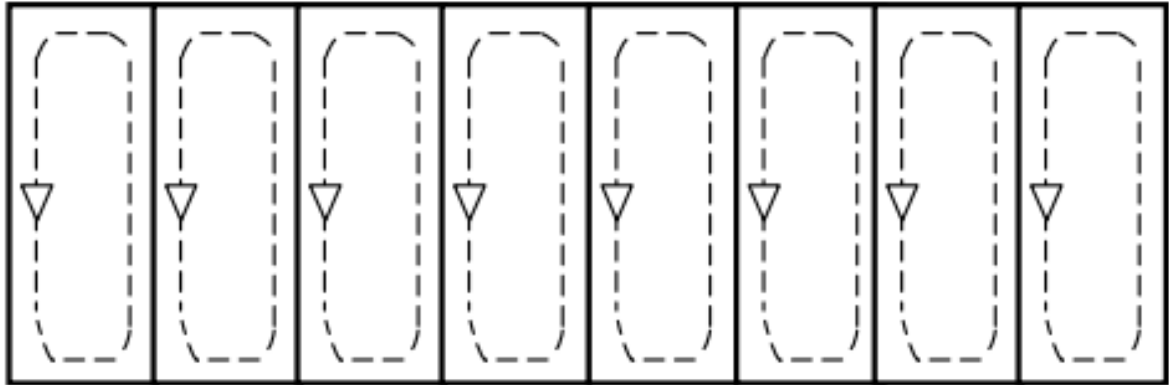


Рисунок 4.12 Напрямок ЕРС у осерді при складанні його з окремих ізольованих одна від іншої пластин

Можемо записати в іншому вигляді

$$P_{\text{в}} = r_{\text{мв}} \cdot I_{\text{а}}^2, \quad (4.20)$$

де  $r_{\text{мв}}$  – еквівалентний активний опір, за допомогою якого враховуються втрати активної потужності в магнітопроводі на вихрові струми, Ом;  $P_{\text{в}}$  – втрати активної потужності в магнітопроводі на вихрові струми, Вт.

В цілому втрати активної потужності в електротехнічній сталі можна визначити

$$P_{\text{с}} = P_{\text{r}} + P_{\text{в}} = (r_{\text{мг}} + r_{\text{мв}}) \cdot I_{\text{а}}^2 = r_{\text{м}} \cdot I_{\text{а}}^2, \quad (4.21)$$

де  $r_{\text{м}}$  – еквівалентний активний опір, який враховує втрати активної потужності в магнітопроводі з сталі, Ом.

#### 4.6. Реальна котушка з феромагнітним осердям у колі змінного струму

Розглянемо фізичні процеси, які виникають у котушці з феромагнітним осердям у колі змінного струму (рисунок 4.13).

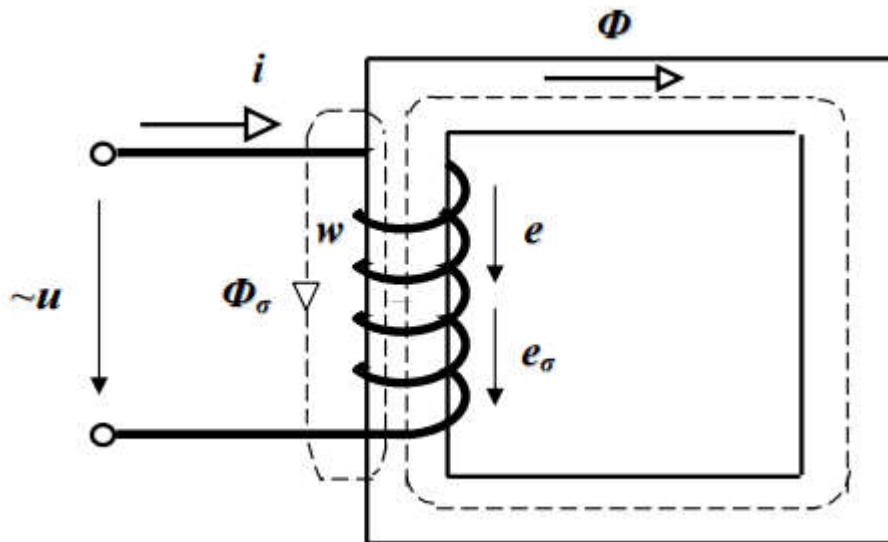


Рисунок 4.13 Фізичні процеси, що виникають у котушці з феромагнітним осердям у колі змінного струму

Під дією синусоїдної напруги в колі котушки буде проходити змінний струм, який створить основний  $\Phi$  і допоміжний потік розсіювання  $\Phi_\sigma$  синусоїдні магнітні потоки, які будуть замикатися відповідно по осерддю і повітря. Під дією цих магнітних потоків у котушці будуть наводитися відповідно ЕРС самоіндукції  $e$  і ЕРС, що створюється допоміжним потоком розсіювання  $e_\sigma$ . Струм, який проходить по котушці, супроводжується виділенням теплоти в обмотці котушки. Основний магнітний потік  $\Phi$  спричинює в магнітопроводі втрати активної потужності на гістерезис і вихрові струми.

Запишемо рівняння рівноваги напруги котушки з феромагнітним осердям

$$u = ri + L_\sigma \frac{di}{dt} - e, \quad (4.22)$$

Відповідно до рівняння (4.22) замінимо реальну котушку еквівалентною їй (рисунок 4.14).

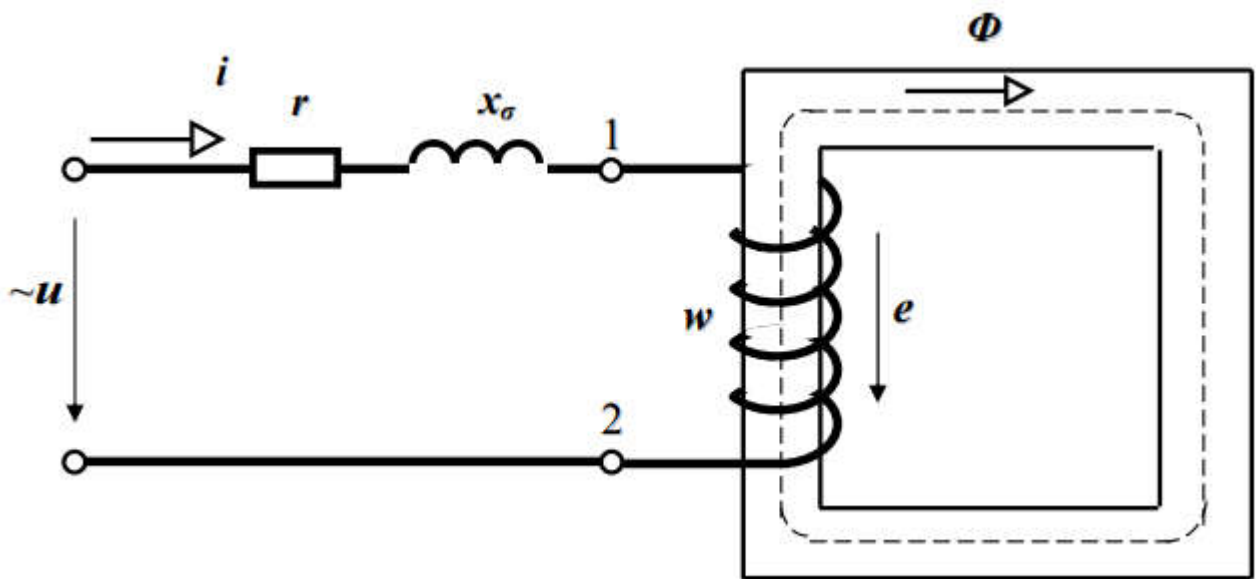


Рисунок 4.14 Еквівалентна схема реальної котушки з феромагнітним осердям

Вона буде складатися з ідеальної котушки з урахуванням петлі гістерезисну і послідовно з'єднаних з нею опорам  $r$  і  $x_\sigma$ .

Побудуємо векторну діаграму реальної котушки з феромагнітним осердям (рисунок 4.15).

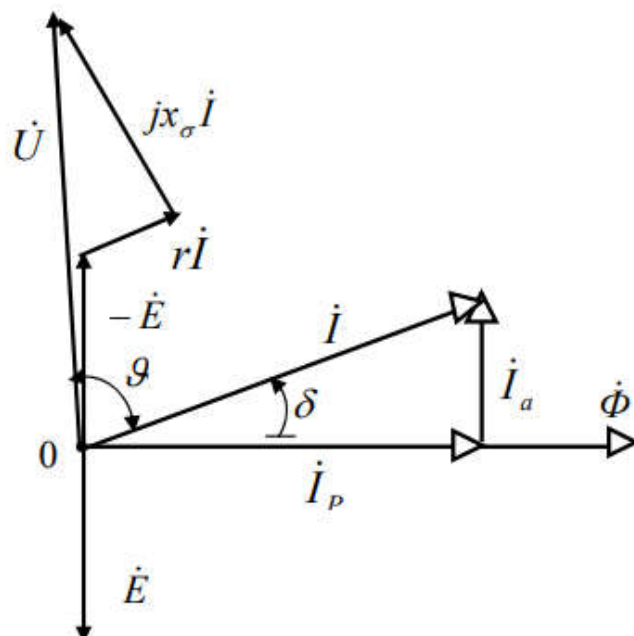


Рисунок 4.15 Векторна діаграма напруги, сили струму, магнітного потоку і ЕРС самоіндукції реальної котушки з феромагнітним осердям

Запишемо рівняння напруги котушки з феромагнітним осердям в

комплексній формі

$$\dot{U} = r\dot{I} + jx_{\sigma}\dot{I} - \dot{E}. \quad (4.23)$$

Розрахункова схема реальної котушки з феромагнітним осердям (рисунок 4.16).

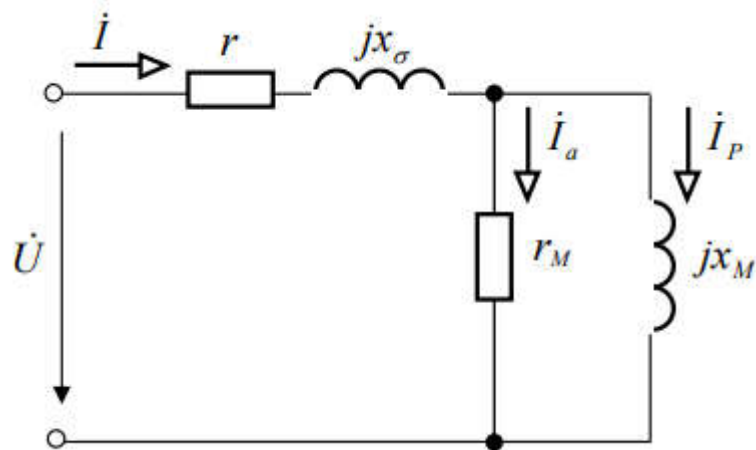


Рисунок 4.16 Розрахункова схема індуктивної котушки з феромагнітним осердям

Знайдемо діюче значення ЕРС самоіндукції, якщо миттєвий магнітний потік  $\Phi = \Phi_m \sin \omega t$ . Тоді вираз миттєвої ЕРС

$$e = -w \frac{d\Phi}{dt} = -w\omega\Phi_m \sin(\omega t + 90^\circ) = E_m \sin(\omega t + 90^\circ) \quad (4.24)$$

де максимальна ЕРС  $E_m = w\omega\Phi_m$  Тоді діюче значення ЕРС

$$E = \frac{w\omega\Phi_m}{\sqrt{2}} = \frac{2\pi f w}{\sqrt{2}} \Phi_m = 4,44 f w \Phi_m \quad (4.25)$$

### Список літератури

[1: с.183-184]; [2: с.260-266]; [3: с.106-116]; [4: с.369-371].

## ЛЕКЦІЯ 5

### 5.1. Ферорезонанс напруг і струмів

Резонанс напруги у колі, що містить котушку з насиченим феромагнітним магнітопроводом, з'єднану послідовно з конденсатором називається ферорезонансом напруги.

У колах з нелінійною індуктивністю, що містять ємність, плавна зміна напруги може викликати скачки фази й амплітуди основної гармоніки струму,  $i$ , навпаки, плавна зміна струму може супроводжуватися стрибкоподібною зміною фази й амплітуди основної гармоніки напруги на деяких ділянках кола.

Під **ферорезонансом напруги** розуміють стрибкоподібну зміну знака кута зсуву фаз між основними гармоніками напруги й струму, а також різку зміну величини силу струму при незначній зміні напруги на вході кола. Ці явища пов'язані з нелінійністю котушки зі сталлю. У лінійних колах подібні явища принципово неможливі. Розглянемо розрахункову схему (рисунок 5.1) послідовно з'єднаних ідеальних конденсатора й котушки з феромагнітним осереддям.

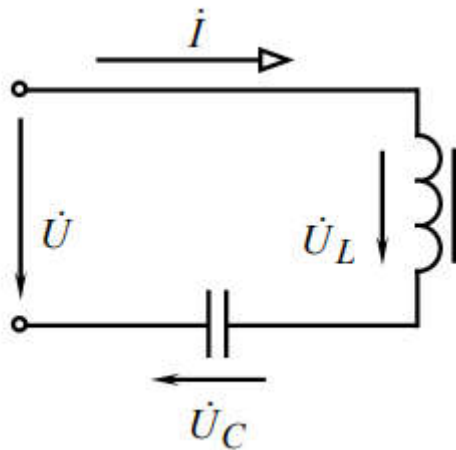


Рисунок 5.1 Розрахункова схема послідовно з'єднаних ідеального конденсатора й котушки з феромагнітним осереддям

Котушка з феромагнітним осереддям є нелінійним елементом, то при синусоїдній напрузі і синусоїдному магнітному потоці струм має несинусоїдну

форму (рисунок 5.2).

Аналіз ферорезонансу з урахуванням несинусоїдності форми кривої струму представляє значні труднощі, тому застосуємо метод еквівалентних синусоїд (еквівалентний струм  $i_e$ ).

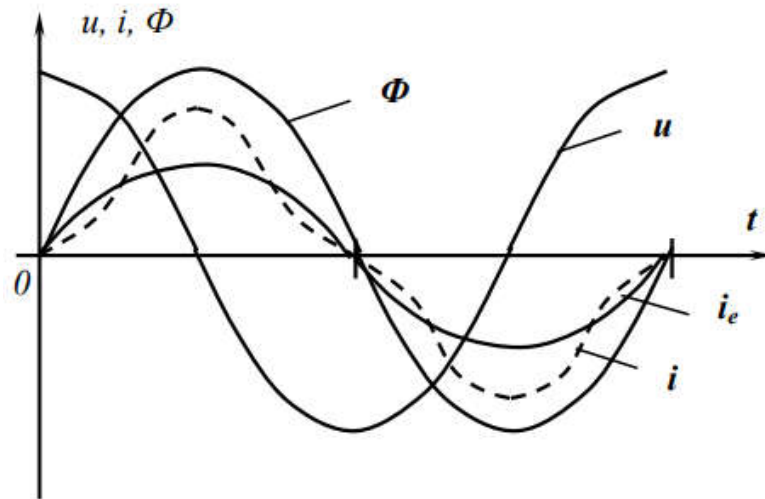


Рисунок 5.2 Графічні залежності миттєвої напруги, магнітного потоку, струму і еквівалентного струму у котушці з феромагнітним осердям

Крім того, для спрощення міркувань приймемо, що котушка з феромагнітним магнітопроводом, яка включена в електричне коло, не має петлі гістерезису, вихрових струмів ( $r_m = 0$ ), активний опір проводу обмотки дорівнює нулю ( $r = 0$ ) тобто вона ідеальна і конденсатор ідеальний. Тоді векторна діаграма електричного кола з урахуванням спрощень має вигляд (рисунок 5.3).

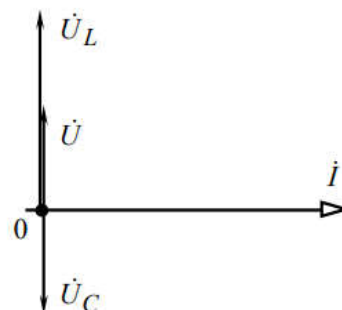


Рисунок 5.3 Векторна діаграма напруг і струму з урахуванням спрощень при ферорезонансі напруг

Приймемо початкову фазу напруга на індуктивності  $\dot{U}_L$  рівною  $90^\circ$ ,

тобто напруга випереджає струм на  $90^\circ$ , напруга на ємності  $\dot{U}_C$  відстає від струму на  $90^\circ$  (рисунок 5.3).

Прикладена напруга на затискачах кола

$$\dot{U} = \dot{U}_L + \dot{U}_C. \quad (5.1)$$

Оскільки вектори  $\dot{U}_L$  й  $\dot{U}_C$  спрямовані протилежно (рисунок 5.3), тоді величина прикладеної напруги до затискачів електричного кола визначається як

$$U = |U_L - U_C| \quad (5.2)$$

ВАХ котушки  $U_L(I)$  є кривою лінією, ВАХ конденсатора  $U_C(I)$  є похилою прямою, що проходять через початок координат (рисунок 5.4). Величину ємності завжди можна вибрати такою, щоб ВАХ конденсатора перетнула ВАХ котушки з феромагнітним осердям. Різниця між залежностями  $U_L(I)$  і  $U_C(I)$  утворять криву  $U(I)$ , ординати якої визначають значення прикладеної напруги при різних значеннях струму (рисунок 5.4).

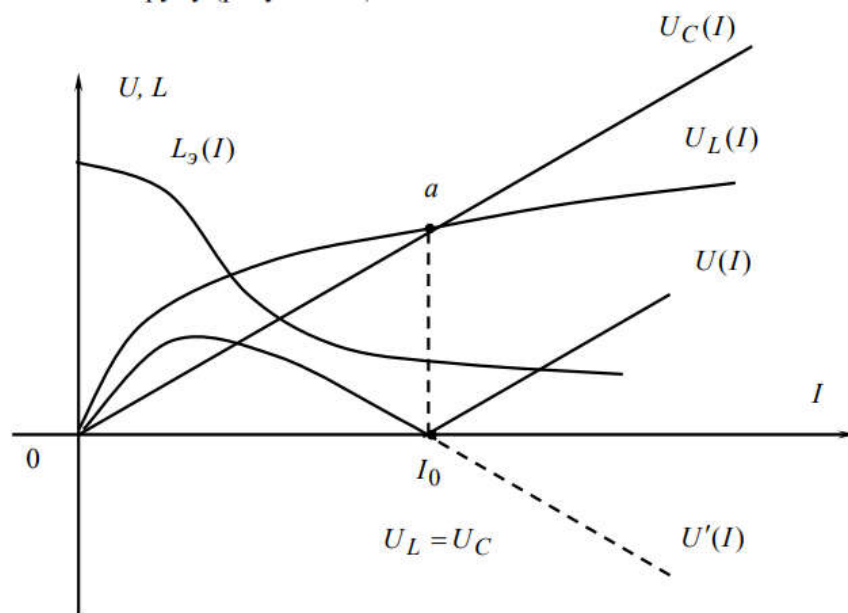


Рисунок 5.4 ВАХ ідеальної котушки з феромагнітним осердям, ідеального конденсатора і електричного кола при послідовному з'єднанні котушки і конденсатора

Точка «а» перетину  $U_L(I)$  і  $U_C(I)$  відповідає ферорезонансу напруги ( $U_L=U_C$ ).

