5. Montgomery D. C. Design and Analysis of Experiments. 9th ed. Hoboken: Wiley, 2017.
6. Box G. E. P., Behnken D. W. Some new three level designs for the study of quantitative variables. Technometrics. 1960. Vol. 2, No. 4. P. 455–475.
7. Derringer G., Suich R. Simultaneous optimization of several response variables. Journal of Quality Technology. 1980. Vol. 12, No. 4. P. 214–219.

УДК 517.927:519.6

МЕТОД ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ У МОДЕЛЮВАННІ ПРОГИНУ КОНСОЛЬНОЇ МІКРОБАЛКИ ЗМІННОЇ ШИРИНИ

Антон Савченко
Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків, Україна

Консольні балки є базовим елементом багатьох мікроелектромеханічних систем (МЕМС) – електростатичних актюаторів, резонансних сенсорів, зондів атомно-силових мікроскопів. Поряд із балками сталого прямокутного перерізу широко застосовують балки змінної ширини (звужені), оскільки така геометрія дозволяє керувати розподілом напружень уздовж балки, знижувати робочу напругу та підвищувати ефективність перетворення енергії [1].

Звужені мікробалки застосовують у низці пристроїв, одним з яких є п’єзоелектричні збирачі енергії: трапецієподібна (звужена) форма балки зменшує згинальну жорсткість, забезпечує більш рівномірний розподіл деформації та більшу щільність енергії на одиницю площі порівняно з прямокутною балкою, що підвищує вихідну потужність [1, 2]. Звужені балки використовують також в електростатичних мікроперемикачах і актюаторах, де зміна ширини є додатковим конструктивним параметром для керування напругою втягування: за умови меншої площі балки звуження дозволяє досягти низької робочої напруги [3]. Крім того, звужена геометрія характерна для зондів атомно-силових мікроскопів та резонансних датчиків маси, де вона впливає на чутливість і розподіл власних частот.

Математичне моделювання прогину балок з будь-яким із цих профілів приводить до крайової задачі для напівлінійного диференціального рівняння четвертого порядку зі змінними коефіцієнтами, що ускладнює її аналітичне й чисельне дослідження. Метою роботи є постановка крайової задачі про статичний прогин консольної балки МЕМС лінійно змінної ширини та обґрунтування застосовності до неї методу двобічних наближень.

Розглянемо консольну мікробалку довжиною L та товщиною h. Балка є рухомим електродом електростатичного актюатора, підвішеним над нерухомим електродом на відстані d. При прикладенні напруги V балка прогинається під дією електростатичної сили. Ширина балки є змінною (звуженою) і описується профілем $b(x)$ (рис. 1).

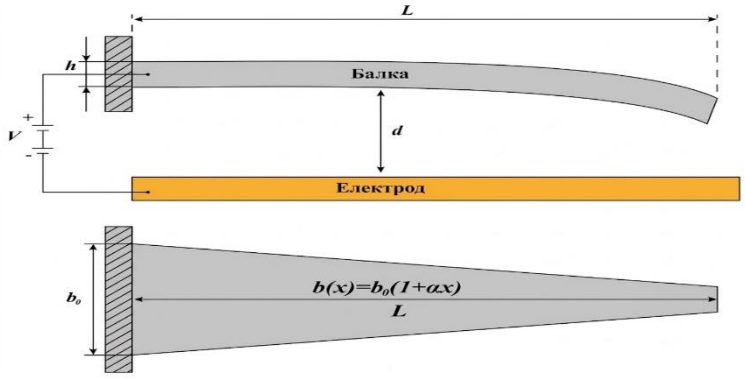


Рисунок 1 - Модель балки МЕМС зі змінною шириною

У літературі звужений профіль задають кількома способами [2, 3]. Найчастіше розглядають степеневу залежність

$$b(x) = b_0(1+\alpha x)^n,$$

де b_0 – ширина балки біля жорсткого закріплення (початкова ширина), α – параметр звуження, а показник n визначає характер зміни ширини. Наприклад, $n=1$ відповідає лінійному звуженню, $n=4$ – квартичному [3]. Застосовують також ступінчасту (трапецієподібну) апроксимацію змінної ширини [2].

Розглянемо випадок лінійно-звуженого профілю $b(x) = b_0(1+\alpha x)$. Тоді момент інерції перерізу та жорсткість на прогин лінійно залежать від координати і мають вигляд

$$EI(x) = EI_0(1+\alpha x),$$

де E – модуль Юнга матеріалу балки, а I_0 – початковий момент інерції перерізу.

