2. SciPy. spearmanr. SciPy v1.14.1 Manual. URL: https://docs.scipy.org/doc/scipy-1.14.1/reference/generated/scipy.stats.spearmanr.html (дата звернення: 12.10.2026).

3. Schober P., Boer C., Schwarte L. A. Correlation Coefficients: Appropriate Use and Interpretation. Anesthesia & Analgesia. 2018. Vol. 126, no. 5. P. 1763-1768. DOI: https://doi.org/10.1213/ANE.0000000000002864.

УДК 519.115

ПРО ОДНУ ЧИСЛОВУ ПОСЛІДОВНІСТЬ, ПОВ'ЯЗАНУ З ПЕРЕСТАНОВКАМИ, ТА ЇЇ АНАЛІТИЧНУ ФОРМУЛУ

Микола Філіпчук, Ольга Філіпчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, Україна

Дослідження обмежених перестановок є класичним напрямом дискретної математики та теорії графів, що має важливе прикладне значення в сучасній криптографії при проєктуванні симетричних шифрів [1] і теорії кодування інформації [2]. Особливе місце в таких задачах посідає аналіз структурних заборон на сумісне розташування елементів. Одним із обмежень, що виникають при оцінці завадостійкості блочних кодів і нелінійних вузлів перемішування інформації, є виключення суміжних пар з простими числовими характеристиками.

Розглянемо числову послідовність $a(n)$, $n \geq 0$, члени якої визначаються наступним чином:

$a(n) =$ *загальна кількість* n*-перестановок з елементів* $1, 2, ..., n$*, у яких добуток будь-яких двох сусідніх елементів не є простим числом.*

Перш за все, нагадаємо, що число 1 не є простим.

При $n = 0$ існує одна порожня перестановка, яка тривіально задовольняє потрібну умову, тому $a(0) = 1$.

При $n = 1$ єдина існуюча перестановка (1) теж тривіально задовольняє потрібну умову, тому $a(1) = 1$.

При $n = 2$ обидві існуючі перестановки $(1,2)$ і $(2,1)$ не задовольняють потрібну умову (оскільки $1 \cdot 2 = 2 \cdot 1 = 2$, а 2 є простим числом), тому $a(2) = 0$.

При $n = 3$ жодна із шести існуючих перестановок $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$, $(3,2,1)$, теж не задовольняє потрібну умову, тому $a(3) = 0$.

Натомість уже при $n = 4$ із 24-х всеможливих перестановок лише перестановки $(1,4,2,3)$, $(1,4,3,2)$, $(2,3,4,1)$, $(3,2,4,1)$ задовольняють потрібну умову, тому $a(4) = 4$.

Нескладним скриптом на мовах програмування Python або C++ можна доволі швидко знайти перших 12 членів розглядуваної послідовності:

$a(0) = 1$,
$a(1) = 1$,
$a(2) = 0$,
$a(3) = 0$,
$a(4) = 4$,
$a(5) = 12$,
$a(6) = 144$,

$a(7) = 720$,
$a(8) = 8640$,
$a(9) = 100800$,
$a(10) = 1209600$,
$a(11) = 10886400$.

Зі зростанням числа n стрімко зростатиме кількість всеможливих n -перестановок (комбінаторний вибух), тому навіть їх оптимізований комп'ютерний перебір досить швидко (уже при $n \geq 15$) стає практично неможливим [3]. Використання динамічного програмування за масками дещо розширює межу обчислень на сучасному комп'ютері, але тільки до $n \leq 25$.

Разом з цим, шляхом комбінаторного аналізу шуканих перестановок, авторам вдалося встановити точну аналітичну формулу для обчислення $a(n)$ при будь-якому $n \geq 3$.

Теорема. *Для будь-якого* $n \geq 3$
$a(n) = (n - P) \cdot (n - P - 1) \cdot (n - 2)!$,

де P *– кількість простих чисел, що не перевищують* n.

Наприклад, при $n = 30$ маємо:
$P = 10$ (це прості числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29),
а тому
$a(30) = (30 - 10) \cdot (30 - 10 - 1) \cdot (30 - 2)! = 20 \cdot 19 \cdot 28! =$ 115857570952451266990571520000000.

Розрахунок перших 1000 членів послідовності [4] згідно зі знайденою формулою за допомогою Python-скрипта у хмарному середовищі Kaggle [5] було виконано за півсекунди. При цьому останнє число $a(1000)$ містить 2568 цифр.

Перевірка отриманої послідовності в базі даних Інтерактивної Енциклопедії цілочислових послідовностей OEIS [6] підтвердила її новизну та оригінальність.

Зауважимо, що, з погляду теорії графів, задача обчислення числа $a(n)$ еквівалентна знаходженню кількості гамільтонових шляхів у графі, що є повним підграфом K_{n-1} для вершин $\{2, 3, \ldots, n\}$, а вершина 1 має степінь $\deg(1) = n - P - 1$.

Таким чином, авторами вперше розглянуто та досліджено задачу про перестановки з непростими добутками сусідніх елементів. Отримана точна аналітична формула дозволяє уникати складних експоненціальних обчислень (комбінаторного вибуху) і знаходити значення членів послідовності для будь-яких великих n. Знайдена послідовність готується до внесення в реєстр OEIS.

Список використаних джерел

1. Menezes A. J., van Oorschot P. C., Vanstone S. A. Handbook of Applied Cryptography. CRC Press, 1996. 780 p.
2. MacWilliams F. J., Sloane N. J. A. The Theory of Error-Correcting Codes. Elsevier, 1977. 762 p.
3. Knuth D. E. The Art of Computer Programming, Volume 4A: Combinatorial Algorithms, Part 1. Addison-Wesley Professional, 2011. 883 p.
4. Table of n, a(n) for n = 0..1000. URL: https://lnk.ua/CmxZVMz7T
5. Kaggle: Your Home for Data Science. URL: https://www.kaggle.com
6. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS). URL: https://oeis.org