Ферорезонанс напруг настає за рахунок зміни індуктивності і магнітної проникності феромагнітного матеріалу магнітопроводу котушки. Однак, на відміну від лінійних кіл, зміна індуктивності відбувається не залежно від струму кола, наслідок залежності Еквівалентну індуктивність котушки з феромагнітним магнітопроводом можна визначити

$$L_a = \frac{U_L}{\omega I} \quad (5.3)$$

Область характеристики  $U(I)$  поблизу точки  $I_0$  носить теоретичний характер.

Практично через втрати в сталі і в проводі котушки, а особливо через несинусоїдну форми кривої струму, графічна залежність ВАХ  $U(I)$  електричного кола має такий вигляд (рисунок 5.5)

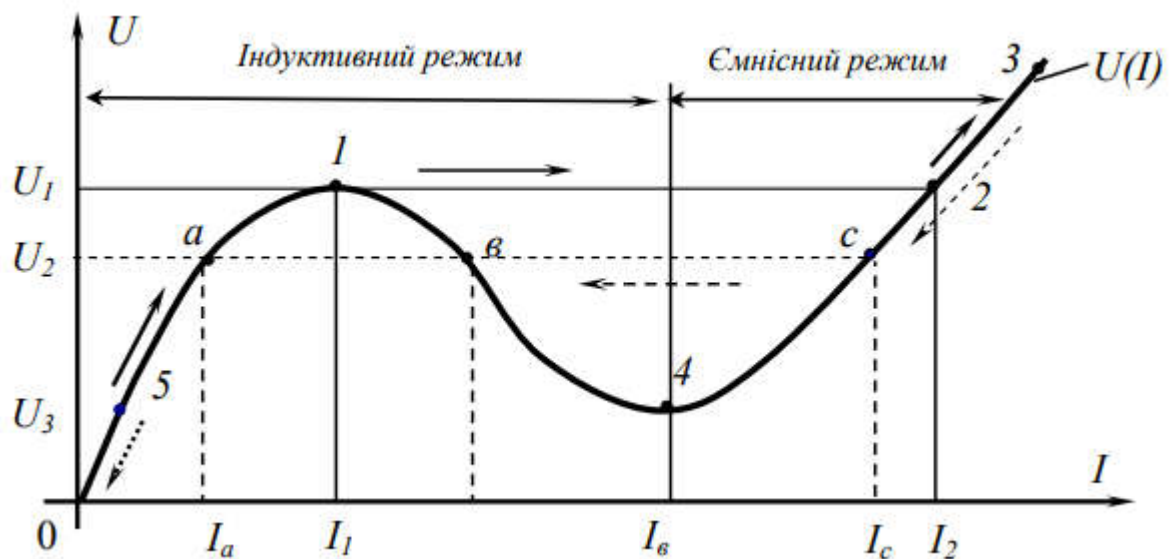


Рисунок 5.5 ВАХ електричного кола з послідовно з'єднаними реальною котушкою зі сталлю і конденсатором

Проаналізуємо графік рисунку 5.5. При зміні напруги  $U$  від нуля до  $U_1$  струм по фазі відстає від напруги – індуктивний режим. Зміна режиму відбувається при досягненні точки 1. У точці 1 спостерігається стрибок струму, при якому струм зростає з  $I_1$  до величини  $I_2$ , що відповідає точці 2. По фазі струм

$I_2$  вже випереджає напругу (перекидання фази) – ємнісний режим. Подальше зростання напруги викликає плавне збільшення струму (точка 3).

Зменшення напруги до величини  $U_3$  (точка  $c$ ) знову викликає зворотній стрибок струму з  $I_c$  до  $I_a$ , що відповідає переходу із точки 3 у точку 5. З характеристики (рисунок 5) видно, що при одній напрузі  $U_2$  на затискачах електричного кола можливі три значення струму:  $I_a$ ,  $I_b$ ,  $I_c$ . У двох перших випадках струм відстає по фазі від напруги ( $U_L > U_C$ ). А у третьому випадку – випереджає його ( $U_L < U_C$ ). Така невизначеність – декілька значень струму в колі при одній і тій же напрузі – може мати місце лише в колах з нелінійними характеристиками.

Режим роботи електричного кола при струмах  $I_a$  і  $I_l$  стійкий, оскільки ділянці з підйомом характеристики при збільшенні напруги  $U$  струм зростає, а при зменшенні напруги зменшується.

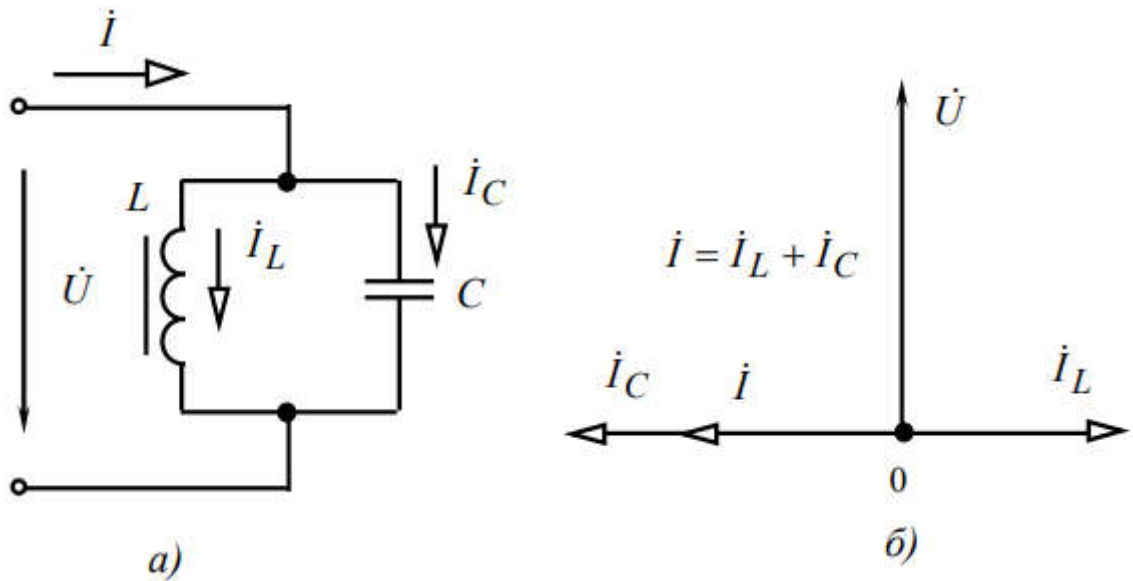
Режим при струмі  $I_2$  – нестійкий, оскільки на спадаючій ділянці ВАХ із зменшенням  $U$  струм зростає і з підвищенням напруги спадає, таким чином, що найменша зміна напруги викликає перехід від даного режиму роботи електричного кола до першого або третього режиму.

Характерно, що при кожному стрибку фаза струму по відношенню до прикладеної напруги  $U$  змінюється на  $180^\circ$ .

Явище різкої зміни струму при незначній зміні напруги на вході називається тригерним ефектом у послідовному ферорезонансному колі.

Якщо котушка зі сталевим осереддям і конденсатор з'єднані паралельно (рисунок 5.6а), тоді в колі може виникнути резонанс струмів.

При розгляді даного явища приймемо умови, що зневажаємо втратами в котушці й вищих гармоніках. Тоді можна побудувати векторну діаграму (рисунок 5.6б).



*a* – розрахункова схема кола; *б* – векторна діаграма струмів і напруги;

Рисунок 5.6 Ферорезонанс струмів

Однак у цьому випадку при живленні кола від джерела заданої напруги не відбувається стрибків струму  $i$ , навпаки, при живленні кола від джерела заданого струму можливі стрибки напруги, що супроводжуються зміною знака кута зсуву фаз між напругою й струмом.

Спочатку струм у котушці  $\dot{I}_L$  буде відставати від напруги  $\dot{U}$  на  $90^\circ$ , а струм  $\dot{I}_C$  буде випереджати напругу на  $90^\circ$ .

Спожитий колом струм визначається таким чином

$$\dot{I} = \dot{I}_L + \dot{I}_C \quad (5.4)$$

Струм, спожитий колом по модулі дорівнює

$$I = |I_L + I_C|. \quad (5.5)$$

Побудова ВАХ котушки зі сталлю і конденсатора й всього кола має вигляд (рисунок 5.7).

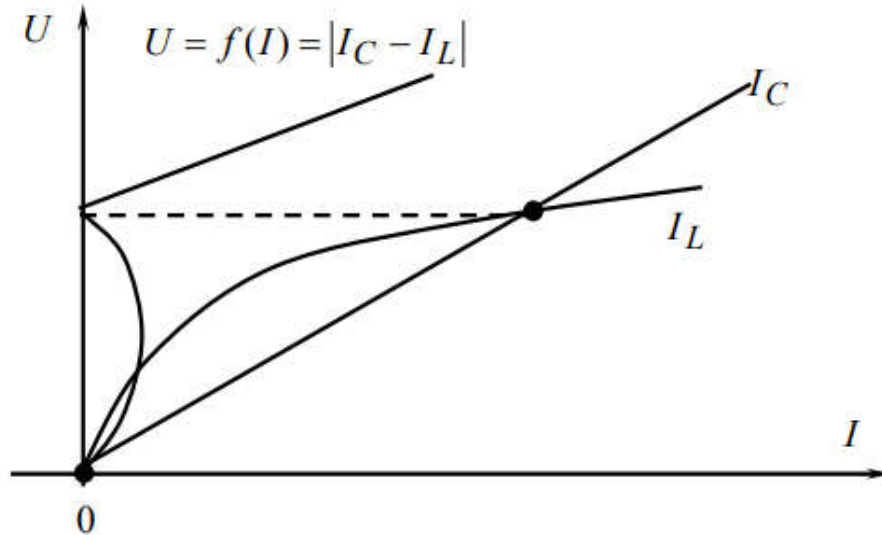


Рисунок 5.7 Побудова ВАХ кола при ферорезонансі струмів

Отримана залежність  $I(U)$  носить теоретичний характер.

Практично, через втрати в феромагнітному магнітопроводі і в активному опорі проводу котушки викривлення форми кривої струму, залежність між струмом і напругою всього кола має такий вигляд (рисунок 5.8).

Якщо живити схему не від джерела заданої напруги, а від джерела заданого струму, то в схемі спостерігаються стрибки напруги.

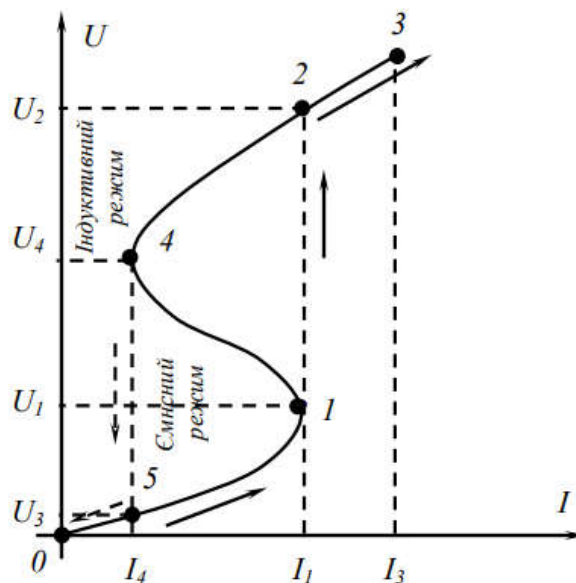


Рисунок 5.8 ВАХ електричного кола з паралельно з'єднаними реальною котушкою зі сталлю і конденсатором

Якщо в наведеній розрахунковій схемі (рисунок 5.9) опір реостату  $R$  набагато більше опору іншого кола, то міняючи його величину можна плавно змінювати струм у колі.

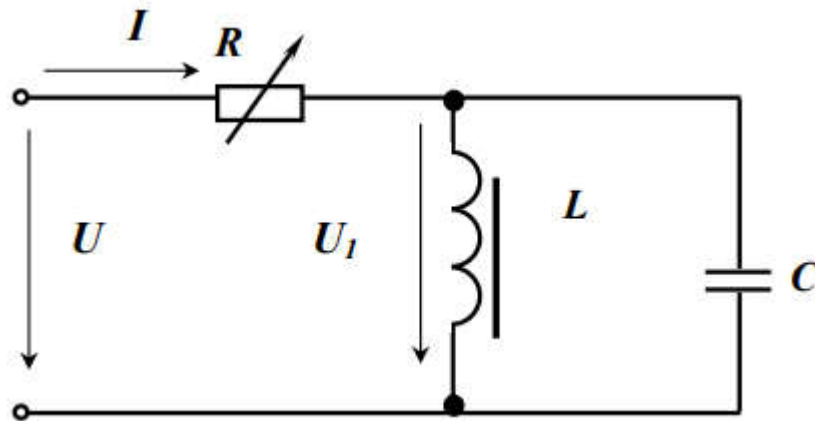


Рисунок 5.9 Розрахункова схема регулювання струму при ферорезонансі струму

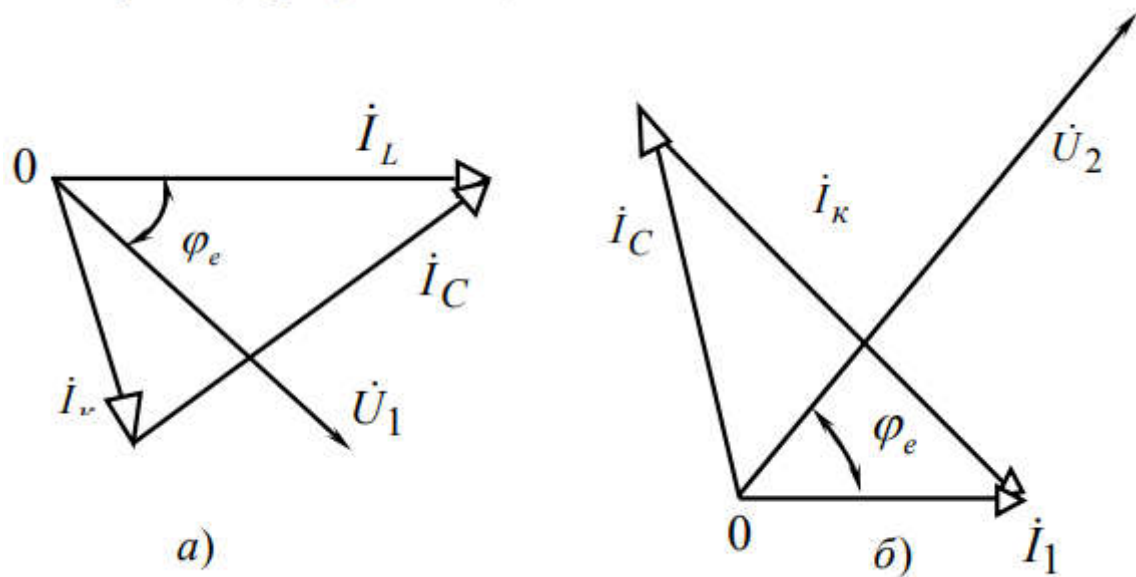
Плавне збільшення струму від нуля до  $I_1$  приводить до зміни напруги по ділянці характеристики 0-1. Подальше збільшення струму приводить до різкого зростання напруги й зміні знаку кута зсуву фаз між  $U$  і  $I$  (перехід із точки 1 у точку 2).

При менших струмах реактивний опір кола носить ємнісної характер, а при більших струмах реактивний опір кола має індуктивний характер.

Подальше збільшення струму викликає плавне збільшення напруги (ділянка 2-3).

Зниження струму до величини  $I_4$  знову викликає стрибок напруги, що відповідає переходу із точки 4 у точку 5.

Побудуємо векторні діаграми в точці 1 - до стрибка напруги (ємнісний режим) (рисунок 5.9а) і точці 2 - після стрибка напруги (індуктивний режим) (рисунок 5.9б).



*a* – до стрибка напруги (ємнісний режим); *б* – після стрибка напруги (індуктивний режим).

Рисунок 5.9 Векторні діаграми при ферорезонансі струму

Явище різкої зміни напруги в колі при незначній зміні струму називається тригерним ефектом у паралельному ферорезонансному колі. Описане явище зветься ферорезонансом струмів.

Особливості кіл, що містять котушки з феромагнітним осереддям й конденсатори, використовують для пристрою ферорезонансних стабілізаторів напруги, призначених для підтримки постійною напруги на затискачах приймача при зміні напруги живлючої мережі.

Стабілізатор напруги - це такий чотиріполюсник, у якому значна зміна напруги на вході викликає лише незначна зміна напруги на виході.

Основна частина стабілізатора складається із двох послідовно з'єднаних опорів – лінійного (ємнісного опору) й нелінійного (індуктивного опору) (рисунок 5.10).

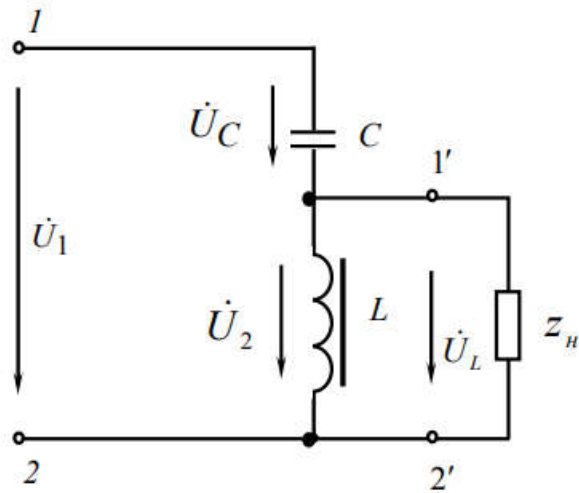


Рисунок 5.10 Схема основної частини стабілізатор напруги

Розглянемо реальний випадок явища ферорезонансу напруг. Стабілізатор напруг працює в зоні насиченого магнітопроводу  $U_{cnp}$  після стрибка струму. В цьому разі при значній зміні первинної напруги  $U_1$  на вході 1-2 стабілізатора, вторинна напруга  $U_2$  на індуктивності 1'-2' змінюється незначно, оскільки нелінійна індуктивність незначно зменшується, індуктивний опір теж. Визначивши для ряду значень  $U_1$  відповідні значення  $U_2$ , можна побудувати залежність  $U_2 = f(U_1)$  (рисунок 5.11).