Прогин описується рівнянням Ейлера-Бернуллі для балки змінної жорсткості, права частина якого (електростатична сила) також пропорційна ширині $b(x)$. Після переходу до безрозмірних величин приходимо до крайової задачі

$$\frac{d^2}{dx^2}\left((1+cx)\frac{d^2u}{dx^2}\right) = \frac{\lambda(1+cx)}{(1-u(x))^2}, \quad x\in(0,1), \quad (1)$$

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u''(1) = 0, \quad \left[(1+cx)u''\right]'(1) = 0, \quad (2)$$

де $u(x)$ – безрозмірний прогин балки, $c=\alpha L$ – безрозмірний параметр звуження ($c<0$ – звужена балка, $c>0$ – розширена, $c=0$ – рівномірна), а $\lambda = \dfrac{\varepsilon_0 b_0 V^2 L^4}{2EI_0 d^3}$ – коефіцієнт, пропорційний квадрату прикладеної напруги, де ε_0 – діелектрична стала. Крайові умови (2) відповідають жорсткому закріпленню лівого кінця та вільному правому кінцю, причому у виразах для згинального моменту та поперечної сили на вільному кінці враховано змінну жорсткість.

Принциповою особливістю задачі (1), (2) є змінний коефіцієнт $(1+cx)$ в операторі четвертого порядку, тоді як у класичних моделях МЕМС-балок цей коефіцієнт сталий [4, 5].

Теоретичним підґрунтям методу двобічних наближень є теорія нелінійних операторів у напівупорядкованих банахових просторах [6, 7]. Зведемо крайову задачу (1), (2) до еквівалентного інтегрального рівняння Гаммерштейна

$$u(x) = \int_0^1 G(x,s)\, f(s,u(s))\, ds, \quad (3)$$

де $f(s,u) = \dfrac{\lambda(1+cs)}{(1-u)^2}$, а $G(x,s)$ – функція Гріна оператора $\dfrac{d^2}{dx^2}\left((1+cx)\dfrac{d^2u}{dx^2}\right)$ з крайовими умовами (2).

Функція Гріна має вигляд [8]

$$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{1}{c^3}\left[\ell_x + cx(\ell_x - 1) + cs(\ell_x + cx(\ell_x - 1)) - \dfrac{c^2x^2}{2}\right], & 0 \le x \le s, \\ \dfrac{1}{c^3}\left[\ell_s + cs(\ell_s - 1) + cx(\ell_s + cx(\ell_s - 1)) - \dfrac{c^2s^2}{2}\right], & s \le x \le 1, \end{cases} \quad (4)$$

де $\ell_x = \ln(1+cx)$. Функція Гріна (4) є невід'ємною, а при $c \to 0$ переходить у відому функцію Гріна консольної балки сталого перерізу [4]. У [8] цю функцію застосовано лише до лінійних задач статичного згину балок під дією заданого зовнішнього навантаження, а нелінійні електростатичні задачі МЕМС цим підходом не розглядалися.

Рівняння (3) розглядатимемо у банаховому просторі $C[0,1]$ з нормою $\|u\| = \max\limits_{x\in[0,1]} |u(x)|$, у якому виділимо конус невід'ємних функцій $K_+ = \{u \in C[0,1] : u(x) \geq 0\}$.

Пов'яжемо з рівнянням (3) нелінійний інтегральний оператор T

$$(Tu)(x) = \int_0^1 G(x,s)\, f(s,u(s))ds$$

Функція $f(s,u)$ визначена при $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq u < 1$, тому оператор T розглядатимемо на множині

$$D = \{u \in K_+ : \|u\| < 1\}.$$

Оскільки $G(x,s) \geq 0$, $1+cs > 0$ на $[0,1]$ при $c > -1$, а функція f неперервна, додатна й монотонно зростає за u при $0 \leq x, s \leq 1$, то оператор T відображає D у конус K_+ (є додатним) і є ізотонним на D: з $0 \leq u \leq v$, $u, v \in D$, випливає $Tu \leq Tv$. Крім того, на кожному конусному відрізку $<0, \rho>$, $0 < \rho < 1$, функція f обмежена й рівномірно неперервна, тому T на $<0, \rho>$ є цілком неперервним оператором.

