станом здобувача освіти базується на структурному розвантаженні центрального виконавчого механізму робочої пам’яті. Коли динаміка граничного переходу екстерналізується на екран комп'ютера, стороннє когнітивне навантаження мінімізується, що автоматично усуває дефіцит ментального ресурсу. За таких умов ризик виникнення деструктивної математичної тривожності різко падає, оскільки зникає головне джерело когнітивного напруження — потреба утримувати в уяві громіздкі абстрактні перетворення без зовнішньої наочної опори.

Важливим теоретичним аспектом запропонованого підходу є трансформація психологічної атмосфери навчальної діяльності. Традиційний математичний формалізм часто провокує відчуття загрози через жорстку фіксацію помилки, тоді як інтерактивне середовище динамічної геометрії переводить навчальний процес у площину безпечного експериментування. Можливість вільно маніпулювати числовими значеннями параметрів та миттєво спостерігати геометричний відгук системи формує у студента суб'єктивне відчуття контролю над ситуацією. Це блокує розвиток синдрому вивченої безпорадності, нейтралізує психосоматичні прояви тривоги та сприяє переходу від захисних поведінкових реакцій і прокрастинації до активної дослідницької пізнавальної діяльності.

У підсумку проведене теоретичне дослідження свідчить, що інтеграція динамічного моделювання у викладанні вищої математики є ефективним психолого-педагогічним інструментом профілактики математичної тривожності у студентів молодших курсів. Гармонійне поєднання візуального та вербально-символьного каналів сприйняття дозволяє подолати абстрактний бар'єр на початкових етапах вивчення математичного аналізу, зберігає ресурси оперативної пам'яті для релевантного осмислення суті понять та створює сприятливий когнітивний базис для успішної адаптації першокурсників до вимог вищої школи.

Список використаних джерел

1. A meta-analysis of the relation between math anxiety and math achievement / C. Barroso et al. Psychological Bulletin. 2024. Vol. 150, no. 4. P. 415–442.

2. Пінчук О. П., Соколюк О. М., Бобровицька С. В. Використання програмно-методичного комплексу комп’ютерної математики GeoGebra у навчальному процесі. Інформаційні технології і засоби навчання. 2023. Т. 94, № 2. С. 48–63.

3. Морзе Н. В., Буйницька О. П., Варченко-Троценко Л. О. Цифрова трансформація університету: інноваційні технології та психолого-педагогічні виклики. Освітній простір України. 2024. Вип. 28, № 1. С. 45–59.

4. Гула Л. Використання ІТ в психології. Цифрова гуманістика: Інформаційні технології та інформаційне моделювання на сучасному етапі розвитку суспільства : матеріали ІІ Всеукраїнської науково-практичної конференції, 22-23 травня 2025 року, м. Кропивницький. С. 24-26.

УДК 539.3:534.1

ЗГИННІ КОЛИВАННЯ КРУГОВОГО ТОНКОГО ПРУЖНОГО ВКЛЮЧЕННЯ В НЕОБМЕЖЕНОМУ ПРУЖНОМУ СЕРЕДОВИЩІ: ІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ТА КОЕФІЦІЄНТ ІНТЕНСИВНОСТІ НАПРУЖЕНЬ

Лариса Вахоніна

Миколаївський національний аграрний університет, м. Миколаїв, Україна

Анотація: У роботі розглянуто задачу гармонічних згинних коливань кругового тонкого пружного включення в необмеженому пружному середовищі. Побудовано математичну модель, яку зведено до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. Запропоновано чисельний підхід на основі квадратур Гаусса для визначення коефіцієнта інтенсивності напружень та аналізу впливу пружних характеристик включення на концентрацію напружень.

Динамічний розрахунок пружних тіл, що містять сторонні прошарки або пластинчасті включення, залишається однією з актуальних задач прикладної математики та математичного

моделювання в механіці деформівного твердого тіла. У переважній більшості інженерних методик такі включення умовно вважають абсолютно жорсткими, оскільки це істотно спрощує постановку крайової задачі. Проте подібне припущення не дає змоги врахувати вплив пружних характеристик самого включення на розподіл і концентрацію напружень у його околі, а цей вплив, як показують дослідження динаміки тіл зі смуговими та дископодібними включеннями, за певних співвідношень жорсткостей матриці й включення може бути суттєвим.

Метою роботи є побудова математичної моделі гармонічних згинних коливань кругового тонкого пружного включення, вбудованого у необмежене пружне середовище, та зведення відповідної крайової задачі до розв'язної системи інтегральних співвідношень, придатної для чисельної реалізації.

Постановка задачі. Нехай у необмеженому пружному середовищі (матриці) міститься тонке пружне включення у формі кругової пластини товщиною h і радіусом a. У циліндричній системі координат, вісь якої проходить через центр включення, останнє займає область серединної площини $z=0$. На включення діє нормальне гармонічне навантаження інтенсивності p_r, що змінюється за законом e^{-iwt}. Оскільки включення є тонким, умови його взаємодії із середовищем зводяться до умов повного механічного контакту, записаних відносно серединної площини: стрибок нормальних напружень при переході через включення пов'язується з невідомою функцією χ_r, а нормальні переміщення обох берегів включення прирівнюються прогину його серединної поверхні W_r. Сам прогин задовольняє рівняння згинних коливань тонкої кругової пластини з циліндричною жорсткістю D, що залежить від модуля пружності, товщини та коефіцієнта Пуассона матеріалу включення, за граничних умов вільного краю на контурі $r=a$ та вимоги обмеженості розв'язку в центрі пластини [1].

$$D\nabla^4 w(r,t)+\rho h\frac{\partial^2 w(r,t)}{\partial t^2}=q(r,t), \qquad (1)$$

де $w(r,t)$ — прогин пластини, $q(r,t)$ — інтенсивність навантаження, ρ — густина матеріалу включення.