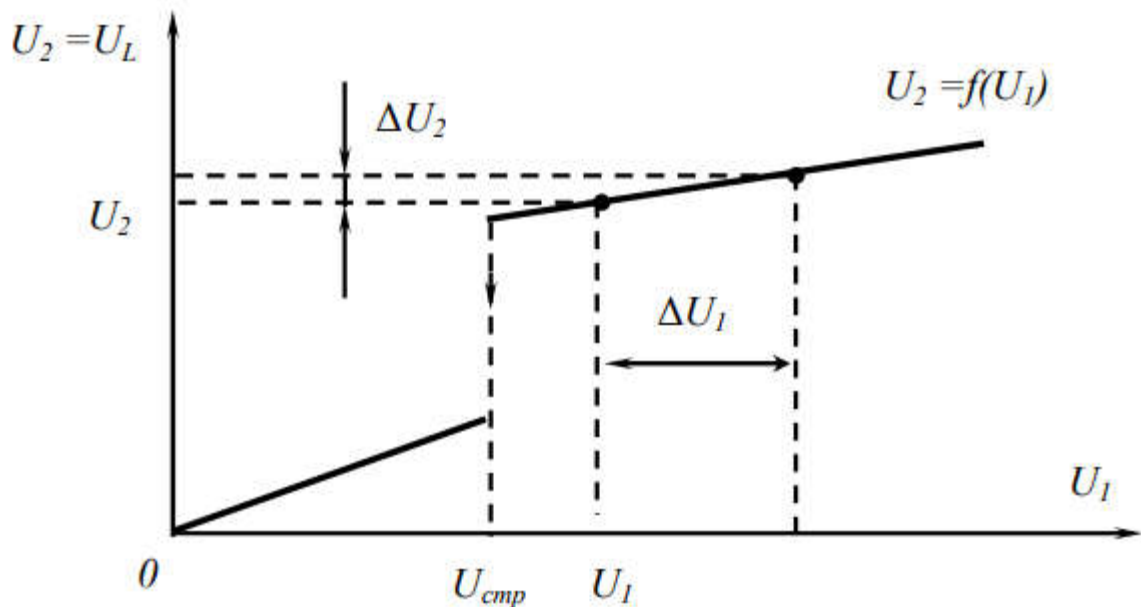


Рисунок 5.11 Графічна залежність  $U_2 = f(U_1)$  стабілізатора напруги

Стабілізатори характеризуються коефіцієнтом стабілізації

$$K_c = \frac{\Delta U_1}{U_1} : \frac{\Delta U_2}{U_2} = \frac{\Delta U_1 \cdot U_2}{U_1 \cdot \Delta U_2}, \quad (5.6)$$

де  $U_1$  – напруга на вході стабілізатора, В;  $U_2$  – напруга на виході (на навантаженні), В;  $\Delta U_1, \Delta U_2$  – змінення напруги на вході й на виході, В.

### **Список літератури**

[2: с.455-459]; [3: с.124-129]; [4: с.376-3779].

## ЛЕКЦІЯ 6

### 6.1. Трансформатор з феромагнітним осердям

Електромагнітні явища в трансформаторі з феромагнітним (сталевим) осердям подібні явищам у повітряному трансформаторі: явище електричного струму, електромагнетизм (основний і потік розсіювання у первинній обмотці), електромагнітної індукції (ЕРС самоіндукції і ЕРС розсіювання у первинній обмотці ЕРС взаємоіндукції у вторинній обмотці) і теплової дії струму у первинній обмотці. Якщо до вторинної обмотки підключити навантаження, то у вторинній обмотці: виникне явище електричного струму, явище електромагнетизму (потік розсіювання) і процес нагріву вторинної обмотки. В феромагнітному магнітопроводі але буде спостерігатися явища гістерезису і вихрових струмів.

На відміну від повітряного трансформатора магнітний потік, який пронизує обидві обмотки, замикається не по повітрю, а через сталеве осердя. Конструктивну схему трансформатора зі сталевим осердям наведено на рисунку 6.1.

При навантаженні трансформатора існують три магнітних потоки:  $\Phi$  – основний у осерді,  $\Phi_{\sigma 1}$  – розсіювання, зв'язаний тільки з первинною обмоткою,  $\Phi_{\sigma 2}$  – розсіювання, зв'язаний тільки з вторинною обмоткою.

Напруга  $u_1$ , прикладена до первинної обмотки, врівноважується спаданням напруги на активному опорі обмотки та електрорушійними силами  $e_{\sigma 1}$  і  $e_{\sigma 1}$ , тобто

$$u_1 = r_1 i_1 + e_{\sigma 1} - e_1 = r_1 i_1 + L_{\sigma 1} \frac{di_1}{dt} - e_1, \quad (6.1)$$

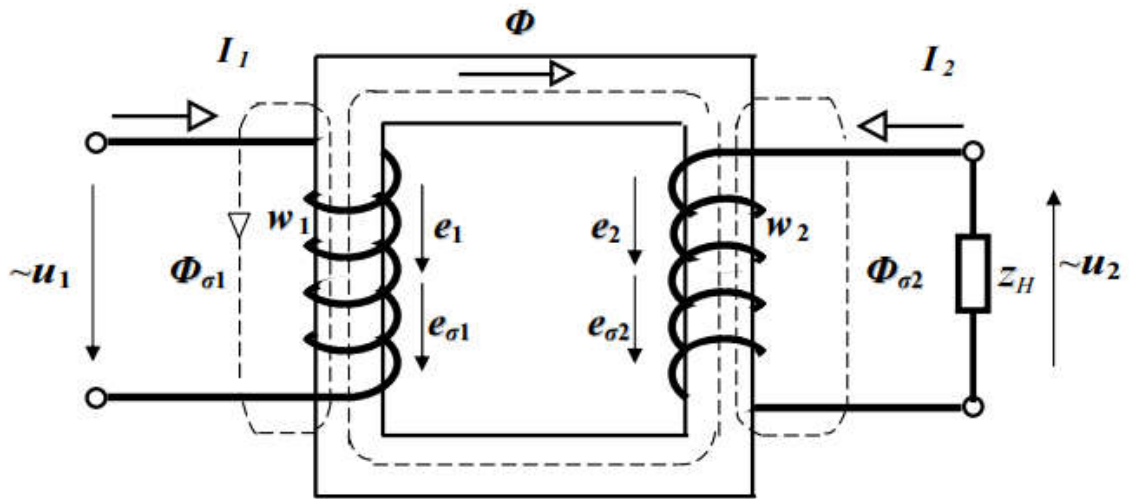


Рисунок 6.1 Конструктивна схема трансформатора зі сталевим осердям

де  $L_{\sigma 1}$  – індуктивність, обумовлена магнітним потоком розсіювання  $\Phi_{\sigma 1}$ , Гн.

У вторинній обмотці ЕРС, яка наводяться магнітними потоками  $\Phi$  і  $\Phi_{\sigma 2}$ , врівноважується спаданням напруг на активному опорі обмотки та опорі навантаження, тобто

$$e_2 + e_{\sigma 2} = r_2 i_2 + u_2 \quad (6.2)$$

або

$$e_2 = r_2 i_2 - e_{\sigma 2} + u_2 = r_2 i_2 + L_{\sigma 2} \frac{di_2}{dt} + u_2, \quad (6.3)$$

де  $L_{\sigma 2}$  – індуктивність, обумовлена магнітним потоком розсіювання  $\Phi_{\sigma 2}$ , Гн.

Замінімо реальний трансформатор еквівалентним конструктивною схемою (рисунок 6.2).

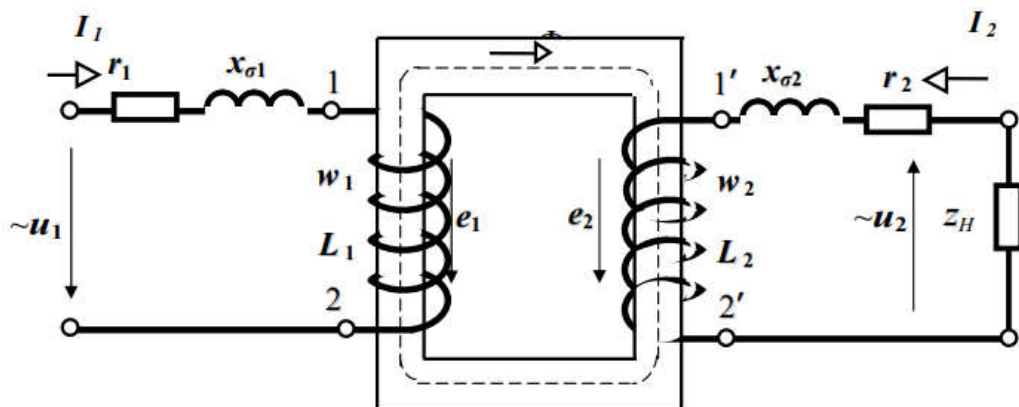


Рисунок 2 Еквівалентна конструктивна схема трансформатора зі сталевим осердям

Трансформатор із затисками 1–2 і 1'–2' називається ідеальним трансформатором (в якому відсутні втрати на нагрів, від потоків розсіювання).

Коефіцієнт трансформації трансформатора

$$k = \frac{E_1}{E_2} = \frac{4,44 \cdot f w_1 \Phi_m}{4,44 \cdot f w_2 \Phi_m} = \frac{w_1}{w_2}. \quad (6.4)$$

Розглянемо спочатку ідеальний трансформатор, у якому  $r_1 = 0$ ;  $x_{\sigma 1} = 0$ ;  $r_2 = 0$ ;  $x_{\sigma 2} = 0$ ;  $w_1 = w_2$ .

При холостому ході такий трансформатор не відрізняється від звичайної ідеальної котушки і може бути зображений схемою заміщення (рисунок 6.3).

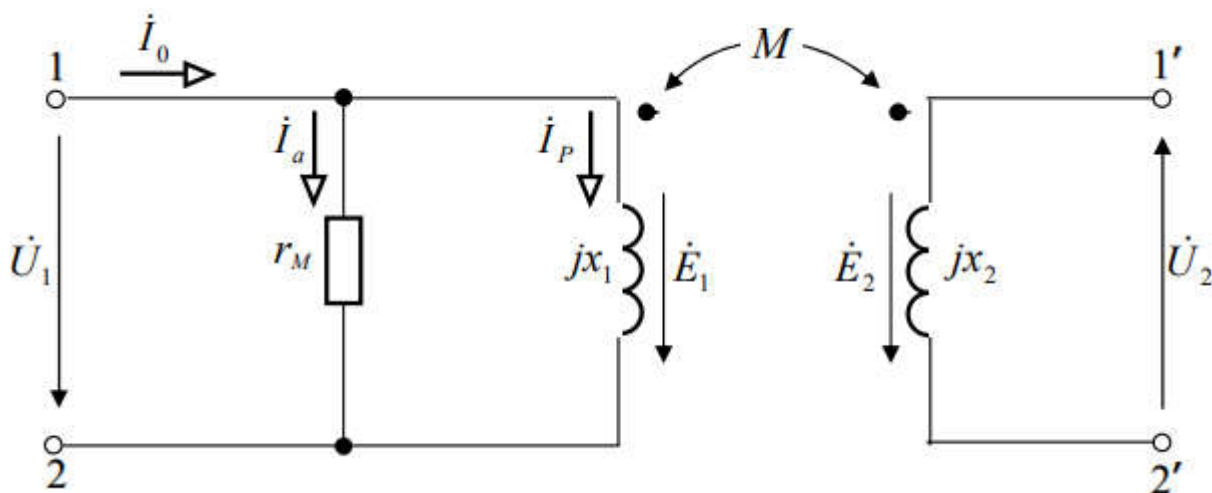


Рисунок 6.3 Схема заміщення ідеального трансформатора на холостому ході

Побудуємо векторну діаграму ідеального трансформатора при холостому ході (рисунок 6.4).

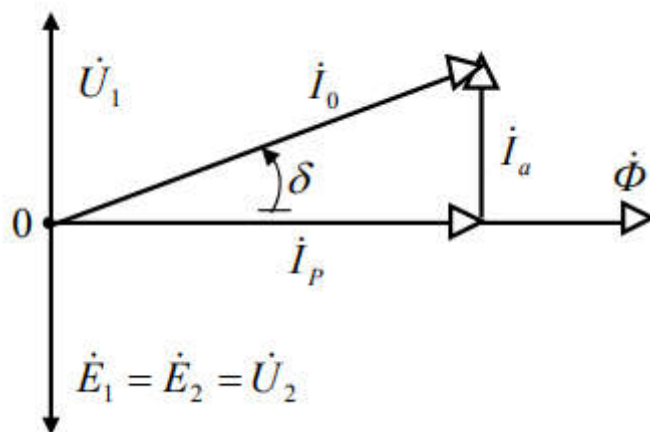


Рисунок 6.4 Векторна діаграма ідеального трансформатора при холостому ході

Намагнічуюча сила при холостому ході (у первинній обмотці)

$$\dot{F}_0 = w_1 \dot{I}_0 = Z_M \dot{\Phi} \quad (6.5)$$

де  $Z_M$  – комплекс магнітного опору осердя,  $1/\Gamma_H$ ;  $\dot{\Phi}$  – комплекс основного магнітного потоку, Вб.

Рівняння для первинного контуру трансформатора

$$\dot{U}_1 = -\dot{E}_1 \quad (6.6)$$

Складемо тепер схему заміщення ідеального трансформатора при його навантаженні (рисунок 6.5).

Якщо до затисків вторинної обмотки підключити навантаження з опором  $Z_H$ , то в ній буде проходити струм  $\dot{I}_2$ , який, у свою чергу, буде намагатися зменшити магнітний потік  $\dot{\Phi}$ , а це приведе до ЕРС  $\dot{E}_1$ , внаслідок чого струм  $\dot{I}_1$  зросте до такої величини, при якій магнітний потік  $\dot{\Phi}$  набуде початкового значення і буде виконуватися рівняння (6.6). Таким чином, поява струму у вторинному контурі приводить до збільшення струму в первинному контурі.

У навантаженому трансформаторі магнітний потік у осерді дорівнює магнітному потоку при холостому ході, тобто завжди  $\dot{\Phi} = const$ .

При навантаженні магнітний потік  $\dot{\Phi}$  створюється під дією намагнічуючих сил первинної і вторинної обмоток

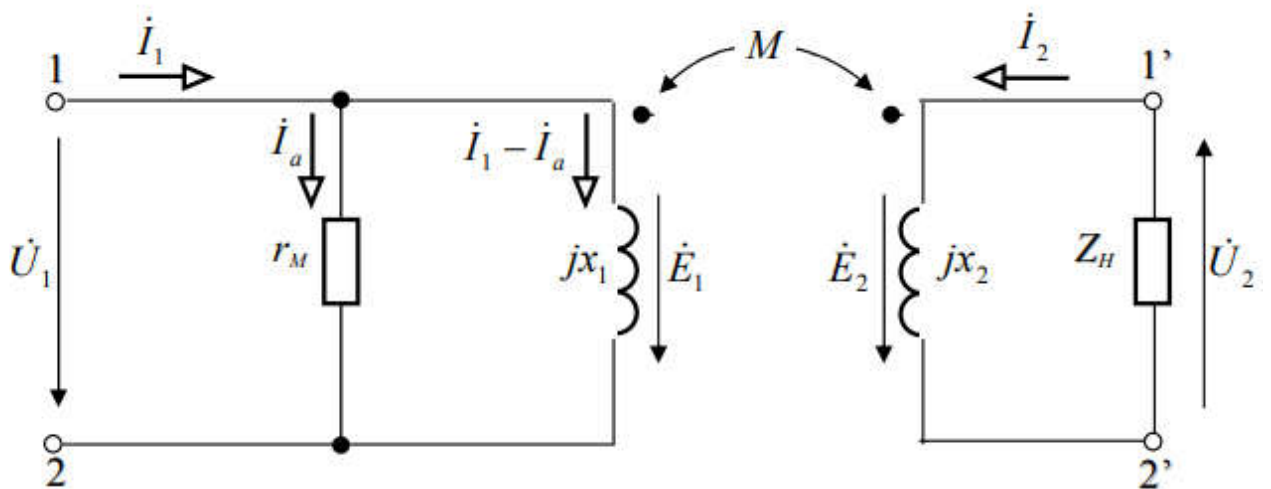


Рисунок 6.5 Схема заміщення ідеального трансформатора при навантаженні

$$\dot{F}_1 + \dot{F}_2 = w_1 \dot{I}_1 + w_2 \dot{I}_2 = Z_M \dot{\Phi}. \quad (6.7)$$

Порівнявши (5) і (6), знаходимо

$$w_1 \dot{I}_1 + w_2 \dot{I}_2 = w_1 \dot{I}_0. \quad (6.8)$$

При рівності кількості витків первинної і вторинної обмоток

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{I}_0. \quad (6.9)$$

З рівняння (9)

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_0 - \dot{I}_2. \quad (6.10)$$

Побудуємо векторну діаграму ідеального трансформатора при навантаженні (рисунок 6.6).

Перетворимо схему заміщення ідеального трансформатора, для чого розв'яжемо індуктивний зв'язку. Якщо з'єднати однойменні затиски обмоток трансформатора між собою, то режим роботи трансформатора не зміниться.