Для оператора T побудуємо інваріантний конусний відрізок $<0, \beta>$. Оскільки $f(s,0) = \lambda(1+cs) > 0$, то умова інваріантності $T(<0,\beta>) \subset <0,\beta>$ зводиться до нерівності

$$\lambda M (1-\beta)^{-2} \leq \beta,$$

де

$$M = \max_{x\in[0,1]} \int_0^1 G(x,s)(1+cs)ds.$$

Звідси конусний відрізок існує за умови

$$\lambda \leq \frac{4}{27M}$$

причому за β обираємо найменший додатний корінь рівняння $\lambda M = \beta(1-\beta)^2$.

Початковими наближеннями візьмемо кінці конусного відрізка:

$$v^{(0)}(x) = 0, \quad w^{(0)}(x) = \beta,$$

і побудуємо дві послідовності

$$v^{(k+1)} = Tv^{(k)}, \quad w^{(k+1)} = Tw^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Оскільки $Tv^{(0)} \geq v^{(0)}$ і $Tw^{(0)} \leq w^{(0)}$, а оператор T ізотонний, то маємо такий ланцюг нерівностей

$$0 = v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \ldots \leq v^{(k)} \leq \ldots \leq w^{(k)} \leq \ldots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = \beta,$$

причому будь-який розв'язок u^* рівняння (3) з відрізка $<0,\beta>$ задовольняє $v^{(k)} \le u^* \le w^{(k)}$ при всіх k. Отже, послідовності $\{v^{(k)}\}$ і $\{w^{(k)}\}$ дають двобічні наближення до розв'язку відповідно знизу і зверху. Як наближений розв'язок на k-му кроці беремо

$$u^{(k)} = \frac{1}{2}(v^{(k)} + w^{(k)}).$$

Функція f задовольняє нерівність

$$|f(s,u_1) - f(s,u_2)| \le \frac{2\lambda(1+cs)}{(1-\beta)^3}|u_1 - u_2|,$$

для всіх $0 \le s \le 1$, $0 \le u_1, u_2 \le \beta$.

Тоді для будь-яких $v, w \in <0,\beta>$

$$\|Tw - Tv\| \le \frac{2\lambda(1+cs)}{(1-\beta)^3} \max_{x\in[0,1]} \int_0^1 G(x,s)\,|w(s) - v(s)|\,ds \le \frac{2\lambda(1+cs)}{(1-\beta)^3} M \|w - v\|,$$

Звідки

$$\left\|w^{(k+1)} - v^{(k+1)}\right\| \le q\left\|w^{(k)} - v^{(k)}\right\|,$$

де $q = \frac{2\lambda M}{(1-\beta)^3}$.

Отже, за умови $q<1$ ітераційний процес методу двобічних наближень збігається на $<0,\beta>$ до єдиного додатного розв'язку задачі, причому на кожній ітерації справджується гарантована оцінка похибки

$$\left\|u^* - u^{(k)}\right\| \le \frac{1}{2}\left\|w^{(k)} - v^{(k)}\right\| \le \frac{1}{2}q^k\beta.$$

Таким чином, попри наявність змінного коефіцієнта в диференціальному рівнянні крайової задачі, що моделює прогин консольної балки МЕМС змінної ширини, виконуються всі умови застосовності методу двобічних наближень. Перспективою подальших досліджень є проведення обчислювального експерименту та порівняння прогину балок різної конфігурації (звуженої та розширеної).

Список використаних джерел

1. Nisanth A., Suja K. J., Seena V. A novel design strategy for cantilever based MEMS piezoelectric vibration energy harvesters: FEM parametric analysis and modeling. e-Prime – Advances in Electrical Engineering, Electronics and Energy. 2024. Vol. 9. Art. 100724. DOI: 10.1016/j.prime.2024.100724.

2. Ashok A., Gangele A., Pal P., Pandey A. K. An analysis of stepped trapezoidal-shaped microcantilever beams for MEMS-based devices. Journal of Micromechanics and Microengineering. 2018. Vol. 28, No. 7. Art. 075009. DOI: 10.1088/1361-6439/aab8ac.

3. Singh S. S., Pal P., Pandey A. K. Pull-in analysis of non-uniform microcantilever beams under large deflection. Journal of Applied Physics. 2015. Vol. 118. Art. 204303. DOI: 10.1063/1.4936321.

4. Савченко А. В., Гвоздєв М. І. Застосування методу двобічних наближень до аналізу статичного прогину пружної балки з різними типами закріплення кінців в моделі мікроелектромеханічної системи. Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2025. Вип. 28. С. 93–106. DOI: 10.32626/2308-5878.2025-28.93-106.

