Тематичний напрям № 1

Прикладна математика та математичне моделювання в науці, техніці та економіці

УДК 519.624.2:517.988

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДО ЗНАХОДЖЕННЯ ДОДАТНОГО АКСІАЛЬНО-СИМЕТРИЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ТРЕТЬОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ НАПІВЛІНІЙНОГО ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ З ОПЕРАТОРОМ ГЕЛЬМГОЛЬЦА І СИНГУЛЯРНОЮ СТЕПЕНЕВОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ

Владислав Пархоменко

Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків, Україна

Математичне моделювання різних фізико-механічних процесів, наприклад, процесів нелінійної теплопровідності [1], приводить до необхідності розв'язання крайових задач для напівлінійного еліптичного рівняння:

$$-\Delta u + \kappa^2 u = \mu u^{-q}, \ \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \gamma u\right|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2)$$

де $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^2$, $q > 0$, $\gamma > 0$.

Якщо область Ω – круг радіуса R, то можна поставити задачу знаходження аксіально-симетричного розв'язку задачі (1), (2). Перейдемо у (1), (2) до полярної системи координат за формулами

$$x_1 = \rho\cos\varphi, \ x_2 = \rho\sin\varphi, \ \rho \geq 0, \ 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Аксіально-симетричний розв'язок крайової задачі залежить тільки від відстані $\rho = |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ до центру круга, тому одержимо напівлінійне звичайне диференціальне рівняння вигляду

$$-\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{du}{d\rho}\right) + \kappa^2 u = \mu u^{-q}. \quad (3)$$

Крайова умова (2), задана на межі області Ω, тобто для $|\mathbf{x}| = R$, зводиться до вигляду $u'(R) + \gamma u(R) = 0$. Точка $\rho = 0$ є особливою точкою диференціального рівняння (3), отже, виникає необхідність поставити умову обмеженості розв'язку в цій точці: $|u(0)| < +\infty$.

Таким чином, задача (1), (2) зводиться до крайової задачі для звичайного диференціального рівняння:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{du}{d\rho}\right) + \kappa^2 u = \mu u^{-q}, \ 0 < \rho < R, \quad (4)$$

$$|u(0)| < +\infty, \ u'(R) + \gamma u(R) = 0. \quad (5)$$

Функція Гріна крайової задачі (4), (5) має вигляд

$$G(\rho,s)=\begin{cases} I_0(\kappa\rho)\left(K_0(\kappa s)-\dfrac{\gamma K_0(\kappa R)-\kappa K_1(\kappa R)}{\gamma I_0(\kappa R)+\kappa I_1(\kappa R)}I_0(\kappa s)\right), & 0\le\rho\le s,\\ I_0(\kappa s)\left(K_0(\kappa\rho)-\dfrac{\gamma K_0(\kappa R)-\kappa K_1(\kappa R)}{\gamma I_0(\kappa R)+\kappa I_1(\kappa R)}I_0(\kappa\rho)\right), & s<\rho\le R, \end{cases} \qquad (6)$$

де $I_\nu(z)$ – функція Інфельда порядку ν, $K_\nu(z)$ – функція Макдональда порядка ν.

Графік функції Гріна зображено на рисунку 1.

Використовуючи функцію Гріна (6), здійснюємо перехід від задачі (4), (5) до інтегрального рівняння Гаммерштейна:

$$u(\rho)=\mu\int_0^R Q(\rho,s)u^{-q}(s)ds \quad , \qquad (7)$$

де $Q(\rho,s)=sG(\rho,s)$.

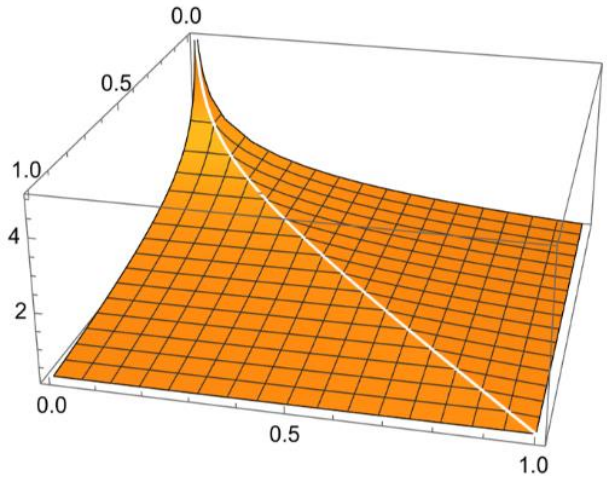


Рис. 1. Графік функції Гріна $G(\rho,s)$

З рівнянням (7) пов'яжемо нелінійний інтегральний оператор, що діє в банаховому просторі $C[0,R]$ неперервних на $[0,R]$ функцій, напівупорядкованому конусом K_+ невід'ємних функцій [2]. Цей оператор діє за правилом