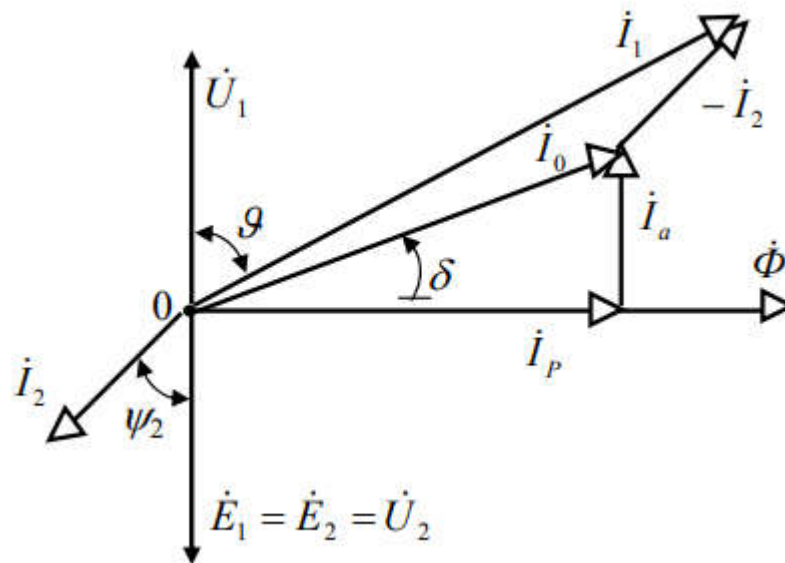


Рисунок 6.6 Векторна діаграма ідеального трансформатора при навантаженні

Розглянемо спочатку індуктивно зв'язані елементи, які тепер мають загальну точку. Коефіцієнт зв'язку двох елементів у даному випадку дорівнює одиниці, оскільки весь магнітний потік повністю зчеплений з витками первинної і вторинної обмоток, тобто

$$K = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = 1, \quad (6.11)$$

тому, з огляду на те, що  $w_1 = w_2$ , знаходимо

$$M = L_1 = L_2. \quad (6.12)$$

Замінімо тепер частину схеми з загальною точкою (рисунок 6.7а) на еквівалентну схему (рисунок 6.7б). Тепер

$$L_1 - M = 0, \quad L_2 - M = 0, \quad (6.13)$$

$$\dot{I}_1 - \dot{I}_a + \dot{I}_2 = \dot{I}_0 - \dot{I}_a = \dot{I}_p. \quad (6.14)$$

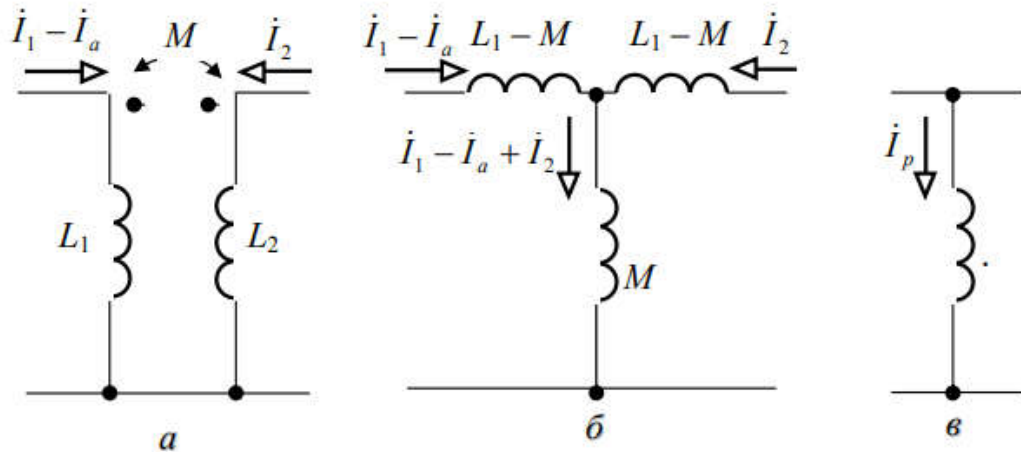


Рисунок 6.7 Схеми еквівалентного перетворення ідеального трансформатора

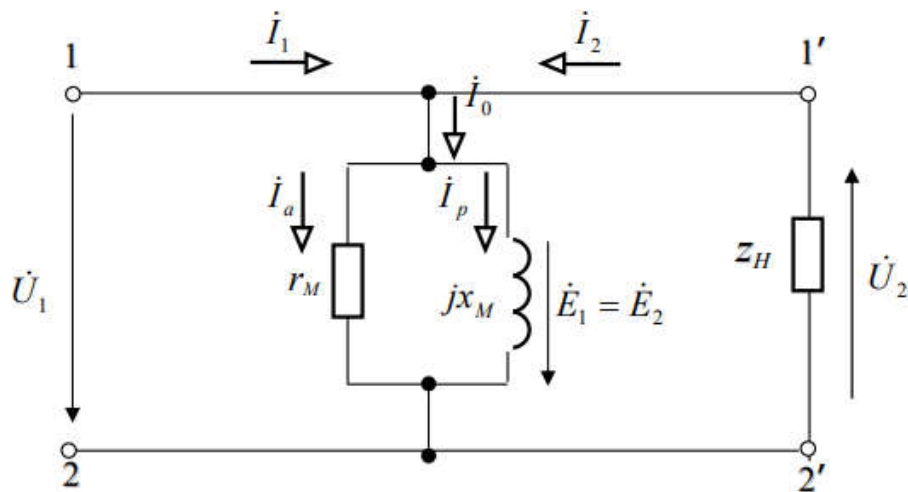


Рисунок 6.8 Розрахункова схема ідеального трансформатора з феромагнітним осердям

З урахуванням (6.13), (6.14) схема заміщення ідеального трансформатора приймає вигляд (рисунок 6.7в). Розрахункова схема ідеального трансформатора з феромагнітним осердям має вигляд, зображений на рисунку 6.8.

Якщо тепер врахувати активні й індуктивні опори розсіювання обох

обмоток, то для трансформатора, у якого  $w_1 = w_2$ , одержимо схему заміщення, приведену на рисунку 6.9.

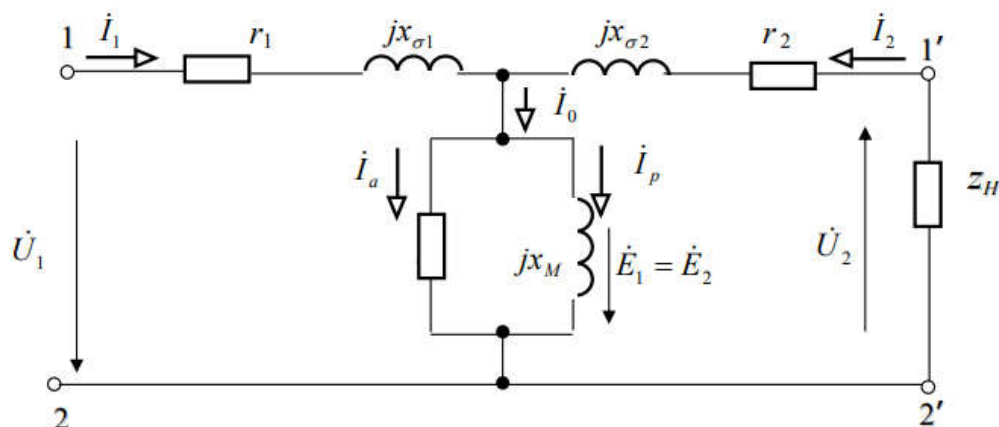


Рисунок 6.9 Схема заміщення реального трансформатора з феромагнітним осердям

Запишемо рівняння первинного і вторинного контурів кола

$$\dot{U}_1 = r_1 \dot{I}_1 + jx_{\sigma 1} \dot{I}_1 - \dot{E}_1; \quad (6.15)$$

$$\dot{E}_2 = r_2 \dot{I}_2 + jx_{\sigma 2} \dot{I}_2 - \dot{U}_2; \quad (6.16)$$

Побудуємо векторну діаграму кола (рисунок 6.10).

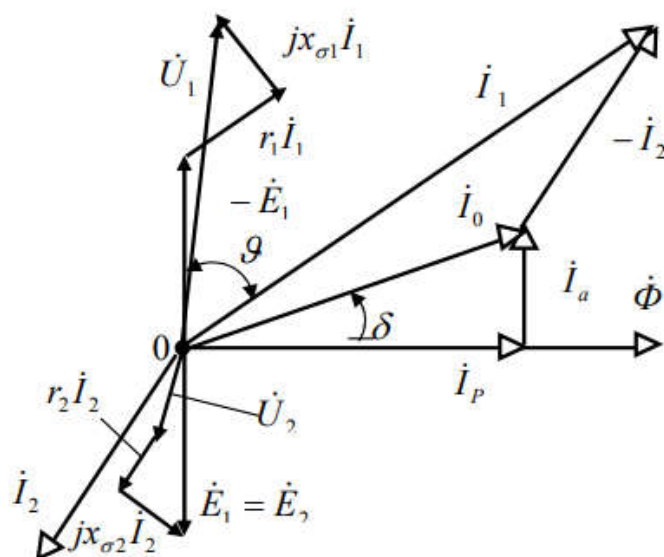


Рисунок 6.10 Векторна діаграма напруг і струмів трансформатора з феромагнітним осердям

## 6.2. Приведений трансформатор

Оскільки в загальному випадку  $w_1 \neq w_2$ , то і  $E_1 \neq E_2$ . Це ускладнює аналіз

процесів у трансформаторі, тому обидві обмотки трансформатора приводять до однієї кількості витків. Як правило, вторинну обмотку з кількістю витків  $w_2$  приводять до первинної обмотки з кількістю витків  $w_1$  – **приведений трансформатор**.

Для цього вторинну обмотку заміняють еквівалентною з кількістю витків  $w_1$ , але змінюють параметри та електричні величини вторинного контуру так, щоб магнітний потік і потужність трансформатора залишилися без змін. Приведені величини позначають так

$$\dot{E}'_2; \dot{I}'_2; r'_2; x'_{\sigma 2}; z'_H; \dot{U}'_2; w'_2.$$

Електрорушійна сила, яка наводиться у вторинній обмотці основним магнітним потоком, дорівнює

$$E_2 = 4,44fw_2\Phi_m \quad (6.17)$$

звідки

$$\Phi_m = \frac{E_2}{4,44fw_2} \quad (6.18)$$

При заміні дійсної вторинної обмотки з кількістю витків  $w_2$  приведеною обмоткою з кількістю витків первинної обмотки  $w'_2 = w_1$  основний магнітний потік буде наводити в ній електрорушійну силу

$$E'_2 = 4,44fw'_2\Phi_m = 4,44fw'_2 \frac{E_2}{4,44fw_2} = E_2 \frac{w_1}{w_2} = E_2 k, \quad (6.19)$$

де  $k$  – коефіцієнт трансформації трансформатора.

Коефіцієнт трансформації визначається як відношення ЕРС первинної обмотки до ЕРС вторинної обмотки або відношення кількості витків первинної обмотки до кількості витків вторинної обмотки

$$k = \frac{E_1}{E_2} = \frac{w_1}{w_2}. \quad (6.20)$$

Якщо підставити значення  $k$ , то одержимо

$$E'_2 = E_1. \quad (6.21)$$

Аналогічно

$$U'_2 = U_2 k, \quad (6.22)$$

Оскільки у випадку приведення вторинної обмотки до первинної магнітний потік залишається незмінним, то і вторинна намагнічуюча сила

повинна залишатися незмінною, тобто

$$F_2 = w_2 I_2 = w_1 I'_2, \quad (6.23)$$

звідки

$$I'_2 = I_2 \frac{w_2}{w_1} = \frac{I_2}{k}. \quad (6.24)$$

Через те, що умовою приведення є постійність потужностей (активної, реактивної і повної), то і втрати в провідниках дійсної і приведені вторинної обмоток повинні бути однаковими, тобто

$$r_2 I_2^2 = r'_2 I'^2_2, \quad (6.25)$$

звідки активний опір проводу приведені вторинної обмотки

$$r'_2 = r_2 \left(\frac{I_2}{I'_2}\right)^2 = r_2 \left(\frac{k I_2}{I_2}\right)^2 = r_2 k^2. \quad (6.26)$$

Реактивний опір проводу приведені вторинної обмотки

$$x'_{\sigma 2} = x_{\sigma 2} k^2; \quad z'_H = z_H k^2. \quad (6.27)$$

Приведений повний опір навантаження

$$z'_H = z_H k^2. \quad (6.28)$$

Запишемо рівняння первинного і вторинного контурів трансформатора

$$\dot{U}_1 = r_1 \dot{I}_1 + jx_{\sigma 1} \dot{I}_1 - \dot{E}_1; \quad (6.29)$$

$$\dot{E}'_1 = r'_1 \dot{I}'_1 + jx'_{\sigma 1} I'^2_2 + \dot{U}'_1; \quad (6.30)$$

Схема заміщення приведенного трансформатора (рисунок 6.11).

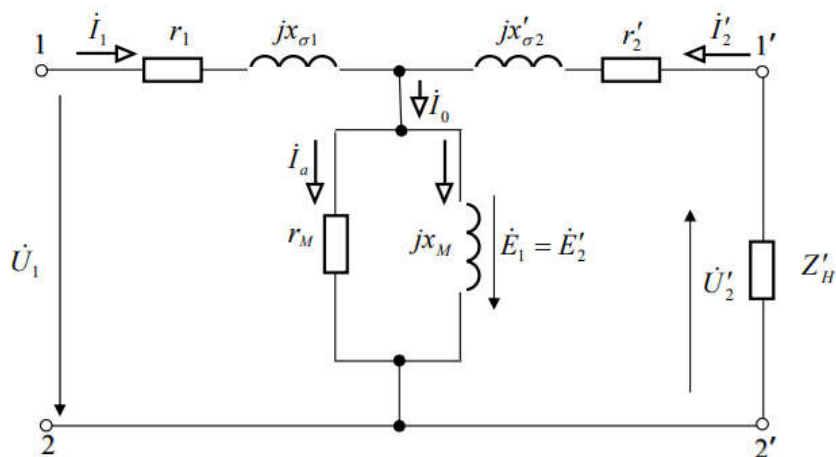


Рисунок.6.11 Схема заміщення приведенного трансформатора

Векторна діаграма струмів і напруг приведенного трансформатора має

такий же вигляд, як і векторна діаграма, приведена на рисунку 10.

### **Список літератури**

[1: с.186-492]; [2: с.110-111].

## ТЕМА 7. ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В ЛІНІЙНИХ КОЛАХ

### 7.6. Причини виникнення перехідних процесів

Під **перехідними процесами** розуміють процеси переходу від одного усталеного режиму роботи електричного кола до іншого, будь чим відрізняється від попереднього: величиною ЕРС, параметрами тощо.

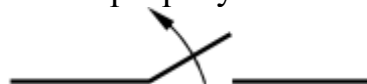
Перехідні процеси виникають внаслідок включення або вимикання пасивних або активних ділянок кола; коротких замикань окремих ділянок кола, різного роду переключень, раптової зміни параметрів і т.п.

Фізично перехідні процеси представляють перехід від одного енергетичного стану кола, що відповідають до комутаційному режиму, до енергетичного стану, що відповідають після комутаційному режиму. Всі ці зміни називаються **комутаційними змінами** або просто **комутацією**.

Замикання кола зображують на розрахункових схемах так:



Розмикання кола зображують на розрахункових схемах так:



Будемо вважати, що при замиканні і розмиканні електричного кола дуга не виникає, а комутація проходить у момент часу  $t = 0$ .

### 7.7. Закони комутації

Розглянемо включення ділянки кола з котушкою (рисунок 1).

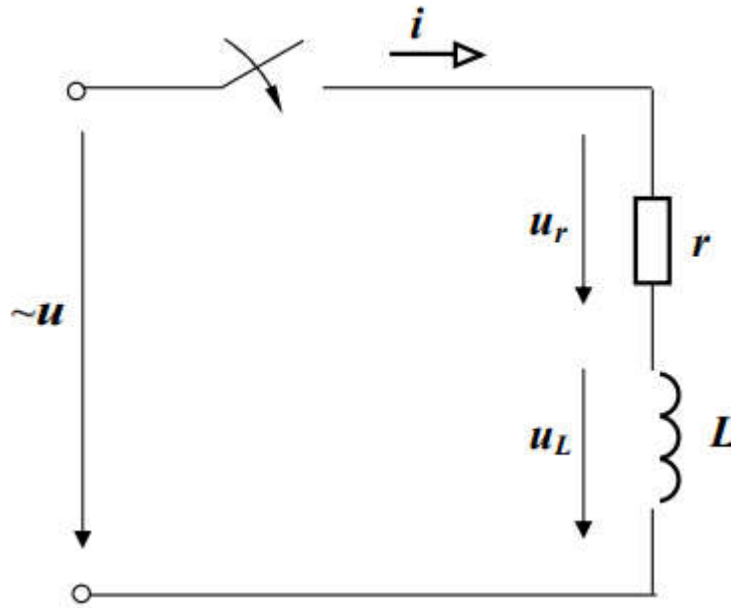


Рисунок 7.1 Розрахункова схема включення ділянки кола з котушкою

До комутації струм у електричному колі дорівнював нулю. Після комутації у відповідності з другим законом Кірхгофа можна записати

$$u = u_r + u_L. \quad (7.1)$$

Якщо припустити, що в момент комутації ( $t = 0$ ) струм зміниться стрибком, то  $u = \infty$  і другий закон Кірхгофа не буде виконуватися. Тому в даному випадку в момент комутації сила струму дорівнює нулю.

З енергетичної точки зору неможливість миттєвої зміни струму в індуктивності пояснюється неможливістю зміни стрибком енергії, накопиченої в котушці. Енергія магнітного поля котушки

$$W_L = \frac{Li^2}{2}. \quad (7.2)$$

Миттєва потужність в індуктивності

$$p_L = \frac{dW_L}{dt} = Li \frac{di}{dt}. \quad (7.3)$$

Якби струм у момент часу  $t = 0$  змінився стрибком, це привело б до виділення в котушці нескінченно великої потужності, що неможливо з фізичної точки зору.

Таким чином, можна сформулювати перший закон комутації: у будь-якому розгалуженні з індуктивністю струм і магнітний потік у момент комутації

зберігають ті значення, які вони мали до комутації, і далі починають змінюватися від цих значень.

Розглянемо тепер включення ділянки кола з ємністю (рисунок 2).

До комутації напруга на ємності дорівнювала нулю. Після комутації у відповідності з другим законом Кірхгофа можемо записати

$$u = u_r + u_c = r i + u_c. \quad (7.4)$$

Зі співвідношень

$$u_c = \frac{q}{C}, \quad i = \frac{dq}{dt}, \quad (7.5)$$

знаходимо

$$q = C u_c, \quad i = C \frac{du_c}{dt}. \quad (7.6)$$

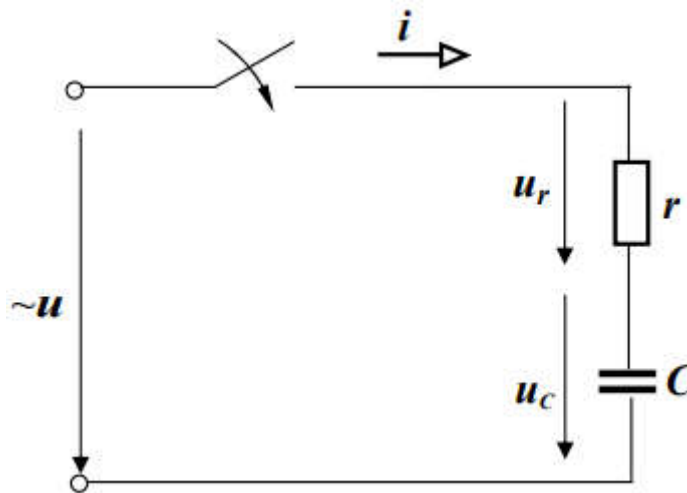


Рисунок 7.2 Розрахункова схема включення ділянки кола з ємністю

Якщо припустити, що в момент комутації ( $t = 0$ ) напруга на ємності зміниться стрибком, то  $i = \infty$  і другий закон Кірхгофа не буде виконуватися. Тому в даному випадку в момент комутації напруга на ємності буде дорівнювати нулю.

З енергетичної точки зору неможливість миттєвої зміни напруги на ємності пояснюється неможливістю зміни стрибком потужності, накопиченої в конденсаторі. Енергія електричного поля конденсатора

$$W_C = \frac{C u_c^2}{2}. \quad (7.7)$$

Миттєва потужність у ємності

$$p_C = \frac{dW_C}{dt} = C u_c \frac{du_c}{dt}. \quad (7.8)$$

Якби напруга на ємності в момент часу  $t = 0$  змінилася стрибком, то це привело б до виділення в ємності нескінченно великої потужності, що неможливо з фізичної точки зору.