Циліндрична жорсткість пластини визначається співвідношенням:

$$D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \qquad (2)$$

де E — модуль пружності, h — товщина пластини, ν — коефіцієнт Пуассона матеріалу включення.

Метод розв'язання. Переміщення в необмеженому середовищі, спричинені хвилями, джерелом яких є коливне включення, подаються у вигляді розривного розв'язку рівнянь Ламе зі стрибком, що визначається функцією χ_r. Це дає змогу виразити нормальне переміщення матриці через інтеграл від χ_r з відповідним ядром, побудованим на основі перетворень Ганкеля. Прогин серединної поверхні включення, своєю чергою, виражається через той самий стрибок напружень за допомогою функції Гріна крайової задачі про згинні коливання кругової пластини вільного краю [2]. Підстановка обох зображень у контактну умову рівності переміщень призводить до одного інтегрального рівняння відносно χ_r.

Отримане рівняння після заміни змінних, регуляризації особливості ядра та парного продовження невідомої функції набуває структури рівняння Фредгольма другого роду відносно допоміжної функції g_y, пов'язаної зі стрибком напружень інтегральним перетворенням. Аналіз ядра показує, що воно є неперервною функцією обох аргументів, що обґрунтовує застосування до рівняння прямих чисельних методів. Права частина рівняння визначається виключно законом розподілу зовнішнього навантаження на включенні [3].

Для чисельного розв'язання інтегральне рівняння Фредгольма зводиться до системи лінійних алгебричних рівнянь заміною інтеграла квадратурною формулою Гаусса з вузлами у коренях многочлена Лежандра. Розв'язок цієї системи дає значення шуканої функції у вузлах інтерполяції,

після чого сама функція відновлюється інтерполяційним многочленом Лагранжа. Це дозволяє обчислити коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) у матриці поблизу краю включення як границю добутку кореня з відстані до контуру на функцію стрибка напружень; у термінах розв'язку системи КІН виражається лінійною комбінацією її невідомих із вагами, що залежать від вузлів квадратури Гаусса.

Результати чисельного аналізу. Чисельні розрахунки виконано для випадку рівномірно розподіленого навантаження на включенні за однакової густини матриці й включення та однакових коефіцієнтів Пуассона ($\nu_0 = \nu_1 = 0,25$). Використання до 30 вузлів квадратурної формули забезпечило відносну похибку визначення КІН, меншу за 0,1 % у всьому дослідженому діапазоні хвильового числа. Встановлено, що зі зменшенням відношення модулів пружності включення й матриці e_0 залежність модуля КІН від хвильового числа набуває дедалі складнішого характеру з декількома локальними мінімумами й максимумами, а загальний рівень концентрації напружень поблизу включення знижується [4]. Водночас навіть для порівняно жорстких включень на окремих частотах значення КІН може перевищувати відповідне значення для абсолютно жорсткого включення, що суперечить інтуїтивному очікуванню монотонного зближення розв'язків.

Розрахунки для конкретних пар матеріалів (сталеве включення в бетонній матриці та сталеве включення у свинцевій матриці) підтвердили, що врахування пружності включення суттєво змінює як абсолютні значення КІН, так і характер його частотної залежності порівняно з моделлю абсолютно жорсткого включення. Збіг результатів пружної та жорсткої моделей спостерігається лише за штучно малого відношення модулів пружності порядку 10^{-5} , яке практично не реалізується для конструкційних матеріалів, що застосовуються в деталях машин, будівельних конструкціях і композитах [5].

Висновки. Запропонована математична модель, що ґрунтується на методі розривних розв'язків рівнянь Ламе, дає змогу звести задачу про гармонічні згинні коливання кругового тонкого пружного включення в необмеженому середовищі до однозначно розв'язного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду та ефективно реалізувати її чисельний аналіз методом квадратур Гаусса. Отримані результати свідчать, що для переважної більшості реальних поєднань матеріалів матриці та включення заміна пружного включення абсолютно жорстким є некоректним спрощенням, здатним призвести до суттєвих похибок під час оцінювання концентрації напружень і, відповідно, розрахунків міцності елементів конструкцій із тонкими включеннями.

Список використаних джерел

1. Sadovoy O., Vakhonina L., Koshkin D., Martynenko V. Comparison of Active Power Losses of Single-Phase Electromagnetic Static Devices by Radial Electromagnetic System. In: 2022 IEEE 4th International Conference on Modern Electrical and Energy Systems (MEES). 2022. DOI: 10.1109/MEES58014.2022.10005760.

2. Martynenko V., Vakhonina L., Kostin A. Integrated Assessment of Weldability of Steel with Increased Strength. Ukrainian Black Sea Region Agrarian Science. 2022. Vol. 26(2). P. 9–15.

3. Wang Y., Zhang X. Dynamic stress analysis of elliptical inclusions in an inhomogeneous medium with modulus and density variations under the action of shear horizontal (SH) waves. Mechanics of Materials. 2023. Vol. 181. Article 104659. DOI: 10.1016/j.mechmat.2023.104659.

4. Вахоніна Л. В. Изгибные колебания кругового тонкого упругого включения в неограниченном теле. Теорія і практика процесів подрібнення, розділення, змішування і ущільнення. Одеса : ОНМА, 2006. Вип. 12. С. 24–31.

5. Kotsinis G., Chatzaki Z., Gómez E.V., Sotiriadis G. Vibration-Induced Variations in Dynamic Mode I Interlaminar Fracture Toughness. Composites Part A: Applied Science and Manufacturing. 2025. Vol. 198. Article 109151. DOI: 10.1016/j.compositesa.2025.109151.