$$T(u)(\rho)=\mu\int_0^R Q(\rho,s)u^{-q}(s)ds \quad . \qquad (8)$$

Оператор T вигляду (8) має властивості:

а) є додатним оператором;

б) є u_0-додатним оператором, де $u_0(\rho)=\int_0^R Q(\rho,s)ds$;

в) є антимонотонним (антитонним) оператором;

г) є псевдоувігнутим і навіть u_0-псевдоувігнутим оператором за умови $q\in(0,1)$, де $u_0(\rho)=\int_0^R Q(\rho,s)ds$.

Для оператора T виділимо умовами $T(w_0) \le v_0$, $T(v_0) \ge w_0$ сильно інваріантний конусний відрізок $< v_0, w_0 >$, де $v_0(\rho) = \alpha u_0(\rho)$, $w_0(\rho) = \beta u_0(\rho)$, $0 < \alpha < \beta$ і побудуємо ітераційний процес

$$v^{(n+1)}(\rho) = \mu \int_0^R Q(\rho, s)[w^{(n)}(s)]^{-q} ds, \quad n = 0,1,2,\ldots, \qquad (9)$$

$$w^{(n+1)}(\rho) = \mu \int_0^R Q(\rho, s)[v^{(n)}(s)]^{-q} ds, \quad n = 0,1,2,\ldots, \qquad (10)$$

$$v^{(0)}(\rho) = v_0(\rho), \quad w^{(0)}(\rho) = w_0(\rho). \qquad (11)$$

Послідовність $\{v^{(n)}(\rho)\}$ є неспадною за конусом K_+, а послідовність $\{w^{(n)}(\rho)\}$, у свою чергу, є незростаючою за конусом K_+. Конус K_+ є нормальним, а оператор T є цілком неперервним. Через це ітераційний процес (9)–(11) має двобічний характер збіжності у нормі простору $C[0, R]$ до єдиного додатного розв'язку u^* крайової задачі (4), (5), а отже, виконується наступний ланцюг нерівностей

$$v_0 = v^{(0)} \le v^{(1)} \le \ldots \le v^{(n)} \le \ldots \le u^* \le \ldots \le w^{(n)} \le \ldots \le w^{(1)} \le w^{(0)} = w_0.$$

За наближений розв'язок крайової задачі (4), (5) на n-ій ітерації обирається функція $u^{(n)}(\rho) = \frac{1}{2}(v^{(n)}(\rho) + w^{(n)}(\rho))$. Апостеріорна похибка наближення дається нерівністю $\left\| u^{(n)} - u^* \right\|_{C[0,R]} \le \frac{1}{2} \max(w^{(n)}(\rho) - v^{(n)}(\rho))$.

Чисельний експеримент проводився для $q = \frac{1}{2}$, $\mu = 1$, $\gamma = 5$. За 6 ітерацій досягнуто точність 10^{-4}, оцінка похибки складає $\varepsilon = 0,40 \cdot 10^{-4}$. На рисунку 2 зображено графіки послідовностей верхніх $w^{(k)}(\rho)$ і нижніх $v^{(k)}(\rho)$ наближень, а на рисунку 3 – графік наближеного розв'язку $u^{(6)}(\rho)$ крайової задачі (4), (5). Рисунок 4 показує поверхню наближеного розв'язу $u^{(6)}(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})$ крайової задачі (1), (2), а рисунок 5 – його лінії рівня.

Проведені дослідження продовжують роботи, які було розпочато в [3, 4], де також знаходили додатні аксіально-симетричні розв'язки рівняння з оператором Гельмгольца, але з першою крайовою умовою. У майбутньому планується розглянути узагальнений випадок гетеротонної нелінійності, а також поширити на простори більшої вимірності.