Отже, можна сформулювати другий закон комутації: на будь-якій ділянці кола з ємністю напруга і заряд на ємності в момент комутації зберігають ті значення, які вони мали до комутації, і далі починають змінюватися від цих значень.

### 7.3. Класичний метод розрахунку

Розглянемо послідовне коло, яке містить активний опір, індуктивність і ємність, підключені до джерела напруги, яка змінюється в часі за довільним безперервним законом, заданим яким-небудь аналітичним виразом (рисунок 3). Для будь-якого моменту часу за другим законом Кірхгофа можемо записати

$$u = u_r + u + u_c = u = ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{c} \int idt, \quad (7.9)$$

де  $i$  – струм перехідного режиму, який далі будемо називати перехідним струмом або просто струмом,  $A$ .

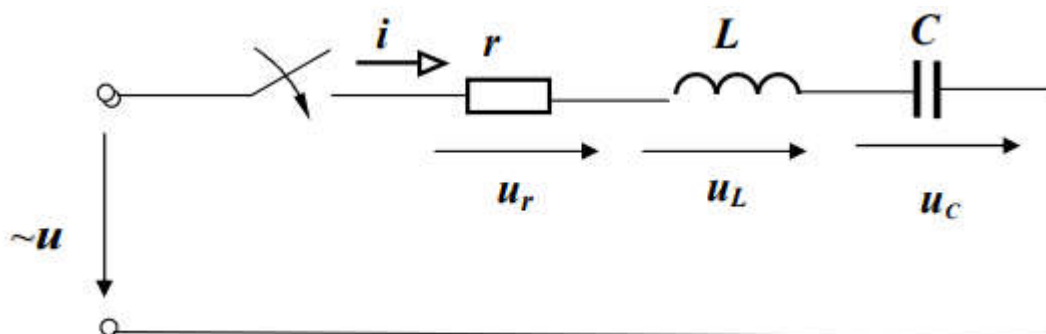


Рисунок 7.3 Розрахункова схема послідовно з'єднаних активного опору, індуктивності і ємності

Перехідним режимом будемо називати стан кола, який буде спостерігатися в ньому протягом деякого (теоретично нескінченно великого) часу після комутації.

Коли настає примусовий режим, рівняння (6.9) приймає вигляд

$$u = ri_{\text{пр}} + L \frac{di_{\text{пр}}}{dt} + \frac{1}{C} \int i_{\text{пр}} dt, \quad (7.10)$$

де  $i_{\text{пр}}$  – струм примусового режиму або просто примусовий струм,  $A$ .

Примусовим режимом будемо називати стан кола, коли з перехідним режимом можна не рахуватись. Примусовий режим, який створюється вільною складовою періодичної напруги, інколи називають усталеним режимом.

Віднімаючи почленно рівняння (7.9) і (7.10) та знаючи, що

$$i - i_{\text{пр}} = i_{\text{в}}, \quad (7.11)$$

Різниця струмів і напруг перехідного і примусового режимів називається відповідно струмом і напругою вільного режиму або просто вільними струмом і напругою.

Відповідно до рівняння (7.11) процес, який проходить у колі, можна розглядати як такий, що складається з накладених один на інший процесів – примусового, який наступив як би відразу, та вільного, який має місце тільки протягом перехідного режиму.

Звичайно, фізично існує тільки перехідний струм або напруга, а розкладання їх на примусову і вільну складові – це усього лише зручний спосіб, який полегшує розрахунки перехідних процесів у лінійних колах.

Розкладання перехідних струмів і напруг відповідає правилу рішення лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь, відповідно до якого загальне рішення таких рівнянь дорівнює сумі часткового рішення неоднорідного рівняння і загального рішення однорідного рівняння.

Дійсно, рівняння (7.12) показує, що вільний струм являє собою загальне рішення однорідного диференціального рівняння і повинний мати постійні інтегрування, кількість яких дорівнює порядку диференціального рівняння.

У свою чергу рівняння (7.10) показує, що примусовий струм являє собою відповідне часткове рішення неоднорідного диференціального рівняння.

Класичний метод дослідження перехідних процесів зводиться до інтегрування диференціальних рівнянь, які пов'язують напруги і струми кола в перехідному процесі. В результаті інтегрування з'являються постійні, які знаходяться з початкових умов.

Незалежні початкові умови виходять із законів комутації, залежні – з незалежних початкових умов і значень ЕРС за допомогою першого і другого законів Кірхгофа.

#### 7.4. Підключення котушки до джерела постійної ЕРС

Дослідимо перехідний процес підключення котушки до джерела постійної ЕРС, розрахункова схема якого показана на рисунку 7.4.

У післякомутаційний період у відповідності з другим законом Кірхгофа можемо записати

$$L \frac{di}{dt} + ri = E, \quad (7.14)$$

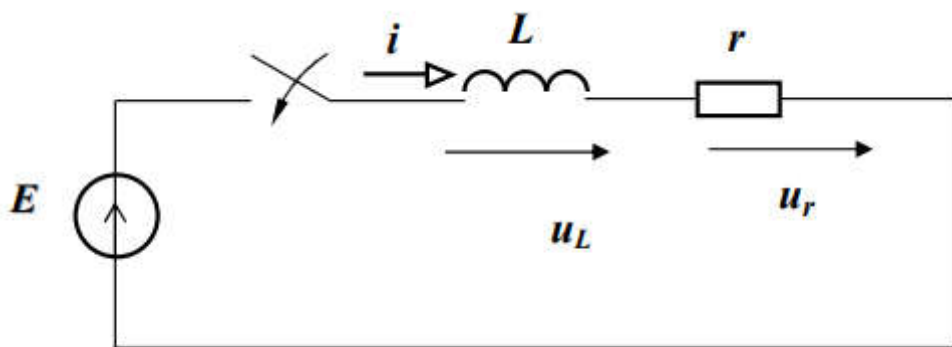


Рисунок 7.4 Розрахункова схема перехідного процесу підключення котушки до джерела постійної ЕРС

або

$$\tau \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{r}, \quad (7.15)$$

де

$$\tau = \frac{L}{r}. \quad (7.16)$$

Рівняння (7.15) являє собою звичайне лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку з постійними коефіцієнтами.

Складаємо характеристичне рівняння

$$\tau \cdot p + 1 = 0, \quad (7.17)$$

звідки знаходимо корінь

$$p = -\frac{1}{\tau}. \quad (7.18)$$

Перехідний струм дорівнює сумі примусового і вільного струмів

$$i = i_{\text{пр}} + i_{\text{в}}. \quad (7.19)$$

Оскільки характеристичне рівняння має один корінь, то вільний струм можна виразити так

$$i_{\text{св}} = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (7.20)$$

де  $A$  – постійна інтегрування струму,  $A$ .

Примусовий струм після комутації

$$i_{\text{пр}} = \frac{E}{r}, \quad (7.21)$$

тому рівняння перехідного струму в колі у загальному вигляді

$$i = \frac{E}{r} + Ae^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (7.22)$$

Для розрахунку постійної інтегрування  $A$  знайдемо початкові умови: відповідно до першого закону комутації на ділянці кола з індуктивністю струм не може змінюватися стрибком, тому в момент комутації при  $t = 0$ ,  $i(0) = 0$  рівняння (7.22) запишеться так

$$0 = \frac{E}{r} + A, \quad (7.23)$$

звідки постійна інтегрування струму

$$A = -\frac{E}{r}, \quad (7.24)$$

тобто вільна складова струму

$$i_{\text{в}} = -\frac{E}{r}e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (7.25)$$

Підставляємо значення постійної інтегрування в рівняння (22) одержуємо рівняння перехідного струму, будуємо графіки примусової, вільної складових і перехідного струму в часі (рисунок 7.5)

$$i = i_{\text{пр}} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \quad (7.26)$$

У рівнянні перехідного процесу величина  $\tau$  називається постійною часу кола. Вона характеризує швидкість перехідного процесу в електричному колі

$$[\tau] = \frac{\Gamma_{\text{н}}}{\text{Ом}} = \frac{\text{Ом} \cdot \text{с}}{\text{Ом}} = \text{с}.$$

Після визначення струму легко знайти напруги на активному опорі та індуктивності

$$u_r = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right); \quad (7.27)$$

$$u_L = E e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (7.28)$$

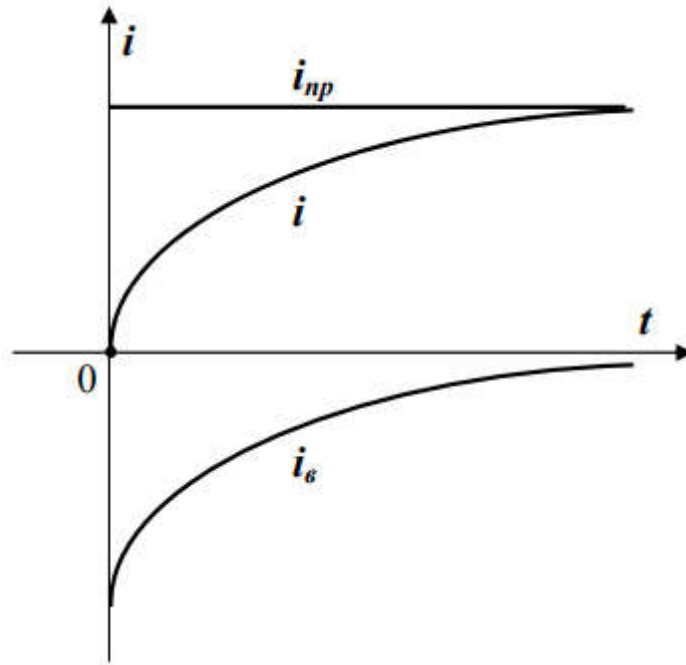


Рисунок 7.5 Графіки примусової, вільної складових і перехідного струму в часі

З рівняння (7.28) видно, що напруга на індуктивності змінюється стрибком від нуля до значення ЕРС джерела. ЕРС самоіндукції протидіє зростанню струму.

З рівняння (27) видно, що напруга на активному опорі зростає плавно від нуля до значення ЕРС джерела в примусовому режимі.

Енергія, яку одержує коло, частково йде на створення енергії магнітного поля, а частково перетворюється в теплоту на активному опорі.

За час перехідного періоду в магнітному полі котушки накопичиться енергія

$$W_L = \frac{Li_{np}^2}{2}. \quad (7.29)$$

### 7.5. Коротке замикання котушки

Нехай у колі, розрахункова схема якого приведена на рисунку 6, ключ був у положенні 1 і джерело було підключено досить довго, тобто наступив усталений режим. Якщо в деякий момент часу ( $t = 0$ ) ключ миттєво (без розриву

кола котушки) переключити в положення 2, то буде мати місце **коротке замикання котушки**.

Знайдемо закон зміни струму в колі. Для післякомутаційної схеми за другим законом Кірхгофа можемо записати

$$L \frac{di}{dt} + ri = 0; \quad (7.30)$$

або

$$\tau \frac{di}{dt} + i = 0. \quad (7.31)$$

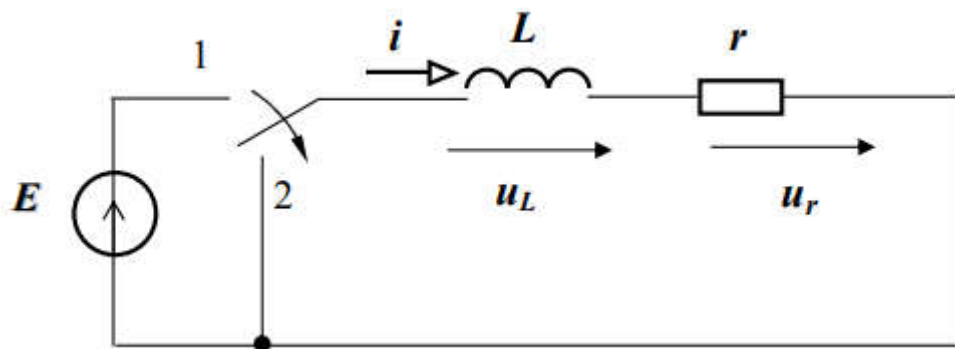


Рисунок 7.6 Розрахункова схема перехідного процесу короткого замикання котушки

Рівняння (7.31) являє собою однорідне диференціальне рівняння, рішення якого дає вільний струм. Таким чином, у даному випадку перехідний струм не буде містити примусової складової, тобто  $i = i_{\text{в}}$ , оскільки  $i_{\text{пр}} = 0$ .

Після рішення рівняння одержимо характеристичне рівняння, корінь характеристичного рівняння та рівняння струму у загальному вигляді

$$\tau p + 1 = 0; \quad p = -\frac{1}{\tau}; \quad i = Ae^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (7.32)$$

Знайдемо постійну інтегрування з початкових умов: відповідно до першого закону комутації на ділянці кола з індуктивністю струм не може змінюватися стрибком, тому в момент комутації при  $t = 0$   $i(0) = \frac{E}{r}$  і рівнянь (7.32) запишеться так

$$\frac{E}{r} = A. \quad (7.33)$$

Остаточно одержимо рівняння перехідного струму при короткому

замиканні котушки

$$i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (7.34)$$

де постійна інтегрування струму

$$I_0 = \frac{E}{r}. \quad (7.35)$$

Покажемо перехідний струм на графіку (рисунок 7).

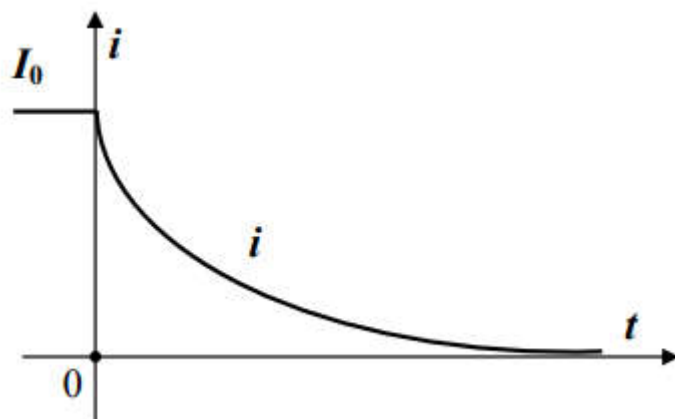


Рисунок 7.7 Графік перехідного струму при короткому замиканні котушки

Після визначення рівняння перехідного струму легко знайти рівняння перехідної напругу на активному опорі та індуктивності котушки

$$u_r = E e^{-\frac{t}{\tau}}; \quad (7.36)$$

$$u_L = -E e^{-\frac{t}{\tau}}; \quad (7.37)$$

З рівняння (7.37) видно, що напруга на індуктивності та ЕРС самоіндукції в момент комутації змінюються стрибком. ЕРС самоіндукції підтримує протікання струму у колі в попередньому напрямку.

Початковий запас енергії магнітного поля котушки дорівнює

$$W_L = \frac{LI_0^2}{2} = \frac{LE^2}{2r^2}. \quad (7.38)$$

Енергія, що виділяється в активному опорі за час перехідного процесу дорівнює

$$W_r = \int_0^{\infty} ri^2 dt = \frac{E^2}{r} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = -\frac{E^2 \tau}{2r} \int_0^{\infty} = \frac{LE^2}{2r^2}. \quad (7.39)$$

Таким чином, енергія, що виділяється в активному опорі котушки  $W_r$  при перехідному процесі і енергія магнітного поля котушки  $W_L$  рівня, тобто при

перехідному процесі в колі вся енергія магнітного поля виділяється в активному опорі  $r$  у вигляді теплоти.

### **Список літератури**

[1: с.193-204]; [2: с.327-334].

### 8.3. Зарядження конденсатора через резистор

Розглянемо розрахункову схему послідовного з'єднання активного опору і ємності ідеального конденсатора в колі з постійною ЕРС (рисунок 8.1).

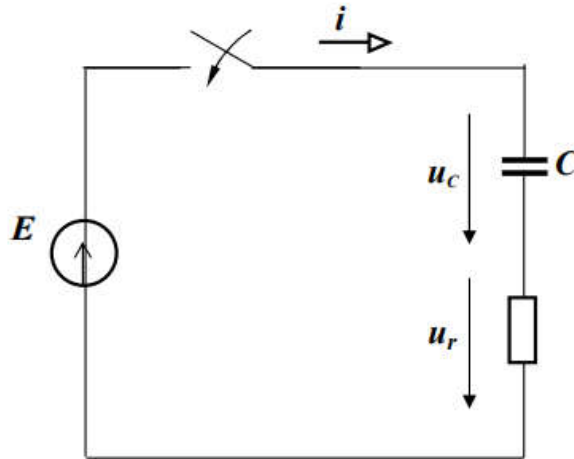


Рисунок 8.1 Розрахункова схема перехідного процесу в колі з постійною ЕРС у при зарядженні конденсатора через резистор

Знайдемо закон зміни напруги на ємності. Запишемо для кола після комутації рівняння за другим законом Кірхгофа

$$u_r + u_c = E. \quad (8.1)$$

Враховуючи, що напруга на активному опорі дорівнює

$$u_r = ri = rC \frac{du_c}{dt} = \tau \frac{du_c}{dt}, \quad (8.2)$$

де  $\tau = r \cdot C$  – постійна часу кола, с;

одержимо диференціальне рівняння напруги для кола після комутації

$$\tau \frac{du_c}{dt} + u_c = E. \quad (8.3)$$

Перехідна напруга на конденсаторі

$$u_c = u_{cпр} + u_{cв}. \quad (8.4)$$

Примусова складова напруги на ємності

$$u_{cпр} = E. \quad (8.5)$$

Характеристичне рівняння і корінь рівняння

$$\tau \cdot p + 1 = 0; \quad p = -\frac{1}{\tau}; \quad (8.6)$$

Знаходимо вільну напругу на ємності

$$u_{CB} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (8.7)$$

Таким чином, загальне рішення рівняння перехідної напруги на ємності

$$u_C = E + Ae^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (8.8)$$

Знаходимо постійну інтегрування перехідної напруги на ємності з початкових умов: у момент комутації відповідно до другого закону комутації, напруга на ємності конденсатора дорівнює нулю, тобто при  $t = 0$   $u_C(0) = 0$ , таким чином, рівняння (8.8) для цього моменту часу

$$0 = E + A, \quad (8.9)$$

З (8.9) постійна інтегрування напруги на ємності конденсатора

$$A = -E; \quad (8.10)$$

Закон зміни перехідної напруги на ємності після комутації

$$u_C = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \quad (8.11)$$

Покажемо перехідну напругу на ємності на графіку (рисунок 8.2).