5. Савченко А. В., Сидоров М. В. Моделювання прогину консольної балки мікроелектромеханічної системи з діелектричним шаром методом двобічних наближень. Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Динаміка та міцність машин. 2026. № 1. С. 71–78. DOI: 10.20998/2078-9130.2026.1.359588.

6. Krasnosel'skii M. A. Positive solutions of operator equations. Groningen : P. Noordhoff, 1964. 381 p.

7. Опойцев В. И., Хуродзе Т. А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. Тбилиси: Издательство Тбилис. ун-та, 1984. 246 с.

8. Molina-Villegas J. C., Ballesteros Ortega J. E., Martínez Martínez G. Closed-form solution for non-uniform Euler–Bernoulli beams and frames. Engineering Structures. 2023. Vol. 292. Art. 116381. DOI: 10.1016/j.engstruct.2023.116381.

УДК 631.559:633.111.1

ВПЛИВ РІЧНОЇ СУМИ ОПАДІВ НА УРОЖАЙНІСТЬ ОЗИМОЇ ПШЕНИЦІ В МИКОЛАЇВСЬКІЙ ОБЛАСТІ: ТРЕНДОВО-РЕГРЕСІЙНИЙ АНАЛІЗ ЗА 2014–2023 рр.

Андрій Абдулін, Володимир Крайній

Миколаївський національний аграрний університет, м. Миколаїв, Україна

Миколаївська область розташована в зоні недостатнього зволоження, а озима пшениця займає тут близько 476 тис. га посівів [2]. Урожайність цієї культури помітно коливається за роками, а її погодний коефіцієнт варіації становить 0,29, що відповідає помірно стійким врожаям [2]. Тому для планування виробництва важливо кількісно оцінити, яку частку цих коливань пояснюють опади, і чи покращує їх урахування прогноз порівняно з простим трендом.

Мета дослідження – оцінити зв’язок між річною сумою опадів і урожайністю озимої пшениці Миколаївської області за 2014–2023 рр. та перевірити, чи підвищує врахування опадів точність прогнозу відносно чисто трендової моделі.

Використано ряди з [1], складені за даними Головного управління статистики в Миколаївській області: середня врожайність озимої пшениці на всіх землях Y (ц/га, у масі після доробки) та середньорічна кількість опадів P (мм) за 2014–2023 рр. (табл. 1). Ряд для політих земель не застосовано через відсутнє значення за 2020 р. Згідно з підходом, який розглядає ряд урожайності як суму тренду та випадкової погодної складової [2, 3], побудовано дві моделі: лінійний тренд (1) та регресію на час і опади (2):

$$Y_t = a + b \cdot t + \varepsilon_t \qquad (1)$$

$$Y_t = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot P_t + \varepsilon_t \qquad (2)$$

де t – порядковий номер року (2014 р. – 1); ε_t – випадкова складова; a, b, a_0, a_1, a_2 – параметри, оцінені методом найменших квадратів. Якість моделей оцінювали за коефіцієнтом детермінації R^2, скоригованим R^2 та середньоквадратичною помилкою (3) перехресної перевірки з виключенням по одному року (LOO), де $\hat{Y}_{-i}$ – прогноз для року і за моделлю, побудованою без нього, $n = 10$:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_{-i})^2} \qquad (3)$$

Розрахунки виконано в Python (NumPy, SciPy). Для контролю правильності розрахунків перевірено збіг із [1]: проста регресія Y на P має вигляд Y = 27,00 + 0,0291·P за R^2 = 0,338, що збігається з наведеним у [1].

За 2014–2023 рр. середня врожайність становила 35,9 ц/га (σ = 4,7 ц/га; коефіцієнт варіації 13,1 %), середня річна сума опадів – 304,3 мм (σ = 94,1 мм). Лінійний тренд (1) має вигляд $\hat{Y}$ = 33,84 + 0,369·t: приріст 0,37 ц/га на рік статистично незначущий (R^2 = 0,056; p = 0,51). Коефіцієнт кореляції Пірсона між P і Y дорівнює 0,58 (p = 0,078), рангова кореляція Спірмена – 0,44 (p = 0,20); кореляція відхилень від тренду з опадами – 0,45 (p = 0,19) (рис. 1). Модель (2) отримала вигляд $\hat{Y}$ = 26,92 − 0,263·t + 0,0342·P (R^2 = 0,357; скоригований R^2 = 0,173; F-критерій: p