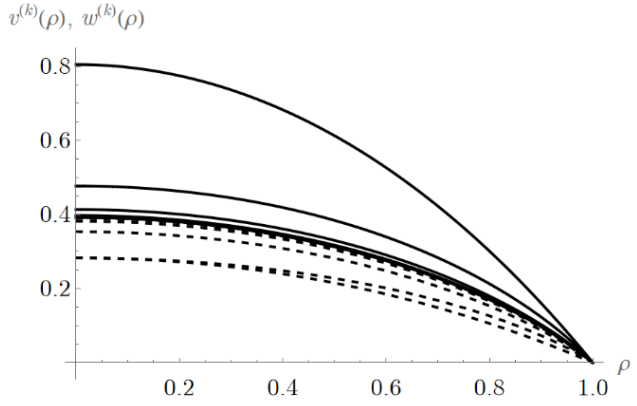


Рис. 2. Графіки верхніх і нижніх наближень $v^{(k)}(\rho)$, $w^{(k)}(\rho)$

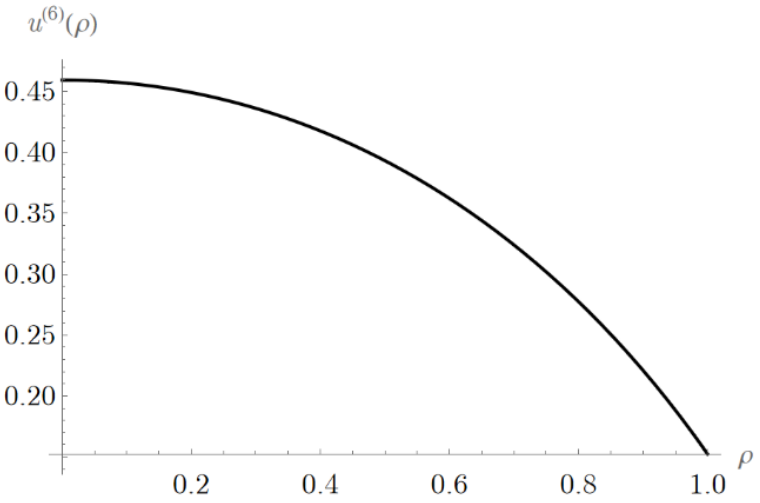


Рис. 3. Графік наближеного розв'язку $u^{(6)}(\rho)$

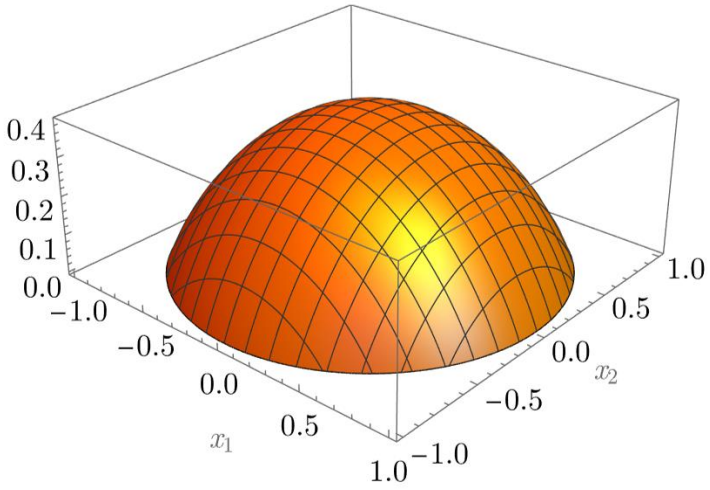


Рис. 4. Графік поверхні наближеного розв'язку $u^{(6)}(\sqrt{x_1^2+x_2^2})$

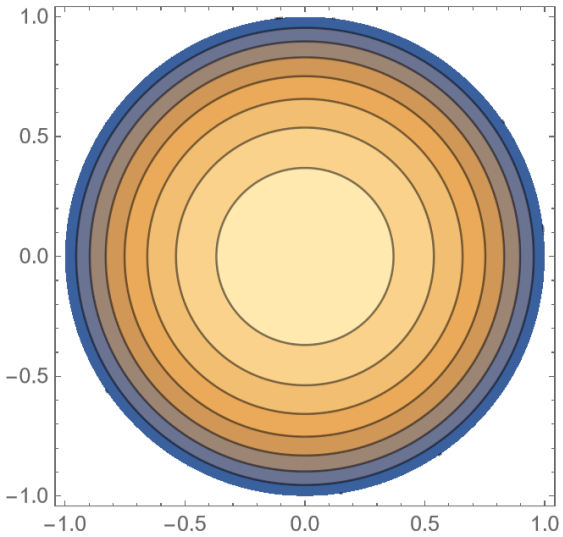


Рис. 5. Лінії рівня наближеного розв'язку $u^{(6)}(\sqrt{x_1^2+x_2^2})$

Список використаних джерел

1. Oliva F., Petitta F. Singular elliptic PDEs: an extensive overview. Partial Differential Equations and Applications. 2025. Vol. 6. Article 6. DOI: 10.1007/s42985-024-00308-9.

2. Опойцев В. И., Хуродзе Т. А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. Тбилиси : Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. 246 с.

3. Пархоменко В. Г., Сидоров М. В. Аналіз методом двобічних наближень додатних аксіально-симетричних розв'язків першої крайової задачі для рівняння Гельмгольца з монотонною степеневою нелінійністю. Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2025. № 28. С. 81–92. DOI: 10.32626/2308-5878.2025-28.81-92.

4. Пархоменко В. Г. Аналіз методом двобічних наближень додатних аксіально-симетричних розв'язків першої крайової задачі для рівняння Гельмгольца з сингулярною степеневою нелінійністю. Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2026. № 29. С. 100–112. DOI: 10.32626/2308-5878.2026-29.100-112.

УДК 624.014

РОЗРАХУНКОВА ОЦІНКА НАДІЙНОСТІ АРКОВИХ КАРКАСІВ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ СПОРУД

Сергій Богданов

Миколаївський національний аграрний університет. м. Миколаїв, Україна

Анотація: У статті розглянуто підходи до оцінювання міцності, стійкості та надійності елементів металевих аркових каркасів змінного перерізу. Запропоновано методичний підхід до розрахунку таких конструкцій під час їх оптимального проектування, за якого необхідний рівень надійності забезпечується в характерних перерізах, а матеріаломісткість каркаса прагне до мінімально можливого значення. Застосування полегшених аркових конструкцій із наперед заданим рівнем надійності дає змогу раціональніше використовувати метал, зменшувати масу та вартість каркаса. Це обґрунтовує доцільність подальшого використання конструкцій такого типу в будівлях та сільськогосподарських спорудах.