Отримаємо рівняння перехідного струму при зарядженні конденсатора через резистор в колі з постійною ЕРС

$$i = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{d}{dt} \left[ E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \right] = \frac{CE}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{r} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (8.12)$$

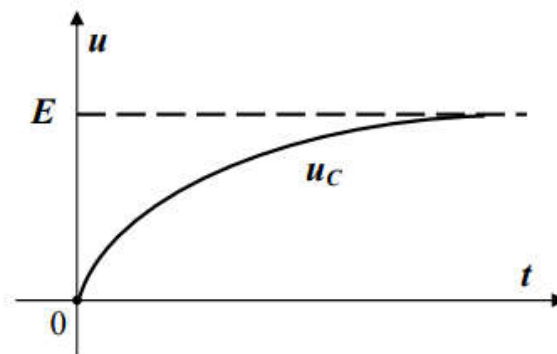


Рисунок 8.2 Графік перехідної напруги на ємності при зарядженні конденсатора через резистор в колі з постійною ЕРС

З рівняння (8.12) видно, що в момент комутації струм в колі змінюється

стрибком від нуля до значення  $\frac{E}{r}$  і потім поступово зменшується.

Рівняння перехідної напруги на активному опорі згідно (8.12)

$$u_r = ri = Ee^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (8.13)$$

Так само як і струм, напруга на активному опорі теж змінюється стрибком від нуля до значення  $E$ , а потім поступово зменшується.

Розглянемо енергетичний бік процесу заряду конденсатора. Енергія, що надходить від джерела, накопичується на конденсаторі і витрачається на нагрів резистора

$$\int_0^{\infty} Eidt = \int_0^{\infty} (u_r i + u_c i) dt = \int_0^{\infty} ri^2 dt + \int_0^{\infty} Cu_c du_c \quad (8.14)$$

або

$$E \int_0^{\infty} C du_c = CE^2 = \int_0^{\infty} ri^2 dt + \frac{CE^2}{2}, \quad (8.15)$$

тобто з (8.15)

$$\int_0^{\infty} ri^2 dt = \frac{CE^2}{2}. \quad (8.16)$$

Таким чином, при будь-яких значеннях  $r$  і  $C$  половина енергії, отриманої від джерела за час перехідного періоду, перейде в теплоту на активному опорі, а друга половина накопичиться в електричному полі конденсатора.

#### 8.4. Розрядження конденсатора через резистор

Нехай тепер конденсатор, заряджений до напруги  $E$ , у момент комутації замикається на активний опір (рисунок 8.3).

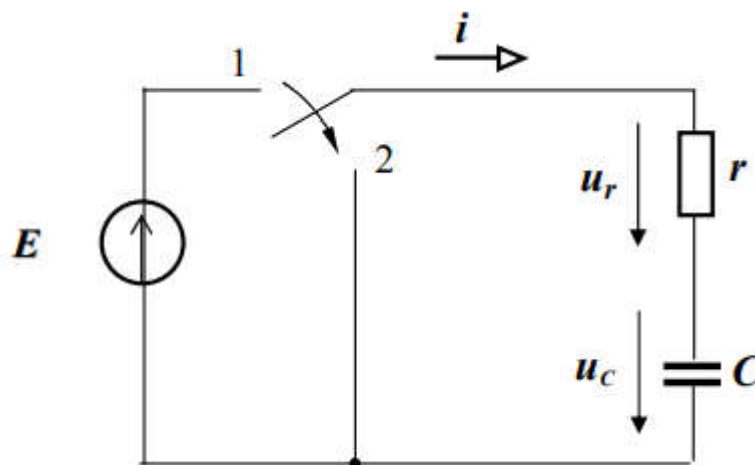


Рисунок 8.3 Розрахункова схема перехідного процесу при розрядженні конденсатора через резистор

Знайдемо закон зміни напруги на ємності конденсаторі в післякомутаційний період.

Для післякомутаційного кола справедливі рівняння згідно з другим законом Кірхгофа

$$u_r + u_c = ri + u_c = rC \frac{du_c}{dt} + u_c = \tau \frac{du_c}{dt} + u_c = 0; \quad (8.17)$$

У даному випадку перехідна напруга на ємності конденсатора не має примусової складової, тобто  $u_{cпр} = 0$ .

Одержимо характеристичне рівняння і корінь характеристичного рівняння для кола після комутації

$$\tau \cdot p + 1 = 0; \quad p = -\frac{1}{\tau}; \quad (8.18)$$

Рівняння вільної складової напруги на ємності аналогічно (8.7). Знайдемо постійну інтегрування напруги на ємності з початкових умов: у момент комутації за другим законом комутації напруга на ємності дорівнює  $E$ , тобто при  $t = 0$   $u(0) = E$  і тоді

$$E = A, \quad (8.19)$$

Рівняння перехідної напруги на ємності при розрядженні конденсатора через резистор

$$u_c = E e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (8.20)$$

Графік перехідної напруги на ємності при розрядженні конденсатора через резистор буде наступним (рисунок 8.4)

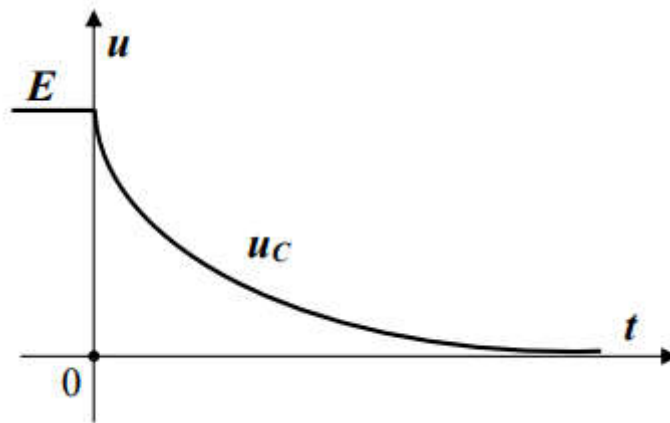


Рисунок 8.4 Графік напруги на ємності  $u_C=f(t)$

Знайдемо рівняння перехідного струму у колі при розрядженні конденсатора через резистор

$$i = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{d}{dt} E e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{CE}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{E}{r} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (8.21)$$

Рівняння напруги на активному опорі

$$u_r = -E e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (8.22)$$

З енергетичної точки зору

$$\int_0^{\infty} r i^2 dt = \frac{E^2}{r} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = -\frac{E^2 \tau}{2r} e^{-\frac{2t}{\tau}} \Big|_0^{\infty} = \frac{CE^2}{2}. \quad (8.23)$$

Енергія, накопичена у конденсаторі, витрачається на тепло в резисторі.

### Список літератури

[1: с.201-203]; [2: с.443-449].

## ЛЕКЦІЯ 9

### 9.3. Перехідний процес у колі з послідовно з'єднаними котушкою і конденсатором

Розглянемо випадок включення послідовно з'єднаних котушки і конденсатора при постійній напрузі джерела живлення (рисунок 9.1).

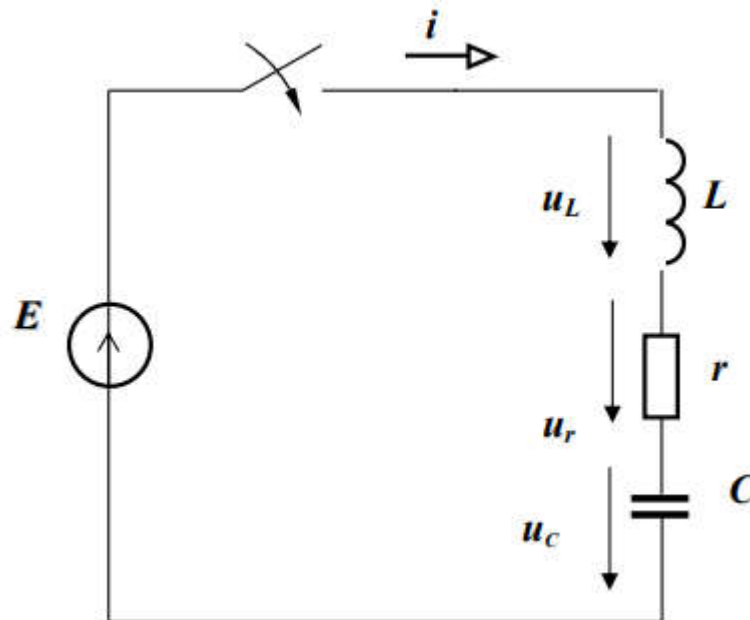


Рисунок 9.1 Розрахункова схема включення послідовно з'єднаних котушки і конденсатора на постійну напругу джерела живлення

Для післякомутаційного режиму справедливе рівняння

$$u_L + u_r + u_c = L \frac{di}{dt} + ri + \frac{1}{C} \int i dt = E. \quad (9.1)$$

Якщо продиференціювати обидві частини рівняння (9.1), то одержимо диференціальне рівняння другого порядку

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 2\alpha \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0 \quad (9.2)$$

де прийняті наступні позначення

$$2\alpha = \frac{r}{L}; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}. \quad (9.3)$$

Рівняння (9.3) однорідне, а це значить, що струм у даному колі має тільки вільну складову.

Прийmemo, що  $\frac{di}{dt} = p$ , з (9.2) отримаємо характеристичне рівняння

$$p^2 + 2\alpha p + \omega^2 = 0, \quad (9.4)$$

Оскільки характеристичне рівняння другого порядку, тоді вільний струм має дві постійні інтегрування  $A_1$  і  $A_2$ , два корені характеристичного рівняння  $p_1$  і  $p_2$

$$p_{1,2} = -\alpha \mp \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}. \quad (9.5)$$

Рівняння вільного струму у загальному вигляді

$$i_B = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (9.6)$$

де  $A_1$  і  $A_2$  – постійні інтегрування струму,  $A$ ;  $p_1$  і  $p_2$  – корені характеристичного рівняння,  $1/c$ .

Таким чином, характер вільного процесу залежить від параметрів котушки і конденсатора ( $L, r, C$ ), тобто від коренів характеристичного рівняння і знака дискримінанту, який визначає, будуть корені дійсними ( $D > 0$ ) або комплексними ( $D < 0$ ). Можливі три випадки розвитку перехідного процесу.

*Перший випадок.* Якщо  $\alpha > \omega_0, D > 0$ , тоді співвідношення параметрів кола

$$\frac{r}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}} \rightarrow r > 2\sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (9.7)$$

тоді корені  $p_1$  і  $p_2$  дійсні, негативні та різні. При цьому загальне рішення рівняння перехідного струму (9.8) запишеться

$$i = i_{np} + i_{св} = i_{np} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} \quad (9.8)$$

Примусовий струм  $i_{np} = 0$ , оскільки в колі постійного струму у примусовому режимі  $x_C^{(0)} = 0$ .

Постійні інтегрування знаходяться з початкових умов Незалежні початкові умови, згідно законів комутації, у момент комутації  $t = 0$   $i(0) = 0$  і  $u_C(0) = 0$ . Залежні початкові умови знайдемо з рівняння для кола згідно другого закону Кірхгофа при  $t = 0$

$$E = r \cdot i(0) + u_L(0) + u_C(0) \Rightarrow u_L(0) = E \quad (9.9)$$

Для знаходження постійних інтегрування струму  $A_1$  і  $A_2$  складемо систему рівнянь: перехідного струму  $i$  та першої похідної струму  $i'$

$$\begin{cases} i = 0 + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}; \\ i' = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}. \end{cases} \quad (9.10)$$

Перша похідна з урахуванням початкових умов, оскільки

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt} = L \cdot i' \Rightarrow i'(0) = \frac{u_L(0)}{L} = \frac{E}{L}. \quad (9.11)$$

Система рівнянь (9.10) з урахуванням початкових умов і першої похідної струму при  $t = 0$  має вигляд

$$\begin{cases} 0 = A_1 + A_2 \Rightarrow -A_1 = A_2 \\ \frac{E}{L} = p_1 \cdot A_1 + p_2 A_2 \Rightarrow \frac{E}{L} = p_1 \cdot A_1 - p_2 A_1 = A_1(p_1 - p_2). \end{cases} \quad (9.12)$$

З (9.12) маємо

$$A_1 = -A_2 = \frac{E}{L(p_1 - p_2)}. \quad (9.13)$$

Рівняння перехідного струму

$$i = \frac{E}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}). \quad (9.14)$$

Побудуємо графік перехідного струму (рисунок 9.2).

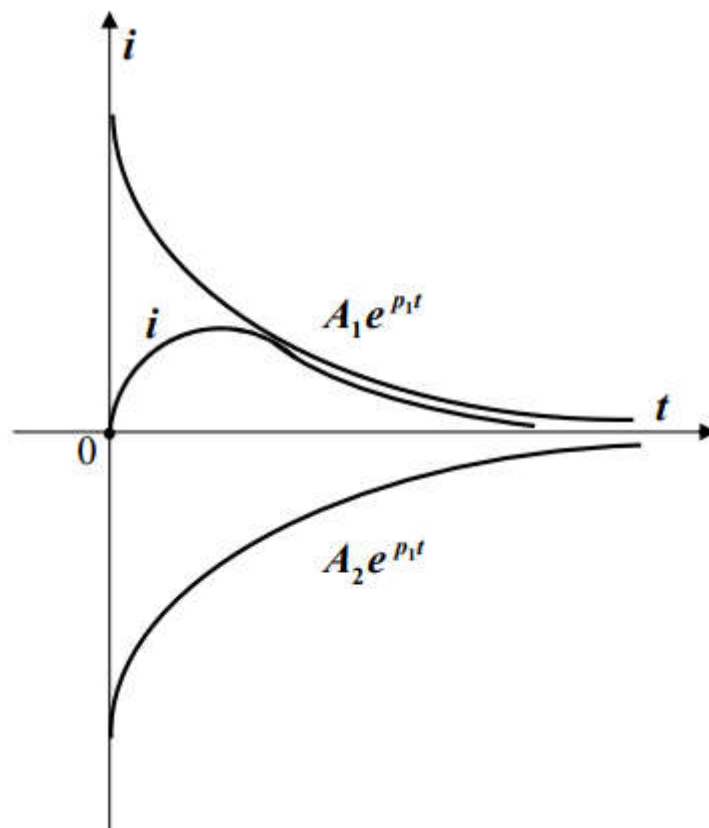


Рисунок 2 Графік перехідного струму при заряді конденсатора, якщо  $D > 0$

З графіку слідує, що перехідний струм в колі не змінює напрям і у колі йде накопичення зарядів на конденсаторі - це аперіодичний процес.

Другий випадок. Якщо  $\alpha < \omega_0$ ,  $r = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ , то  $D = 0$ , корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені

$$p_{1,2} = -\alpha \mp \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \mp j\omega, \quad (9.15)$$

де  $\omega$  – частота вільних затухаючих коливань, рад/с. Визначається як

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}. \quad (9.16)$$

Загальний вигляд рівняння перехідного струму аналогічний (9.8). Постійні інтегрування  $A_1$  і  $A_2$

$$A_1 = -A_2 = \frac{E}{\omega L}. \quad (9.17)$$

Підставляючи значення коренів, постійних інтегрування у (9.8), знаходимо рівняння перехідного струму

$$i = \frac{E}{\omega L} e^{(-\alpha+j\omega)t} - \frac{E}{\omega L} e^{(-\alpha-j\omega)t} = \frac{E}{\omega L} e^{-\alpha t} \cdot (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}). \quad (9.18)$$

або

$$i = \frac{E}{\omega L} e^{-\alpha t} \cdot \sin\omega t. \quad (9.19)$$

На рисунку 9.3 показаний графік перехідного струму в цьому випадку.

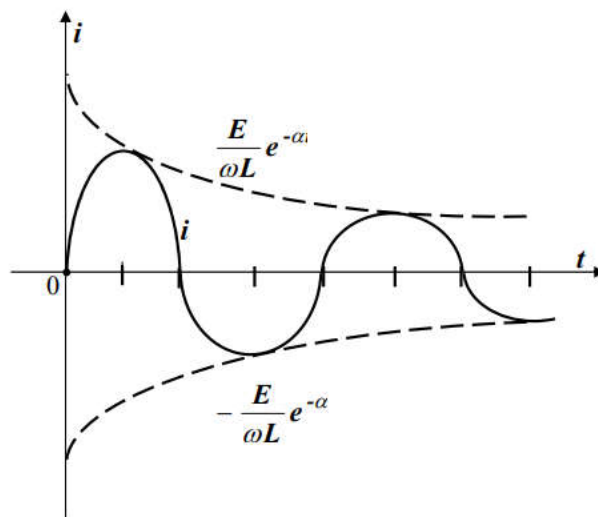


Рисунок 9.3 Графік перехідного струму при заряді конденсатора, якщо  $D < 0$

З графіку слідує, що перехідний струм в колі змінює напрям впродовж накопичення зарядів на конденсаторі - це періодичний процес.

Третій випадок. Якщо  $\alpha = \omega_0$ ,  $r = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ , то  $D=0$ , корені  $p_{1,2} = -\alpha$ , однакові,

дійсні, негативні, заряд гранично аперіодичний.

Загальне рішення рівняння (9.19) у цьому випадку має дріб

$$\frac{\sin \omega t}{\omega} \rightarrow \frac{0}{0}. \quad (9.20)$$

Виникає математична невизначеність, для розкриття якої по правилу Лопіталя продиференціюємо чисельник і знаменник за  $\omega$ .

$$\left(\frac{\sin \omega t}{\omega}\right)' \int_{\omega \rightarrow 0} = \frac{t \cdot \cos \omega t}{1} = 0. \quad (9.21)$$

Рівняння перехідного струму у цьому випадку наступне

$$i = (A_1 + A_2 t)e^{-at}. \quad (9.22)$$

Форма кривої струму така ж, як і в першому випадку.

В усіх трьох розглянутих випадках під дією джерела постійної ЕРС відбувається заряджання конденсатора. У першому і третьому випадках зарядний струм не змінює свого напрямку, що характеризує аперіодичний процес. В другому випадку струм являє собою затухаючу синусоїду, що характеризує коливальний процес. Коливання в контурі виникають внаслідок періодичного взаємного перетворення енергії електричного поля, яка накопичується в конденсаторі, та магнітного поля котушки.

Наявність активного опору в колі приводить до затухання коливань внаслідок розсіювання енергії в активному опорі. Характер процесу залежить від коренів характеристичного рівняння, які, у свою чергу, визначаються співвідношенням параметрів елементів кола.

#### **9.4. Розрядка конденсатора на котушку**

Нехай тепер заряджений до значення  $E$  конденсатор у момент часу  $t = 0$  підключається до затисків котушки (рисунок 9.4).