Актуальність дослідження. Одним із важливих напрямів сучасного розвитку будівельної галузі України є зменшення матеріальних і трудових витрат під час виготовлення та монтажу збірно-розбірних легких металевих конструкцій. Водночас зниження вартості не повинно супроводжуватися погіршенням експлуатаційних характеристик, насамперед довговічності, міцності та надійності. Для обґрунтованого призначення розрахункових параметрів конструкцій і навантажень доцільно використовувати положення теорії надійності та ймовірнісні методи оцінювання. Особливого значення набуває ймовірнісний підхід до розрахунку аркових каркасів змінного перерізу, за якого несучу здатність можна оцінювати через імовірність відмови конструкції.

Аналіз сучасних досліджень і публікацій. Результати натурних випробувань сталевого каркаса з гнучкою стінкою та поясами з холодногнутих профілів наведено в роботі «Натурні випробування сталевої рами прогином 30 м» [1]. У зазначеному дослідженні розглянуто підходи до визначення міцності та стійкості елементів сталевих каркасів.

У ДБН В.2.6-163:2010 «Конструкції будинків і споруд» [2] регламентовано розрахунок, зокрема, розрізних балок із гнучкою стінкою та плоскими листовими поясами. Теоретичні положення, покладені в основу відповідних методик, розглянуто у працях Б. М. Броуде, А. А. Евстратова, В. В. Бірюлева та інших дослідників. Ці підходи використано під час розроблення сталевого каркаса та попереднього оцінювання його несучої здатності. Разом із тим конструктивна специфіка досліджуваного каркаса зумовлює необхідність спиратися також на результати натурних випробувань рами прогоном 30 м, сформованої з універсальних елементів довжиною 3 м.

Випробування сталевого каркаса з гнучкою стінкою і поясами з холодногнутих профілів, які до цього часу проводились і є відомими, показали, що основні зусилля стиснення N і вигин M, сприймаються поясами елементів з пов'язаною з ними частиною стінки перетину. Робота гнучкої