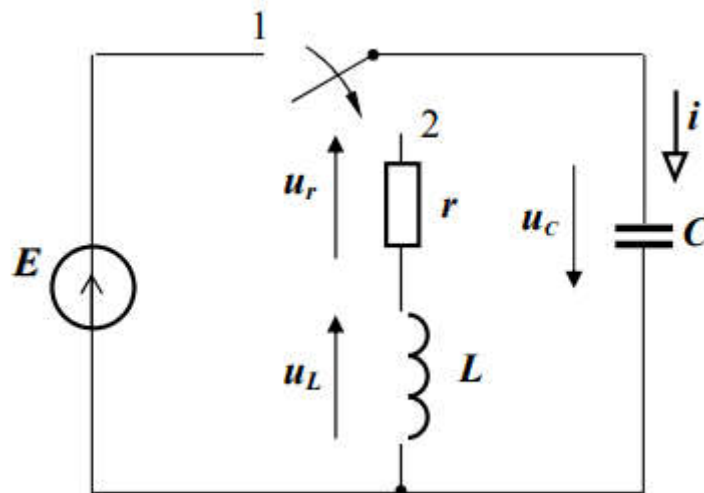


Рисунок 9.4 Розрахункова схема послідовно з'єднаних котушки і конденсатора при розряді конденсатора на котушку

Для післякомутаційної схеми справедливе рівняння

$$u_L + u_r + u_C = L \frac{di}{dt} + ri + \frac{1}{C} \int idt = 0. \quad (9.23)$$

Характеристичне рівняння (4). В залежності від коренів характеристичного рівняння можливий аперіодичний і періодичний розряд конденсатора на котушку.

*Перший випадок.* Якщо  $\alpha > \omega_0, D > 0$ , тоді  $r > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$  тоді корені  $p_1$  і  $p_2$  дійсні, негативні та різні.

Знайдемо рівняння перехідної напруги на ємності  $u_C$  і перехідного струму  $i$ . Примусовий струм  $i_{np} = 0$ . Примусова напруга на ємності  $u_{Cnp} = 0$ .

Загальне рішення рівняння перехідного струму (98). У загальному вигляді рівняння перехідної напруги на ємності  $u_C$

$$u_C = 0 + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (9.24)$$

Постійні інтегрування знаходяться з початкових умов Незалежні початкові умови, згідно законів комутації, у момент комутації при  $t = 0$   $i(0) = 0$ , оскільки  $x_C^{(0)} = 0$ , а  $u_C(0) = E$ .

Для знаходження постійних інтегрування струму  $A_1$  і  $A_2$  складемо систему рівнянь: перехідної напруги  $u_C$  та першої похідної  $u_C'$

$$\begin{cases} u_C = 0 + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}; \\ u'_C = p_1 \cdot A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \end{cases} \quad (9.25)$$

Перша похідна з урахуванням початкових умов, оскільки

$$i = C \cdot \frac{du_C}{dt} = C \cdot u'_C \Rightarrow u'_C(0) = \frac{i(0)}{C} = 0. \quad (9.26)$$

Визначимо постійні інтегрування напруги на ємності  $A_1$  і  $A_2$

$$A_1 = \frac{E p_2}{p_2 - p_1}, \quad A_2 = \frac{-E p_1}{p_2 - p_1}. \quad (9.27)$$

Рівняння перехідної напруги на ємності

$$u_C = \frac{E}{p_2 - p_1} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}). \quad (9.28)$$

Побудуємо графік перехідної напруги на ємності (рисунок 9.5).

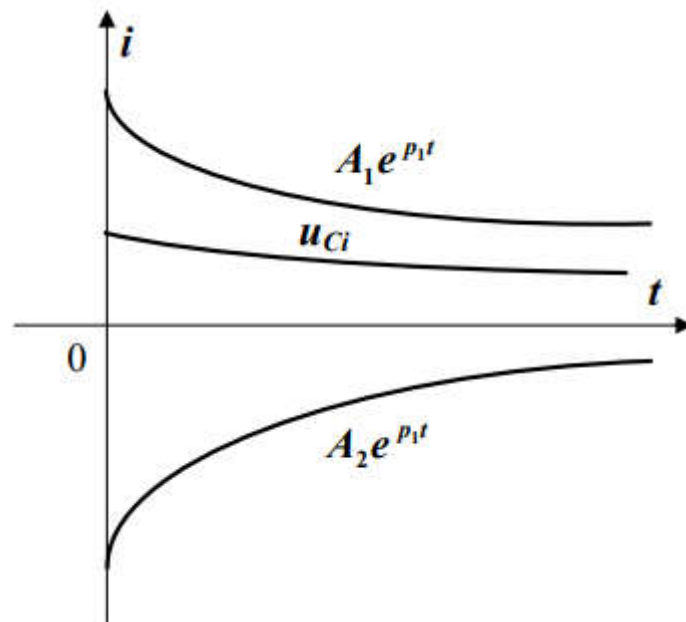


Рисунок 9.5 Графік перехідної напруги на ємності при розряді конденсатора, якщо  $D > 0$

Рівняння перехідного струму в колі

$$i = \frac{C \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot E}{p_1 - p_2} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}). \quad (9.29)$$

З графіку слідує, що перехідна напруга на ємності при розряді не перетинає вісь часу - це **апериодичний процес**.

Другий випадок. Якщо  $\alpha < \omega_0$ ,  $r = \sqrt{\frac{L}{C}}$ , то  $D = 0$ , корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені (9.15).

$$A_1 = -A_1 = \frac{E}{\omega \cdot \sqrt{L \cdot C}} \quad (9.30)$$

Рівняння перехідної напруги на ємності

$$u_C = \frac{E \omega_0}{\omega} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \cos \omega t. \quad (9.31)$$

На рисунку 9.6 показаний графік перехідного процесу в цьому випадку.

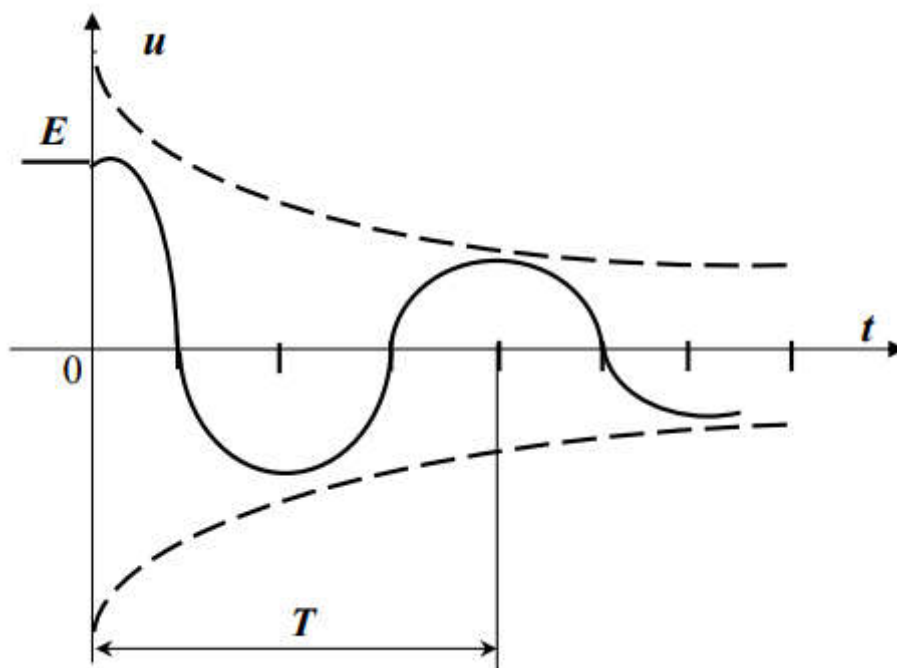


Рисунок 6 Графік перехідної напруги на ємності при розряді конденсатора, якщо  $D < 0$

З графіку слідує, що конденсатор при розрядці обмінюється енергією з котушкою - це **періодичний процес**.

Коливальний процес при розрядці конденсатора на котушку характеризується періодом власних коливань

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}} \quad (9.32)$$

Якщо втрати енергії в контурі відсутні ( $r = 0$ ,  $\alpha = 0$ ), то

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (9.33)$$

Таким чином, *LC-контур*, у якому будь-яким способом компенсуються втрати енергії, може служити генератором незатухаючих гармонічних коливань.

*Третій випадок.* Якщо  $\alpha < \omega_0$ ,  $r = \sqrt{\frac{L}{C}}$ , то  $D = 0$ , корені  $p_{1,2} = -\alpha$ , однакові, дійсні, негативні.

Рівняння перехідної напруги на ємності

$$u_C = E(1 - pt) \cdot e^{-\alpha t} = E(1 + \alpha t) \cdot e^{-\alpha t}. \quad (9.34)$$

Розряд конденсатора на котушку **гранично аперіодичний**.

### Список літератури

[1: с.204-207]; [2: с.252-254]; [5: с.450-454].

## ЛЕКЦІЯ 10

### 10.3. Включення котушки при синусоїдній напрузі

Нехай котушка індуктивності підключається до джерела гармонійної ЕРС з рівнянням (рисунок 10.1).

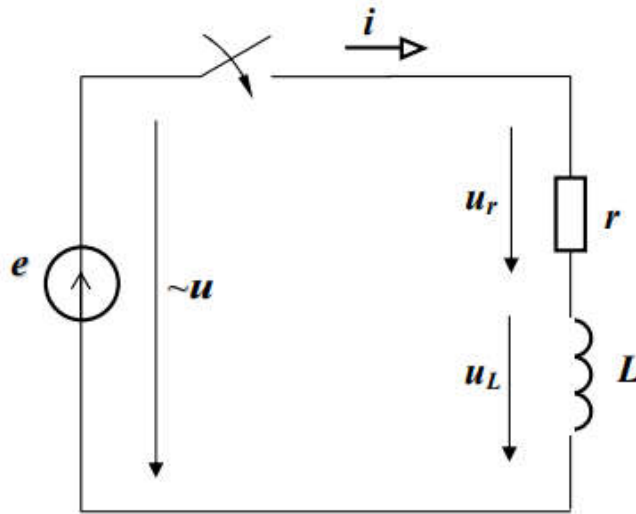


Рисунок 10.1 Розрахункова схема підключення котушки до джерела синусоїдної напруги

$$e = E_m \sin(\omega t + \psi_e). \quad (10.1)$$

Для цього кола в післякомутаційний період справедливі рівняння

$$L \frac{di}{dt} + ri = e \quad (10.2)$$

або

$$\tau \frac{di}{dt} + i = \frac{E_m}{r} \sin(\omega t + \psi_i), \quad (10.3)$$

де  $\tau$  – постійна часу перехідного процесу

В загальному вигляді рівняння перехідного струму можна записати у вигляді суми вільної і примусової складових

$$i = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}}. \quad (10.5)$$

Примусовий (сталий) струм у колі

$$i_{\text{пр}} = I_m \sin(\omega t + \psi_e - \varphi), \quad (10.6)$$

де  $I_m$  – максимальний струм, А. Визначимо як

$$I_m = \frac{E_m}{z}. \quad (10.7)$$

Повний опір електричного кола в перехідному режимі

$$z = \sqrt{r^2 + (\omega L)^2}. \quad (10.8)$$

Кут зсуву фаз між напругою і струмом кола в перехідному режимі

$$\varphi = \left| \arctg \frac{\omega L}{r} \right|. \quad (10.9)$$

Вільна складова струму змінюється за експонентою  $i_{\text{в}} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ .

Рівняння перехідного струму у загальному вигляді з урахуванням примусової складової струму

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_e - \varphi) + Ae^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (10.10)$$

Знаходимо постійну інтегрування перехідного струму з початкових умов:  $t = 0$   $i(0) = 0$ , тому

$$A = -I_m \sin(\psi_e - \varphi). \quad (11.11)$$

Остаточно одержимо рівняння перехідного струму у колі

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_e - \varphi) - I_m \sin(\psi_e - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (10.12)$$

Максимально можливого значення струм досягає, якщо в момент включення котушки примусовий струм буде мати амплітудне значення при початковій фазі  $\psi_i = \left( \psi_e - \varphi = \frac{\pi}{2} \right)$ , а постійна часу кола буде дуже великою ( $r \approx 0, \tau \rightarrow \infty$  і  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ), тобто вільний струм буде затихати дуже повільно (рисунок 10.2).

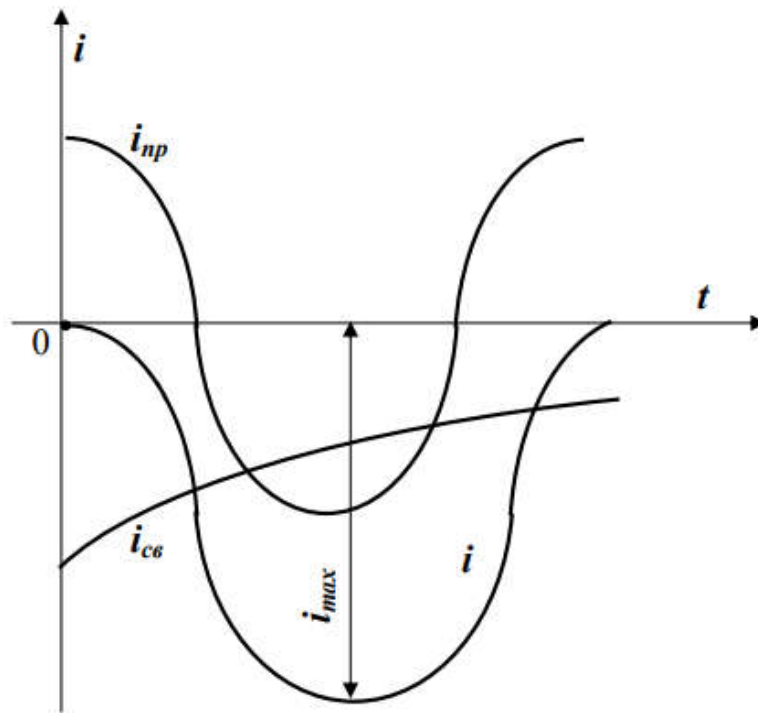


Рисунок 10.2 Графіки примусової, вільної і перехідного струму при його початковій фазі  $\psi_i = \left(\psi_e - \varphi = \frac{\pi}{2}\right)$

За цих умов  $i$  прикладена напруга буде проходити через нуль. У цьому випадку амплітуда перехідного струму може досягти подвоєного значення амплітуди примусового (усталеного) струму.

#### 10.4. Включення послідовно з'єднаних резистора і конденсатора при синусоїдній напрузі

Нехай послідовно з'єднані резистор і конденсатор підключаються до джерела синусоїдної ЕРС (рисунок 10.3), що має миттєве рівняння

$$e = E_m \sin(\omega t + \psi_e). \quad (10.13)$$

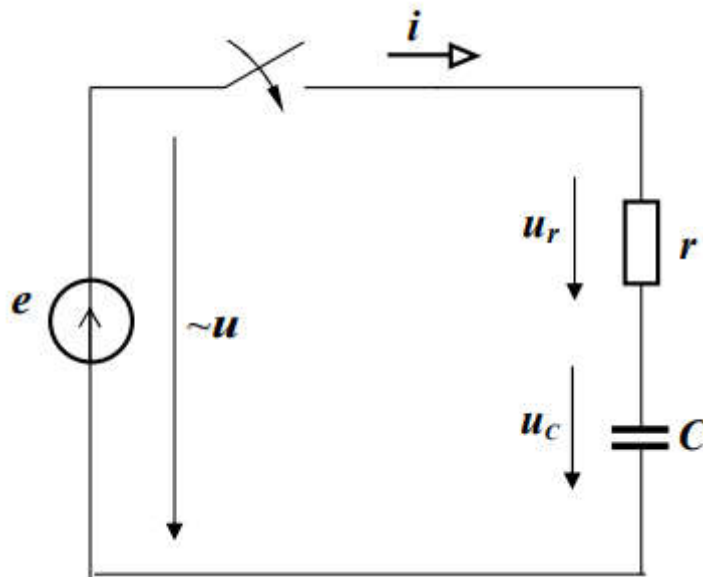


Рисунок 3 Розрахункова схема послідовно з'єднаних резистора і конденсатор при підключенні до джерела синусоїдної ЕРС

Для цього кола справедливе рівняння за другим законом Кірхгофа

$$ri + \frac{1}{C} \int idt = e. \quad (10.14)$$

Струм у колі

$$i = C \frac{du_C}{dt}, \quad (10.15)$$

тоді

$$rC \frac{du_C}{dt} + u_C = e \quad (10.16)$$

$$r \frac{du_C}{dt} + u_C = e \quad (10.17)$$

де  $\tau = r \cdot C$  – постійна часу кола,  $s$ .

Перехідна напруга на ємності

$$u_C = u_{Cnp} + u_{Ccv} \quad (10.18)$$

Примусова (усталена) напруга на ємності

$$u_{Cmn} = U_{Cm} \sin(\omega t + \psi_e + \varphi - 90^\circ), \quad (10.19)$$

оскільки рівняння примусового струму

$$i_{np} = I_m \sin(\omega t + \psi + \varphi), \quad (10.20)$$

де амплітудний струм в колі

$$I_m = \frac{E_m}{z}. \quad (10.21)$$

Повний опір кола

$$z = \sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}. \quad (10.22)$$

Рівняння вільної складової напруги на ємності

$$u_{Cв} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (10.23)$$

Для напруги на ємності рівняння у загальному вигляді

$$u_{Cн} = U_{Cm} \sin(\omega t + \psi_e + \varphi - 90^\circ) + Ae^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (10.24)$$

Знаходимо постійну інтегрування напруги на ємності з початкових умов:  $t = 0$   $u_C(0) = 0$

$$A = -U_{Cm} \sin(\psi + \varphi - 90^\circ). \quad (10.25)$$

Остаточно рівняння перехідної напруги на ємності з урахуванням (10.25)

$$u = U_{Cm} \sin(\omega t + \psi + \varphi - 90^\circ) - U_{Cm} \sin(\psi + \varphi - 90^\circ). \quad (10.26)$$

Максимально можливого значення напруга на ємності досягає, якщо в момент включення кола примусова складова напруги буде мати амплітудне значення. Це буде мати місце за умови, якщо початкова фаза напруги на ємності  $\psi_{uc} = \psi_e + \varphi = \pi$ . Крім того, будемо вважати, що постійна часу кола має дуже мале значення, оскільки активний опір конденсатора  $r \rightarrow 0$  (рисунок 10.4).

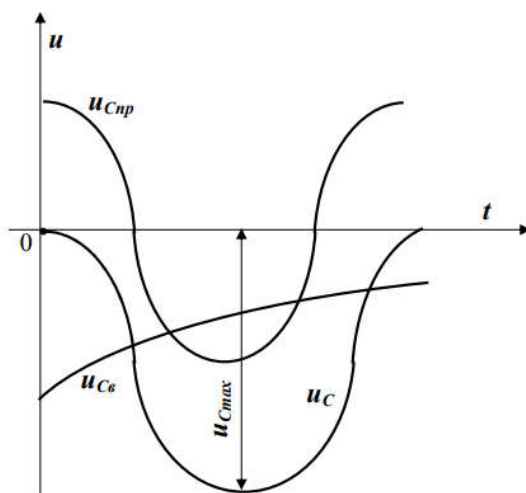


Рисунок 10.4 Графік примусової, вільної і перехідної напруги на ємності, якщо початкова фаза напруги на ємності

$$\psi_{uc} = \psi_e + \varphi = \pi$$

У цьому випадку максимальне значення перехідної напруги на ємності може досягати майже подвоєного значення амплітуди примусової складової перехідної напруги на ємності.

### **Список літератури**

[1: с.208-210]; [2: с.336-338; 342-343].

## ЛЕКЦІЯ 11

### 11.4. Розрахунок перехідного процесу в розгалуженому колі

Нехай задана розрахункова схема (рисунок 11.1) та відомі всі параметри і ЕРС. Необхідно знайти струми в розгалуженнях і напруги на всіх елементах під час перехідного процесу.

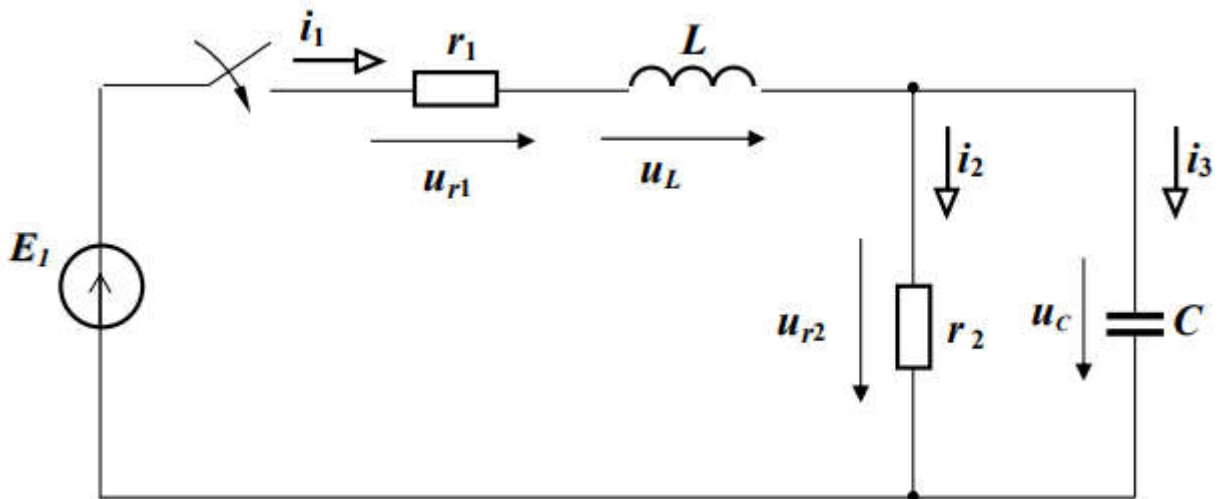


Рисунок 1.11 Розрахункова схема розгалуженого кола

Кожна електрична величина в перехідному процесі буде мати примушену і вільну складову, через що розрахунок перехідного процесу в розгалуженому колі зводиться до визначення примушених і вільних складових струмів і напруг, а також постійних інтегрування:

а) визначення вільних складових струмів і напруг.

Післякомутаційної схеми складаємо рівняння за законами Кірхгофа

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\ L \frac{di_1}{dt} + r_1 i_1 + r_2 i_2 = E_1 \\ r_2 i_2 - \frac{1}{C} \int i_3 dt = 0. \end{cases} \quad (11.1)$$

У цих рівняннях  $i_1$ ,  $i_2$  і  $i_3$  – повні струми.

Перепишемо систему рівнянь для вільних складових струмів

$$\begin{cases} i_{1B} - i_{2B} - i_{3B} = 0 \\ L \frac{di_{1B}}{dt} + r_1 i_{1B} + r_2 i_{2B} = 0 \\ r_2 i_{2B} - \frac{1}{C} \int i_{3B} dt = 0. \end{cases} \quad (11.2)$$

Вільний струм можна визначити шляхом рішення однорідного диференціального рівняння, яке записується у вигляді показової функції  $Ae^{pt}$ . Таким чином, кожний вільний струм може бути представлений у вигляді

$$i_g = Ae^{pt}. \quad (11.3)$$

Постійна інтегрування  $A$  для кожного вільного струму різна, а показники затухання  $p$  однакові для всіх вільних струмів, тому що все коло охоплене єдиним перехідним процесом.

Візьмемо похідну від вільного струму

$$\frac{di_g}{dt} = \frac{d}{dt}(Ae^{pt}) = pAe^{pt} = pi_g. \quad (11.4)$$

Знайдемо інтеграл від вільного струму

$$\int i_g dt = \int Ae^{pt} = \frac{Ae^{pt}}{p} = \frac{i_g}{p}. \quad (11.5)$$

Перепишемо систему рівнянь (11.2) з урахуванням (11.5) і (11.4)

$$\begin{cases} i_{1B} - i_{2B} - i_{3B} = 0 \\ (pL + r_1)i_{1B} + r_2 i_{2B} = 0 \\ r_2 i_{2B} - \frac{i_{3B}}{pC} = 0. \end{cases} \quad (11.6)$$

Отримана система рівнянь являє собою систему алгебраїчних рівнянь відносно  $i_{1g}, i_{2g}, i_{3g}$  та не містить похідних і інтегралів.

Вирішимо систему рівнянь (11.6) методом визначників

$$i_{1B} = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad i_{2B} = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad i_{3B} = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \quad (11.7)$$

Знаходимо визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ (pL + r_1) & r_2 & 0 \\ 0 & r_2 & -\frac{1}{pC} \end{vmatrix}. \quad (11.8)$$

Знаходимо доповнення визначника

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & r_2 & -\frac{1}{pC} \end{vmatrix}; \quad (11.9)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ (pL + r_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{pC} \end{vmatrix}; \quad (11.10)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ (pL + r_1) & r_2 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \end{vmatrix}. \quad (11.11)$$

Таким чином,  $\Delta_1 = 0$ ,  $\Delta_2 = 0$ ,  $\Delta_3 = 0$ , тому що

$$i_{1B} = \frac{0}{\Delta}; \quad i_{2B} = \frac{0}{\Delta}; \quad i_{3B} = \frac{0}{\Delta}. \quad (11.12)$$

Кожний з вільних струмів не може дорівнювати нулю, оскільки в цьому випадку не будуть виконуватися закони комутації. А це може бути тільки тоді, коли визначник системи  $\Delta$  дорівнює нулю, тобто  $\Delta = 0$ .

Рівняння  $\Delta = 0$  називають характеристичним. Єдиним невідомим у ньому є корінь  $p$ . У даному прикладі одержимо

$$\frac{r_2}{pC} + r_2(pL + r_1) + \frac{pL + r_1}{pC} = 0 \quad (11.13)$$

або

$$r_2LCp^2 + (r_1r_2C + L)p + (r_1 + r_2) = 0. \quad (11.14)$$

Корені квадратного рівняння

$$p_{1,2} = \frac{-(r_1r_2C + L) \pm \sqrt{(r_1r_2C + L)^2 - 4r_2LC(r_1 + r_2)}}{2r_2LC}. \quad (11.15)$$

Знайшовши корені характеристичного рівняння системи, можна записати загальні вирази для кожного з вільних струмів. Можливі декілька випадків:

1) рівняння має один корінь, тоді

$$i_B = Ae^{pt}; \quad (11.16)$$

2) рівняння має два дійсних нерівних корені, тоді

$$i_B = A_1e^{p_1t} + A_2e^{p_2t}; \quad (11.17)$$

3) рівняння має два дійсних рівних корені, тоді

$$i_B = (A_1 + A_2t); \quad (11.18)$$

4) рівняння має два комплексно-спряжених корені, тоді

$$i_B = (A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t) e^{pt}. \quad (11.19)$$

б) знаходження примушених складових струмів і напруг виконується відомими методами;

в) знаходження загального рішення для струмів і напруг як суми примушених і вільних складових;

г) знаходження постійних інтегрування виконується з урахуванням початкових умов, які поділяються на незалежні і залежні початкові умови.

### 11.5. Перетворення Лапласа

Лінійні диференціальні рівняння з постійними коефіцієнтами можуть бути розв'язані за допомогою інтегральних перетворень Лапласа. Різним функціям дійсних змінних (часу  $t$ ) ці перетворення відповідають функції комплексної змінної  $p = \alpha + j\omega$  і навпаки. Комплексну змінну слід відрізнити від змінної  $p = \frac{d}{dt}$ , яка позначає оператор диференціювання. Пряме перетворення Лапласа функції часу  $f(t)$  визначається співвідношенням

$$F_{(p)} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (11.20)$$

Функцію  $f(t)$  називають оригіналом, а  $F(p)$  – зображенням функції  $f(t)$  за Лапласом. Таким чином, можна записати

$$f(t) \doteq F_{(p)}, \quad (11.21)$$

тобто оригінал відповідає зображенню.

Запишемо деякі зображення, що доводяться в курсі вищої математики:

зображення постійної величини

$$A \doteq \frac{A}{p}, \quad (11.22)$$

зображення похідної функції  $f(t)$

$$f(t) \doteq pF(p) - f(0) \quad (11.23)$$

зображення інтеграла функції  $f(t)$

$$\varphi(t) = \int f(t) dt \doteq \frac{F(p)}{p} + \frac{\varphi(0)}{p}. \quad (11.24)$$

## 11.6. Закони Ома і Кірхгофа в операторній формі

Нехай коло (рисунок 11.2) підключається до джерела напруги при ненульових початкових умовах, тобто до комутації в колі проходив деякий струм.

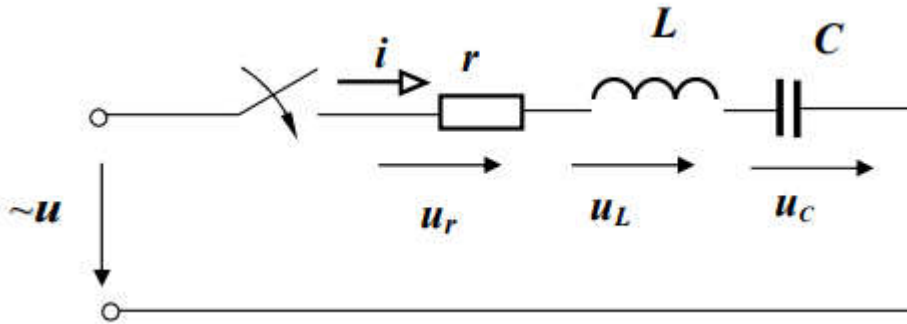


Рисунок 11.2 Розрахункова схема кола для миттєвих значень

Тоді можемо записати  $i(0) \neq 0$ ,  $u_C \neq 0$ . Складемо диференціальне рівняння перехідного процесу

$$ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt = u(t), \quad (11.25)$$

Замінімо оригінали функцій їх зображеннями за Лапласом (рисунок 11.3)

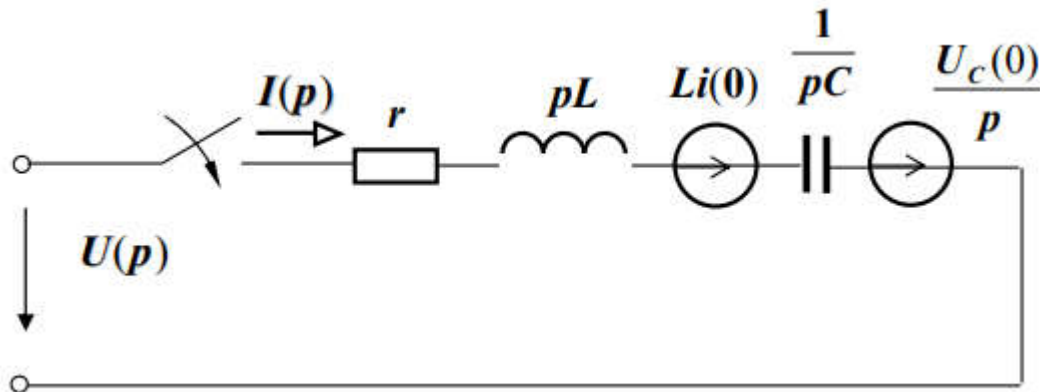


Рисунок 11.3 Розрахункова схема в операторній формі

$$i(t) \cong I(p); \quad u(t) \cong U(p); \quad \frac{di}{dt} \cong pI(p) - i(0); \quad (11.26)$$

$$\frac{1}{C} \int idt = u_C(t) \cong \frac{1}{C} \frac{I(p)}{p} + \frac{u_C(0)}{p}.$$

Тоді одержимо

$$rI(p) + pLI(p) - Li(0) + \frac{I(p)}{pC} + \frac{u_C(0)}{p} = U(p). \quad (11.27)$$

Звідки

$$I(p) = \frac{U(p) + Li(0) - \frac{u_C(0)}{p}}{r + pL + \frac{1}{pC}}. \quad (11.28)$$

Отримане рівняння подібне закону Ома в операторній формі для перехідного процесу при ненульових початкових умовах. У знаменнику знаходиться операторний опір

$$Z(p) = r + pL + \frac{1}{pC}. \quad (11.29)$$

Він може бути визначений з комплексу повного опору синусоїдного струму

$$Z = r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \quad (11.30)$$

шляхом заміни  $j\omega$  на  $p$ .

При нульових початкових умовах, тобто при  $i(0) = 0$  і  $u(0) = 0$ , одержимо

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} \quad (11.31)$$

Аналогічно можна записати закони Кірхгофа в операторній формі

$$\sum_{k=1}^n I_{k(p)} = 0; \quad (11.32)$$

$$\sum_{k=1}^n U_{k(p)} = \sum_{k=1}^n E_{k(p)}. \quad (11.33)$$

### Список літератури

[1: с.211-221]; [2: с.342-344].

## ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНИХ ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ

### Основна (базова) література

1. The influence of the design of the stator winding of a synchronous-reactive generator on increasing its energy efficiency / O. V. Iegorov et al. *Electrical Engineering & Electromechanics*. 2025. No. 5. P. 3–9. DOI: <https://doi.org/10.20998/2074-272x.2025.5.01>.
2. Воробкевича А., Шегедина О., Совин Р. Збірник задач з теоретичних основ електротехніки: навчальний посібник. Львів : Магнолія 2006, 2025. 224 с.
3. Генеруючі агрегати і станції. Частина 1 : конспект лекцій для здобувачів бакалаврського рівня вищої освіти ОПП "Електроенергетика, електротехніка та електромеханіки" спеціальності 141 "Електроенергетика, електротехніка та електромеханіки" денної форми здобуття вищої освіти / уклад. : В. Мардзявко, А. Руденко, Р. Чурило. Миколаїв : МНАУ, 2024. 60 с. URL: <https://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/17443>
4. Електрофізичні методи обробки сільськогосподарської продукції : метод. реком. для здобувачів початкового рівня (короткий цикл) вищої освіти ОПП "Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка" спеціальності 141 "Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка" денної форми здобуття вищої освіти / уклад. : А. Ю. Руденко, В. А. Мардзявко, Р. Є. Чурило. Миколаїв : МНАУ, 2024. 56 с. URL: <https://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/17446>
5. Кунденко М. П., Мардзявко В. А., Руденко А. Ю. Аналіз технології генерації НВЧ випромінення з визначенням адаптивного типу діодів для подальшого конструювання апаратів для знезараження. *Інтегровані технології та енергозбереження*. 2023. № 2. С. 24–37.
6. Кунденко М. П., Піх Є. О. Розробка технологічної схеми НВЧ–установки для сушіння зерна. *Енергетика і автоматика*. 2021. № 2. С. 75–85. DOI: <https://doi.org/10.31548/energiya2021.05.07575>
7. Рудик А. В., Филипчук Л. В., Кулик Н. І. Теоретичні основи

електротехніки. Частина 1. Практикум : навч. посіб. Рівне : НУВГП, 2024. 113 с.

8. Теоретичні основи електротехніки : метод. реком. для виконання практ. робіт здобувачами першого (бакалаврського) рівня вищої освіти ОПП «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» спеціальності G3 «Електрична інженерія» заочної форми здобуття вищої освіти / уклад. В. Мардзявко. Миколаїв : МНАУ, 2026. 78 с. URL: <https://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/24432>.

9. Хілов В. Теоретичні основи електротехніки. Київ : Каравела, 2021. 468 с.

10. Хілов В., Койфман О., Рухлов А. Практикум з дисципліни «Теоретичні основи електротехніки». Частина 1. Стаціонарні процеси у лінійних колах постійних, гармонійних однофазних, трифазних і полігармонійних струмів. Одеса : Олді+, 2024. 186 с.

11. Шегедин О., Маляр В. Теоретичні основи електротехніки : навчальний посібник. Ч. 1. Львів : Новий Світ – 2000, 2020. 168 с.

12. ДСТУ EN 60034-1:2016. Машини електричні обертові. Частина 1. Номінальні та робочі характеристики (EN 60034-1:2010; EN 60034-1:2010/AC:2010, IDT). Чинний від 2017-11-01. Київ : ДП «УкрНДНЦ», 2018. 114 с.

### Електронні ресурси

1. Сайт Міністерства освіти і науки України — <https://mon.gov.ua>
2. Національна бібліотека України імені В. І. Вернадського — <https://www.nbuv.gov.ua>
3. Репозитарій Національного університету «Львівська політехніка» — <https://ena.lpnu.ua>
4. Інституційний репозитарій НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського» — <https://ela.kpi.ua>
5. IEEE Xplore Digital Library — <https://ieeexplore.ieee.org>

6. ScienceDirect — <https://www.sciencedirect.com>
7. SpringerLink — <https://link.springer.com>
8. Wiley Online Library — <https://onlinelibrary.wiley.com>
9. Google Scholar — <https://scholar.google.com>
10. Освітня платформа Coursera (курси з електротехніки та теорії кіл) — <https://www.coursera.org>
11. MIT OpenCourseWare (Electrical Engineering) — <https://ocw.mit.edu>
12. Khan Academy (Electricity and Magnetism) — <https://www.khanacademy.org>
13. Інституційний Репозитарій Миколаївського Національного Аграрного Університету: URL: <https://dspace.mnau.edu.ua/>

### **ДОСТУП ДО МАТЕРІАЛІВ ДИСЦИПЛІНИ**

Матеріали з навчальної дисципліни узагальнено у освітній платформі Moodle за посиланням — <https://moodle.mnau.edu.ua/>  
Бібліотека Миколаївського національного аграрного університету за посиланням - <https://lib.mnau.edu.ua/>.

Навчальне видання

**Теоретичні основи електротехніки:**

конспект лекцій

Укладачі: **Циганов** Олександр Миколайович  
**Руденко** Андрій Юрійович

Формат 60x84 1/16. Ум. друк. арк. \_\_\_\_\_  
Тираж 20 прим. Зам. № \_\_\_\_\_

Надруковано у видавничому відділі  
Миколаївського національного аграрного університету  
54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.